空間図形入門

2015 年 3 月 2 日

目次

このテキストの使いかた

日頃の学習では・・・

- テキストをていねいに読んでいきましょう。

  このテキストは、きちんと言葉を使っててていねいな説明が書かれています。記号や数式が並んでいるだけの、意味不明のものではありません。ひとことひとこと言葉を大切にして、解き方ではなく考え方を学び取るようにしてください。そして、書いてあることに対して、「あーそういうことか」とか「えーよくわからない」とか「これ、ちがうんじゃないの？」といった反応をしてください。数学は自分の頭を使って考えていく科目ですから立ち止まって考えることがとても大切なのです。

- テスト直前に勉強を始めるのではなく、テストで力を発揮できるように前もって準備をしておきましょう。

  数学のように、自分の頭を使って「あーでもない、こーでもない」と考えながら学んでいく科目では、学習を始めてからしばらくの間はなかなか成果が出ない事があります。しかし少し我慢をして学習を続けていくうちに、あるとき、驚くような力が付いていることに気づくことがあります。 つまり、実力は初めのうちはゆっくり伸びていき、あとからぐんと伸びることが多いのです。

- 例題を学ぶときには、解答を読む前に、できればまず自分の力で解くことができるかどうか試してみましょう。

  数学の学習では、誰かから教わっただけのことよりも自分で悩んで考えたことの

ほうがよく身につきます。紙と筆記用具を使って実際に答案を書いてみてください。それができたらテキストの解答をていねいに読んで自分の考えと比べてみましょう。

- 例題の学習ができたら、この問題がテストに出ても自分の力だけで解けるかどうか想像してみましょう。そして心配なものには印を付けておきましょう。

  日頃から自分の実力をつかんでおくとテスト対策がしやすくなります。

- 問はもちろん、まず自分の力で解くことができるかどうか試してみてください。

  紙と筆記用具を使って実際に答案を書いてみてください。それができたらテキストの解答をていねいに読んで自分の考えと比べてみましょう。そうすれば理解が深まるでしょう。

- 問を解き終わって答え合わせをしたら、間違ったものには印を付けておきましょう。

  日頃から自分の実力をつかんでおくとテスト対策がしやすくなります。

- ひとつのひとつの節を読み終わったら、どんなことをその節で学んだのか思い出して「あらすじ」を言えるようにしておきましょう。紙と筆記用具を用意して、誰かにあらすじを伝えるにはどんなふうに説明すればよいか考え、文章を書いてみるととても効果があります。

  中学生に「今日は学校の数学の授業でどんなことを勉強したの？」と聞いてみると、「えーと、何だっけ、そうだ、傾きとか習った。」と断片的なことを言えたりすることはあるのですが、改めて、「へぇ、ところで傾きってなんなの？」と聞いてみると「えー、何だっけ、そうだ、なんか計算したり直線を描いてた。」ぐらいの答えしか返ってこないことが多いのです。専門用語を正しく言えるようになることも必要なことかもしれませんが、そんなことより大切なのは「どんなお話を学んだのか」ということです。数学は意味の無い記号操作を学ぶ科目ではなく、ちゃんとしたストーリーがあるものを学んでいるのです。ですから「お話のあらすじ」を理

解しておくことが大切なのです。

定期テスト対策では・・・

「日頃の学習」のところにも書いてありますが、数学のような科目は力がつくまでに時間のかかる科目です。テストに備えて十分な日数を確保しておきましょう。そして、「日頃の学習」で心配な例題や間違った問にちゃんと印を付けているとテスト対策が楽になります。

- テキストから試験範囲の例題や問を探して、印のついていないものがちゃんと解けるかどうか試してみましょう。
- 印を付けた例題や問を繰り返し復習して、テストに出ても大丈夫な問題を少しでも増やしておきましょう。

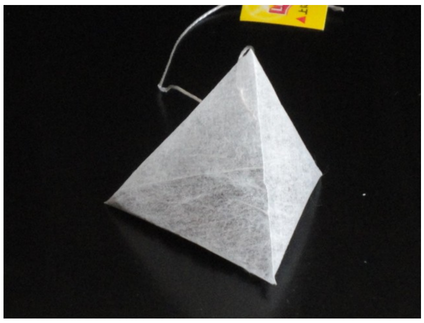
第1章

立体図形にはどんなものがあるの？

1.1　本物の立体図形を観察して、見取り図を描いてみよう

今すぐ、次の写真[*1] に写っているものを用意してください。



立体図形は文字どおり「立体的な」図形ですから、紙の上に描くのはなかなか難しいことがあります。だからといって、いつも本物の立体図形を用意して学習するのも大変で

[*1] この写真のうち、ピラミッドについて
paweesit;Pyramid photo credit: Pyramid via photopin (license)

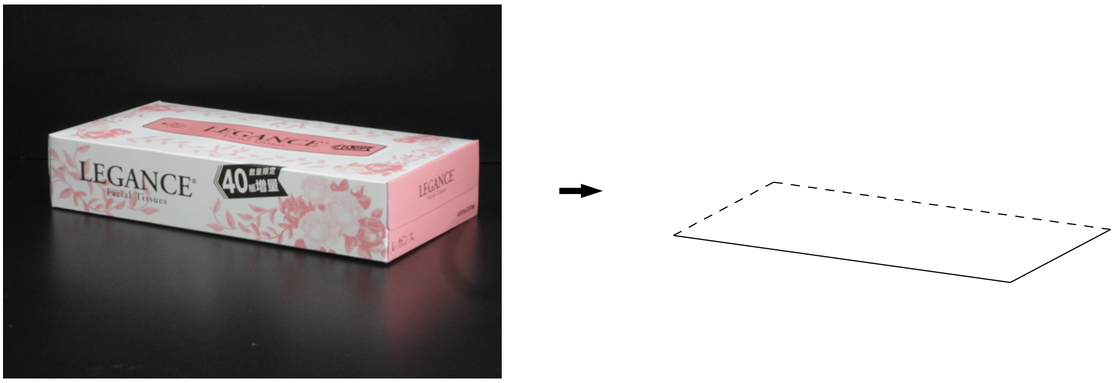
す。（でも、本当は、本物の立体を使って学習すると理解が深まるんですけどね。）そこでよく、立体図形の「見取り図」というものを描きます。紙の上に本物っぽく見えるように立体図形を描くのです。立体を紙の上に描くのですからそれなりに工夫をして描くことが大切です。ではこれから、いくつかの立体図形について、見取り図の例を紹介することにしましょう。どんなことに気をつけるとうまく描けるのか、しっかりコツを身につけてください。

例１　立体図形には「辺」や「面」がりますね。立体図形の見取り図を描くときには、辺を線で描きます。右の写真を見てください。これは「ティッシュペーパーの箱」です。たくさんの「辺」がありますが、「こちら側から見えている辺」と「こちらからは見えない辺」があります。「こちら側から見えている辺」は実線で描き、「こちらからは見えない辺」は点線で描くと本物っぽく見えます。これだけのことをまずあなたの頭に入れておいてもらい、これからもっと詳しく「見取り図」の描き方を説明することにしましょう。

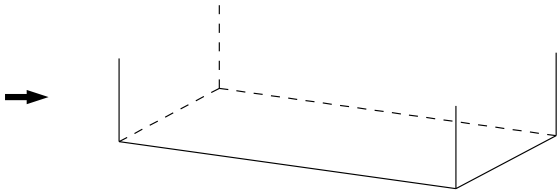
　見取り図を描くときにはまず、この立体をよく見て、「床に接触している面」を描きます。今の場合、「床に接触している面」は長方形ですね。しかし、長方形だからといって、本当に長方形を描いてはいけません。もしあなたが、この「ティッシュペーパーの箱」を真上から見ているのなら、「床に接触している面」はちゃんと「長方形に見える」でしょう。しかし、この写真のように、「ティッシュペーパーの箱」を「やや斜め上」から見ると、「床に接触している面」は「ちゃんとした長方形には見えない」のです。長方形が「平行四辺形のように」見えてしまうのです。小学生のとき外でたくさん遊んだ人はこういうことをよく知っているはずです。こんど天気のよい日に外で遊んだら、ぜひ、あなたの影よく観察してみてください。あなたの影は、本当のあなたの形や大きさとは違って見えるはずです。背の高さや、太り方は本当のあなたと違うはずです。太陽からの光があなたに

斜めからあたるので、あなたの背の高さやあなたの横幅が伸びたり縮んだりして地面に影ができるのです。あなたの影の形だけではなく、長方形の影がどんな形になるのかを知りたければ、長方形の板を持って影を見てみましょう。地面に映っているのは長方形ではなく、平行四辺形のような形をしているはずです。（ただし、太陽が自分の真上にあると、長方形は長方形の形のままです。）今説明した影の話でもわかるように、物を斜めから見ると形が変ったように見えます。「ティッシュペーパの箱の床に接触している面」も「長方形」ではなく「平行四辺形のように見える」のです。ですから、ティッシュペーパーの箱を紙に描く時は、本当は長方形の形をしているとしても、平行四辺形を描くのです。

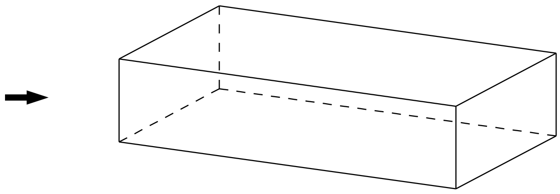
では次の図を見てください。これは「ティッシュペーパーの箱の床に接触している面」を紙の上に描いたところです。2 つの辺が点線で描いてあることに注意してください。点線で描かれている 2 つの辺はこちらからは見えないのです。



「ティッシュペーパーの箱の床に接触している面」が紙の上に描けたので、次は、「まっすぐ上に伸びている辺」を描きます。ティッシュペーパーの箱では「まっすぐ上に伸びている辺」は 4 本あり、全て同じ長さですね。ですから、紙に描くときも、**4 本とも同じ長さでまっすぐ上に伸びていくように**描きます。すると次の図のようになりますね。1 本だけ、点線で描いてあることに注意してください。点線で描かれている「まっすぐに上に伸びている辺」はこちらからは見えないのです。



最後に「ティッシュペーパーの箱の一番上の面」を描きます。それには、さっき描いた 4 本の「まっすぐ上に伸びる辺」の先端をまっすぐ結べばよいですね。すると次のようになりますね。



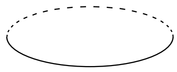
これで見取り図は完成です。

例 2　右の図を見てください。これは、ソフトドリンクの缶です。ここではこの缶の見取り図を描くことにします。

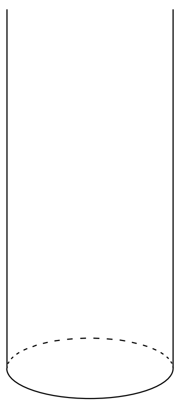
見取り図を描くときには、「こちらから見える線」は実線で描き、「こちらからは見えない線」は点線で描くとうまくいきます。（線という言葉を使いましたが、この話では曲がった線も出てくることに注意しましょう。）

まず、この立体をよく見て、「床に接触している面」を描きます。今の場合、床に接触している面」は「円」ですね。しかし、紙の上に本当に円を描いてはいけません。例 1 でも説明しましたが、立

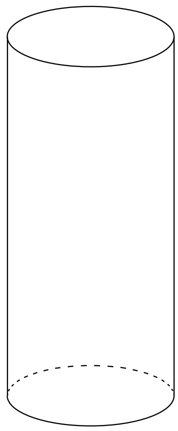
体を正面から見るのではなく、斜めやや上から見ると、「縦と横が引き伸ばされたり縮められたりしているように見える」のですよね。ですから今の場合、「床に接触している円」を紙に描くと次のようになります。（これはいわゆる「だ円」と呼ばれている形です。）ただし、こちらから見えないところは点線で描きます。



次は、「まっすぐ上に伸びている線」を描きます。今の場合、「まっすぐ上に伸びている線」は缶の輪郭を作っています。つまり缶の左側のふちと右側のふちになったいる 2 本の線のことです。この「まっすぐ上に伸びている辺」は 2 本とも同じ長さですね。ですから、紙に描くときも、**2 本とも同じ長さでまっすぐ上に伸びていくように描きます**。すると次の図のようになりますね。

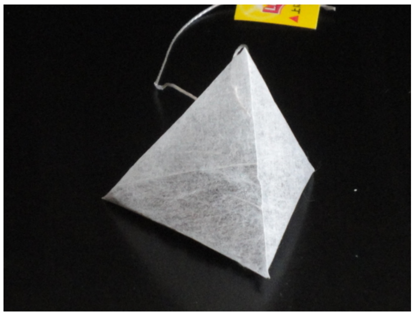


最後に「缶の一番上の面」を描きます。「缶の一番上の面」は本当は「円」ですが、何度も説明しているとおり、「円」を「斜めやや上」から見ているので「だ円」に見えます。ですから紙に描くときにも（今の場合は横長の）だ円を描けばよいのです。もちろん、さっき描いた２本の「まっすぐ上に伸びる線」が「だ円の左端と右端でぶつかる」ようにします。すると次のようになりますね。



これで見取り図は完成です。

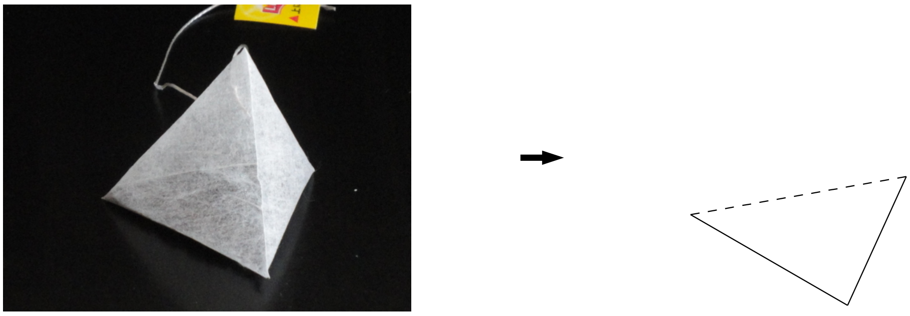
例３　右の図を見てください。これは、「三角のティーバッグ」です。ここではこのティーバッグの見取り図を描くことにします。



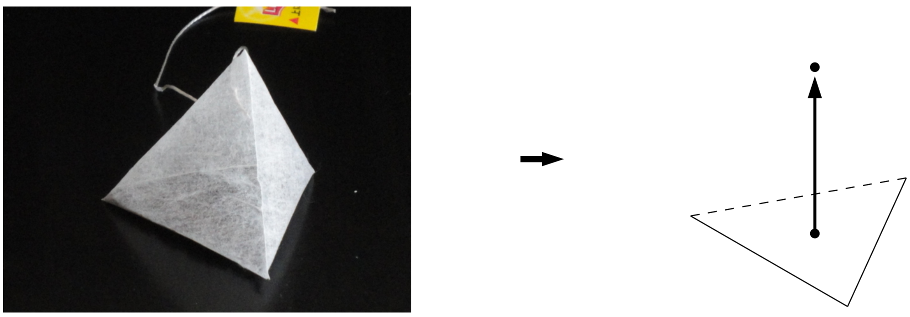
「こちらから見える線」は実線で描き、「こちらからは見えない線」は点線で描きます。

まず、この立体をよく見て、「床に接触している面」を描きます。今の場合、床に接触している面」は「正三角形」ですね。しかし、紙の上に本当に正三角形を描いてはいけません。例１や例２でも説明しましたが、図形を正面から見ているのではなく、やや斜め上から見ると、「縦と横が引き伸ばされたり縮められたりしているように見える」のです。ですから今の場合、「床に接触している正三角形」を紙に描くと次のようになります。（「少し縦の方向に縮んだ三角形」、言いかえると「少し横

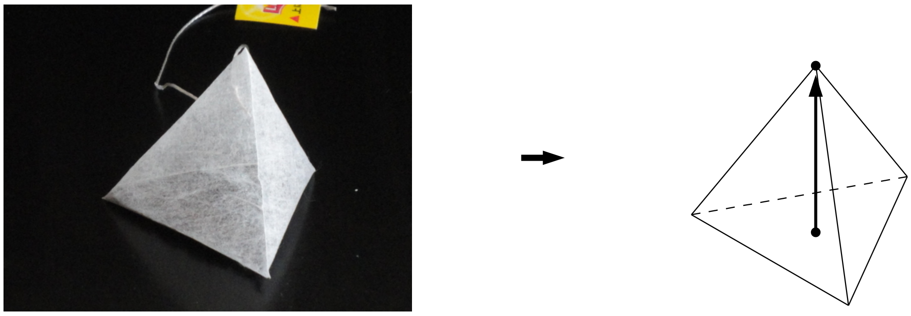
長に見える三角形」を描くとよいでしょう。）ただし、こちらから見えないところは点線で描きます。すると次のようになります。



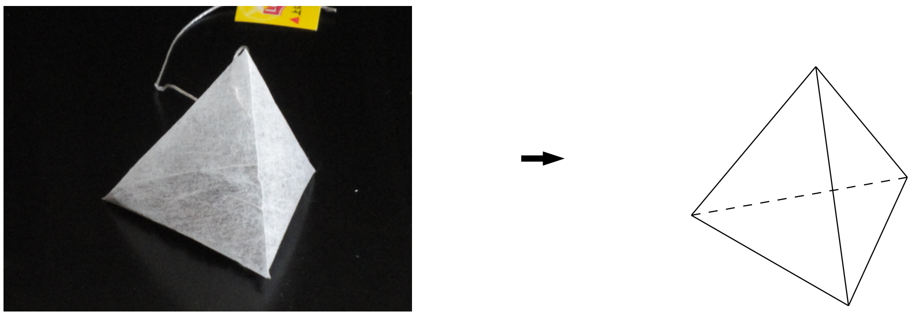
次は、「ティーバッグの一番上のとがった所にある点」を紙の上に打ちます。この点を打つときのコツをこれから説明します。まず、本物のティーバッグを真上からよく見てください。「一番上のとがった所にある点」は「床に接触している正三角形」のどのあたりにあるように見えますか？たぶん、床に接触している正三角形のど真ん中にあるように見えると思います。ですから、見取り図を描く紙の上に「一番上のとがった所にある点」を打つときも、ちゃんとそのように見えるように打たなくてはなりません。そのためには次のようにするとうまくいきます。まず、さっき描いた「床に接触している三角形」の真ん中あたりにうすく点を打っておきます。（この点はあとで消しゴムで消します。ですから、あまりしっかり打たないほうがよいでしょう。）うすく点が打てたら、この点からまっすぐ上の、ちょうどよい感じの高さのところに 1 つ点を打ちます。これが「ティーバッグの一番上のとがった所にある点」になります。そうすると、次の図のようになりますね。



次に、今打った「ティーバッグの一番上のとがった所にある点」と、「床に接触している正三角形の 3 つの頂点」をそれぞれ結びます。すると次の図のようになります。



最後にいらない線や点を消しゴムで消しましょう。そうすると次の図のようになりますね。



これで見取り図の完成です。

ここまでいくつかの立体図形について、例を使って見取り図の描き方を説明してきました。それではここであらためて、立体図形の見取り図を描くコツについてまとめておくことにします。

立体図形の見取り図を描くコツ

・まっすぐ上に伸びていく辺や線がある立体図形の場合

例えば、ティッシュペーパーの箱やソフトドリンクの缶のような形の場合です。

(1) まず、「床に接触している面」を描きます。このとき「図形を斜めから見ると、縦や横の長さが引き伸ばされたり縮められたりするように見える」ということに注意してください。ですから、長方形は平行四辺形のように見えたり、円はだ円のように見えるのです。ですから紙に描くときにも、斜めから見ているように描きます。

(2) まっすぐ上に伸びていく辺や線がある立体図形では、それらの辺をまっすぐ

上に全部同じ長さで描きます。

(3) 最後に今描いたまっすぐ上に伸びていく線にきちんと合うように、立体図形の「上のふた」を描くと見取り図の完成です。

・上のほうにある 1 つの点に向かって伸びていく辺や線のある立体図形の場合

例えば、三角のティーバッグのような形の場合です。

(1) まず、「床に接触している面」を描きます。このとき「図形を斜めから見ると、縦や横の長さが引き伸ばされたり縮められたりするように見える」ということに注意してください。ですから、長方形は平行四辺形のように見えたり、円はだ円のように見えるのです。ですから紙に描くときにも、斜めから見ているように描きます。

(2) 上のほうにある 1 つの点に向かって伸びていく辺や線のある立体図形では、まず、上のほうに 1 つ点を打ち、「床に接触している面」の辺や端からその点に向かって、まっすぐな線を描きます。そうすると見取り図の完成です。

問 1. 次の写真に写っている立体図形の見取り図を描きなさい。

(1)

(2)

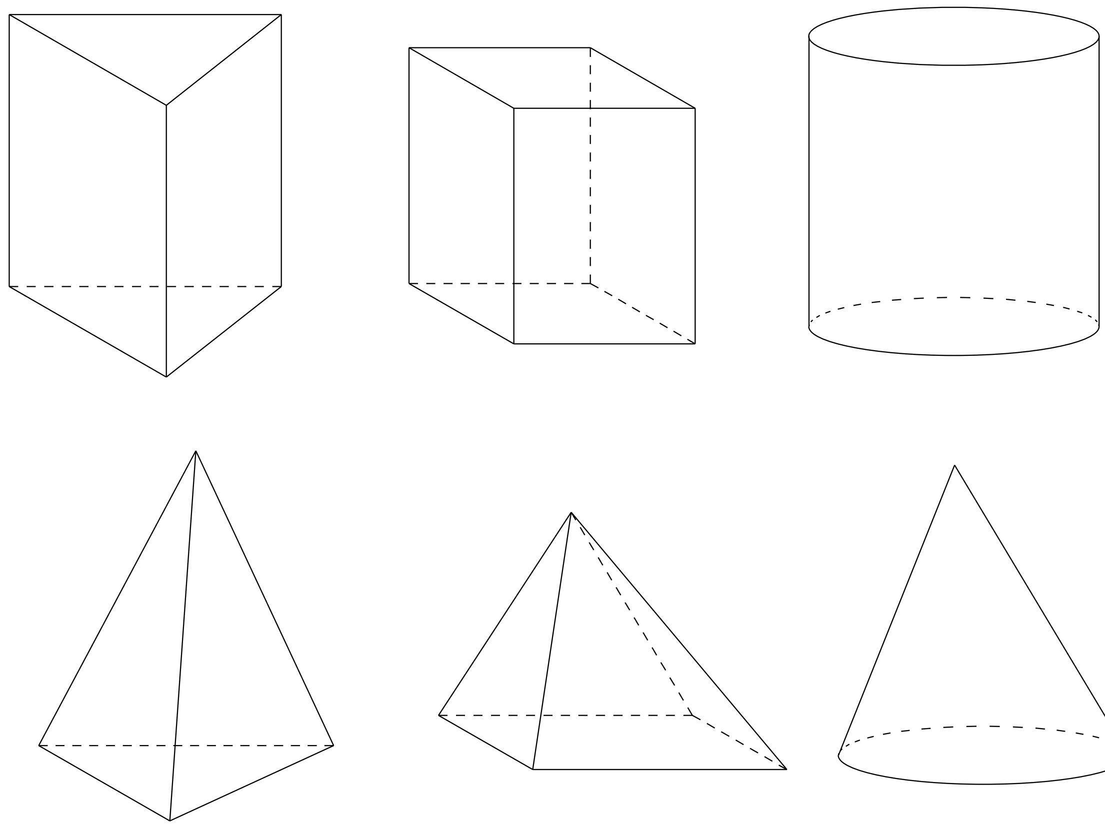
(3)

paweesit;Pyramid
photo credit: Pyramid via photopin (license)

答えを見る

1.2　ナントカ柱とナントカ錐

次の図を見てください。これはいくつかの立体の「見取り図」を描いたものです。



ここには６個の立体図形が描かれています。ところで、上の段に描かれている立体図形と下の段に描かれている立体図形には違いがあります。つまり、上の段に描かれている立体図形はお互いに仲間で、下の段に描かれている立体図形はお互いに仲間なのですが、上の段の立体図形と下の段の立体図形は仲間ではないと思うことができるのです。どういうことかわかりますか？

上の段の立体図形は、（ちょっと太いかもしれませんが）、「建物の柱」のような形をしています。そこで、上の段のような立体図形は「ナントカ柱」と呼ばれています。「ナントカ」の部分は色々と変わります。上の段の立体図形では、一番左のものは「三角柱」と呼ばれ、真ん中のものは「四角柱」と呼ばれ、一番右のものは「円柱」と呼ばれます。

下の段の立体図形はどれも上のほうがとがっています。そこで、下の段のような立体図

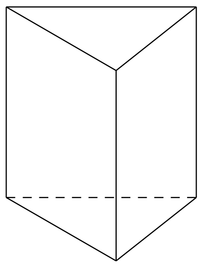
形は「ナントカ錐」と呼ばれています。(「錐（すい)」というのは「先のとがったもの」という意味です。)「ナントカ」の部分は色々と変わります。下の段の立体図形では、一番左のものは「三角錐」と呼ばれ、真ん中のものは「四角錐」と呼ばれ、一番右のものは「円錐」と呼ばれます。

それでは、ナントカ柱とナントカ錐をもっと詳しく見ていくことにしましょう。

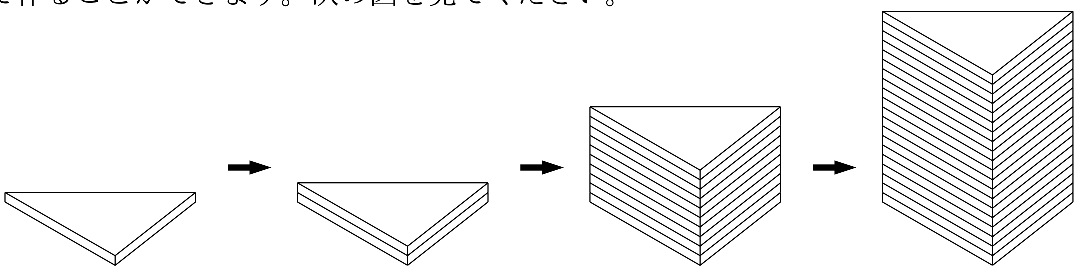
ナントカ柱

例 4　三角柱

右の図を見てください。これは「三角柱」と呼ばれている立体図形です。どうしてこの立体図形が「三角柱」と呼ばれているのか説明します。



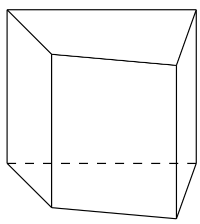
この立体図形は、たくさんの「三角形」をまっすぐ上に積み上げて作ることができます。次の図を見てください。



まず厚紙で同じ大きさ、同じ形の三角形をたくさん作ります。そして、それらたくさんの三角形をまっすぐ上に向かって積み重ねていくのです。そうすると「三角形の柱」ができます。ですからこの立体は「三角柱」と呼ばれるのです。

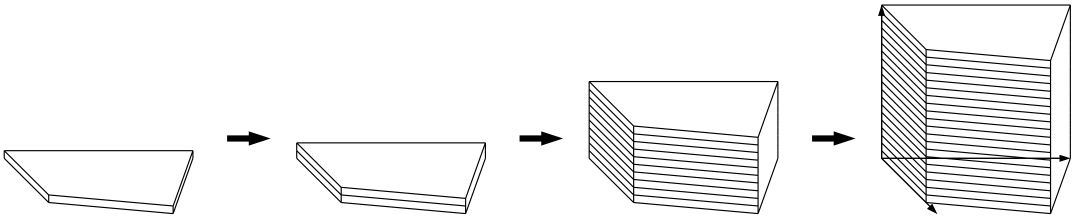
例 5　四角柱

右の図を見てください。これは「四角柱」と呼ばれている立体図形です。どうしてこの立体図形が「四角柱」と呼ばれているのか説明します。

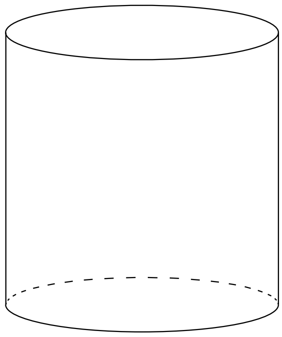


この立体図形は、たくさんの「四角形」をまっすぐ上に積み上げ

て作ることができます。次の図を見てください。



まず厚紙で同じ大きさ、同じ形の四角形をたくさん作ります。そして、それらたくさんの四角形をまっすぐ上に向かって積み重ねていくのです。そうすると「四角形の柱」ができます。ですから、この立体は「四角柱」と呼ばれるのです。



問 2. 例 4 や例 5 の説明がよく理解出来た人のための問題です。

右の図を見てください。この図形について例 4 や例 5 のように考えてみることにしましょう。

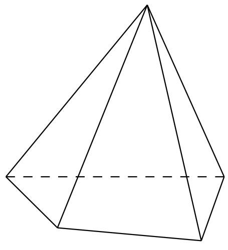
(1) 例 4 や例 5 のように、厚紙で形も大きさも同じ図形をたくさん作り、それらをまっすぐ上に積み重ねて この立体図形を作ることにします。どんな図形を厚紙でたくさん作ればよいですか。

(2) 例 4 や例 5 のように考えると、この立体図形の名前は何になると思いますか。

答えを見る

ナントカ錐

例 6　四角錐

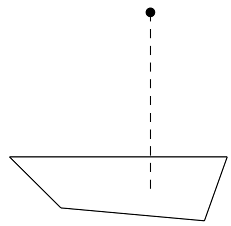


右の図を見てください。これは「四角錐」と呼ばれている立体図形です。まず、「錐 (すい)」という言葉の意味をここで思い出しておくことにします。実は、「錐」とは「キリ」のことです。「キリ」って知ってますよね。工具の 1 種で、木材に穴を開けるのに使いますよね。ところで、「キリ」って先がとがってますよね。そこからの連想で、昔の人は「先がとがっている図形」を「錐」と呼ぶことにしたの

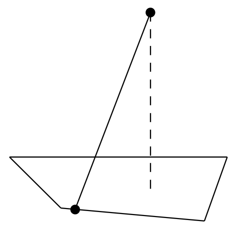
です。ですから「ナントカ錐」と呼ばれている立体図形には、キリの先のようにとがっているところがあります。では、どこがどんなふうにとがっているのでしょうか。そういうことも含めて、ここでは「四角錐」と呼ばれている立体図形について説明します。

この立体図形は、これから説明していくようにして作られていると考えることができます。

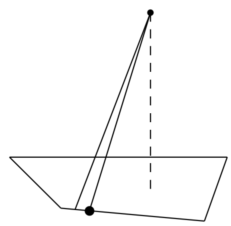
まず、四角形を用意し、床の上におきます。そして、四角形の上のほうに 1 つの点を決めます。



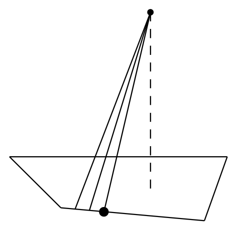
次は、四角形の辺の上に 1 つ点を決めます。そしてその点から「さっき四角形の上のほうに決めた点」へ向かってまっすぐな線を出します。



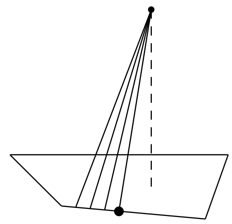
次は、四角形の辺の上のさっきとは違う場所に 1 つ点を決めます。右の図では、さっきの場所から少しだけ右にずれた所に点を決めてあります。そしてその点から「四角形の上のほうに決めた点」へ向かってまっすぐな線を出します。



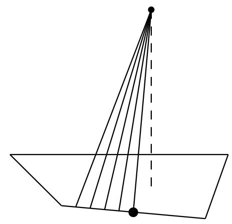
次も、四角形の辺の上のさっきまでとは違う場所にまた 1 つ点を決めます。右の図では、さっきの場所からまた少しだけ右にずれた所に点を決めました。そしてその点から「四角形の上のほうに決めた点」へ向かってまっすぐな線を出します。



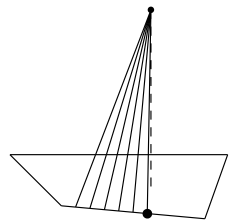
次も、四角形の辺の上のさっきまでとは違う場所にまた１つ点を決めます。右図では、さっきの場所からまた少しだけ右はずれた所に点を決めました。そしてその点から「四角形の上のほうに決めた点」へ向かってまっすぐな線を出します。



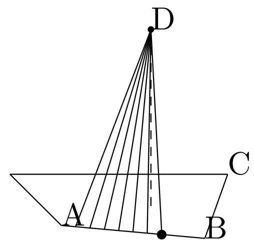
次も、四角形の辺の上のさっきまでとは違う場所にまた１つ点を決めます。右の図では、さっきの場所からまた少しだけ右へずれた所に点を決めました。そしてその点から「四角形の上のほうに決めた点」へ向かってまっすぐな線を出します。



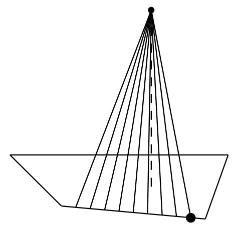
次も、四角形の辺の上のさっきまでとは違う場所にまた１つ点を決めます。右の図では、さっきの場所からまた少しだけ右へずれた所に点を決めました。そしてその点から「四角形の上のほうに決めた点」へ向かってまっすぐな線を出します。



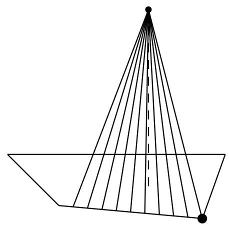
次も、四角形の辺の上のさっきまでとは違う場所にまた１つ点を決めます。右の図では、さっきの場所からまた少しだけ右へずれた所に点を決めました。そしてその点から「四角形の上のほうに決めた点」へ向かってまっすぐな線を出します。



次も、四角形の辺の上のさっきまでとは違う場所にまた１つ点を決めます。右の図では、さっきの場所からまた少しだけ右へずれた所に点を決めました。そしてその点から「四角形の上のほうに決めた点」へ向かってまっすぐな線を出します。

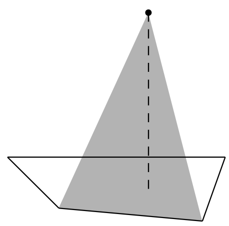


　次も、四角形の辺の上のさっきまでとは違う場所にまた 1 つ点を決めます。右の図では、さっきの場所からまた少しだけ右へずれた所に点を決めました。そしてその点から「四角形の上のほうに決めた点」へ向かってまっすぐな線を出します。

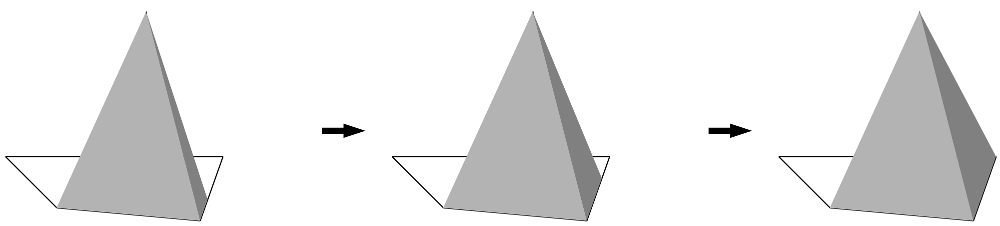


　このようにして、次々に「床においてある四角形の辺の上のある点」から「四角形の上のほうに決めた点」に向かって線分を作っていきます。本当は、「床においてある四角形の辺の上」にはたくさんの点がぎっしりとすき間なく並んでいます。ということは、ぎっしり並んでいる全ての点に対してこれまで説明してきたことを行うと、そのときに作られるたくさんの線分たちもすき間なくぎっしり並び「面」が作られていくということになりますね。

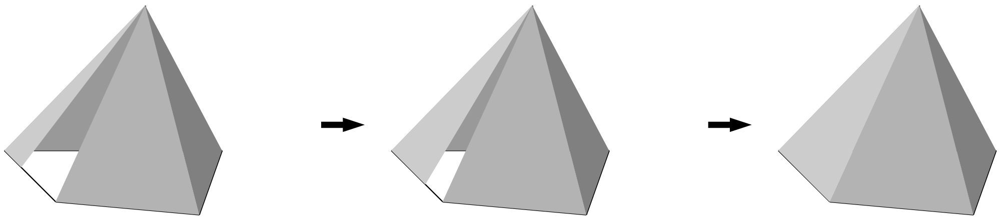
　例えば、この図の四角形の「一番手前に見えている辺」の上にぎっしりと並んでいる点たちに対してこれまで説明してきたことを行うと、右の図のような「面」ができますね。



　こうして、四角形の辺の上にすき間なくぎっしり並んでいる点たちを次々に「四角形の上のほうに決めたある点」と結んでいくと、どんどん面ができていくのです。次の図を見てください。これは 2 つ目の面が出来ていく様子を図にしたものです。

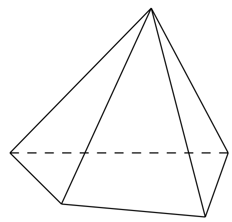


　さらに続けると、3 つ目、4 つ目の面ができ、立体図形が完成します。次の図は、4 つ目の面が完成し、「四角錐」が出来上がる所を図にしたものです。



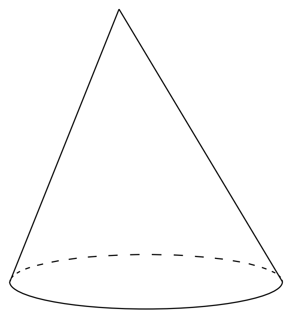
これまで見てきたように、この立体図形は、まず「四角形」を床の上におき、次に四角形の上のほうの１つの点」を決め、最後に「床においた四角形の辺の上にすき間なくぎっしり並んでいる全ての点」と「四角形の上のほうに決めた点」をまっすぐ結んで面を作ることによりできる図形と思うことができるのです。「床においた図形の辺の上にある全ての点」と「床においた図形の上のほうに決めた点」をまっすぐ結んでいくとき、「床においた図形の上のほうに決めた点」のところがとがっていくのです。この立体図形は床の上に「四角形」をおいて作っているので、「四角錐」と呼ばれます。

さっきの図では、四角錐の「周りにできている面」が灰色になってました。これは「たくさんの線が集まって面ができる」ということをあなたにわかってもらうためです。完成した四角錐の図では、面を灰色にしないといけないわけではありません。ですから、ここで最後にあらためて、面を灰色にしないで、出来上がった四角錐の図を描いておくことにします。右の図のようになりますね。



問 3. 例６の説明がよく理解出来た人のための問題です。

右の図を見てください。この立体図形について、例６のように考えてみることにしましょう。



(1)　この立体図形を例６のようにして作ることにします。つまり、まず「ある図形」を床におき、次に「床においた図形」の上のほうに「１つの点」を決め、最後に「床においた図形のふちの上にある全ての点」から「その点」に向かって線分を作ることにします。それではまず初めに、どんな図形を床におけばよいですか。

(2) 例 6 のように考えると、この立体図形の名前は何になると思いますか。

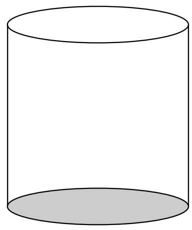
答えを見る

底面、側面、頂点って何？

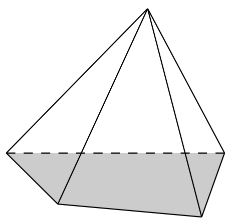
ここであなたに、「ナントカ柱」や「ナントカ錐」を学ぶときに出てくる専門用語を教えることにします。

さっきまで詳しく学んだように、「ナントカ柱」や「ナントカ錐」は、まずある図形を床の上においてから作ることができましたね。

ではまず右の図を見てください。これは「円柱」と呼ばれている図形です。この図形はまず床の上に円をおいてから作ることができましたね。この図では床においた円を灰色にしておきました。



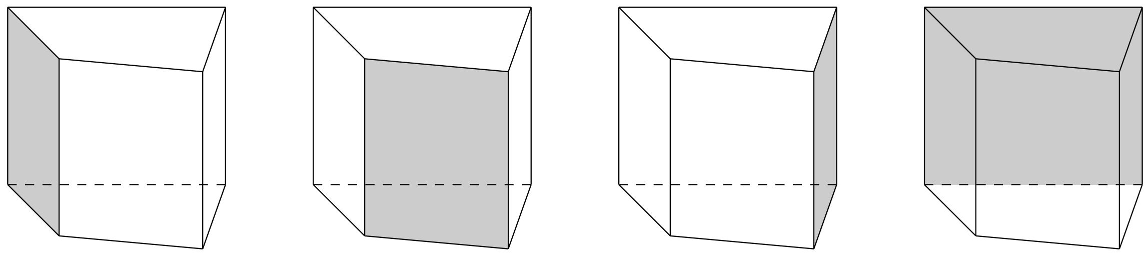
次は右の図を見てください。これは「四角錐」と呼ばれている図形です。この図形はまず床の上に四角形をおいてから作ることができましたね。この図では床においた四角形を灰色にしておきました。



この 2 つの例でもわかるように、「ナントカ柱」や「ナントカ錐」は、まずある図形を床の上においてから作ることができるわけです。そして、床の上におかれている図形のことを、その立体図形の**底面**と呼びます。床の上におかれた図形は、その立体の底の面になっているので「底面」と呼ばれるのです。

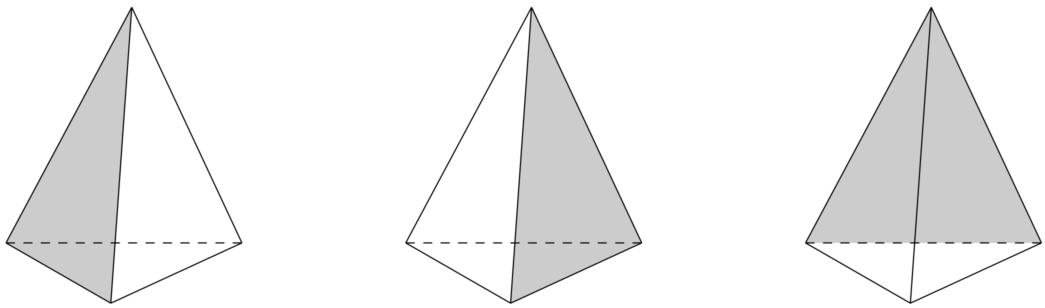
「ナントカ柱」や「ナントカ錐」と呼ばれている立体図形には、「周りを取り囲むようにしてその立体を覆っている面」があります。「周りを取り囲むようにしてその立体を覆っている面」のことをこれから説明します。

ではまず次の図を見てください。



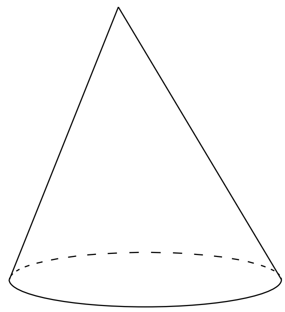
これは「四角柱」と呼ばれている立体図形です。「周りを取り囲むようにしてその立体を覆っている面」は 4 枚あります。わかりやすくするために、この図では灰色に塗っておきました。

今度は次の図を見てください。



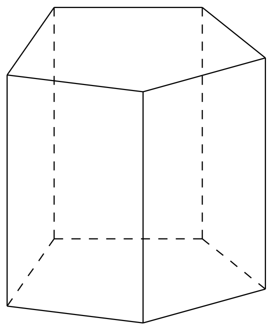
これは「三角錐」と呼ばれている立体図形です。「周りを取り囲むようにしてその立体を覆っている面」は 3 枚あります。わかりやすくするために、この図では灰色に塗っておきました。

この 2 つの例でもわかるように、「ナントカ柱」や「ナントカ錐」と呼ばれている立体図形には、「周りを取り囲むようにしてその立体を覆っている面」があるわけです。そして、「周りを取り囲むようにしてその立体を覆っている面」のことを**側面**と呼びます。「側」という言葉には「周りを取り囲んだり覆ったりしているもの」とか「片方によったところ」とか「横の面」という意味があります。そこで、「側面」と呼ばれるようになったのです。



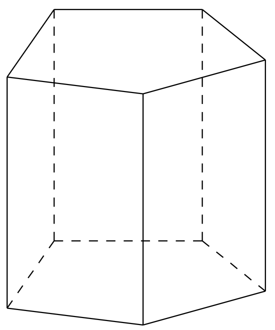
右の図を見てください。これは「円錐」と呼ばれている立体図形です。一番上の所がとがっていますよね。このように「ナントカ錐」の 1 番上の所にはとがっている部分があります。「ナントカ錐」の 1 番上のとがっている部分を**頂点**と呼びます。

一方、「ナントカ柱」は「ナントカ錐」とは違い、一番上はとがっていません。ですから「ナントカ柱」には頂点はありません。



問 4. 右の図の立体図形について考えることにします。以下の問に答えなさい。

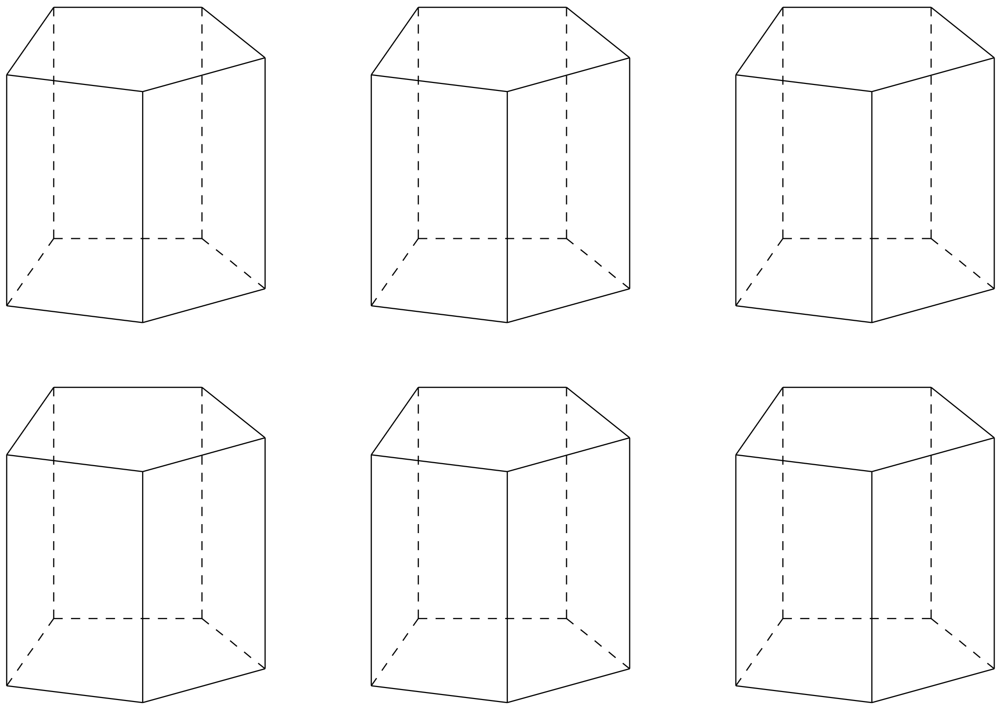
(1) この立体図形の名前は何ですか。



(2) この立体図形の底面はどれですか。右の図で、底面を鉛筆で塗りなさい。

(3) この立体図形には何枚側面がありますか。

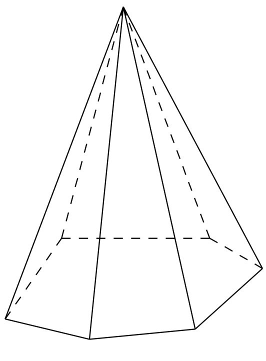
(4) 次の図では、あなたのためにこの立体図形の図を 6 個用意してあります。次の図で、この立体図形の側面を鉛筆で塗りなさい。ただし、1 枚 1 枚別の図を使って側面を塗ってください。



(5) この立体図形には頂点はありますか。

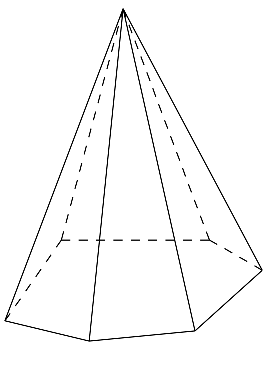
答えを見る

問 5. 右の図の立体図形について考えることにします。以下の問に答えなさい。



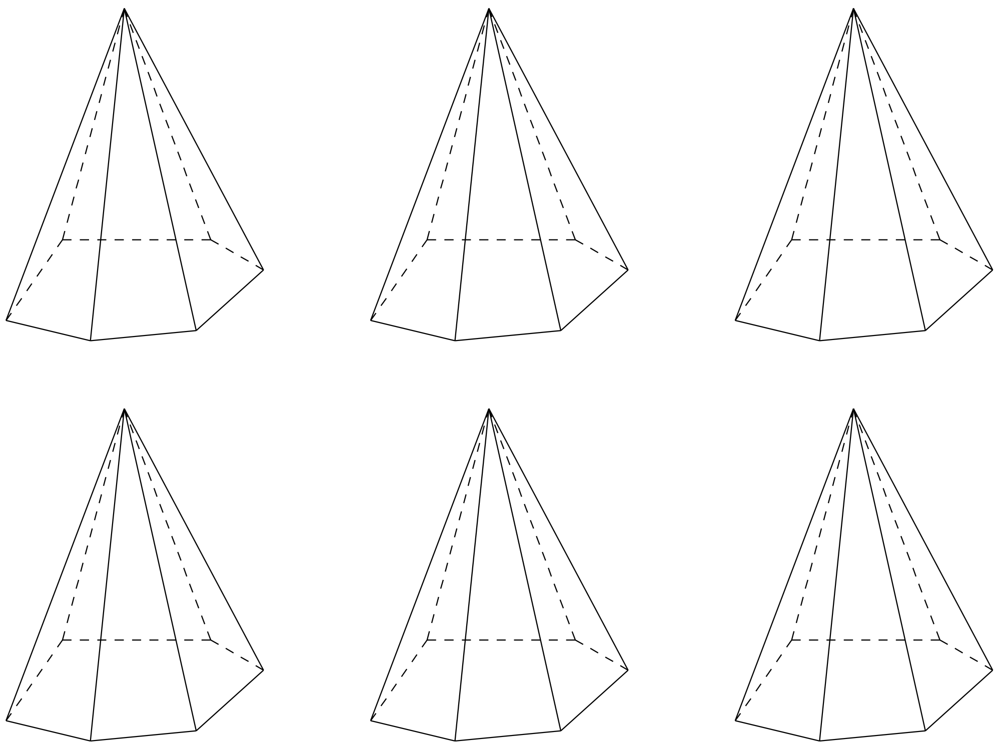
(1) この立体図形の名前は何ですか。

(2) この立体図形の底面はどれですか。右の図で、底面を鉛筆で塗りなさい。



(3) この立体図形には何枚側面がありますか。

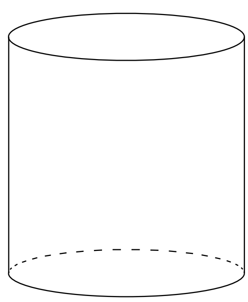
(4) 次の図では、あなたのためにこの立体図形の図をたくさん用意してあります。次の図で、この立体図形の側面を鉛筆で塗りなさい。ただし、1 枚 1 枚別の図を使って側面を塗ってください。



(5) この立体図形には頂点はありますか。

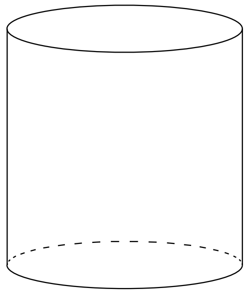
答えを見る

問 6. 右の図の立体図形について考えることにします。以下の問に答えなさい。



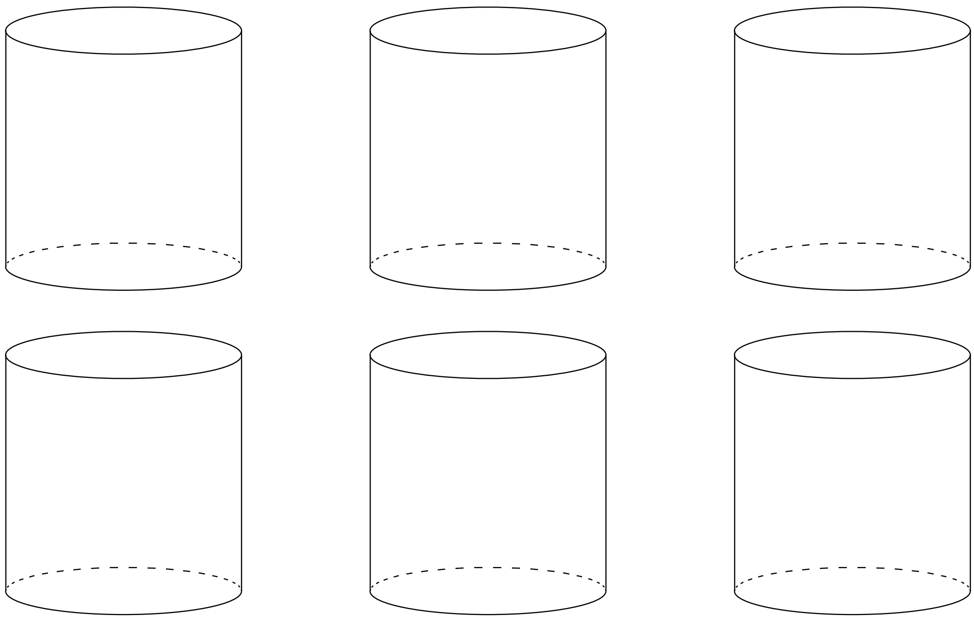
(1) この立体図形の名前は何ですか。

(2) この立体図形の底面はどれですか。右の図で、底面を鉛筆で塗りなさい。



(3) この立体図形には何枚側面がありますか。

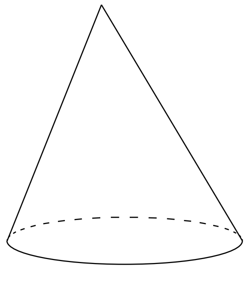
(4) 次の図では、あなたのためにこの立体図形の図をたくさん用意してあります。次の図で、この立体図形の側面を鉛筆で塗りなさい。ただし、1 枚 1 枚別の図を使って側面を塗ってください。



(5) この立体図形には頂点はありますか。

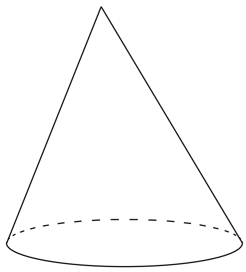
答えを見る

問 7. 右の図の立体図形について考えることにします。以下の問に答えなさい。



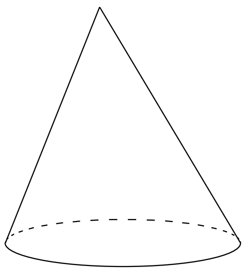
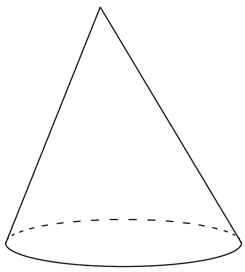
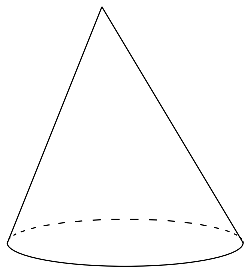
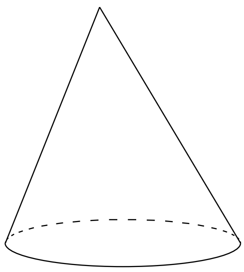
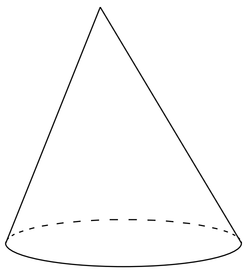
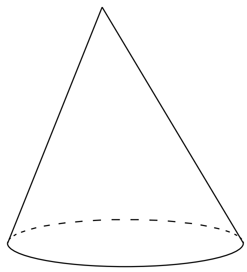
(1) この立体図形の名前は何ですか。

(2) この立体図形の底面はどれですか。右の図で、底面を鉛筆で塗りなさい。



(3) この立体図形には何枚側面がありますか。

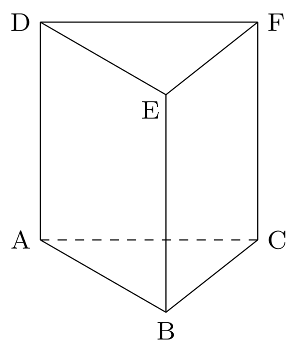
(4) 次の図では、あなたのためにこの立体図形の図をたくさん用意してあります。次の図で、この立体図形の側面を鉛筆で塗りなさい。ただし、1 枚 1 枚別の図を使って側面を塗ってください。

(5) この立体図形には頂点はありますか。

答えを見る

問 8. 右の図の立体図形について考えることにします。以下の問に答えなさい。



(1) この立体の名前は何ですか。

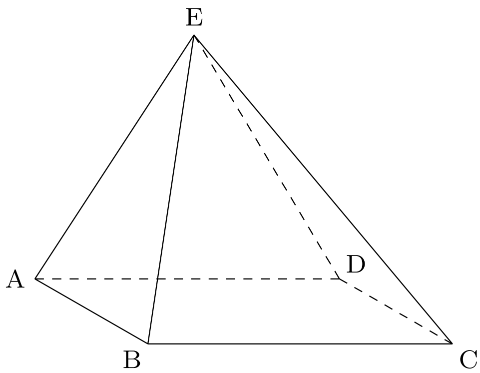
(2) この立体の底面の名前を記号を使って答えなさい。

(3) この立体の全ての側面の名前を記号を使って答えなさい。

(4) この立体に頂点があれば、記号を使って答えなさい。

答えを見る

問 9. 右の図の立体図形について考えることにします。以下の問に答えなさい。



(1) この立体の名前は何ですか。

(2) この立体の底面の名前を記号を使って答えなさい。

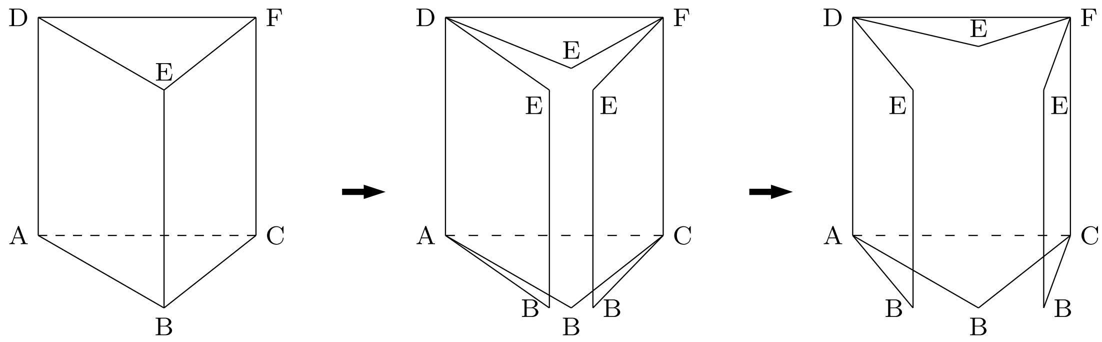
(3) この立体の全ての側面の名前を記号を使って答えなさい。

(4) この立体に頂点があれば、記号を使って答えなさい。

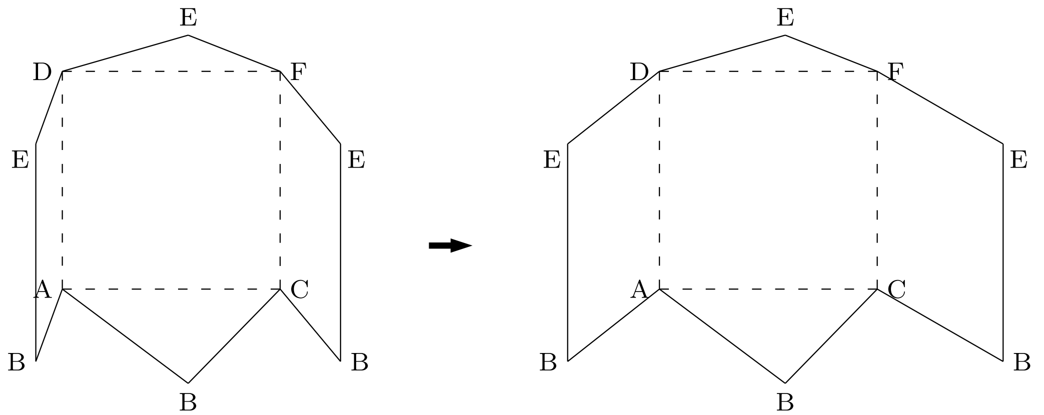
答えを見る

1.3　立体図形を切り開いて展開図を考えてみよう

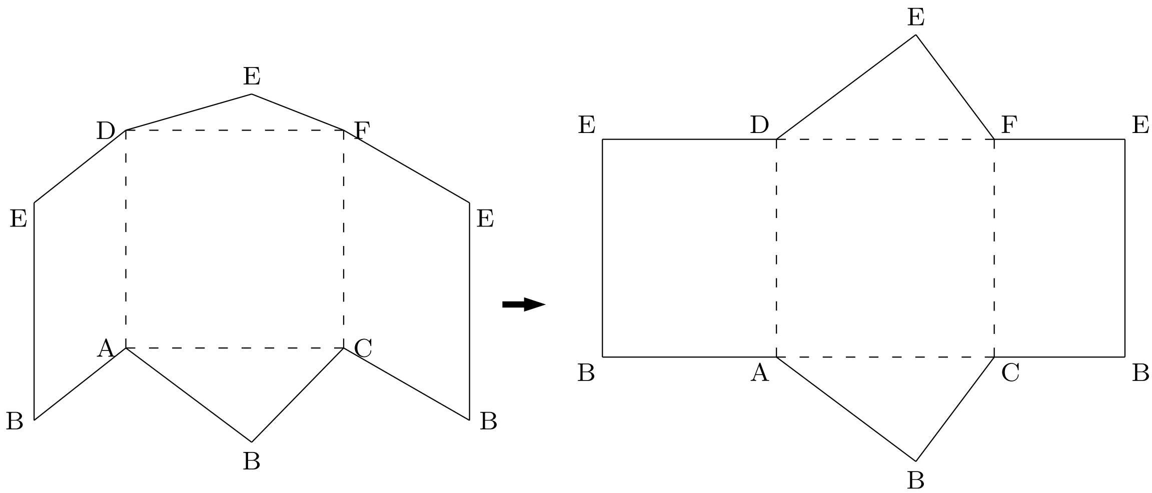
次の図を見てください。



これは、三角柱を切って展開している所を表しています。もっともっと開いていくと次のようになりますね。



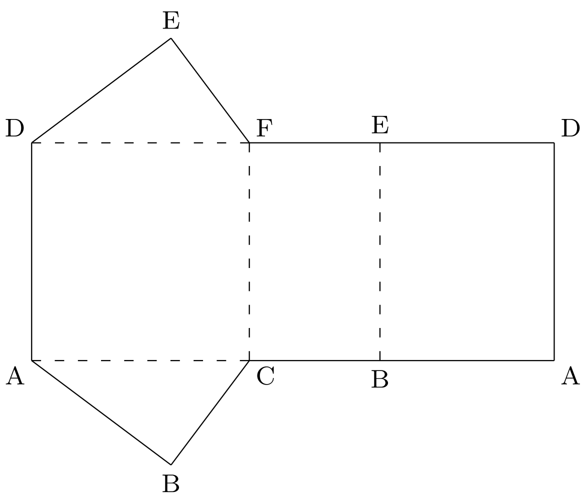
さらに開いていくと、ついにはまっ平らになります。次の図を見てください。

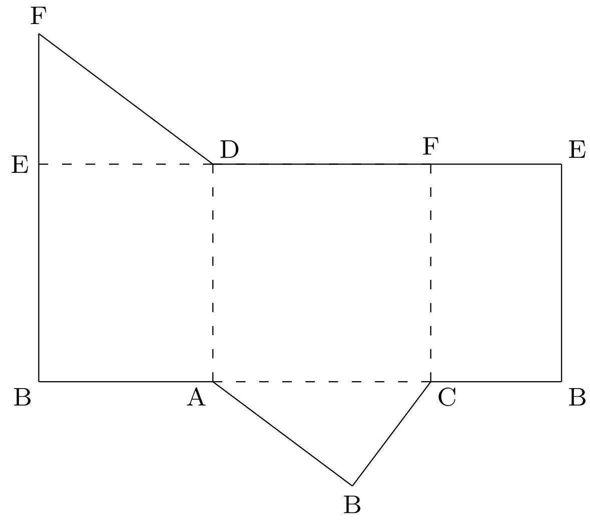


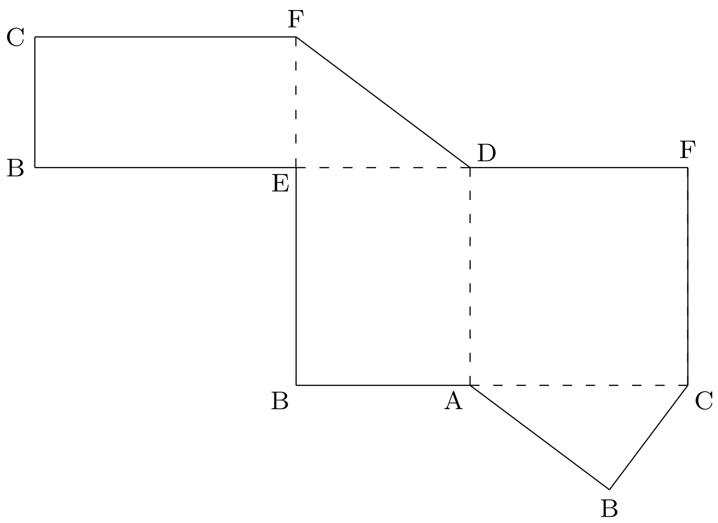
最後に描かれている図が展開図と呼ばれるものです。つまり、展開図とは、立体を切り開き、まっ平らにした図のことです。

あなたは「はさみ」を使って、「牛乳パック」を切り開いたことがありますか？紙は大切な資源なので、牛乳パックを再利用するために回収しているのを知ってますよね。牛乳

パックは、切り開いて平らにして、よく乾かしてから回収されますね。だからたぶん、少なくとも 1 度や 2 度は牛乳パックを切り開いたことはありますよね。あなたは牛乳パックを切り開くとき、どんなふうに切っていますか？いつも同じ切り方ですか？それとも違うふうに切ることもありますか？今度牛乳パックを切り開くとき、切り開いたものをよく観察てみてください。同じ牛乳パックでも、切るところをを変えると色々と違う「展開図」ができますね。これと同じように、さっきの立体、つまり「三角柱」も切り開き方を変えれば色々と違った「展開図」ができます。次の図を見てください。



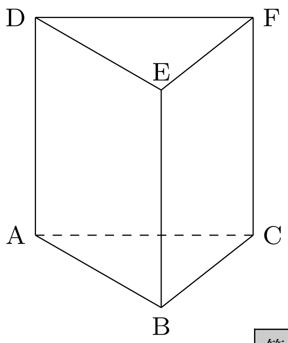




この 3 つの図はどれも同じ三角柱の展開図です。それぞれの図をよく見て、頭の中で組み立ててみてください。どことどこがくっつくのかよく考えてくださいね。どうしても頭の

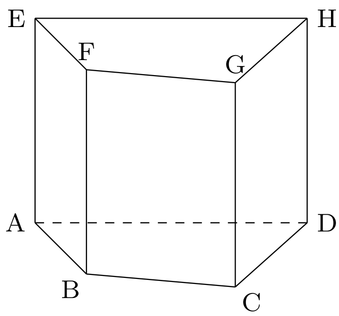
中で組み立てるのが難しかったら、この 3 つの展開図をコピーして、はさみで切り取って本当に組み立ててみてください。数学を学ぶとき、「本当にやってみる」ということはとても大切なことです。面倒がらずに本当に作ってみてください。そのとき、どことどこがくっつくのかよく観察するのです。組み立て終わった立体もよく見てください。そしてもう 1 度切り開いていく所を想像してみましょう。想像ができたら、あなたの思ったとおりになるのかどうか、はさみを使って本当に切り開いてみましょう。

問 10. この問の前の説明の中で、右の三角柱の展開図を合計 4 つあなたにお見せしました。今度はあなた自身で、この三角柱の展開図で、この問の前の説明の中で紹介したのとは違うものを描いて下さい。



答えを見る

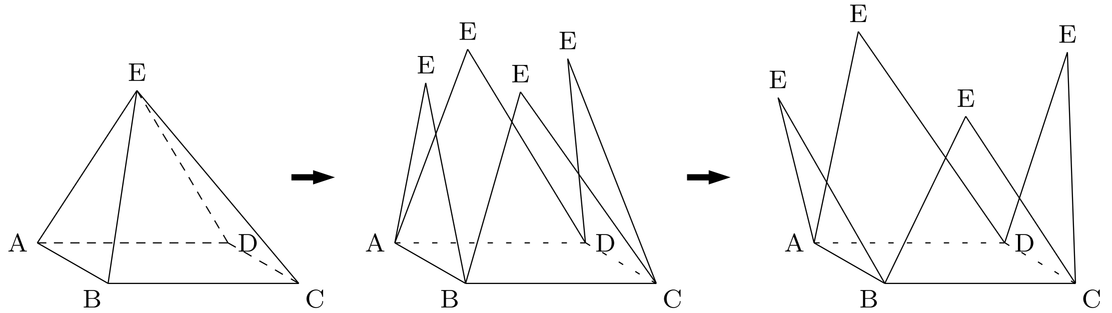
問 11. 右の図の立体図形について考えることにします。紙とはさみとテープを用意しておいてください。



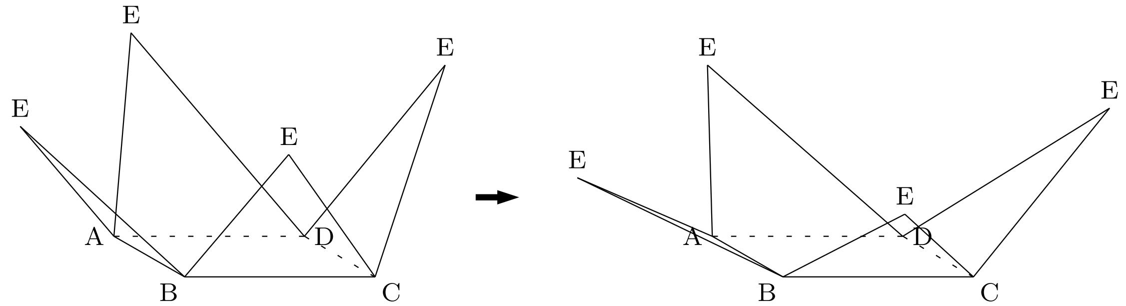
(1) この立体図形の名前を答えなさい。
(2) 紙にこの立体図形の展開図を描いて下さい。
(3) はさみであなたの作った展開図を切り抜いてください。
(4) 切り抜いた展開図を組み立てて、テープで張り合わせてください。そして、図と見比べて、ちゃんとできているか確かめてください。うまく張り合わせることができましたか？ずれてしまった所はありませんでしたか？

答えを見る

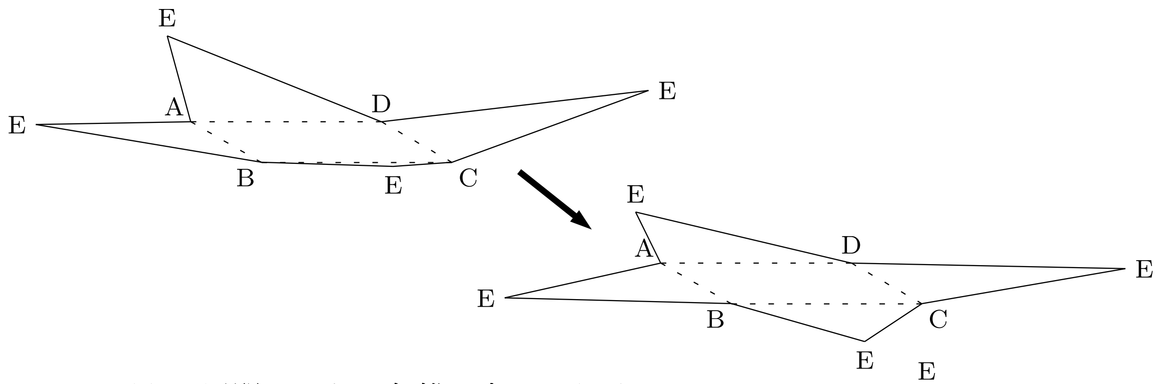
では、次の図を見てください。



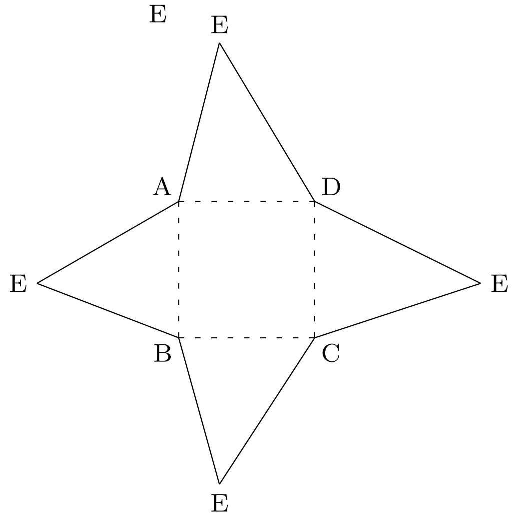
これは、四角錐を切って展開していくところをあらわしています。もっともっと開いていくと次のようになりますね。



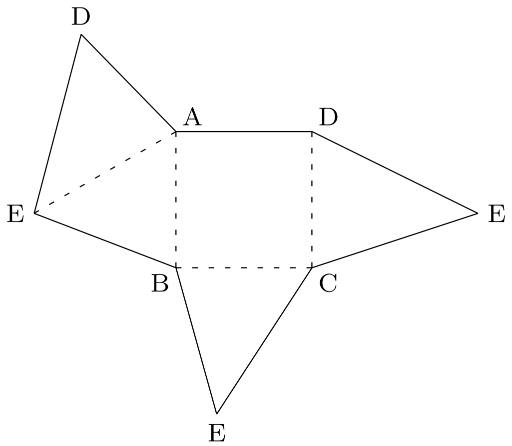
さらに開いていくと、ついにはまっ平らになります。次の図を見てください。

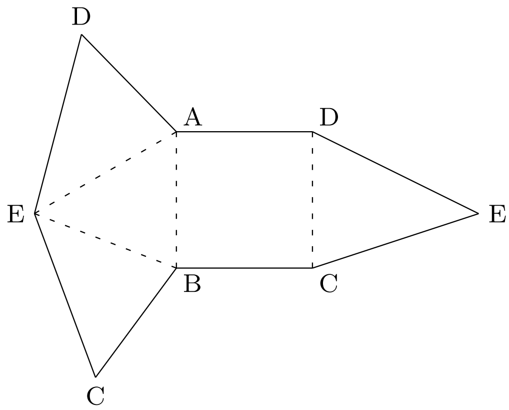


まっ平らに展開された四角錐を真上から見ると右の図のようになります。これがこの四角錐の展開図です。



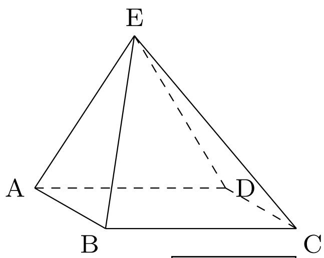
この四角錐も、前に学んだ三角柱と同じように、切る所を変えると色々と違った展開図ができます。次の図を見てください。





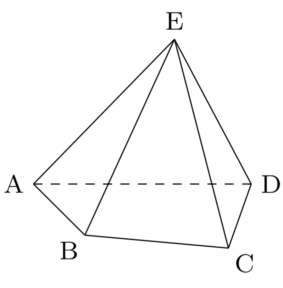
この 2 つの図はどちらも同じ四角錐の展開図です。それぞれの図をよく見て、頭の中で組み立ててみてください。どことどこがくっつくのかよく考えてくださいね。どうしても頭の中で組み立てるのが難しかったら、この 2 つの展開図をコピーして、はさみで切り取って本当に組み立ててみてください。数学を学ぶとき、「本当にやってみる」ということはとても大切なことです。面倒がらずに、本当に作ってみてください。そのとき、どことどこがくっつくのかよく観察するのです。組み立て終わった立体もよく見てください。そしてもう 1 度切り開いていく所を想像してみましょう。想像ができたら、あなたの思ったとおりになるのかどうか、はさみを使って本当に切り開いてみましょう。

問 12.　この問の前の説明の中で、右の四角錐の展開図を合計 3 つあなたにお見せしました。今度はあなた自身で、この四角錐の展開図で、この問の前の説明に出てきたのとは違うものを描いて下さい。



答えを見る

問 13.　右の図の立体図形について考えることにします。紙とはさみとテープを用意しておいてください。



(1) この立体図形の名前を答えなさい。

(2) 紙にこの立体図形の展開図を描いて下さい。

(3) はさみであなたの作った展開図を切り抜いてくだ

さい。

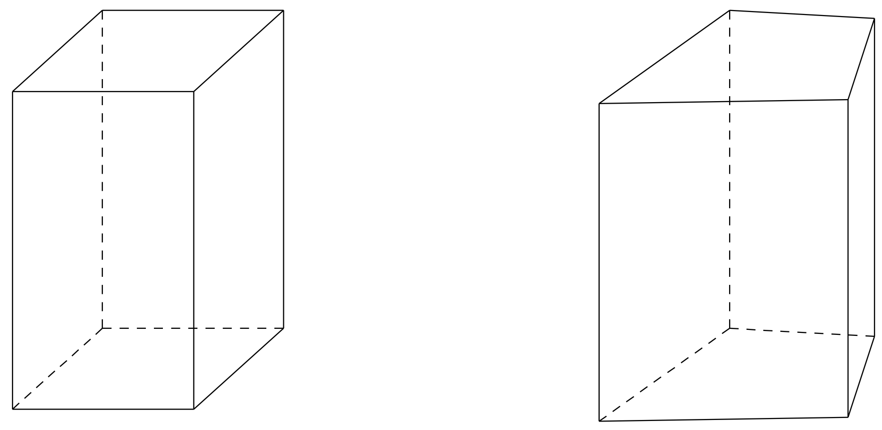
(4) 切り抜いた展開図を組み立てて、テープで張り合わせてください。そして、図と見比べて、ちゃんとできているか確かめてください。うまく張り合わせることができましたか？ずれてしまった所はありませんでしたか？

答えを見る

1.4　正ナントカ柱と正ナントカ錐

正ナントカ柱って何？

次の図を見てください。2 つの四角柱の見取り図がかかれています。立体図形を紙の上に無理して描いているので少しわかりにくいかも知れませんが、左の四角柱は「きれいな形」をしているのに、右の四角柱は「ゆがんだ形」をしているっていう気がしませんか？



「きれい」とか「ゆがんでいる」というのは人それぞれ感じ方が違うので、「えー、私はそう思わない」っていう人もいるかもしれません。でもこの 2 つの四角柱、違いがありますよね。そこでもう少し、数学として適切な言い方で違いを言うことにしましょう。そうすると、「左の四角柱はかなり対称性があるのに右の四角柱は対称性があまりない」ということになります。いま、「対称性」という少し難しい言葉を使いましたが、簡単に言うと、「バランス」とか「つりあい」のことです。そのようなことを気にすると、右の四角柱と左の四角柱は違いがありますよね。そこでどうしてこんな違いが出てきたのか、左の

四角柱と右の四角柱を少し詳しく観察してみましょう。

2 つの四角柱の底面に注目してください。（底面ってどこなのか、もうわかりますよね。前に学んでいますから。）この 2 つの立体図形はどちらも四角柱なのですから底面は「四角形」ですよね。そして実は、

左の四角柱の底面は「正方形」

なのです。それに対して、

右の四角柱の底面は「特に特徴のない四角形」

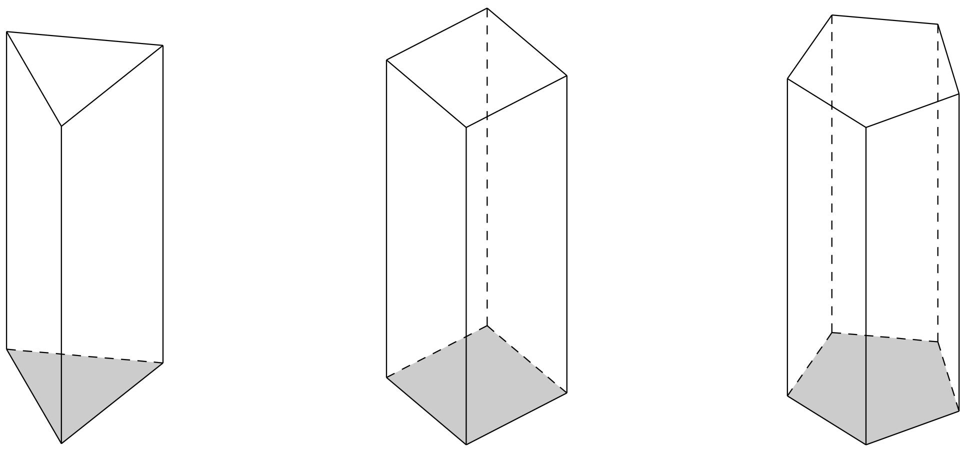
です。ところで「正方形」は、4 つの辺の長さはみんな同じで、4 つの角の大きさもみんな同じなのでしたね。つまり「正方形」というのは「四角形」の中で一番バランスのとれているものですね。ですから「正方形」を底面にして四角柱を作ると、「バランスのとれた四角柱」ができるのです。

以前学習しましたが、「ナントカ柱」という言葉の「ナントカ」の部分は「底面の形」を意味しているのでしたね。そして、さっき四角柱で見たように、「底面の形のバランスが取れている」と「バランスのとれたナントカ柱」ができるわけです。ですから底面を「正三角形」にすればバランスのとれた「三角柱」ができますし、底面を「正五角形」にすれば「バランスのとれた 5 角柱」ができるわけです。つまり、バランスのとれた「ナントカ柱」を作るには、底面を「正ナントカ角形」にすればよいのです。

ここで念のため「正ナントカ角形」と「ありふれたナントカ角形」の違いを確認しておきます。「正ナントカ角形」とは「全ての辺の長さが同じで、さらに全ての角の大きさも同じナントカ角形」のことです。辺の長さに違いがあったり、角の大きさに違いがあるものは「正ナントカ角形」ではありません。そういうのは「ありふれたナントカ角形」です。ですから、の場合、「正」という言葉には辺の長さや角の大きさが全て等しい」という気持ちが込められています。念のためもう 1 つ注意しておくと、「正四角形」のことを普通は「正方形」と呼んでいます。知ってましたよね。

次の図を見てください。立体を斜めから見た図を紙の上に無理して描いているのでわか

りにくいかもしれませんが、左の立体図形の底面は「正三角形」で「真ん中の立体図形の底面は「正方形（つまり正四角形)」で右の立体図形の底面は「正五角形」です。



この図のように、底面が「正ナントカ角形」であるようなナントカ柱のことを**正ナントカ柱**と呼びます。ですから、この図の左側の立体は「正三角柱」と呼ばれ、真ん中の立体は「正四角柱」とばれ、右側の立体は「正五角柱」と呼ばれるのです。

問 14. 正ナントカ柱について以下の問に答えなさい。

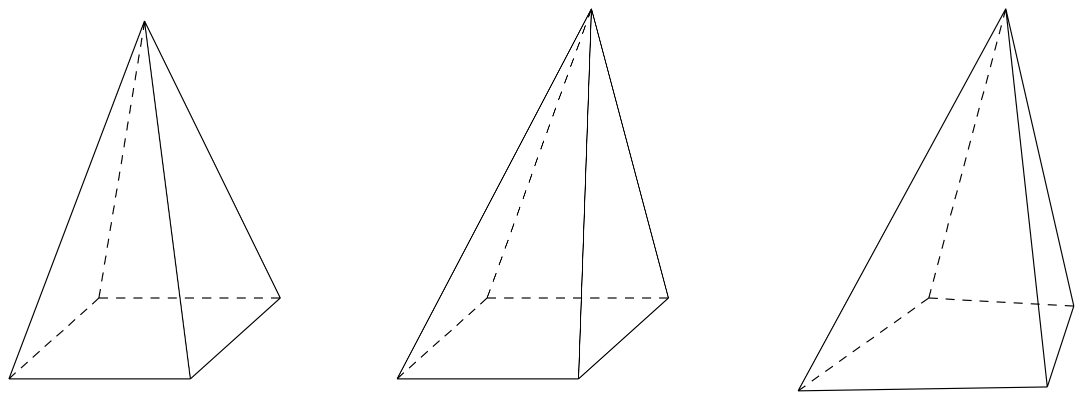
(1) 正ナントカ柱の側面は何という図形ですか。

(2) 正ナントカ柱の側面はもちろん 1 枚だけではありませんね。では、何枚かある「正ナントカ柱の側面の図形」の「形」や「大きさ」は全て同じですか。それとも違っていますか。

答えを見る

正ナントカ錐って何？

次の図を見てください。3 つの四角錐の見取り図がかかれています。立体図形を紙の上に無理して描いているので、少しわかりにくいかも知れませんが、左の四角柱は「きれいな形」をしているのに、真ん中や右の四角錐は「ゆがんだ形」をしているっていう気がしませんか？



「きれい」とか「ゆがんでいる」というのは人それぞれ感じ方が違うので、「えー、私はそう思わない」っていう人もいるかもしれません。でもこの 3 つの四角錐、違いがありますよね。そこでもう少し数学として適切な言い方で違いを言うことにしましょう。「左の四角柱はかなり対称性があるのに真ん中や右の四角柱は対称性があまりない」ということになります。まあ、「対称性」という少し難しい言葉をおいておくとしても、「バランス」とか「つりあい」ということを気にすると、右の四角柱と真ん中や左の四角柱では違いがありますよね。そこでどうしてこんな違いが出てきたのか、左の四角柱と右の四角柱を少し詳しく観察してみましょう。

3 つの四角柱の底面と頂点の位置に注目してください。（底面ってどこなのかもうわかりますよね。頂点ってどこなのかも知ってますよね。前に学んでいますから。）

まず、底面をよく観察してみましょう。3 つとも四角錐なのですから、底面は「四角形」ですよね。そして実は、

左の四角錐と真ん中の四角錐の底面は「正方形」

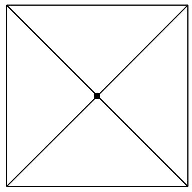
なのです。それに対して、

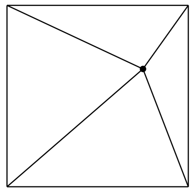
右の四角錐の底面は「特に特徴のない四角形」

です。ところで、「正方形」は 4 つの辺の長さはみんな同じで、4 つの角の大きさもみんな同じなのですよね。つまり「正方形」というのは「四角形」の中で一番バランスのとれているものですね。ですから、「正方形」を底面にして四角錐を作ると、「バランスのとれ

た四角錐」ができるのです。つまり、左の四角錐と真ん中の四角錐は右の四角錐よりバランスがとれているわけです。

でも、左の四角錐のほうが真ん中の四角錐よりさらにバランスがとれている感じがしますよね。これはどうしてなのでしょう。そこで、次に頂点の位置をよく観察してみることにします。左の四角錐の頂点のほうが、真ん中の四角錐の頂点と比べるとバランスのとれた所にあるって気がしませんか？

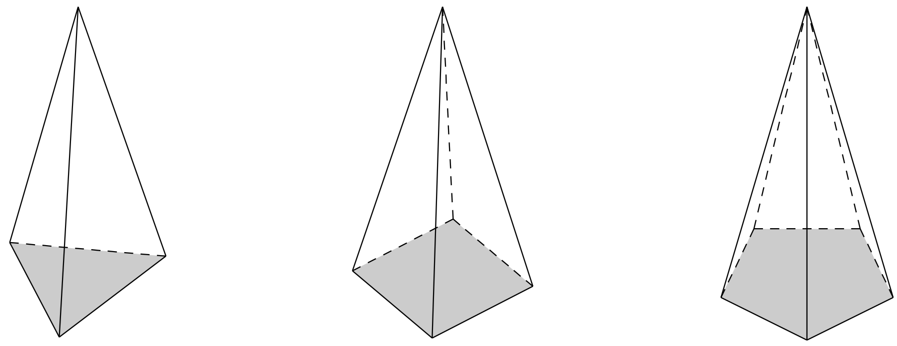




右の図を見てください。これはさっきの、左の四角錐と真ん中の四角錐を真上から見て描いた図です。どちらの図も 4 枚の三角形が見えていますが、これは四角錐の側面ですね。そして黒い点が頂点です。真上から見たこの図では、左の四角錐では頂点は底面のど真ん中にありますが、真ん中の四角錐では頂点の位置は底面のど真ん中にはありません。この違いが 2 つの四角錐のバランスの良さに影響しているのです。左の四角錐はバランスがよくとれていますが、真ん中の四角錐はバランスがいまひとつよくないのです。

以前学習したように「ナントカ錐」という言葉の「ナントカ」の部分は「底面の形」を意味しているのでしたね。さっき四角錐を見てわかったように、バランスがとれているナントカ錐では底面の形が「正ナントカ角形」になっています。しかし、それだけではダメです。頂点の位置も重要でしたね。バランスのよいナントカ錐を真上から見ると、頂点は底面のど真ん中に見えなくてはいけないのです。つまり、「底面を正ナントカ角形にして」、さらに「頂点の位置を、真上から見たときに底面のど真ん中に見えるようにしておく」と「バランスのとれたナントカ柱」ができるわけです。

次の図を見てください。立体を斜めから見た図を紙の上に無理して描いているのでわかりにくいかもしれませんが、左の立体図形の底面は「正三角形」で、「真ん中の立体図形の底面は「正方形（つまり正四角形)」で、右の立体図形の底面は「正五角形」です。そしてどの立体も、頂点は「真上から見ると底面のど真ん中に見える位置」にあります。



この図のように、底面が「正ナントカ角形」で、頂点の位置が「真上から見たときに底面のど真ん中にある」ようなナントカ錐のことを**正ナントカ錐**と呼びます。ですから、この図の右の立体は「正三角錐」と呼ばれ、真ん中の立体は「正四角錐」とばれ、左の立体は「正五角錐」と呼ばれるのです。

問 15. 正三角錐について以下の問に答えなさい。

(1) 正三角錐の側面はもちろん三角形ですね。でも三角形にも色々ありますよね。では正三角錐の側面の三角形にはどんな特徴がありますか。

(2) 正三角錐の側面はもちろん 1 枚だけではありませんね。では、何枚かある「正三角錐の側面の図形」の「形」や「大きさ」は全て同じですか。それとも違っていますか。

答えを見る

問 16. 正四角錐について以下の問に答えなさい。

(1) 正四角錐の側面はもちろん三角形ですね。でも三角形にも色々ありますよね。では正四角錐の側面の三角形にはどんな特徴がありますか。

(2) 正四角錐の側面はもちろん 1 枚だけではありませんね。では、何枚かある「正四角錐の側面の図形」の「形」や「大きさ」は全て同じですか。それとも違っていますか。

答えを見る

問 17. 正五角錐について以下の問に答えなさい。

(1) 正五角錐の側面はもちろん三角形ですね。でも三角形にも色々ありますよね。では正五角錐の側面の三角形にはどんな特徴がありますか。

(2) 正五角錐の側面はもちろん 1 枚だけではありませんね。では、何枚かある「正五角錐の側面の図形」の「形」や「大きさ」は全て同じですか。それとも違っていますか。

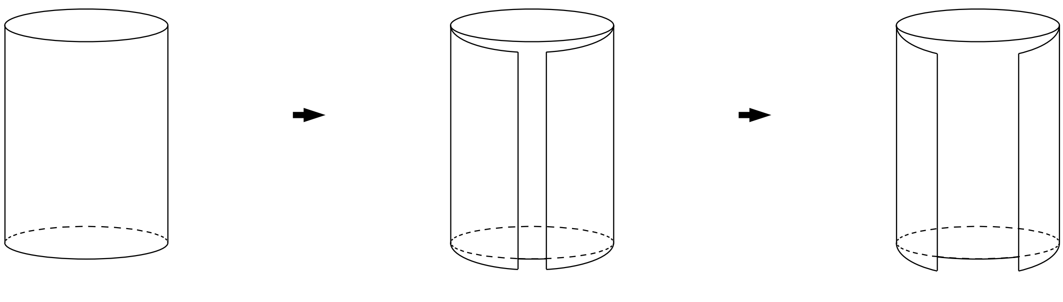
答えを見る

最後に念のための注意をしておきましょう。「ありふれた、特にバランスの取れていないナントカ錐」の側面は三角形であることはもうわかりますね。そしてもちろん正ナントカ錐の側面も三角形ですね。でも正ナントカ錐の側面はただの三角形ではありませんね。必ず 2 つの辺の長さが等しくなってますよね。

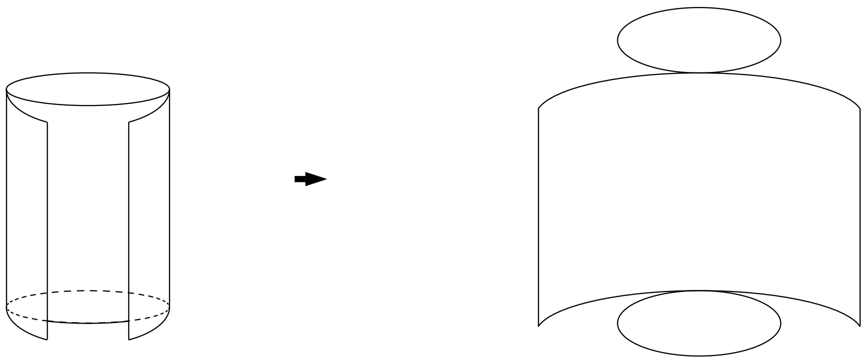
1.5　円柱の展開図と円錐の展開図

円柱の展開図を描くときに注意すること

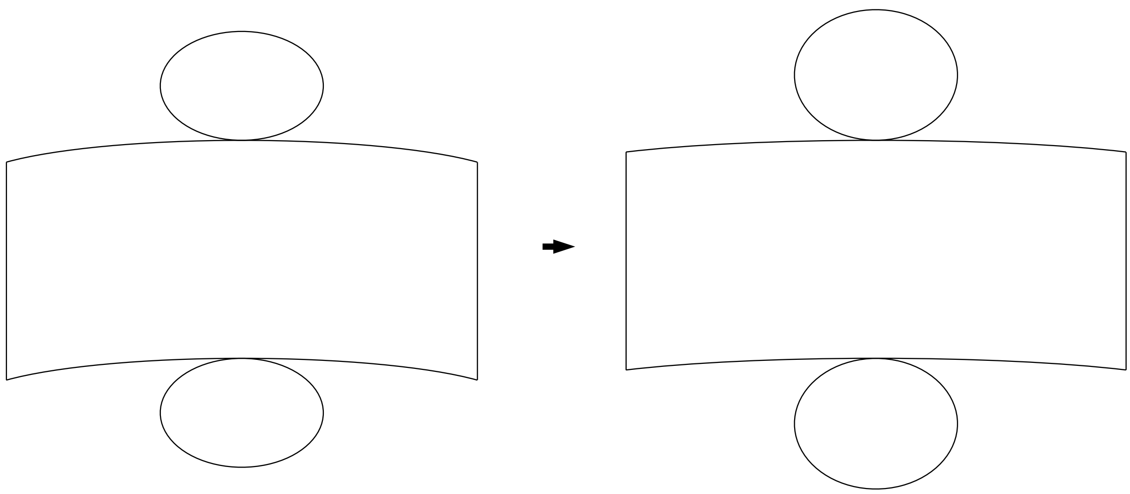
次の図を見てください。これは円柱を切り開いていく所を図にしたものです。



もっと開いていくと次のようになりますね。

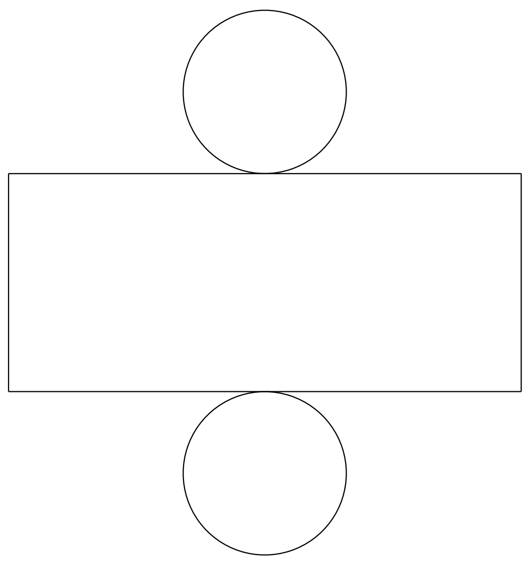


さらに開いていくと、次の図のようにどんどん平らになっていきます。上のふたと下のふたも開いていきます。

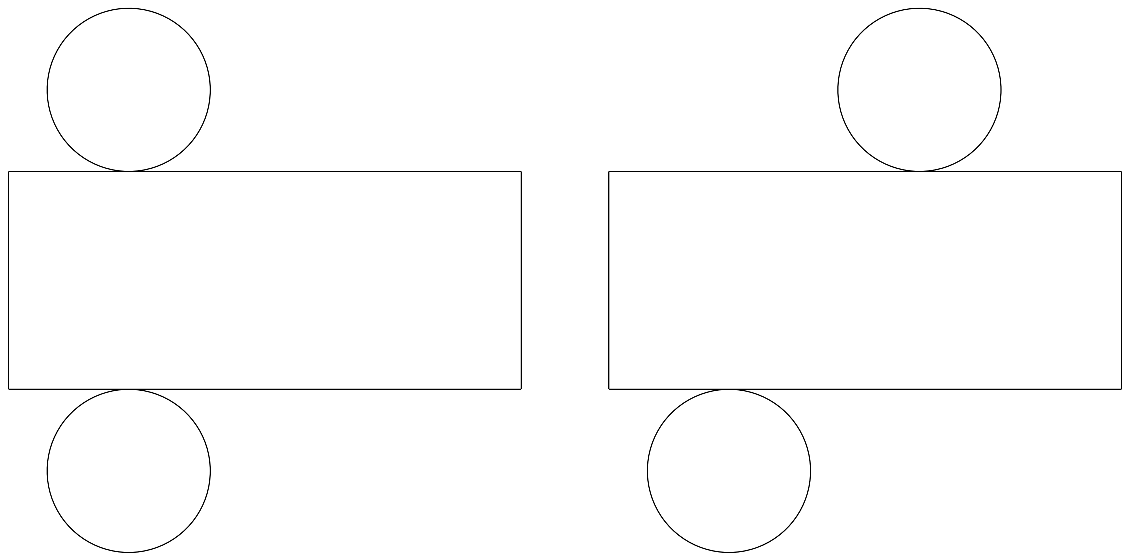


そしてついにはまっ平らにすることができます。

右の図を見てください。これが、さっきの円柱を切り開いてまっ平らにした図です。つまりこれが、さっきの円柱の展開図です。



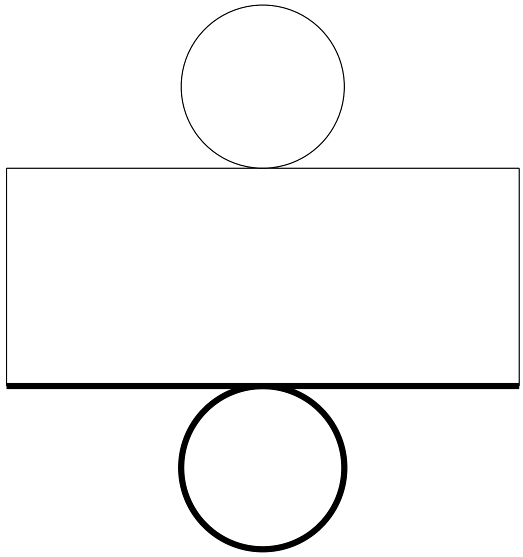
これまで学んできた「ナントカ柱」と同じように、円柱の展開図もいろいろ違ったものができます。次の図を見てください。



このどちらも、さっきの円柱の展開図です。それぞれの展開図を見て、自分の頭の中で組み立ててみてください。ちゃんとさっきの円柱ができがっていくところを想像できますか？どうしても頭の中で組み立てるのが難しかったら、この展開図をコピーしてはさみで切り取り、本当に組み立ててみてください。本当に作ったものをよく観察しておくと色々なことに気付きます。ただ図を見ているだけでは気付かないことに気付くこともあるのです。ぜひ一度、円柱を自分で工作してみることをおすすめします。

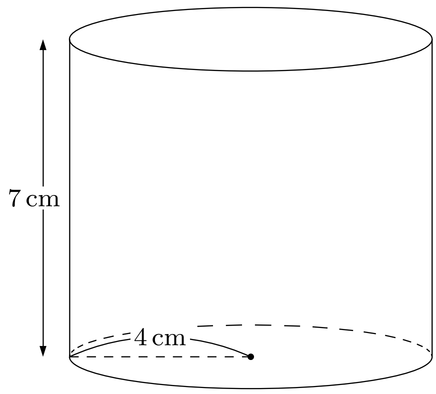
それでは、円柱の展開図を見てもう少し考えてみることにしましょう。まず、円柱の底面ですが、もちろん円ですよね。また、円柱の側面は 1 枚だけですね。そして、円柱の側面は必ず長方形になりますよね。

次に、底面の円と側面の長方形の関係を考えてみることにしましょう。展開図を見てください。円柱を組み立てるとき、どことどこが貼り合わさるのかわかりますよね。底面の円のふち（つまり底面の円周）は長方形の横の辺とぴったり貼り合わさるのですよね。



右の図を見てください。底面になる円の「ふち」が太く描かれています。また、側面になる長方形の「横向きの辺」が 1 本だけ太く描かれています。この太く描かれているところが、円柱を組みたてたときにぴったり重なるのですよね。ということは、この太くかかかれたところの長さは同じということです。これはとても重要な事実です。**円柱の展開図を描くときは、底面の円の周りの長さと、側面の長方形の横向きの辺の長さは等しくしておかなければならないのです。**

問 18. 右の図を見てください。これは底面の円の半径の長さが 4 cm で、高さが 7 cm の円柱です。まず、紙と定規とコンパスとはさみを用意してください。そして以下の問に答えなさい。



(1) 底面の円の周りの長さを求めなさい。

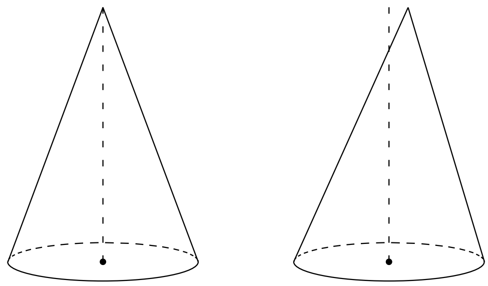
(2) 側面の長方形の横の長さを求めなさい。

(3) 定規やコンパスを使って、用意した紙に、この円柱の展開図をできるだけ正確に描きなさい。

(4) 展開図を切り抜いて円柱を組み立てなさい。

答えを見る

円錐の展開図を描くときに注意すること



詳しい話をする前に大切な注意をしておきます。右の図を見てください。2 つの円錐が描かれています。左の円錐はバランスがとれていますが右の円錐はいまいちバランスがとれていませんね。この 2 つの円錐ではどこが違うのか少し考えてみましょう。

この図では、どちらの円錐にも底面となっている円の中心に黒い点が打ってありますね。図を見てわかるように、

左の円錐では、「頂点」は「底面の円の中心」の真上にある

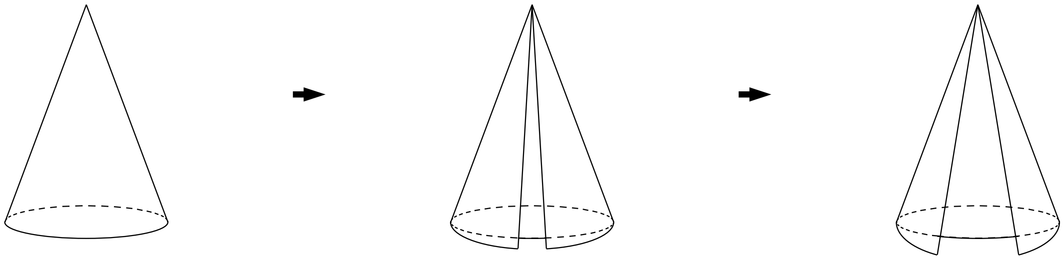
のですが、

右の円錐では「頂点」は「底面の円の中心」の真上にはない

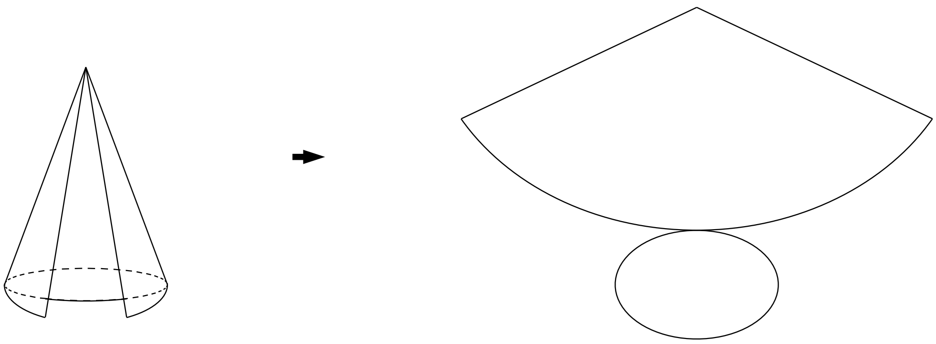
のです。この違いがバランスの良さ、悪さに関係しているのです。

これから円錐の展開図の話を学びますが、ここではさっきの図の左に描かれていたような、「頂点が底面の円の中心の真上にある円錐」だけを考えることにします。では本題に入ることにしましょう。

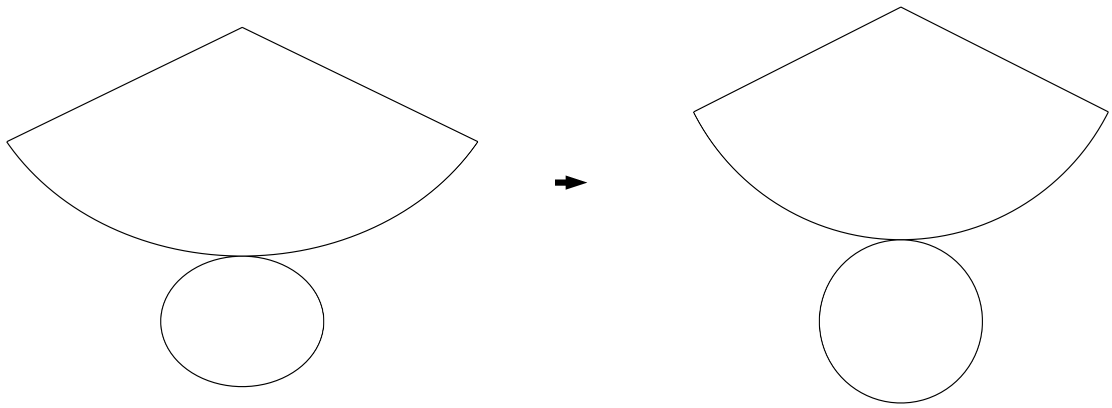
次の図を見てください。これは円錐を切り開いていく所を図にしたものです。



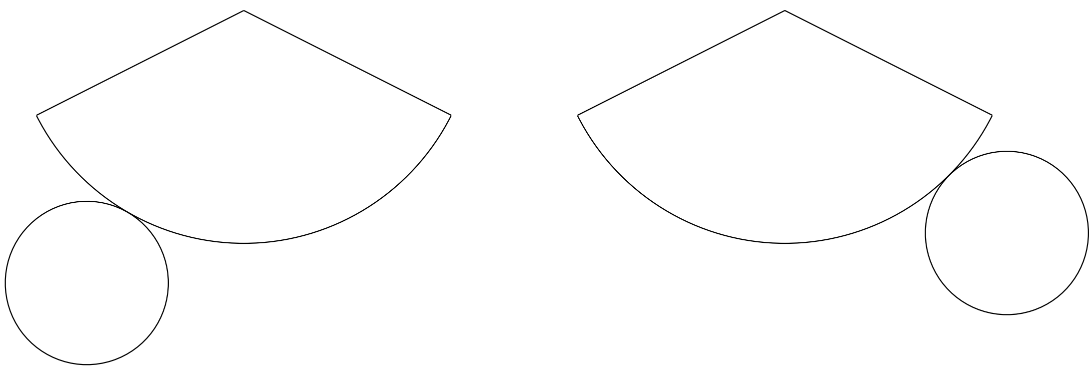
もっと開いていくと次のようになりますね。



そして下のふたも開いていくと、ついには次の図のように、まっ平らになっていきます。



この図の最後に描かれているものが、円錐の展開図です。これまで学んできた「ナントカ錐」と同じように。円錐の展開図もいろいろと違うものができます。次の図を見てください。

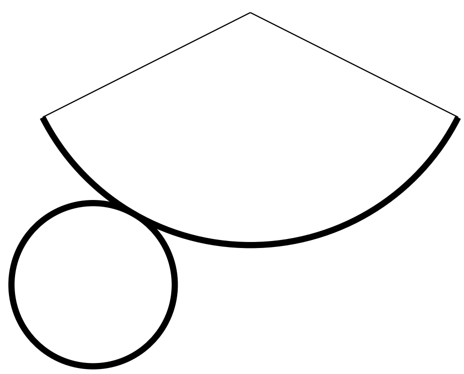


この図のどちらも、さっきの円錐の展開図です。それぞれの展開図を見て、自分の頭の

中で円錐を組み立ててみてください。ちゃんとさっきの円錐ができがっていくところを想像できますか？どうしても頭の中で組み立てるのが難しかったら、この展開図をコピーしてはさみで切り取り、本当に組み立ててみてください。本当に作ったものをよく観察しておくと色々なことに気付きます。ただ図を見ているだけでは気付かないことに気付くこともあるのです。

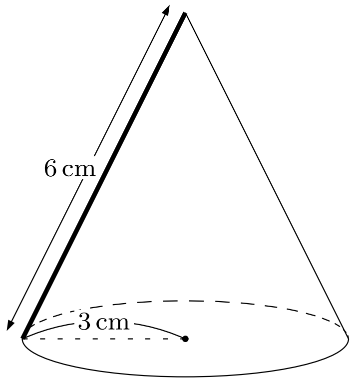
それでは、円錐の展開図を見てもう少し考えてみることにしましょう。まず、円錐の底面ですが、もちろん円ですよね。また、円錐の側面は１枚だけですね。そして、円錐の側面は必ずおうぎ型になりますよね。

次に、底面の円と側面のおうぎ型の関係を考えてみることにしましょう。展開図を見てください。円錐を組み立てるとき、どことどこが貼り合わさるのかわかりますよね。底面の円のふち（つまり底面の円周）はおうぎ型のふちのうちの曲がっている部分とぴったり貼り合わさるのですよね。



右の図を見てください。底面になる円の「ふち」が太く描かれています。また、側面になるおうぎ型の「ふちのうちのまがっている部分 (つまり側面のおうぎ型の弧)」が太く描かれています。この太く描かれているところどうしが、円錐を組みたてたときにぴったり重なるのですよね。ということは、この太くかかかれたところの長さは同じということです。これはとても重要な事実です。つまり、**円錐の展開図を描くときは、底面の円の周りの長さと、側面のおうぎ型のふちのうちの曲がっている部分（つまり側面のおうぎ型の弧）の長さは等しくしておかなければならないのです。**

問 19. 右の図を見てください。これは底面の円の半径の長さが 3 cm で、母線（太く描かれている線）の長さが 6 cm の円錐です。まず、紙と定規とコンパスと分度器とはさみを用意してください。そして以下の問に答えなさい。



(1) 底面の円の周りの長さを求めなさい。

(2) 側面のおうぎ型のふちのうちの曲がってる部分（つまり側面のおうぎ型の弧）の長さを求めなさい。

(3) 用意した紙に、この円錐の展開図をできるだけ正確に描きなさい。

(4) 展開図を切り抜いて円錐を組み立てなさい。

注意：この円錐の展開図を正確に描くためには、「側面となるおうぎ型」の半径と中心角を知る必要がありますね。でも、こういう場合、どうすれば半径や中心角がわかるのかということは、このシリーズのテキストの平面図形で学んでいますね。忘れてしまった人は、今すぐテキストを探して復習してください。

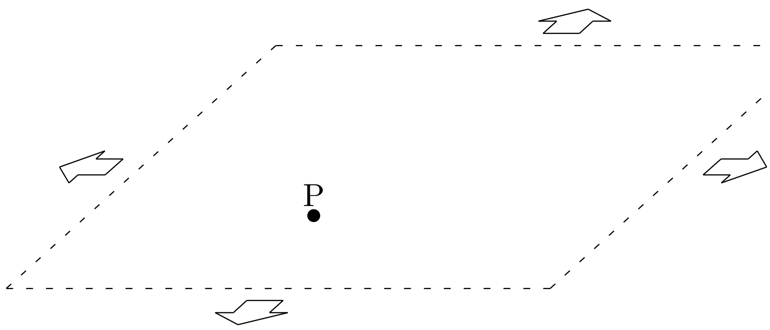
答えを見る

第2章

空間の中の直線と平面

2.1　あなたの生きている世界は平面それとも空間？

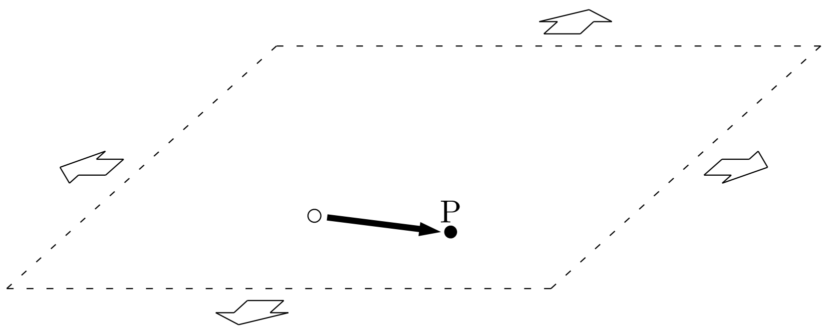
今では地球は丸い形をしていることがわかっています。しかし、大昔、人々は地球は平らであると考えていました。でもそれ、当然ですよね。だって考えてみてください。普通に毎日生活していれば、自分が住んでいる世界がまさか、曲がっているなんて感じることはないですよね。ロケットに乗って宇宙に出て、自分の住んでいたほうを見てみれば、「えっ、自分の住んでいる所って、丸い、ボールのような形をしていたのか。」ってわかると思いますが、普通に地球上で生活しているだけだったら、地球が丸いなんて感じることはないですからね。そこでここではとりあえず、大昔の人たちと同じように「私たちは平らな世界に住んでいる」と考えてみることにします。では次の図を見てください。



平面が 1 枚描かれています。この平面は、「ふち」のところが点線で描かれています。これはどうしてかというと、本当はこの平面は点線の外へ限りなくひろがっているからです。限りなく広がっているということを強調するために、矢印を描いておきました。またこの図には、点が 1 つ打たれています。その点の名前を P としておきました。

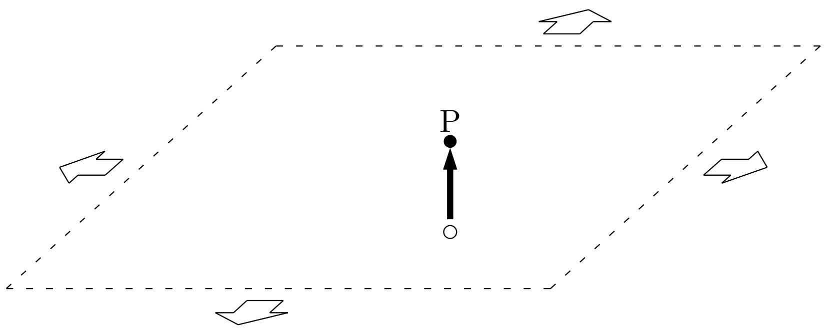
さっき私たちは、昔の人が考えていたように、平らな世界に住んでいると考えることにしました。そこでこの図の平面が、私たちの住んでいる世界だと思うことにしましょう。そして点 P はあなただと思うことにしましょう。つまり、あなたが住んでいるこの図の平面は、ものすごく広く、限りなく広がっていると考えるわけです。こんな広い世界の中では、あなたはとても小さく点のように見えることでしょう。ですからあなたをこの黒い点 P だと思うことにしたのです。

あなたはこの世界の中を自由に動くことができます。次の図を見てください。



あなたはさっきいた場所から黒い矢印に沿って移動しています。あなたがもといた場所には白い丸を描いておきました。

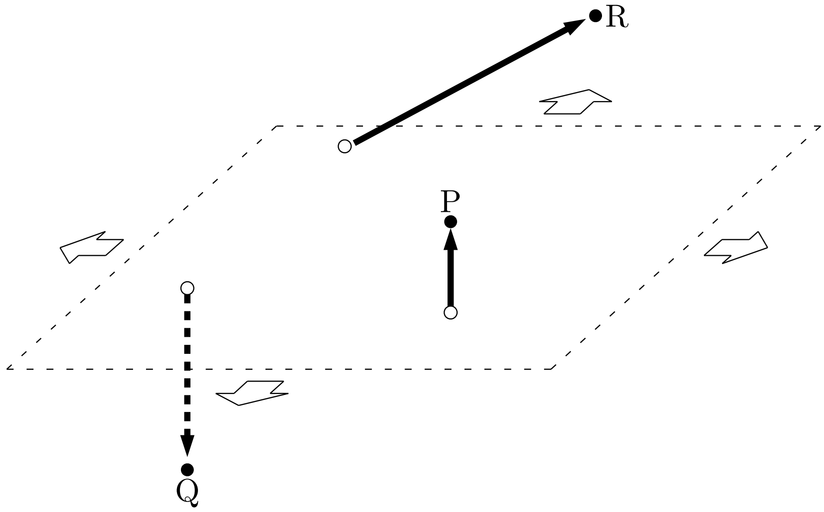
注意してほしいことがあります。今は、あなたが住んでいる全世界はこの図に描かれた平面だけと考えているということです。次の図を見てください。



この図では、点 P は平面から脱出し、平面の上に移動しています。しかし全世界が平面だけだと考える場合、点 P は平面から脱出できないのです。つまり、あなたはこの平面の「上」に出て行くことはできないのです。また、平面の「下」に出て行くこともせきません。あなたは平面の中だけを自由に動くことはできても、平面の外へ出て行くことはできないのです。（こういう世界は 2 次元の世界と呼ばれています。）

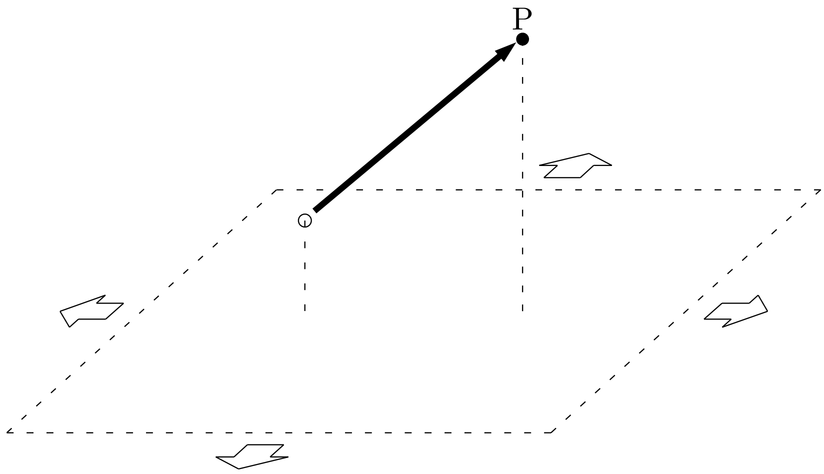
実際には、人間は少しぐらいならジャンプすることもできますし、飛行機に乗って高い所へいくこともできます。さらに、鳥などの飛ぶことができる生き物は、かなり自由に高さを変えて移動していくことができます。そこでこれから「高さ」もある世界を考えてみることにしましょう。「高さ」もある世界の住人は、「高い所」へいくこともできますし、「低い所」へ行くこともできます。つまり、「高さ」のある世界の住人は、鳥のように自由に高さを変えて飛ぶことができると思っていてください。

次の図を見てください。



この図は、「高さのある世界」の住人である P さんと Q さんと R さんが、平面を脱出して移動したところを表しています。初め 3 人とも平面の中にいたのですが、P さんは元いた場所の真上に移動し、Q さんは元いた場所の真下に移動し、R さんは元いた場所から斜め上へ移動しています。

今度は次の図を見てください。



この図では、もともと P さんは高い所にいます。そして P さんは斜め上のさらに高い所へ移動しています。これまで見てきてように、「高さもある世界」では、平面の中だけではなく、高い所や低い所を自由に移動できるのです。この世界では、世界は上のほうにも下のほうにも限りなく広がっているのです。（こういう世界は 3 次元の世界と呼ばれて

います。）

「高さのある世界」を紙の上に描くのは難しいんですよね。そしてまた、紙の上に描かれている「高さのある世界」を見ても、どこがどうなっているのか、なかなかわからないことがあります。でも、これは仕方のないことです。心を落ち着かせて、自分の頭で考えることが大切です。しかしこれまで見てきたいくつかの図のように、平らな世界を 1 つ描いてから考えるとわかりやすくなるかもしれません。もしそれでもわからなかったら、下敷きと消しゴムを使ってみてください。下敷きは平面の代わりで、消しゴムは点の代わりです。消しゴムを手に持って、下敷きの「上のほう」に静止させてみたり、下敷きの「下のほう」の静止させてみたりしてください。頭の中で想像するだけではなく、実際にやって見ると感じがつかめることもあるのです。

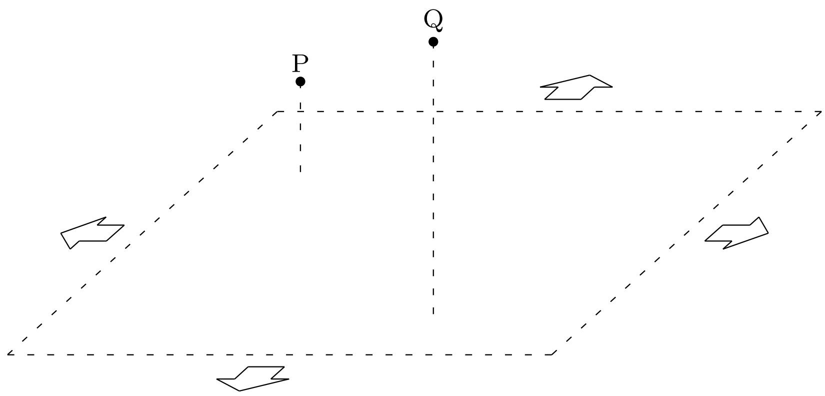
これからは、今まで説明してきたような「高さのある世界」を**空間**と呼ぶことにします。

ここで念のための注意をしておきます。これまで「空間」、つまり「高さのある世界」を考えるとき、「平面」を 1 枚もとにして考えてきました。ですから図を描くときも、「平面」が 1 枚かかれていましたね。しかし「空間」のことを考えるとき、そのような平面を「あらかじめ決めておかなくてはならない」というわけではありません。これまで図に描いていた平面は、「高さ」の基準を決める役割をしているだけです。「空間」にとっては、「高さの基準」はどこかにあらかじめ決まっているわけではなく、空間のことを考えようとしている人が自由に決めることができるからです。ですから空間を紙の上に描くときも、平面をどこかに 1 枚描かなくてはならないというわけではないのです。しかしそうすると、空間を紙の上に描くとき、描くものがなにもなくなってしまいます。それも困りますし、高さの基準となる平面が描いてあるとわかりやすくなることもあるので平面を 1 枚描いておいたりするのです。

2.2　空間の中にある 2 つの点を決めると直線が 1 つ決まる

あなたにいくつか質問をすることにします。

質問 1　次の図を見てください。



空間の中に 2 つの点 P と Q があります。それではあなたに質問です。

この 2 つの点 P と Q を両方とも通る直線は何本あるのでしょうか。

では 3 分待ちます。しっかり考えてください。

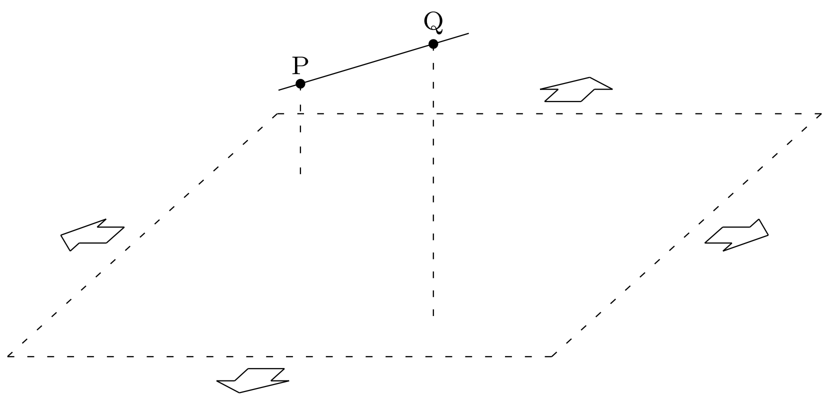
・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・

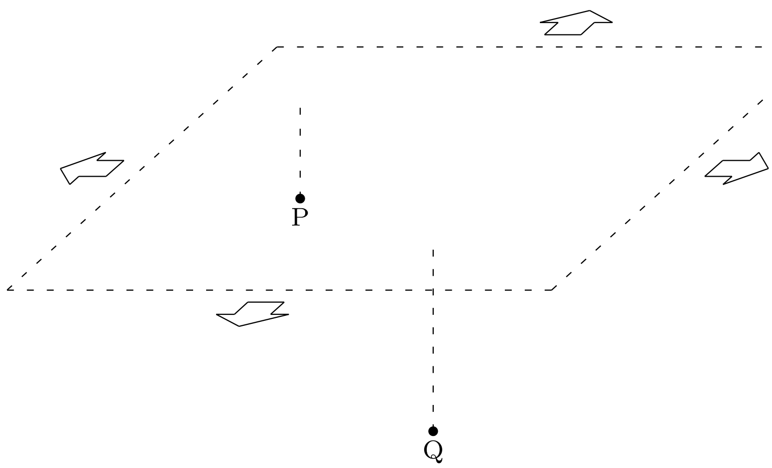
はい、3 分たちました。答えを教えることにしましょう。

質問 1 の答え　もちろん答えは「1 本」ですね。次の図を見てください。



点 P と点 Q を通る直線が描かれています。これ以外に、点 P と点 Q を通る直線はありません。この直線は「平面」より上のほうにあります。それはなぜかというと、もともとあった点 P と Q は両方とも平面より上のほうにあったからです。この直線は奥のほうから手前に向かって伸びていきます。もちろん「直線」という言葉を使ったのですから、この直線は P より奥のほうへ限りなく続いていますし、Q より手前にも限りなく続いています。

質問 2　次の図を見てください。



今度も、空間の中に 2 つの点 P と Q があります。でもさっきとは少し違って、P と Q は平面より下にあります。それではあなたに質問です。この 2 つの点 P と Q を両方とも通る直線は何本あるのでしょうか。

では 3 分待ちます。しっかり考えてください。

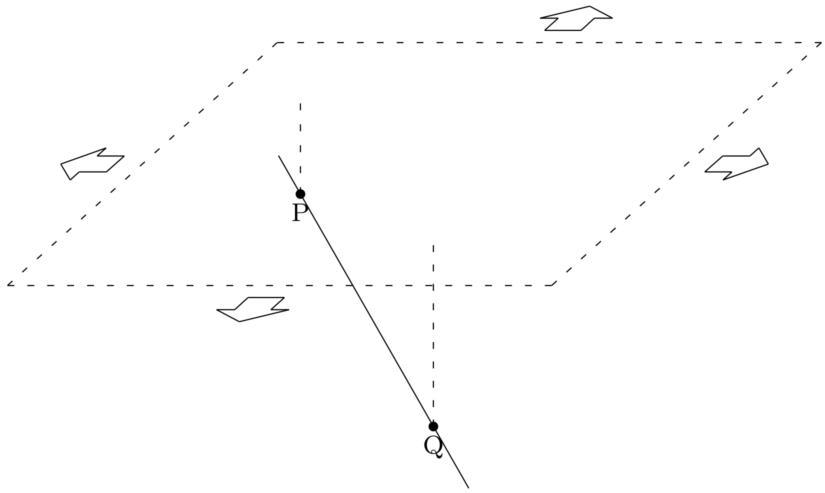
・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・

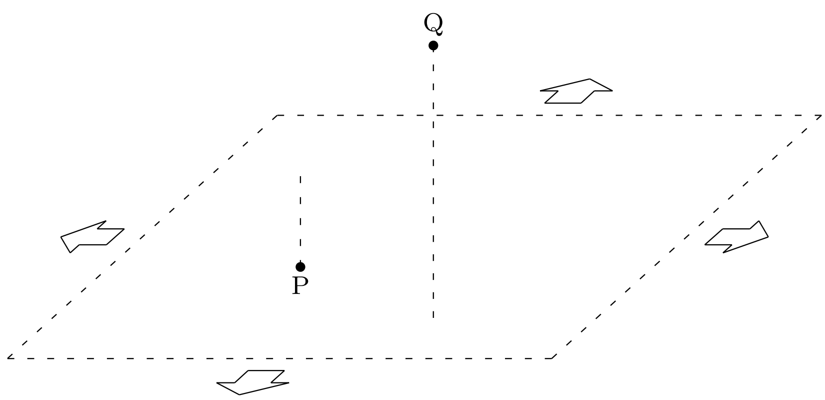
はい、3 分たちました。答えを教えることにしましょう。

質問 2 の答え　やはりこの場合も答えは「1 本」ですね。次の図を見てください。



点 P と点 Q を通る直線が描かれています。これ以外に、点 P と点 Q を通る直線はありません。この直線は「平面」より下のほうにあります。それはなぜかというと、もともとあった点 P と Q は両方とも平面より下のほうにあったからです。この直線は奥のほうから手前に向かって伸びていきます。もちろん「直線」という言葉を使ったのですから、この直線は P より奥のほうへ限りなく続いていますし、Q より手前にも限りなく続いています。

質問 3　次の図を見てください。



また今度も、空間の中に 2 つの点 P と Q があります。でもさっきとは少し違って、P は平面よりも下にあり、Q は平面より上にあります。それではあなたに質問です。この 2 つの点 P と Q を両方とも通る直線は何本あるのでしょうか。

では 3 分待ちます。しっかり考えてください。

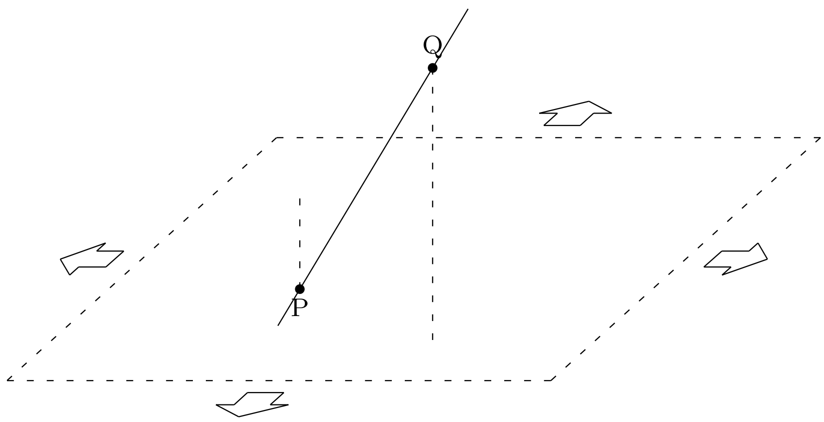
・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・

はい、3 分たちました。答えを教えることにしましょう。

質問 3 の答え　やはりこの場合も答えは「1 本」ですね。次の図を見てください。



点 P と点 Q を通る直線が描かれています。これ以外に、点 P と点 Q を通る直線はありません。この直線は「平面」を突き抜けていきます。それはなぜかというと、P は平面より下のほうにあり、Q は平面より上のほうにあったからです。この直線は奥のほうから手前に向かって伸びていきます。もちろん「直線」という言葉を使ったのですから、この直線は P より奥のほうへ限りなく続いていますし、Q より手前にも限りなく続いています。

質問 1 から質問 3 で見てきたように、空間の中に 2 つの点を決めておくと、その 2 つの点を両方通る直線はただ 1 本だけとなるのです。

ここでは、初めに決めた 2 つの点が「両方とも平面より上にあるとき」、「両方とも平面より下にあるとき」、「1 つの点は平面より下にあるけどもう 1 つの点は平面より上にあるとき」に分けて説明をしました。でも、これ、そんなに意味のあることではありませんよね。前にも話しておきましたが、空間のことを考えるときに、平面を描いておく必要はないのでしたね。紙の上に空間を描くのはそもそも無理があるのですが、平面を描いておくと「なんとなく空間っぽく見える」からそうするのですよね。ですから、平面を描かなくても空間のことを考えられるようになった人は、さっきのように話を 3 つに分ける必要はありませんね。

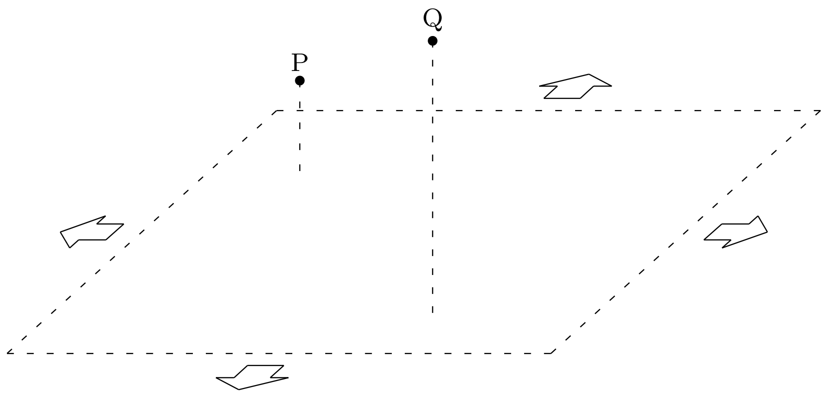
以上念のための補足でした。

ところで、さっきまで見てきた図ですが、どうなっているのか本当にわかりましたか？図を見てもどうなっているのかわからなかった人は、前にも言ったように、下敷きと消しゴムを用意してください。この話では 2 つ点が出てくるのですから、消しゴムは 2 つ必要ですよね。また、直線のことを考えるのですから、まっすぐな棒を 1 本用意しておきましょう。（長めの鉛筆でもいいですよ。）下敷きと消しゴム 2 個とまっすぐな棒など、結構たくさんのものを使うので、あなたの 2 本しかない手だけではたりないかも知れません。そこで友達にも手伝ってもらうことにしましょう。用意ができたら、友達に 2 つの消しゴムを持ってもらい、例えば下敷きの上のほう静止してもらってみてください。2 つの静止した消しゴムが、平面の上のほうにある 2 つの点 P と Q の代わりです。そしてあなたは棒を持ち、その棒が 2 個の消しゴム両方に触れるようにするのです。そうすると、あなたの持っている棒が、P と Q を通る直線なのです。どうですか、あなたがやった以外に、両方の消しゴムに触れるような棒の当て方ってありますか？ないですよね。P と Q を両方とも通る直線は 1 本しかないってこと、これで納得してもらえましたか？

2.3　空間の中の 2 つの点を決めても平面は決まらない

あなたに質問です。

質問　次の図を見てください。



空間の中に 2 つの点 P と Q があります。それではあなたに質問です。この 2 つの点 P と Q を両方とも含む平面は何枚あるのでしょうか。つまり、点 P と点 Q が乗ってしまう平面は何枚あるのでしょうか。では 3 分待ちます。しっかり考えてください。

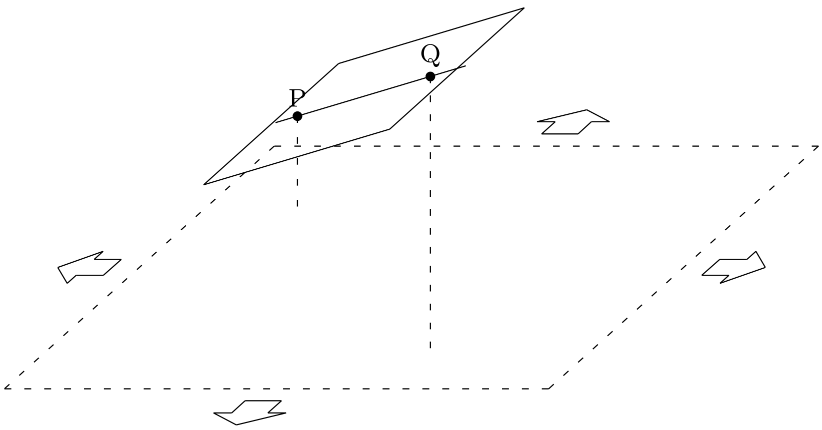
・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

はい、3 分たちました。答えを教えることにしましょう。

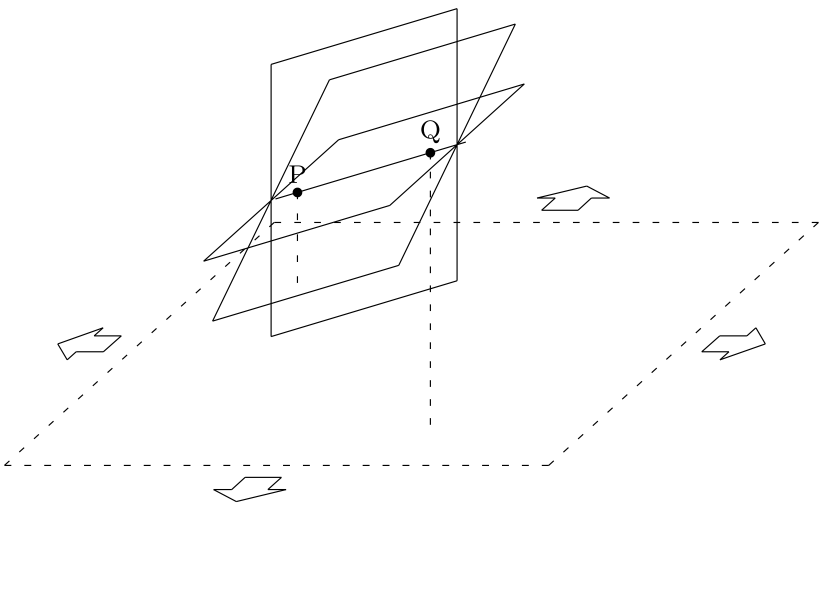
質問の答え　答えは「いくらでもある」です。次の図を見てください。



点 P と点 Q が乗っている平面が描かれています。図をわかりやすくするために、一応、P と Q を通る直線も描いてあります。この直線はもちろんこの平面に乗っています。

実はこの平面以外にも、P と Q が乗るような平面がいくらでもあるのです。そのことをこれから図を使って説明します。

次の図を見てください。



この図には、P と Q が乗っている平面が 3 枚描かれています。図を見るとわかると思いますが、この 3 枚の平面は、P と Q を通る直線を軸にして回転するとお互いに移り合います。つまり、P と Q が乗っている平面が 1 枚見つかれば、その平

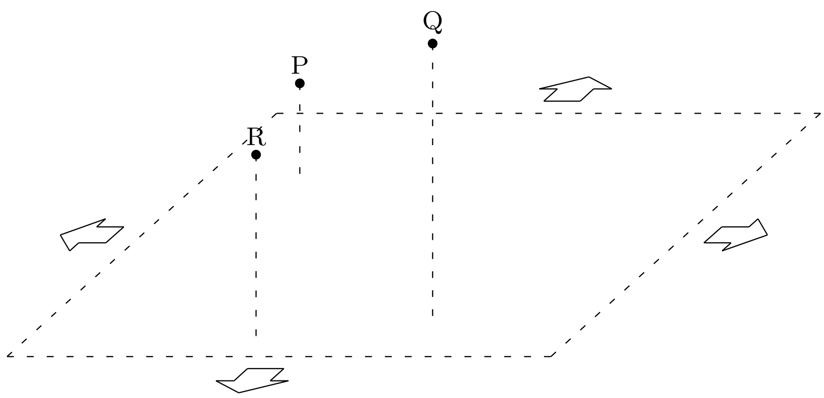
面を、P と Q を通る直線を軸にして回転すると、いくらでもたくさん P と Q が乗っている平面ができるのです。このように考えれば、空間の中にある 2 つの点 P と Q が乗っている平面はいくらでもあるということが納得できるでしょう。

空間の中に 2 つの点を決めれば、その 2 つの点を通る「直線」は 1 つだけですが、その 2 つの点を通る「平面」はいくらでもあるのです。

2.4　たいていの場合、空間の中の3つの点を決めると平面が1つ決まる

あなたに質問です。

質問　次の図を見てください。



空間の中に 3 つの点 P、Q、R があります。それではあなたに質問です。この 3 つの点 P、Q、R をすべて含む平面は何枚あるのでしょうか。つまり、点 P、Q、R が全部乗ってしまう平面は何枚あるのでしょうか。では 3 分待ちます。しっかり考えてください。

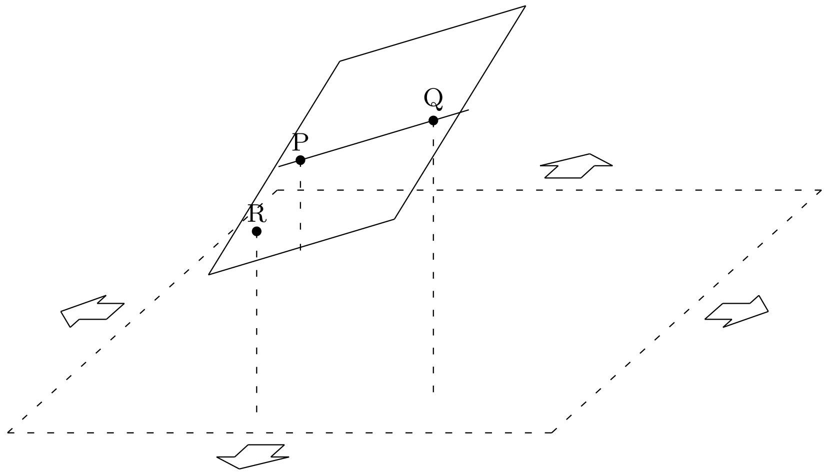
・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・

はい、3 分たちました。答えを教えることにしましょう。

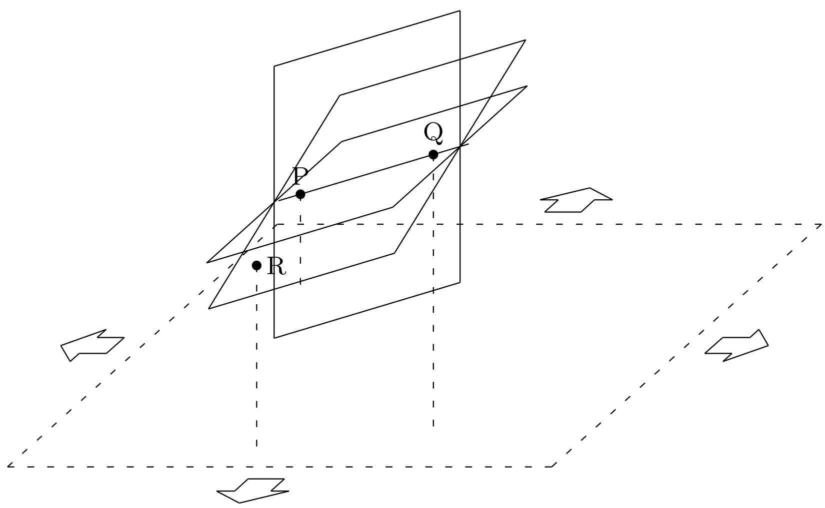
質問の答え　答えは「1 枚だけ」です。次の図を見てください。



この図には、点 P、Q、R が乗っている平面が描かれています。図をわかりやすくするために、一応、P と Q を通る直線も描いてあります。この直線はもちろんこの平面に乗っています。

この平面以外にはもう、P、Q、R が全部乗るような平面はありません。そのことをこれから図を使って説明します。

次の図を見てください。



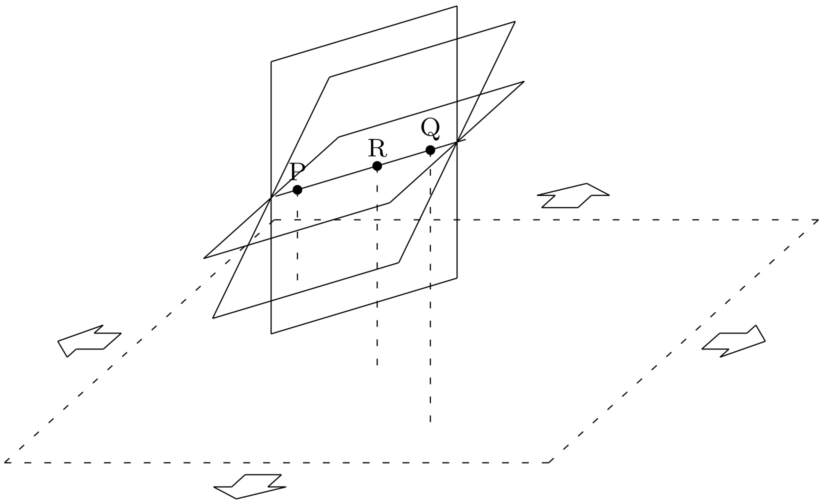
これは前に、2 つの点を決めてもその 2 つの点を通る平面はたくさんある」ということを説明するときに使った図と同じような図ですが、この図には第 3 の点 R も

描かれています。この図には、P と Q が乗っている平面が 3 枚描かれています。前にも説明しましたが、この 3 枚の平面は、P と Q を通る直線を軸にして回転するとお互いに移り合います。つまり、P と Q が乗っている平面が 1 枚見つかれば、その平面を、P と Q を通る直線を軸にして回転すると、いくらでもたくさん P と Q が乗っている平面ができるのでしたね。ということは、もし初めに見つけた平面に点 R が乗っていなかったとしても、その平面を P と Q を通る直線を軸にして回転していけば、そのうち点 R が平面に乗るようになるのわけです。点 R が乗ったらもう回転してはいけません。ですから点 R も乗るような平面は 1 つだけということでになります。

ところで思い出してほしいのですが、たしかこの話につけられているタイトル、「たいていの場合、空間の中の 3 つの点を決めると平面が 1 つ決まる」でしたよね。でも「たいていの場合」ってどういうことなのでしょうか。平面が 1 つに決まらないこともあるのでしょうか。あるとしたら、それはどういう場合なのでしょう。これから考えてみることにします。

これまで学んできた話を思い出してみると、空間の中の 2 つの点を決めても、平面は 1 つには決まらず、その 2 つの点を通る平面はいくらでもあるのでした。しかし、いくらでもあるといっても、むやみやたらにあるのではありません。その 2 つの点を通る直線を軸にして、くるくると回転させることができるだけです。そして、もし 3 つ目の点があれば、うまい具合に回転させてその点も平面に乗るようにできるのでした。でも、もし、3 つ目の点が「1 つ目、2 つ目の点を通る直線」の上に乗っていたらどうでしょう。

次の図を見てください。



この図のように3つの点P、 Q、Rがまっすぐ1つの直線の上に並んでいると、当たり前のことですが、3つの点P、Q、Rは、この直線を軸にして回転してできるどんな平面の上のも乗っています。この図では、RはPとQの間にありますが、RがPより向こうにあるときも、RがQよりこっちにあるときも、平面をいくら廻転させてもやはり3つの点はどの平面にも乗ったままですよね。

ここまでの話を、まとめておきます。空間の中に3つの点が決められたとします。もし、この3つの点がまっすぐ並んでいなければ、この3つの点が全部乗ってしまう平面が1つに決まります。しかし3つの点がまっすぐ並んでいる場合、平面は1つには決まりません。そういう場合は3つの点が全部乗ってしまう平面がいくらでもあるのです。

2.5　空間の中に2つの直線があるときの位置関係

おさらい：平面の中に2つの直線があるときの位置関係

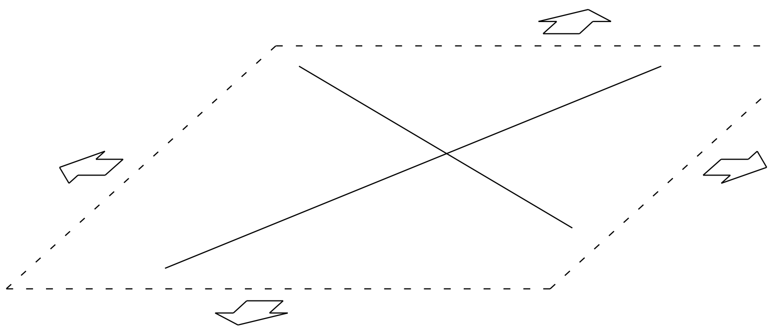
以前、平面図形のことを学んだときに、「平面の中に2つの直線があったら、お互いの位置関係としてどんな場合が考えられるのか」という話が出てきましたね。覚えていますよね。「位置関係ってなに？位置関係とか難しいことといわれても困るー」なんていっている人はいませんか？もし、何の話なのか思い出せなかったら、平面図形のテキストを探し

て、今すぐ復習してください。ここでは簡単におさらいするだけにします。今、平面の中のことだけを考えるのですから、全世界は平面だけです。つまり、平面の外へ出て行くことはできないのです。このことをしっかり頭の中に入れて、この先の説明を読んでください。

平面の中に 2 本直線があると、次のようなことが起こります。

平面の中の 2 本の直線の位置関係その 1：2 本の直線が 1 つの点で交わっている

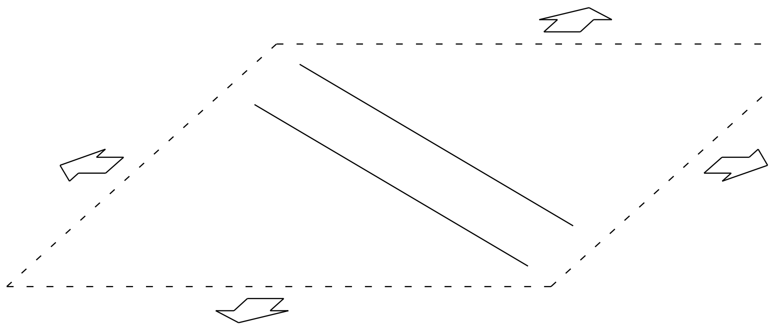
次の図のようになっている場合です。



念のために注意をしておきます。今、全世界は平面の中だけです。この図では、平面は点線で描かれています。点線の外にも、矢印のほうに、平面は限りなく広がっています。しかし、今、全世界は平面の中だけです。つまり、この平面の上や下の世界はありません。ですから、この図に描かれている 2 本の直線も、この平面の外に出ている部分はありません。

平面の中の 2 本の直線の位置関係その 2：2 本の直線はどこまで行っても交わらない

次の図のようになっている場合です。

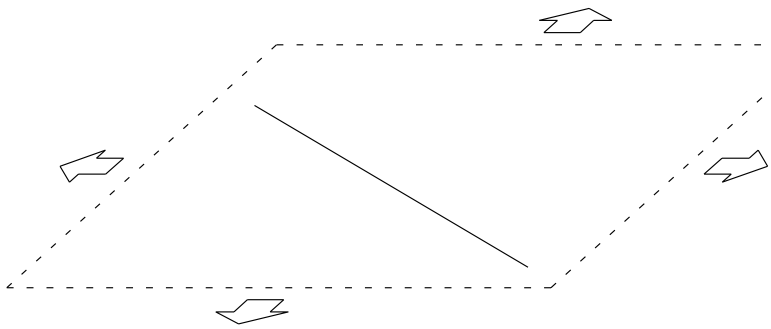


念のために注意をしておきます。今、全世界は平面の中だけです。この図では、平面は点線で描かれています。点線の外にも、矢印のほうに、平面は限りなく広がっています。しかし、今、全世界は平面の中だけです。つまり、この平面の上や下の世界はありません。ですから、この図に描かれている 2 本の直線も、この平面の外に出ている部分はありません。

あなたもきっと知っていると思いますが、こういうとき「2 つの直線は平行である」というのでしたね。

平面の中の 2 本の直線の位置関係その 3：2 本の直線がぴったり重なっている

次の図のようになっている場合です。



念のために注意をしておきます。今、全世界は平面の中だけです。この図では、平面は点線で描かれています。点線の外にも、矢印のほうに、平面は限りなく広がっています。しかし、今、全世界は平面の中だけです。つまり、この平面の上や下の世界はありません。

ですから、この図に描かれている 2 本の直線も、この平面の外に出ている部分はありません。

よく見てくださいね。この図、1 本しか直線が描かれていないように見えますが、本当は 2 本あるんですよ。でも、ぴったり重なっているので 1 本にしか見えないんです。心の目で見ればきっと 2 本あるのがわかるでしょう。

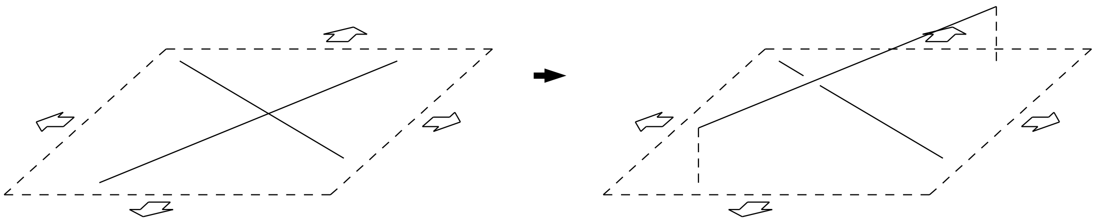
以上 3 つのパターンを紹介しました。実は、これ以外にはないのです。平面の中に 2 本直線があるとき、この 3 パターン以外のことが起きることはないのです。これは大切なことなので、しっかり頭に入れておいてください。

おさらい終わり

空間の中に 2 つの直線があるときの位置関係

では、本題に入りましょう。ここから、空間の中にある 2 つの直線のことを考えることにします。

これまでも何度も見てきたことですが、空間というのは高さのある世界のことですね。つまり、平面の中だけではなく、平面の上のほうや下のほうにも世界が広がっているのです。ですから、空間の中に住んでいる人は、平面より上のほうや、平面より下のほうにも行くことができるのです。ここで、さっきおさらいした、「平面の中の 2 つの直線」のことを思い出してみます。例えば、2 つの直線が「平面の中で」交わっている場合がありましたね。次の図を見てください。



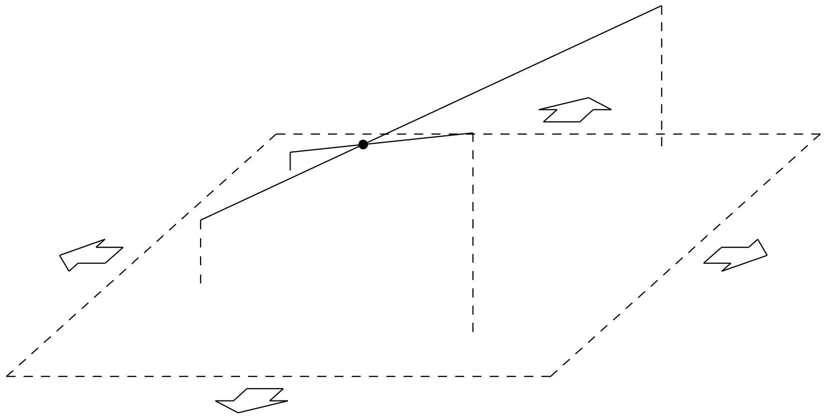
この図では、左側に、「2 つの直線が平面の中で交わっている場合」が描かれています。今、「空間」の中のことを考えているのですから、世界は平面の中だけではなく、平面より上のほうや下のほうへも広がっています。ですから、直線を平面の上のほうへ上げたり、平面の下のほうへ下げたりすることができます。例えば左側の図の片方の直線を平面の上のほうへ上げると、右側の図のようになりますね。このようにすると、もう 2 つの直線は交わってはいません。でも、この図を見てもわかるとおり、この 2 つの直線は「平行」というわけではありませんね。つまり、空間の中では、2 つの直線は「交わらないけど、平行なわけでもない」という事態が起こるのです。これは平面の中では絶対に起きないことです。空間の中だからこそ起きる出来事なのです。空間の中にある 2 つの直線が、交わらないけど平行でもないとき、2 つの直線は**ねじれの位置にある**といいます。(まぁ、変な言い方ですが、なんとなく「ねじれている」感じがしますよね。) あなたはきっと「立体交差」って知ってますよね。高速道路などで、道と道が上下に交差している所のことです。立体交差では、道と道が交差しているといっても、交差点はありません。道と道は交わらないのです。交わらないからといって、同じ方向へ進むわけでもありません。つまり平行ではないのです。こういうのが「ねじれの位置」なのです。

というわけで、2 つの直線の位置関係は、全世界が「平面」から「空間」へ広がると、「全世界が平面のときにはありえなかった事態が 1 つ起きる」ということがわかりました。2 つの直線がねじれの位置にあるということが起きるのです。この事態も含めて、「空間

の中で起こりうる事態」をまとめておきましょう。

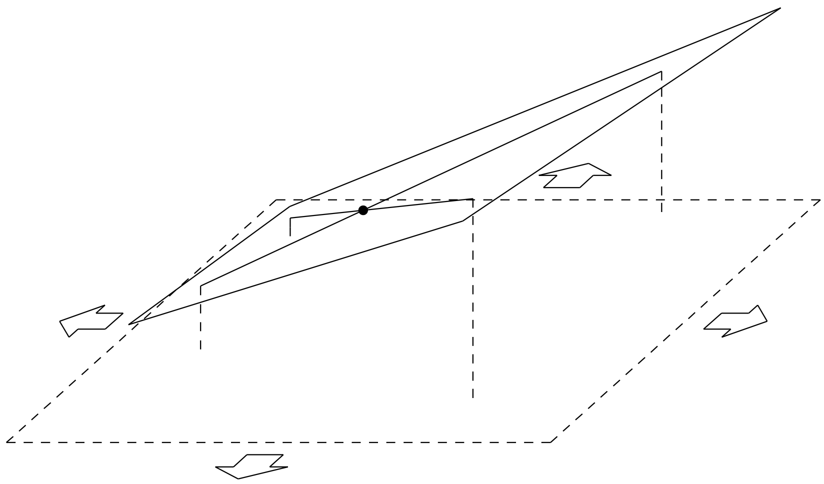
空間の中の 2 本の直線の位置関係その 1：2 本の直線が 1 つの点で交わっている

　次の図のようになっている場合です。

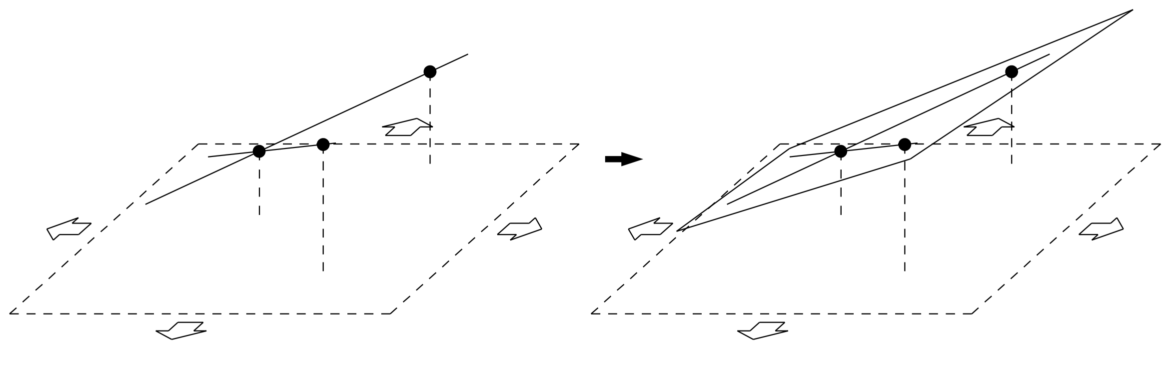


　念のために注意をしておきます。この図では、平面は点線で描かれています。点線の外にも、矢印のほうに、平面は限りなく広がっています。また今、空間の中の出来事を考えるのですから、全世界は平面の中だけではなく平面の上のほうや下のほうへも広がっています。（この図では、2 つの直線は、平面より上にありますが、深い意味はありません。図を見やすくするためにそうしてあるだけです。）

では次の図を見てください。



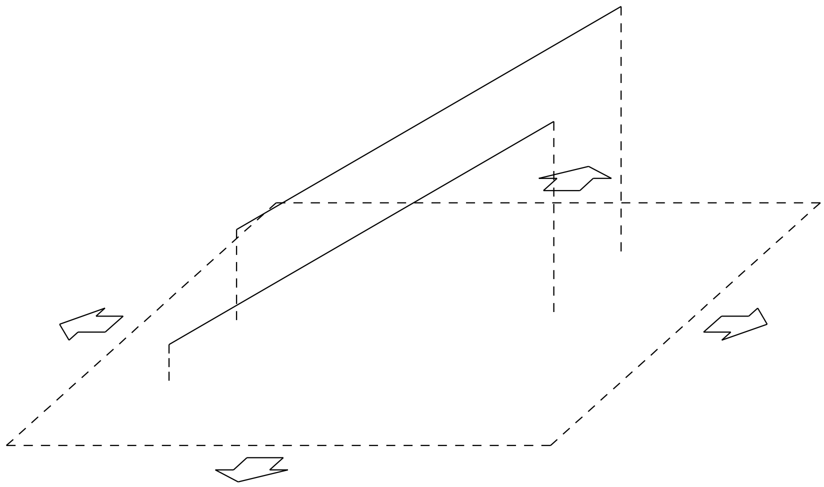
空間の中で 2 つの直線が交わっている場合、その 2 つの直線が両方とも乗ってしまう平面があるのです。このことは、この図を見るとまぁ、「明らかなこと」と思うかもしれませんが、今数学の学習をしているので、このことをもう少し論理的に考えることにします。以前、空間の中に 3 つの点が決められると、その 2 つの点が乗ってしまう平面が 1 つ決まるということを学びましたね。ただし、この場合、3 つの点はまっすぐ並んでいてはいけません。ところで今、私たちは、「空間の中の 2 つの直線が 1 つの点で交わっている」話を考えています。そのような場合、「2 つの直線が交わる点」、「片方の直線の上にある点」、「もう片方の直線の上にある点」という 3 つの点を決めることができます。(「片方の直線の上にある点」と「もう片方の直線の上にある点」は「2 つの直線が交わる点」と違う点であればどこでもかまいません。）このことをよく理解するために、次の図を見てください。



この図の左側の図は、「空間の中で交わる 2 本の直線」の上に 3 つの点をとったことをあらわしています。3 つの点はさっき説明したように、「2 つの直線が交わる点」、「片方の直線の上にある点」、「もう片方の直線の上にある点」です。この 3 つの点はまっすぐには並んでいませんね。ではこの図の右側の図を見てください。以前学んだことですが、このようなときはこの 3 つの点が全て乗るような平面が 1 つだけあるはずなのです。そして、2 つの直線はこの平面の上に乗るのです。

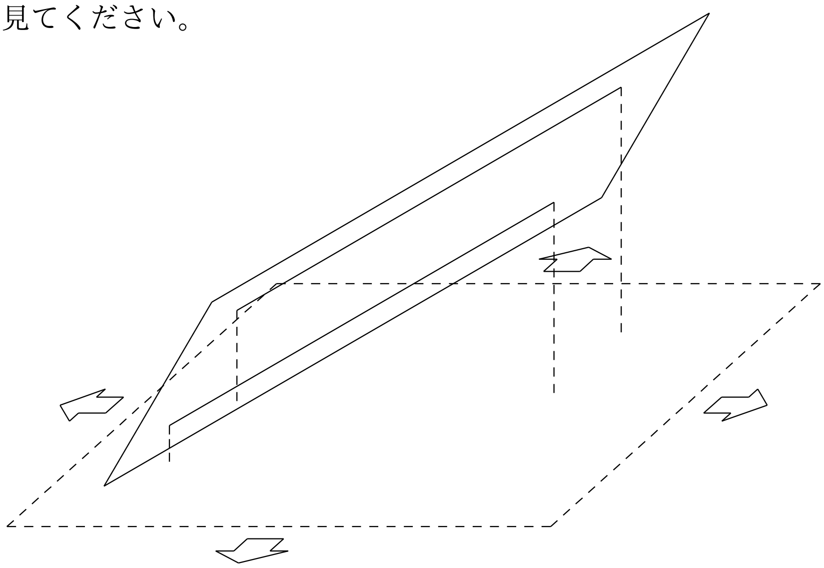
空間の中の 2 本の直線の位置関係その 2：2 本の直線が平行になっている

次の図のようになっている場合です。



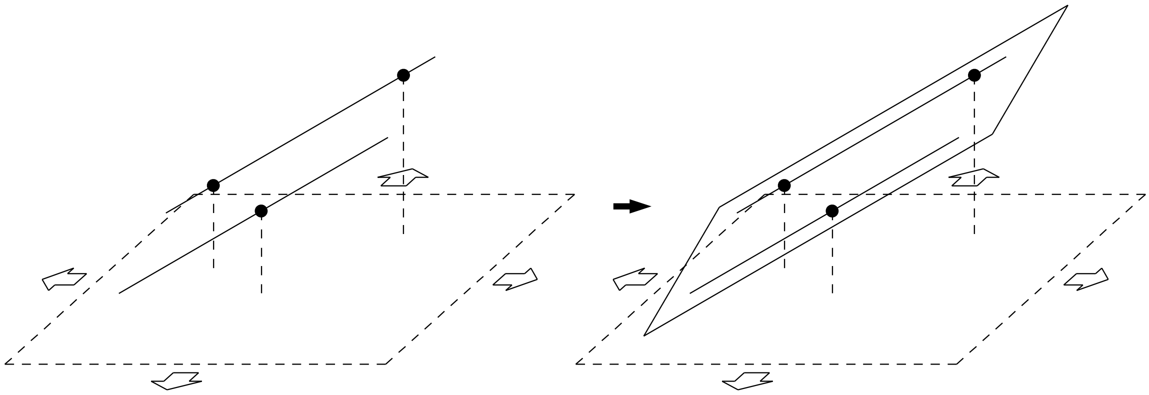
念のために注意をしておきます。この図では、平面は点線で描かれています。点線の外にも、矢印のほうに、平面は限りなく広がっています。また今、空間の中の出来事を考えるのですから、全世界は平面の中だけではなく平面の上のほうや下のほうへも広がっています。（この図では、2 つの直線は、平面より上にありますが、深い意味はありません。図を見やすくするためにそうしてあるだけです。）

では次の図を見てください。



空間の中で 2 つの直線が平行になっている場合、その 2 つの直線が両方とも乗ってしま

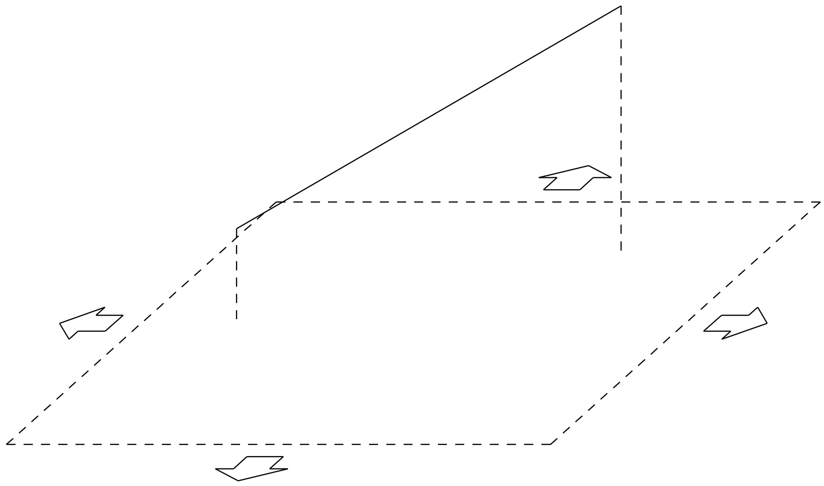
う平面があるのです。このことは、この図を見るとまぁ、「明らかなこと」と思うかもしれませんが、今数学の学習をしているので、このことをもう少し論理的に考えることにします。以前、空間の中に 3 つの点が決められると、その 3 つの点が乗ってしまう平面が 1 つ決まるということを学びましたね。ただし、この場合、3 つの点はまっすぐ並んでいてはいけません。ところで今、私たちは、「空間の中の 2 つの直線が平行になっている」話を考えています。そのような場合、「片方の直線の上にある 2 つの点」、「もう片方の直線の上にある点」という 3 つの点を決めることができます。このことをよく理解するために、次の図を見てください。



この図の左側の図は、「空間の中で平行になっている 2 本の直線」の上に、3 つの点をとったことをあらわしています。3 つの点は、さっき説明したように、「片方の直線の上にある 2 つの点」、「もう片方の直線の上にある点」です。この 3 つの点はまっすぐには並んでいませんね。ではこの図の右側の図を見てください。以前学んだことですが、このようなときはこの 3 つの点が全て乗るような平面が 1 つだけあるはずなのです。そして、2 つの直線はこの平面の上に乗るのです。

空間の中の 2 本の直線の位置関係その 3：2 本の直線が一致している

次の図のようになっている場合です。

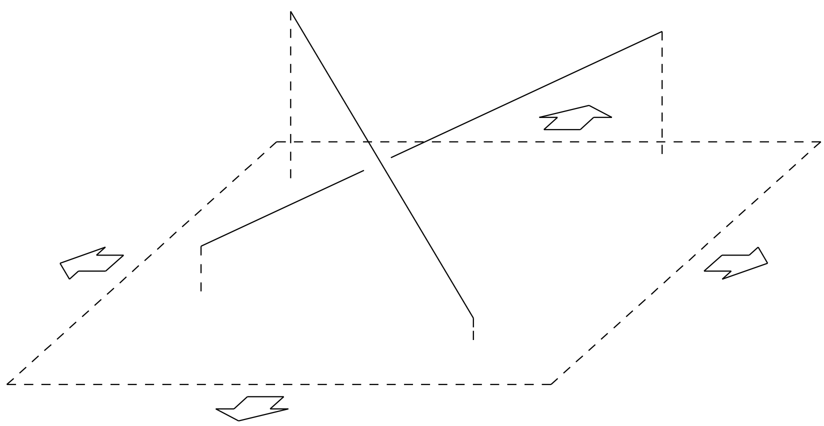


よく見てくださいね。この図、1 本しか直線が描かれていないように見えますが、本当は 2 本あるんですよ。でも、ぴったり重なっているので 1 本にしか見えないんです。心の目で見ればきっと 2 本あるのがわかるでしょう。念のために注意をしておきます。この図では平面は点線で描かれています。点線の外にも、矢印のほうに、平面は限りなく広がっています。また今、空間の中の出来事を考えるのですから、全世界は平面の中だけではなく平面の上のほうや下のほうへも広がっています。（この図では、2 つの直線は、平面より上にありますが、深い意味はありません。図を見やすくするためにそうしてあるだけです。）

この場合、2 本の直線が乗るような平面はいくらでもあります。2 本の直線が一致しているので、実質直線が 1 本しかないのと同じです。ですから前に学んだように、この直線が乗る平面を 1 つ決めると、その平面をこの直線を軸にしてくるくる回転させてできる平面の上にやはりこの直線は乗っているのです。

空間の中の 2 本の直線の位置関係その 4：2 本の直線が交わりもせず、平行にもなっていない

次の図のようになっている場合です。



こういうのを「ねじれの位置」というのでしたね。念のために注意をしておきます。この図では、平面は点線で描かれています。点線の外にも、矢印のほうに、平面は限りなく広がっています。また今、空間の中の出来事を考えるのですから、全世界は平面の中だけではなく平面の上のほうや下のほうへも広がっています。（この図では、2 つの直線は、平面より上にありますが、深い意味はありません。図を見やすくするためにそうしてあるだけです。）

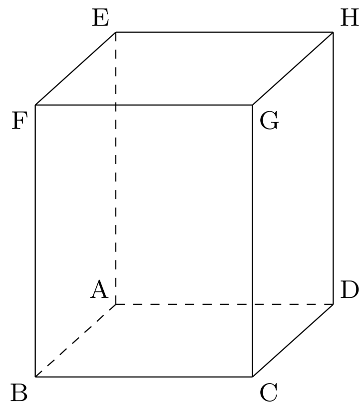
空間の中で 2 つの直線が交わりもせず、平行でもない場合、その 2 つの直線が両方とも乗ってしまう平面はありません。つまり、 2 つの直線がねじれの位置にあるとき、その 2 直線が両方乗ってしまう平面はありません。このことは、図を見るとまぁ、「明らかなこと」かもしれませんが、今数学の学習をしているので、このことをもう少し論理的に考えることにします。

空間の中に「ある平面」があって、その平面の上に、2 つの直線が乗っているとします。そしてそのそ 2 つの直線は平行でもなく、一致もしていないとします。ではここで、以前学んだ「平面の中にある 2 直線の位置関係」を思い出してみましょう。たしか、「2 直線が交わる」、「2 直線が平行である」、「2 直線が一致している」の 3 通りでしたね。それ以外のことは起こらないのでしたね。そうすると今、私たちは、「平面の上に 2 直線があって、その 2 直線は平行でもなく、一致もいていない場合」を考えることにしてあるのですから、起こりうることは「2 直線は交わる」だけですね。つまり、2 直線は平面の中で交

わってしまうことになります。

今の議論で、「空間の中の 2 つの直線がある平面の上に両方とも乗っていると、その 2 つの直線は交わっている」ということがわかったのです。ということは、裏を返していうと、「空間の中にある 2 つの直線が、交わってもなく、平行でもなければ、その 2 つの直線が両方乗るような平面はない」ということですね。

例題 1　右の図の四角柱を見てください。この四角柱の底面は長方形です。この立体図形の「辺」の位置関係について考えることにします。「辺」はまっすぐな線ですが、両端があります。つまり「辺」は線分ですね。しかしこの例題では、「辺」を両側に延長して、両側に果てしなく伸びている「直線」として考えることにします。つまり、頭の中で「両側に果てしなく伸びていく直線」に考え直すことにします。では、以下の問に答えてください。



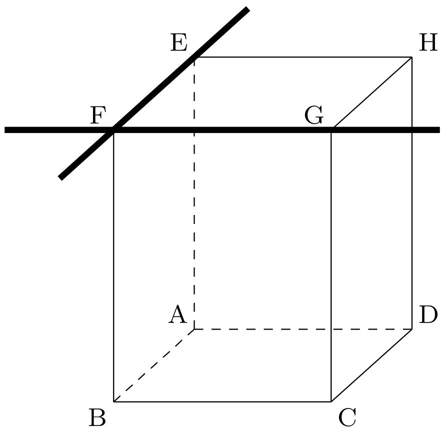
(1)　直線 FG と交わる直線を全て答えなさい。

(2)　直線 FG と平行な直線を全て答えなさい。

(3)　直線 FG とねじれの位置にある直線を全て答えなさい。

解答

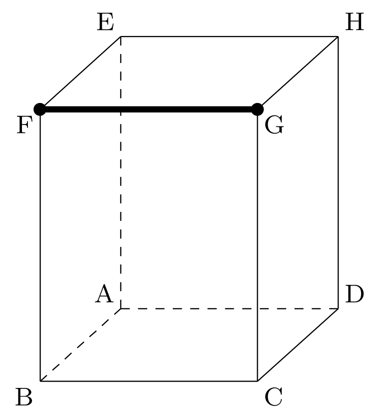
まず、念のため、「辺を両側に果てしなく伸ばしてできる直線」について補足をしておきます。右の図を見てください。この図では、例として「辺 FG を両側に果てしなく伸ばしてできる直線」と「辺 FE 両側に果てしなく伸ばしてできる直線」を太い線で描きました。「辺 FG を両側に果てしなく伸ばしてできる直線」は F より左側と G より右側に



果てしなく伸びているわけです。また「辺 FE を両側に果てしなく伸ばしてできる直線」はＦより手前とＥより奥に果てしなく伸びているわけです。この例題では、今説明したように、どの辺も辺の両側に果てしなくのばして考えるのです。

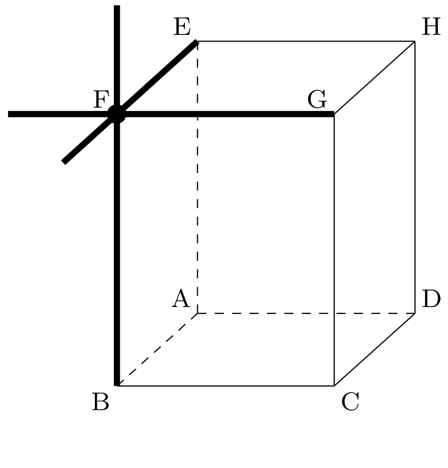
(1) この例題では立体図形の「辺」を伸ばしてできる直線のことだけを考えているのですから、直線どうしは立体の「頂点」で交わるしかありません。「辺の途中」や「辺の外側」で交わることはないわけです。これはまぁ、かなり当たり前のことですが、念のために注意しておきます。

では右の図を見てください。直線 FG と交わる直線を全部答える問題でしたね。さっき注意したことを思い出すと、「直線 FG と交わる直線」が直線 FG と交わる場所は、点 F または点 G ですよね。ですから、点 F を通る直線や、点 G を通る直線を探して答えればよいですよね。



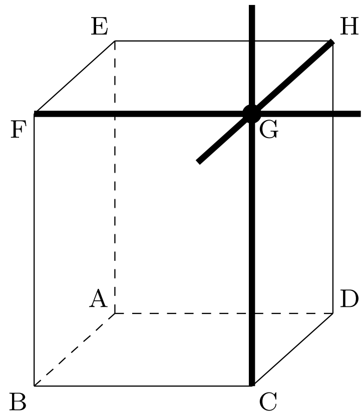
まず点 F を通る直線をさがすことにしましょう。

右の図を見てください。そのような直線として、直線 EF と直線 BF が見つかりますね。



次は点 G を通る直線をさがしましょう。

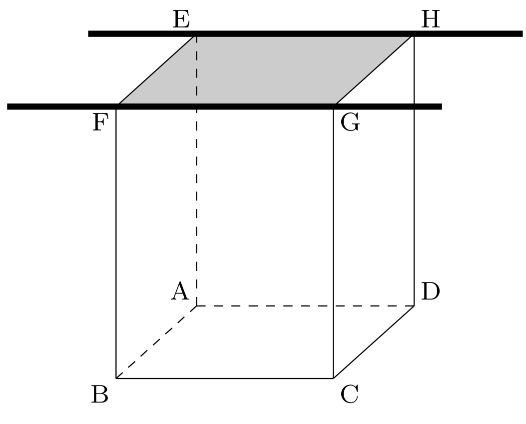
右の図を見てください。そのような直線として、直線 GH と直線 CG が見つかりますね。



これで全て見つかりましたね。答えは直線 EF、直線 BF、直線 GH、直線 CG ですね。

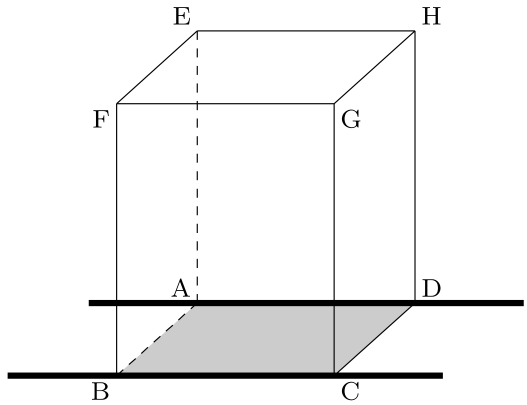
(2) 今度は直線 FG と平行な直線を見つけるのでしたね。つまり、とにかく直線 FG と同じ方向を向いている直線を探すわけです。見落としがあるといけないので、立体図形を上から下へ眺めて探すことにします。

まず、上の「ふた」を見てみましょう。右の図を見て下さい。図を見やすくするために、上のふたを灰色にしておきました。この、上の「ふた」に乗っている直線のうち、直線 FG と同じ方向を向いている直線は直線 EH だけですね。これで 1 つ見つかりました。



ではどんどん下のほうを見ていくことにしましょう。そうすると当分の間、「縦に走っている」直線しかありません。（直線 BF、直線 CG、直線 DH、直線 AE のことです。）これらの直線はもちろん、直線 FG と平行ではありませんね。

ではもっと下のほうを見てみましょう。つまり下の「ふた」を見てみることにします。

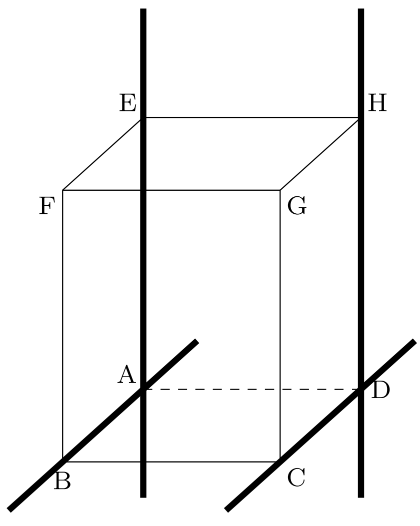


右の図を見てください。図を見やすくするために、下の「ふた」を灰色にしておきました。この下の「ふた」に乗っている直線のうち、直線 FG と同じ方向を向いている直線は直線 BC と直線 AD だけですね。

これで全て見つかりましたね。答えは、直線 EH、直線 BC、直線 AD ですね。

(3) ここまで、直線 FG と交わる直線や直線 FG と平行な直線を探してきました。今度は直線 FG とねじれの位置にある直線を探すのですよね。

ところで、空間の中の 2 つの直線の位置関係は「交わる」、「平行である」、「一致している」、「ねじれの位置にある」の 4 とおりだけでしたね。これまで (1) で直線 FG と「交わる」直線、(2) で直線 FG と「平行である」直線を探したのですから、これまで答えなかった直線は「ねじれの位置にある」はずです。(「一致している」のはもちろん直線 FG だけなので、今さらどうのこうの言う必要はありませんね。)



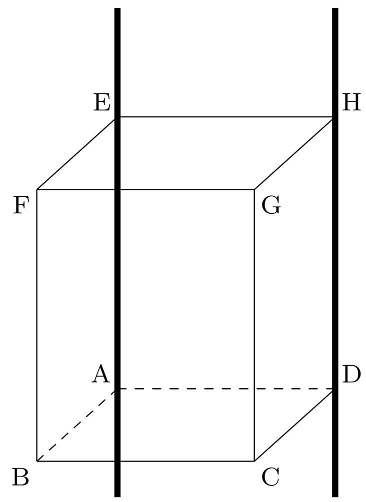
では右の図を見て下さい。この図で太く描いてあるのが「これまで答えなかった直線」です。

つまり直線 AB、直線 CD，直線 DH、直線 AE が答えですね。

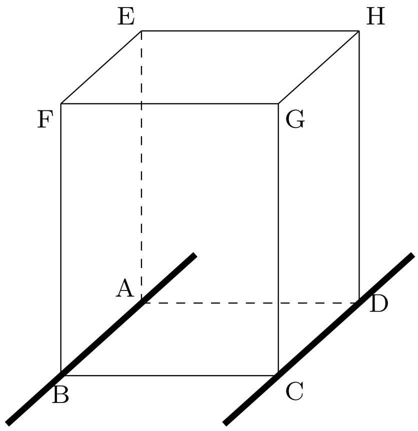
少し補足をしておきましょう。この例題では (1) で直線 FG と交わる直線を答え、(2) で直線 FG と平行な直線を答えました。ですから、(1) と (2) の答えにならなかった直線は直線 FG とねじれの位置にある直線のはずです。ですから、(1) と (2) で答えなかった直線が (3) の答えになったわけです。でも、こんなふうに考えると、見落としをして (3) の答えを言ってしまう人もいるかも知れませんね。（立体の図は複雑ですからね。）そこで、さっきとは少し違う考えを使って考えてみることにします。

直線 FG とねじれの位置にある直線とは、直線 FG と平行ではないし、交わりもしない直線のことですね。今、この例題で考えているような四角柱では、「横に走っている辺」、「縦に走っている辺」、「奥から手前へ走っている辺」があります。（「辺」をこの様に 3 種類に分けて考えると勘違いしないで済みそうです。）直線 FG は「横に走っている辺」ですよね。ということは、「直線 FG とねじれの位置にある直線」を探すとき、まず「横に走っている辺」を除外することができます。そうすると、「縦に走っている辺」と「奥から手前へ走っている辺」の中から答えを探すことができます。

では、まず「縦に走っている辺」の中から答えを探すことにしましょう。右の図を見てください。「縦に走っている辺」は直線 BF, 直線 CG、直線 DH、直線 AE の 4 本ですね。このうち直線 FG と交わらないのは、直線 DH と直線 AE ですね。つまり「縦に走っている辺」のうち、直線 FG とねじれの位置にある直線として、直線 DH と直線 AE が見つかったわけです。

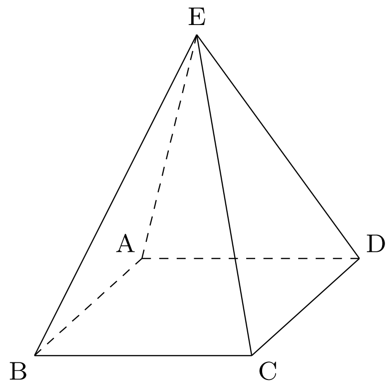


次は、「奥から手前へ走っている辺」の中から答えをさがすことにします。右の図を見てください。「奥から手前へ走っている辺」は直線 EF，直線 HG、直線 DC、直線 AB の 4 本ですね。このうち直線 FG と交わらないのは、直線 AB と直線 DC ですね。つまり「奥から手前へ走っている辺」のうち、直線 FG とねじれの位置にある直線として、直線 AB と直線 DC が見つかったわけです。



これで全て見つかりましたね。答えは、直線 AE、直線 DH、直線 AB、直線 DC ですね。

問 20. 右の図の正四角錐を見てください。これは正四角錐ですから、底面は正方形で、頂点は正方形の「ど真ん中」の真上にあります。この立体図形の「辺」の位置関係について考えることにします。「辺」はまっすぐな線ですが、両端があります。つまり「辺」は線分ですね。しかしこの問では、「辺」を両側に延長して、両側に果てしなく伸びている「直線」として考えることにします。つまり、頭の中で「両側に果てしなく伸びていく直線」に考え直すことにします。では、以下の問に答えてください。



(1) 直線 BC と交わる直線を全て答えなさい。

(2) 直線 BC と平行な直線を全て答えなさい。

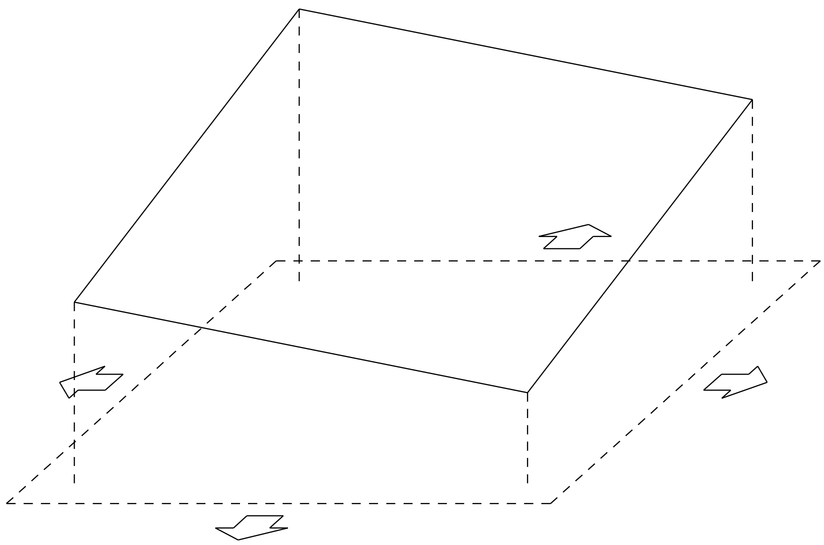
(3) 直線 BC とねじれの位置にある直線を全て答えなさい。

答えを見る

2.6　空間の中に１つの直線と１つの平面があるときの位置関係

これまで「空間の中の直線どうしの位置関係」を調べてきました。ここではこれから、空間の中の直線と平面の位置関係」について考えます。

詳しい話に入る前に、前置きの話をします。次の図を見てください。



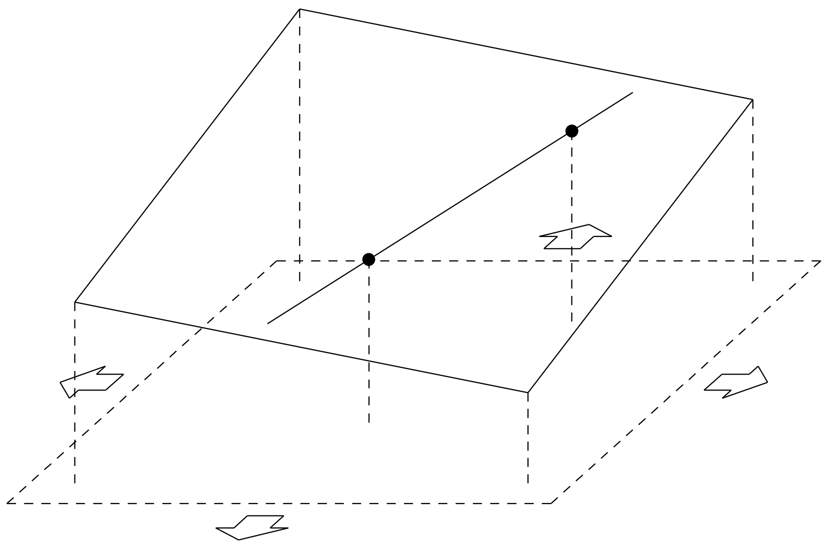
この図には「空間の中にある平面」が 1 枚描かれています。点線で描かれた平面の上のほうに「実線で描いてある平面」のことです。

これまでも何度か説明してきたように、下のほうに点線で描いてある平面は、図を「空間っぽく見せる」ために描いているもので深い意味はありません。この平面は。基準の高さをわかりやすくするだけのものです。空間は、点線で描かれたこの平面の上のほうにも下のほうにも果てしなく広がっています。

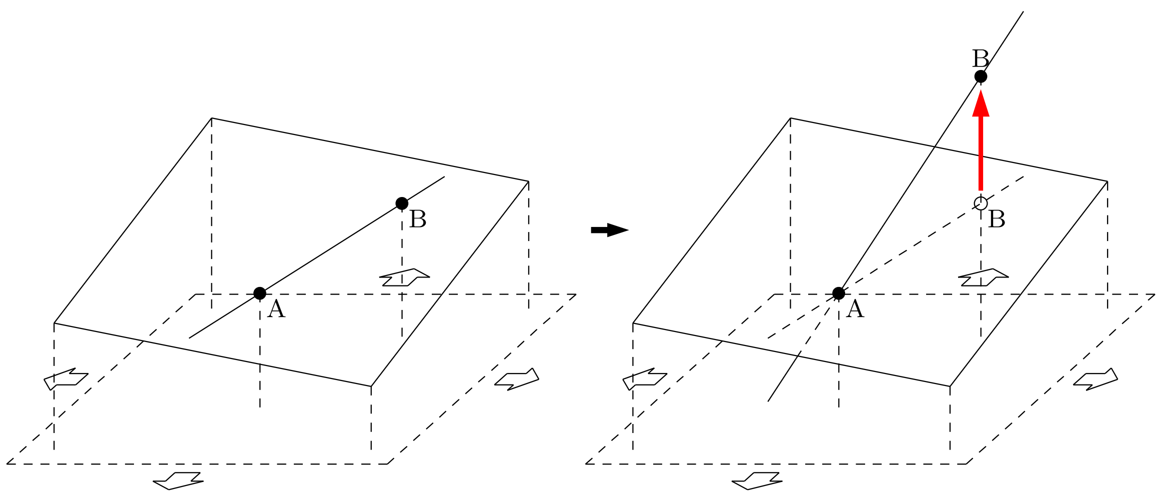
これから、空間の中の平面と直線のことを図を使って考えるのですが、注目する平面は実線で描かれている平面のほうです。このことをあらかじめ注意しておきます。それではこれから、この図にさらに１つの直線が加わったらどんなことが起きるか考えることにしましょう。

空間の中に 1 つの直線と 1 つの平面があるときの位置関係は 3 通り考えられる

　ではまず、一番特殊な場合を考えてみます。「一番特殊」というのは「直線が平面の中にすっかり含まれている場合」です。つまり次の図のようになっている場合です。

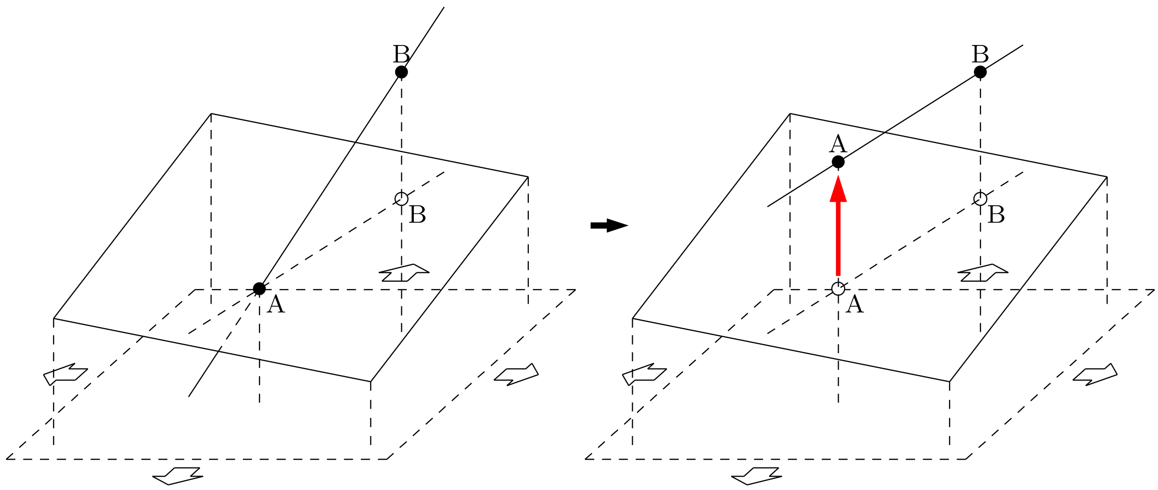


　空間の中に直線があるとき、直線が平面の上のすっかり乗っているなんてことはめったになさそうなので、「特殊」といったのです。では次の図を見てください。さっき、「直線が平面の中にすっかり含まれている場合」を考えました。ところで、空間は上のほうにも下のほうにも限りなく広がっています。そこで、「平面の中にすっかり含まれている直線」の「ある場所」をつまんで、上のほうに直線を持ち上げてみましょう。



この図の左側を見てください。平面の中にすっかり含まれている直線上に 2 つの点 A と B があります。そこで、点 B をつまんで直線を平面より上のほうに持ち上げてみます。そうすると、この図の右側のようになりますね。もう直線は、「すっかり平面に含まれてる」というわけではありません。直線は平面と 1 つの点で交わるだけです。(この図では、直線と平面は点 A で交わっています。) こういう状態が一番ありふれた状態なのです。つまり空間の中に直線と平面があるとき、「直線と平面が 1 点で交わっている交わっている場合」が一番起こりやすい状態といえます。

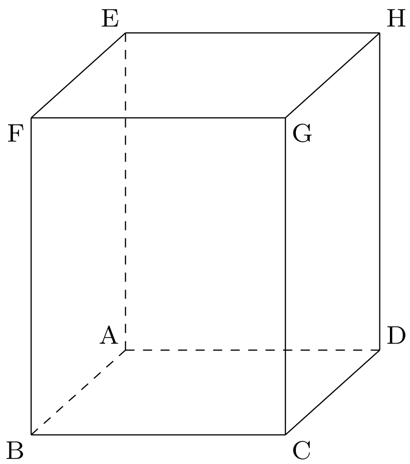
では次の図を見てください。今、「直線と平面が 1 つの点で交わる場合」を考えました。何度も言いますが、空間は上のほうにも下のほうにも限りなく広がっています。そこでまた、平面と 1 つの点で交わる直線のある場所をつまんで、上のほうに持ち上げてみましょう。



この図の左側を見てください。いま、直線は平面と 1 つの点 A で交わっているわけですが、直線上にある点 A をつまんで平面の上のほうに直線を持ち上げてみます。そうすると、この図の右側のようになります。もう、直線は平面とは全然交わらなくなるのです。このように、空間の中の直線と平面が全くどこでも交わらないとき、直線と平面は「平行である」といいます。いま、もともと 1 点で直線と平面が交わっているとき、直線をうまく持ち上げると、直線と平面は平行になるということを説明しました。ただし、ど

のぐらい持ち上げるのかということは非常に重要です。かなり絶妙に持ち上げなくてはなりません。つまり、いいかがんに持ち上げると、直線と平面の傾き加減によっては、直線と平面はどこかで交わってしまうのです。ちょっとでもいいかげんにすると、直線をどんどん伸ばしていくと、遠くのどこかで直線は平面と交わってしまうのす。

空間の中に直線と平面があるとき起きることは、これまで見てきた 3 通りだけです。もう 1 度思い出してみましょう。「直線が平面の上にすっかり乗っている場合」、「直線が平面と 1 点で交わる場合」、「直線が平面と平行になる場合」でしたね。



例題 2　右の図の四角柱を見てください。この立体図形の「辺」と「面」の位置関係について考えることにします。「辺」はまっすぐな線ですが、両端があります。つまり「辺」は線分ですね。しかしこの例題では、「辺」を両側に延長して、両側に果てしなく伸びている「直線」として考えることにします。また「面」はどれも四角形で「ふち」がありますが、「ふち」の外へもまっ平らにどこまでも広がっている「平面」として考えることにします。では、以下の問に答えてください。

(1)　平面 ABCD の上にある直線を全て答えなさい。

(2)　平面 ABCD と 1 点で交わる直線を全て答えなさい。

(3)　平面 ABCD と平行な直線を全て答えなさい。

解答

まず、あなたに質問があります。この四角柱には何本「辺」があるでしょう。ちゃんと数えてくださいね。では 3 分待ちます。

・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・

はい、3 分たちました。いいですか。数えられましたか？じゃぁ、答えをいいますよ。辺は全部で 12 本です。大丈夫でしたか？見落としとかなかったですか？よく、見落としちゃう人いるんですよね。でも、見落としやすいからといって、数学の才能がないとはいえません。数学が得意な人だって見落としやすいんです。見落としやすいから、数えるときいろんな工夫をするんです。ではどんな工夫をするんでしょう。まぁ、人によっていろいろ違うんですけど、例えばこの問題だったら次のような工夫も良いかも知れません。（図をよく見ながら説明を読んでください。）この立体には、「上のふた」と「下のふた」があります。また、「周りを囲んでいる面」があります。そこで、まず、「上のふた」に乗っている「辺」を数えます。すると 4 本の辺がありますね。次に「下のふた」に載っている「辺」を数えます。すると 4 本の辺がありますね。最後に周りの面に乗っている「辺」を数えます。このとき、もうすでに数えてしまった辺は数えません。周りの面の上には、「上のふたにも乗っている辺」や「下のふたにも乗っている辺」がありますが、こういう辺はもう数えてあるのです。そうすると 4 本の辺があることがわかります。この 4 本の辺は、「縦に走っている辺」です。これで漏れなく全ての辺を数えたはずです。合計 12 本ですよね。

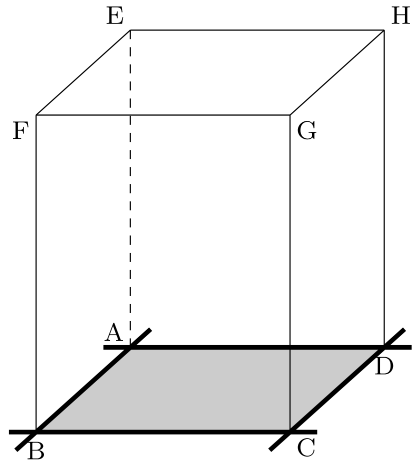
このほかに、次のような数え方もあります。この立体は、「縦に走っている辺」、「横に走っている辺」、「奥から手前へ走っている辺」があります。そこでまず「縦に走っている辺」を数えてみます。4 本ですよね。次に「横に走っている辺」を数えると 4 本あり、最後に「奥から手前へ走っている辺」を数えると 4 本あることがわかります。そうすると、合計 12 本ありますよね。

この例題は辺の本数を数える問題ではありません。しかし、こういう工夫をいつも考えるようにしていると、「位置関係」も自然とわかるようになります。また、見落としや勘違いも減るのです。では本題に入ることにしましょう。

(1) 右の図を見てください。わかりやすくするために、面 ABCD を灰色にしておきました。この平面に含まれている直線を答える問題でしたね。図を見るとわかるように、もちろん答えは

直線 AB、直線 BC、直線 CD、直線 AD

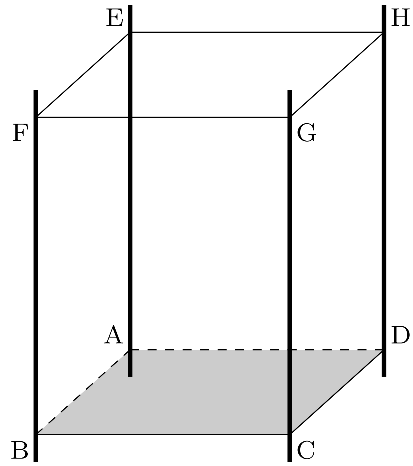
ですね。(4 本ありますね。)



(2) 右の図を見てください。わかりやすくするために、この図でも面 ABCD を灰色にしておきました。この平面と 1 点で交わる直線を答える問題でしたね。図を見るとわかるように、もちろん答えは

直線 AE、直線 BF、直線 CG、直線 DH

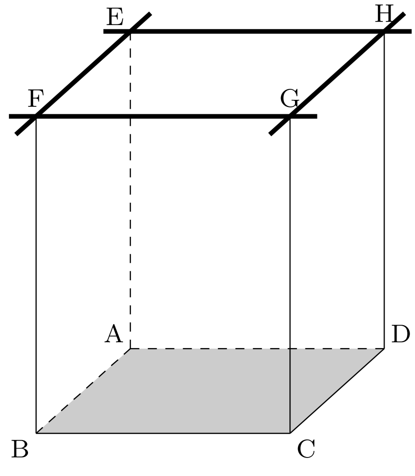
ですね。(4 本あります。これらは、「縦に走っている直線」ですね。別の言い方をすると、周りの面に含まれている直線のうち、上のふたにも下のふたにも含まれていない直線」です。)



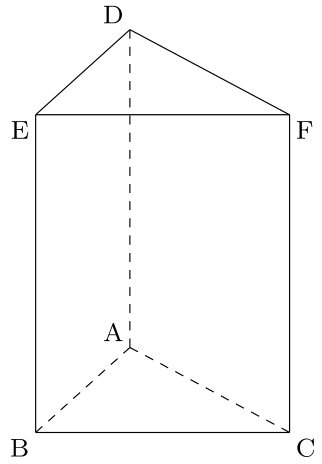
(3) 右の図を見てください。わかりやすくするために、やはりこの図でも面 ABCD を灰色にしておきました。この平面と平行な直線を答える問題でしたね。図を見るとわかるように、もちろん答えは

直線 EF、直線 FG、直線 GH、直線 EH

ですね。(4 本あります。これらは、「上のふたに含まれている直線」ですね。)



問 21. 右の図の三角柱を見てください。この立体図形の「辺」と「面」の位置関係について考えることにします。「辺」はまっすぐな線ですが、両端があります。つまり「辺」は線分ですね。しかしこの例題では、「辺」を両側に延長して、両側に果てしなく伸びている「直線」として考えることにします。また「面」は三角形や四角形で「ふち」がありますが、「ふち」の外へもまっ平らにどこまでも広がっている「平面」として考えることにします。では、以下の問に答えてください。

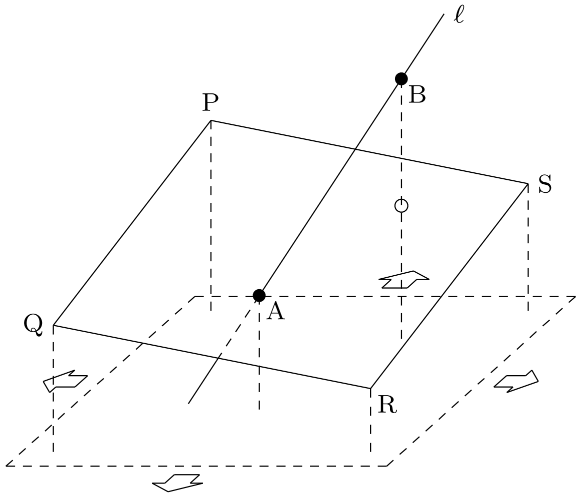


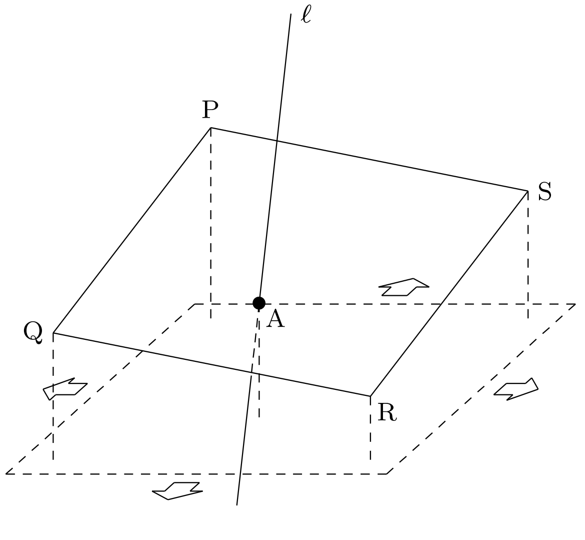
(1) 平面 DEF に含まれている直線を全て答えなさい。
(2) 平面 DEF と 1 点で交わる直線を全て答えなさい。
(3) 平面 DEF と平行な直線を全て答えなさい。
(4) 平面 BCFE に含まれている直線を全て答えなさい。
(5) 平面 BDFE と 1 点で交わる直線を全て答えなさい。
(6) 平面 BCFE と平行な直線を全て答えなさい。

答えを見る

空間の中の直線が平面に垂直になってるってどういう状態？

次の図を見てください。



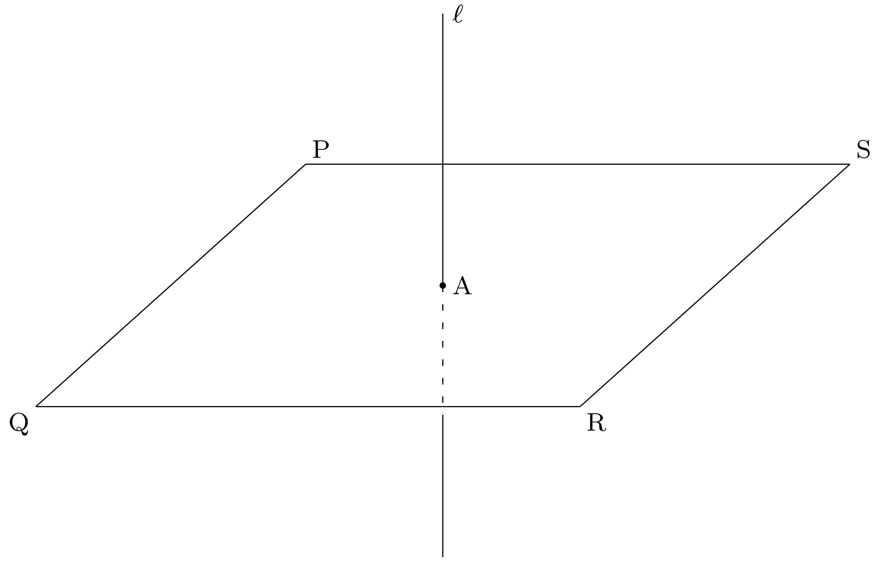


この図の左側の図も右側の図も、空間の中で直線 ℓ と平面 PQRS が点 A で交わっている所をあらわしています。図を良く見るとわかるかも知れませんが、右側の図では、実は直線 ℓ は平面 PQRS に「垂直」に交わっているのです。どうですか？あなたの目には、ちゃんと、直線 ℓ が平面 PQRS に垂直になっているように見えましたか？「えー、そんなことをいわれても・・・」なんていっている人もいるかもしれませんね。もっともなことです。空間の中にあるものを無理して紙の上に描いているのですから、あんまり実感がわかない人もいるかもしれませんね。でも、そもそも、空間の中で直線が平面がに垂直になっている」ってどういう状態なのでしょう。知ってますか？どういう状態なのかきちんと言葉で説明できますか？というわけで、これからゆっくりあなたにきちんとした説明をすることにします。

まず、身近な話からしましょう。あなたは今どこにいますか？部屋の中ですか？それとも外にいるのですか？まぁ、どちらでも良いのですが、立ち上がってみてください。そうするときっとあなたは、平らな面の上にまっすぐ立っている状態のはずです。この場合、平らな面というのは、部屋の床や地面です。そしてあなたは、床や地面に対してまっすぐ立っているわけです。もしあなたがちゃんとまっすぐ立っていれば、このときあなたは床や地面に対して「垂直」になっているはずです。

もう 1 つ身近な話をしましょう。「電信柱 (でんしんばしら)」って知ってますよね。(人によっては「電柱」って呼んでいることもありますね。)「電信柱」って普通は地面に垂直になっているんですよね。でも長い時間がたつと、初めは地面に垂直だった電信柱が傾いてきて、地面に垂直ではなくなってしまうことがあります。では、電信柱がちゃんと地面に垂直になっているのかいないのか、どんなことを確かめればわかるのでしょうか。

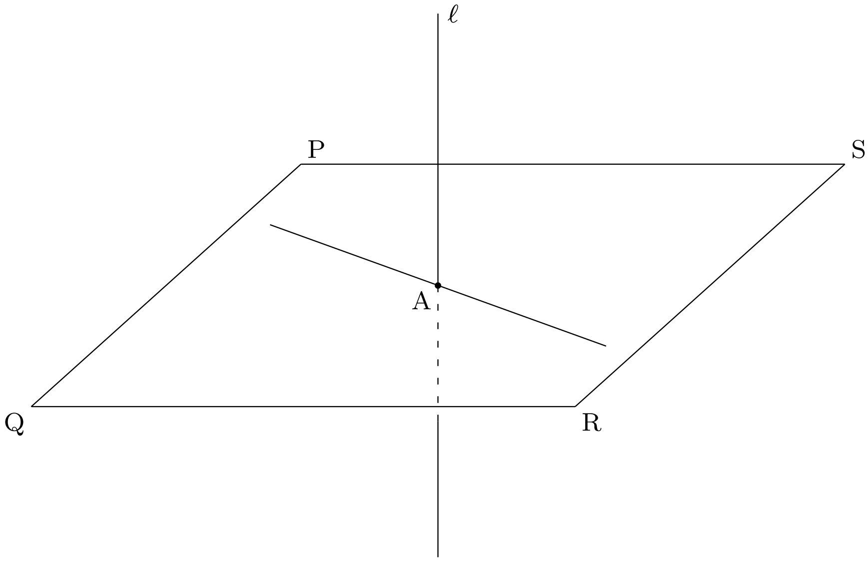
今の「電信柱」の話を数学の立場から単純化すると、次のような話になります。次の図を見てください。



この図は直線 ℓ が平面 PQRS に点 A で交わっている所をあらわしています。できればあなたも、下敷きと長めの鉛筆などを用意してこの状態を作ってください。（もちろん、下敷きは平面の役割、鉛筆は直線の役割ですよ。）ところで図を見ると、直線 ℓ は平面 PQRS に、なんとなく、かなり、垂直に交わっているようにも見えます。（だからあなたもきっと、鉛筆を下敷きに対して垂直っぽく立てたてていることでしょう。）ではもし、あなたが「この直線が本当に平面に対して垂直になっているのか」ということを調べるとしたらどんなことを調べますか？ただし、定規や分度器を使ってよいことにします。

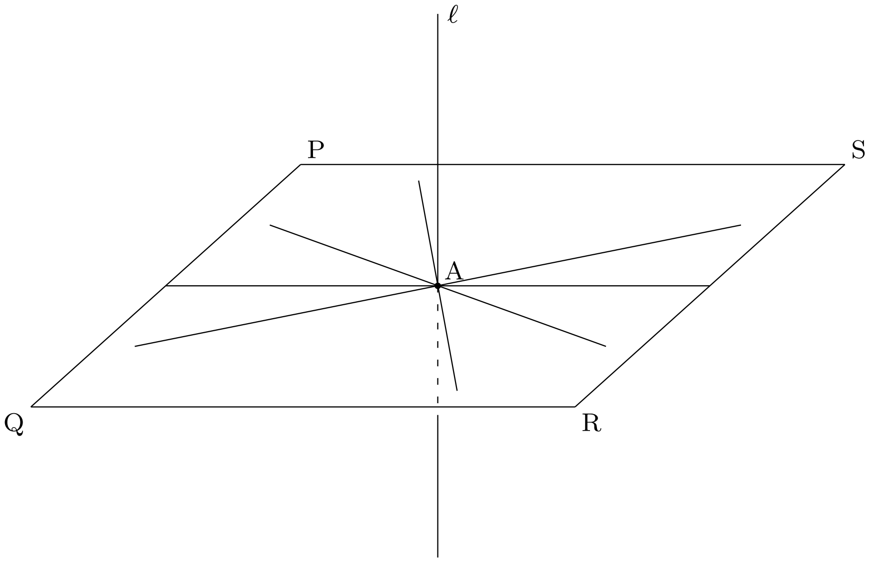
こういう疑惑を解決するには、そもそも「空間の中で直線が平面に対して垂直になっている」とはどういうことなのか、きちんとつかんでおくことが必要です。つまり「垂直」という言葉の正確な意味を知っておくことが必要なのです。

では、いよいよ、「そもそも空間の中で直線が平面に対して垂直になっているとはどういうことなのか」ゆっくり順番にあなたに説明することにしましょう。次の図を見てください。



この図には、「平面 PQRS の上に乗っている」直線 1 本が描かれています。ただし、この直線は点 A を通るようにしてあります。私たちは今、「直線 ℓ が平面 PQRS に垂直である」ってそもそもどういうことなのか考えているんですよね。もし、直線 ℓ が、「今出てきた平面 PQRS の上に乗っている直線」とすら、垂直になっていなかったら、直線 ℓ は平面 PQRS に垂直だなんて、とてもじゃぁないけどいいたくないですよね。つまり、「平面の上に乗っているある直線」に対してさえ垂直になっていない直線を、「この直線は平面に対して垂直だ」なんていうわけにはいかないということです。ところで、この図に描かれている直線のほかにも、平面の上に乗っていて点 A を通る直線はいくらでもキリなくあります。ですから、もし、「直線 ℓ が平面 PQRS に垂直だ」というのならば、キリなく、いくらでもある「平面 PQRS の上に乗っていて A を通る直線」に対しても、直線 ℓ は垂直になっていなければならないということになります。

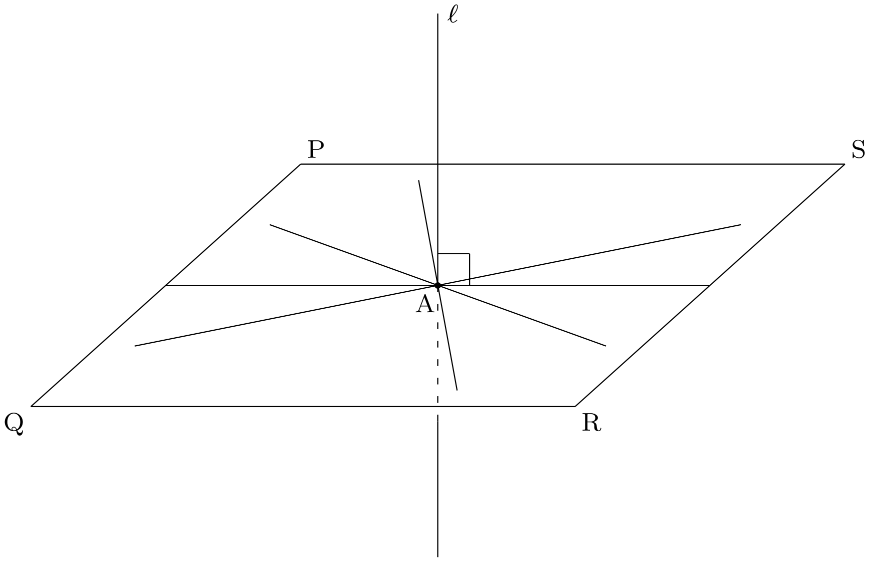
次の図を見てください。



この図には、平面 PQRS の上に乗っていて、点 A を通っている直線が 4 本描かれています。さっき言ったように、この 4 本の直線にたいして直線 ℓ が垂直でなかったら、直線 ℓ はは平面 PQRS に垂直だなんてとてもじゃないけど言えないわけです。そしてさらに、この図に描かれていない「平面 PQRS の上に乗っていて点 A も通る直線」だっていくらでもあるのです。そして直線 ℓ はそれら全ての直線に対して垂直になっていなくてはならないのです。以上のような考えを元に、次のように約束することにします。

空間の中で直線が平面に垂直であるとはそもそもどういう意味？

空間の中で直線と平面が 1 点で交わっているとします。ここではその直線を ℓ、平面を平面 PQRS と呼ぶことにします。では次の図を見てください。

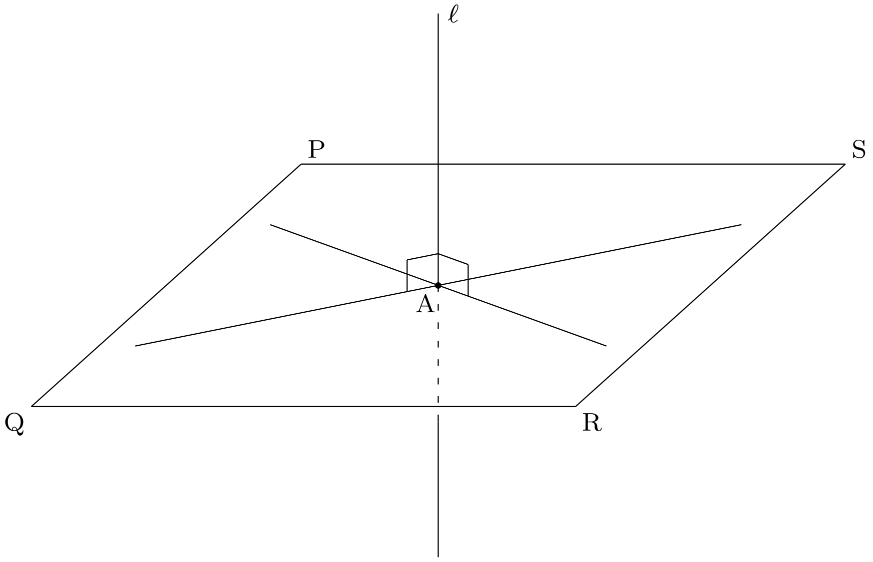


この図には平面 PQRS の上に乗っている直線で点 A を通る直線が 4 本かかれていますが、このほかにも平面 PQRS の上に乗っている直線で点 A を通る直線が無数にあります。それら全ての直線に対して、直線 ℓ が垂直になっているとき、「直線 ℓ は平面 PQRS に垂直である」ということにします。

これが、「そもそも空間の中で直線が平面に垂直になっているということの意味」です。ある直線が、平面の中にありとあらゆる直線に垂直になっているとき、その直線はその平面に垂直であるというわけです。でも「ありとあらゆる直線」っていくらでもあるんですよね。そんな、キリなく、無数にあるものに対して、垂直になっていることを全て調べるなんてできませんよね。でも、昔の人がいっしょうけんめい研究してくれたおかげで、全て調べなくてもいいんです。実は次のようなことがわかっているのです。

空間の中で直線が平面に垂直であると断言するには

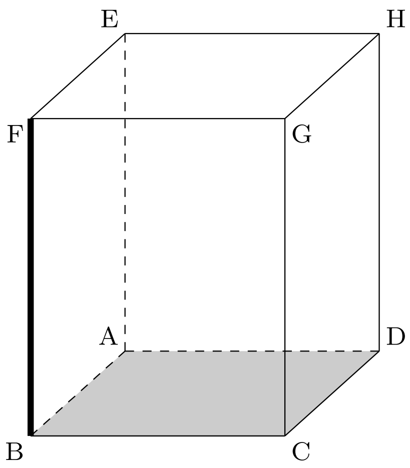
空間の中で直線と平面が 1 点で交わっているとします。ここではその直線を ℓ、平面を平面 PQRS と呼ぶことにします。では次の図を見てください。



この図には平面 PQRS の上に乗る直線で点 A を通る直線が 2 本かかれています。もちろんこのほかにも、平面 PQRS の上には点 A を通る直線が無数にあります。

ですが、実は、初めにあった 2 本の直線に対して、直線 ℓ が垂直になっていたら、「直線 ℓ は平面 PQRS に垂直である」と断言できるのです。

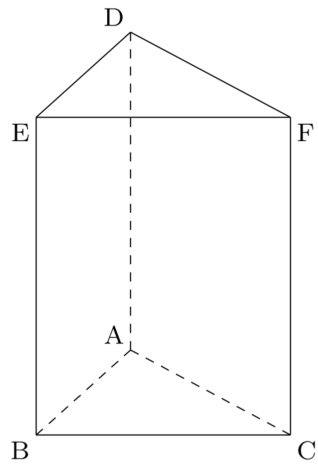
それでは、前に話した「電信柱」の話に戻りましょう。電信柱がちゃんと地面に垂直に立っているのかどうか、どうやって確かめるのかという話でした。あなたにはもうおわかりですね。次のようにすればよいですよね。まず電信柱の根元を通るように、地面にまっすぐな線を描きます。そしてその直線と電信柱が垂直になっているかどうか調べます。次にまた、電信柱の根元を通るように、地面にさっきとは違うまっすぐな線を描きます。そしてその直線と電信柱が垂直になっているかどうか調べます。つまり、地面の上に電信柱の根元を通る 2 本の直線を描き、それらの直線が電信柱と垂直になっているかどうか調べるのです。そして両方とも垂直になっていることが判明したら、電信柱は地面に垂直であると断言できるのです。



例 7　右の図の四角柱を見てください。辺 BF を太く描き、底面 ABCD を灰色にしておきました。辺 BF は平面 ABCD に垂直になっていると考えられますが、きちんと理由を説明をしてみることにします。

この立体は四角「柱」ですから、側面は全部長方形ですね。ところで、長方形の角の大きさは 90° ですよね。ということは、角 ABF の大きさも角 CBF の大きさも 90° です。ですから、辺 BF は辺 AB と垂直になっていますし、辺 BC とも垂直になっているわけです。もちろん、辺 AB と辺 BC は平面 ABCD の上に乗っていますし、点 B も通っています。これで安心して、「辺 BF は平面 ABCD と垂直になっている」と断言できますね。

問 22. 右の図の三角柱を見てください。この立体図形の「辺」と「面」の位置関係について考えることにします。以下の問に答えてください。



(1) 平面 DEF と垂直になっている辺を全て答えなさい。また、あなたの答えた辺は、どうして平面 DEF と垂直になっていると断言できるのか、きちんと理由を説明しなさい。

(2) この三角柱では、底面になっている三角形 ABC は直角三角形ではないとします。つまり三角形 ABC の 3 つの角はどれも $90°$ ではないとします。それではこのとき、平面 ADEB と垂直な辺はあるでしょうか。きちんと理由を付けて答えなさい。

(3) この三角柱の底面になっている三角形 ABC では角 BAC が $90°$ になっているとします。このとき、辺 AC は平面 ADEB と垂直になっているような感じがしますが、そのことを断言するためにはどんなことが判明すればよいですか。

(4) この三角柱の底面になっている三角形 ABC では角 ABC が $90°$ になっているとします。このとき、平面 ADEB と垂直になっている辺を全て答えなさい。

答えを見る

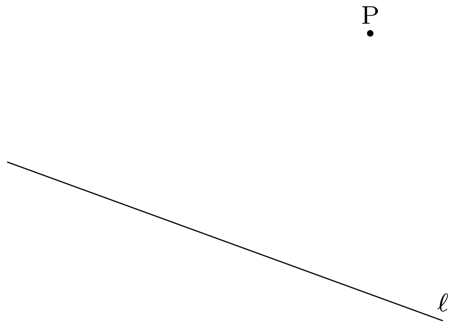
2.7　空間の中にある点と平面の距離ってどこを測るの？

まず平面の世界のことを思い出すことにします。

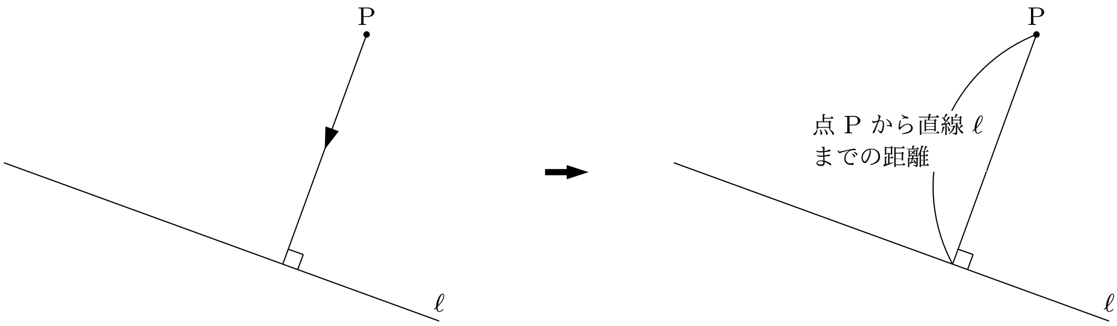
おさらい：平面の中の点と直線の距離

平面図形のテキストで、「平面の中の点と直線の距離」について学習しました。覚えていますか？ここで簡単におさらいしておくことにします。

　右の図を見てください。「平面の中」に点 P と直線 ℓ が描かれています。ここでは全世界は平面だけと考えています。ですから、点 P も直線 ℓ も平面の中にあるのです。それでは、「点 P から直線 ℓ までの距離」を測れといわれたら、どこを測ればよいのかあなたは覚えていますか？

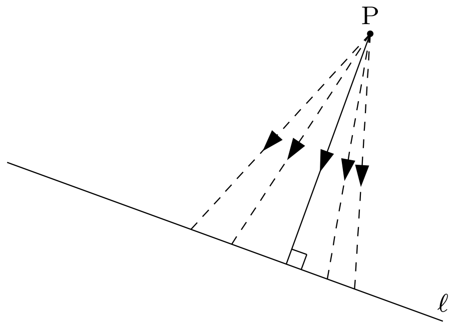


　では次の図を見てください。



　この図の左のように、まず点 P から直線 ℓ まで「垂直に」進みます。そうすると、そのうち直線 ℓ にぶつかります。そして、この図の右にあるように、「点 P から直線にぶつかる点までの長さ」のことを「点 P と直線 ℓ の距離」というのでしたね。

　右の図を見てください。この図は、点 P から直線 ℓ へ向かって、いろいろな進み方をしていることをあらわしています。いろいろな進み方のうち、点 P から直線 ℓ へ「垂直」に進んだものが、長さが一番短いということがわかりますね。ですから、「点 P と直線 ℓ 上の点を結んでできる線分のうち、最も短い線分の長さ」が、点 P と直線 ℓ の距離であるということもできます。

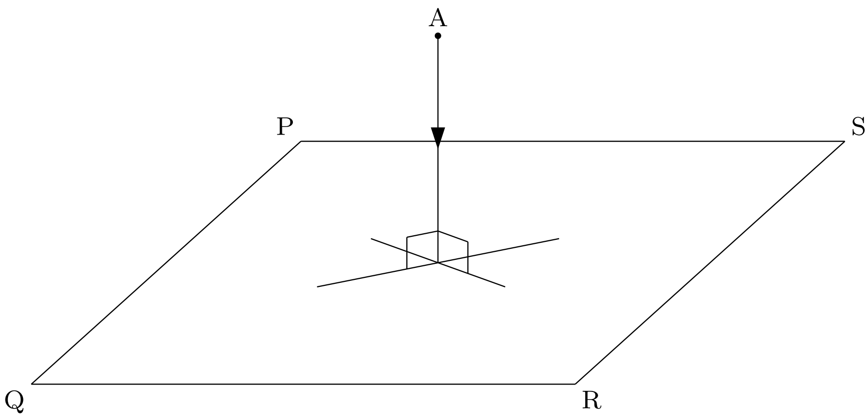


おさらい終わり

では、話を本題にもどして、空間の中の点と直線の距離について考えることにしましょう。

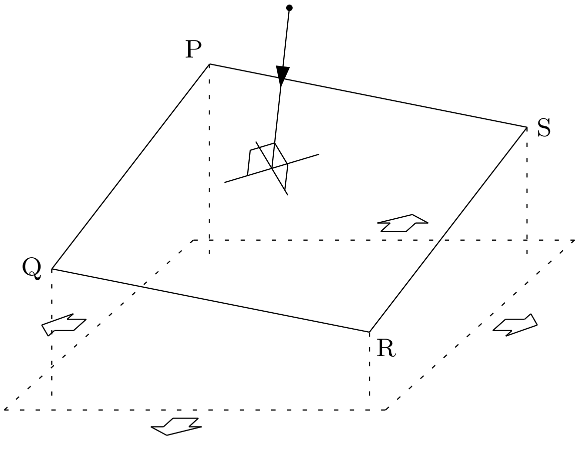
空間の中にある点と平面の距離ってどこを測るの？

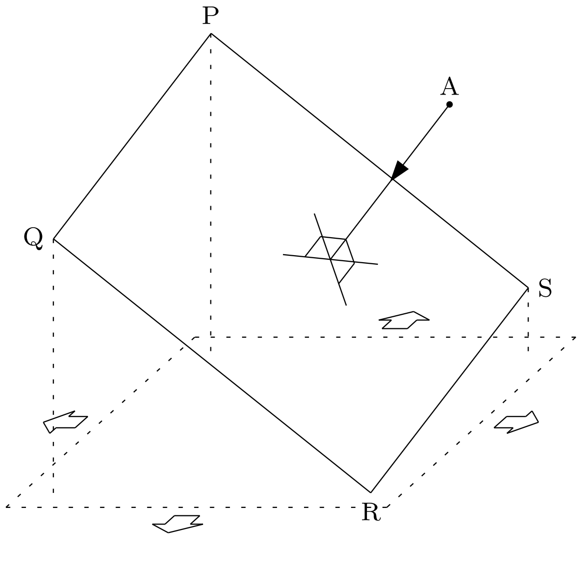
次の図を見てください。



空間の中に点 A と平面 PQRS があります。そして点 A から平面 PQRS へ「垂直に」進んでいる矢印が描かれています。さっき「平面の中の点と直線の距離」をおさらいしました。その話と似ていて、点 A から平面 PQRS へ「垂直に」進むとき、「点 A から平面 PQRS へぶつかる点までの長さ」のことを、点 A から平面 PQRS までの距離といいます。つまり、空間の中にある点から空間の中にある平面へ向かって平面とぶつかるまで「垂直に」進むとき、出発した点からぶつかった点までの距離を、点と平面の距離といっているわけです。

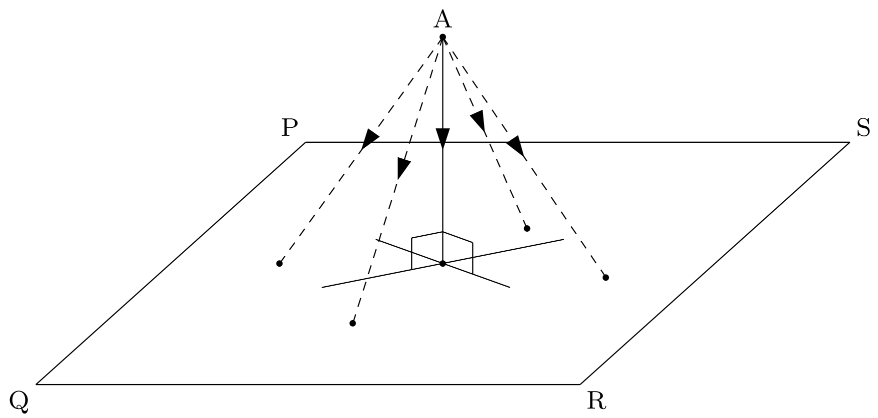
次の図を見てください。





この 2 つの図はどちらも、空間の中で、点 A から平面 PQRS へ向かって、平面 PQRS にぶつかるまで「垂直に」進んでいることをあらわしています。さっき説明したように、点 A と平面 PQRS の距離とは、点 A から平面 PQRS へ「垂直に」進んでぶつかるまでの距離です。この図のように、あなたから見て平面が傾いていても、とにかく点から平面へ向かって「垂直に」進むのです。そのとき、平面にぶつかるまでの距離を「点と平面の距離」というのです。

では次の図を見てください。（平面が傾いた図を描くのは大変なので、平面は水平に見えるように描いておきました。）



この図は、点 A から平面 PQRS へ向かって、いろいろな進み方をしていることをあらわしています。いろいろな進み方のうち、点 A から平面 PQRS へ「垂直」に進んだものが、一番短い長さであることがわかりますね。ですから、「点 A と平面 PQRS 上の点を結んでできる線分のうち、最も短い線分の長さ」が、点 A と平面 PQRS の距離であるということもできます。

2.8　ナントカ柱やナントカ錐の高さってどこを測るの？

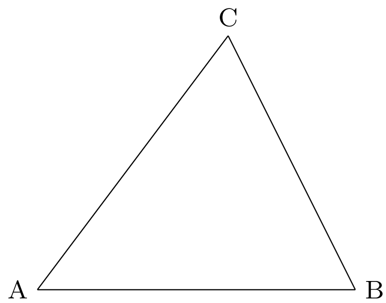
これから立体図形の高さについて学びますが、その前に平面図形の高さについておさらいします。

おさらい：平面図形の高さってどこを測るの

いまさらくどくどと説明することでもありませんが、間単におさらいしておきます。

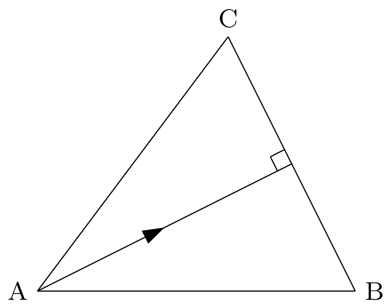
例 8　三角形の高さ

右の図を見てください。三角形 ABC が描いてあります。今、この三角形では「底辺」を辺 BC にします。（三角形の底辺って、あなたから見て「一番下に水平になっている辺」であるとは限らないんですよ。いろんな都合で、どの辺を底辺と考えても良いのですよ。）

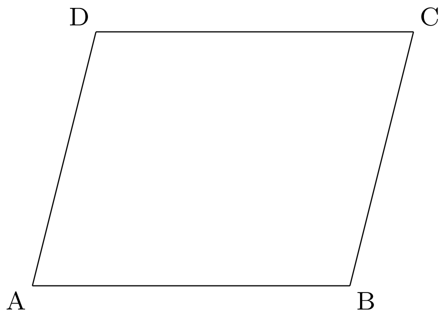


「底辺」を決めると、「高さ」を考えることができるようになります。（言いかえると、底辺を決めないと、高さなんていうものは考えられないんですよ。）今、辺 BC を底辺にしてありますね。では高さはどこを測れは良いのでしょう。知ってますよね。

右の図を見てください。高さを測るには、まず、「今決めた底辺 BC に向かい合っている頂点」に注目します。今の場合、頂点Ａに注目すればよいですね。そして、今注目した頂点から、底辺へ向かって「垂直に」、底辺にぶつかるまで進みます。ですから今の場合、頂点Ａから底辺ＢＣへぶつかるまで「垂直に」進みます。このときに進んだ長さのことを三角形の高さというわけです。つまり、三角形の高さを考えるときには、底辺をまず決めておいて、「底辺に向かい合っている頂点と底辺との距離」のことを考えることになるわけです。



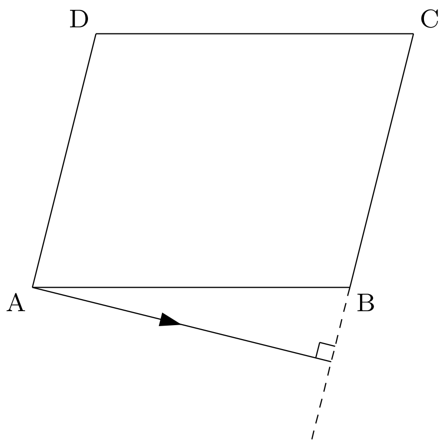
例 9　平行四辺形の高さ



右の図を見てください。平行四辺形 ABCD が描いてあります。今この平行四辺形では「底辺」を辺 BC にします。（平行四辺形の底辺って、あなたから見て「一番下に水平になっている辺」とは限らないんですよ。いろんな都合で、どの辺を底辺と考えても良いのですよ。）

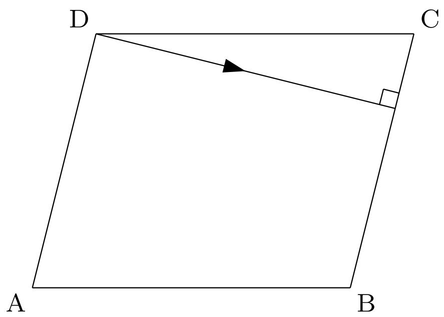
「底辺」を決めると、「高さ」を考えることができるようになります。（言いかえると、底辺を決めないと、高さなんていうものは考えられないんですよ。）今、辺 BC を底辺にしてありますね。では高さはどこを測れは良いのでしょう。知ってますよね。

高さを測るには、まず底辺 BC に向かい合っている頂点に注目します。今の場合、頂点 A や頂点 D に注目すればよいですね。

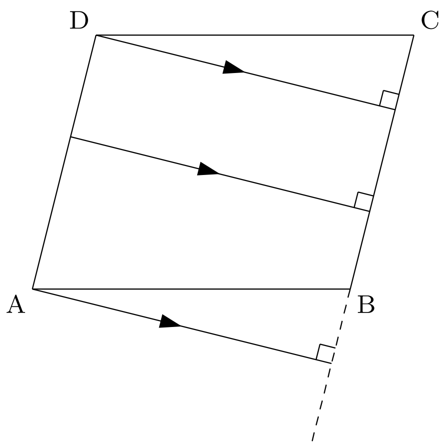


右の図を見てください。注目すべき頂点が 2 つあるのですよね。ではまず、頂点 A に注目してみることにます。そして、今注目した頂点から、底辺へ向かって「垂直に」、底辺にぶつかるまで進みます。ですから今の場合、頂点Aから底辺 B C へぶつかるまで「垂直に」進みます。この平行四辺形では頂点 A から辺 BC に垂直になるように進むと、辺 BC とぶつからないで辺 BC の外にはみ出てしまうのですが、そういうときは、この図で点線で描かれているように、辺 BC を外へまっすぐ延長しておくのです。そうすれば、辺 BC の延長とぶつかりますね。このときに進んだ長さのことを平行四辺形の高さというわけです。

では、今度は頂点 D に注目して、同じように考えてみます。右の図を見てください。頂点 D から底辺 B C へぶつかるまで「垂直に」進みます。このときに進んだ長さのことを平行四辺形の高さというわけです。



では右の図を見てください。これまで、頂点 A から辺 BC へ垂直に進む場合と、頂点 D から辺 BC へ垂直に進む場合を考えましたが、平行四辺形ではどちらで考えても進んだ距離は同じです。それどころか、辺 BC に向かい合っている辺の上にある「どの点」から出発しても、辺 BC に「垂直に」進む限り、進む距離は同じになります。（これはこの四角形が「平行四辺形だからです。ありふれた四角形では、そうなっていません。）



つまり、平行四辺形では、底辺を決めて、底辺に向かい合っている辺の上にある点と底辺との距離を考えると、点がどこにあっても、距離は同じになっています。そしてその距離を、平行四辺形の高さというわけです。

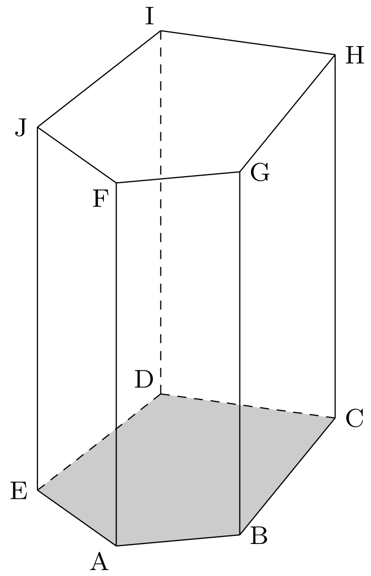
ここまで 2 つの例で、三角形の高さと平行四辺形の高さとはどこのことなのかということを考えました。「高さ」というものを考えるときは、まず「底辺」を決める必要があるのでしたね。そして、底辺に向かい合っている点を探し、そこから底辺に向かって底辺にぶつかるまで「垂直」に進むのですね。そのときに進んだ距離のことを「高さ」というわけです。

おさらい終わり

ナントカ柱やナントカ錐の高さってどこを測るの？

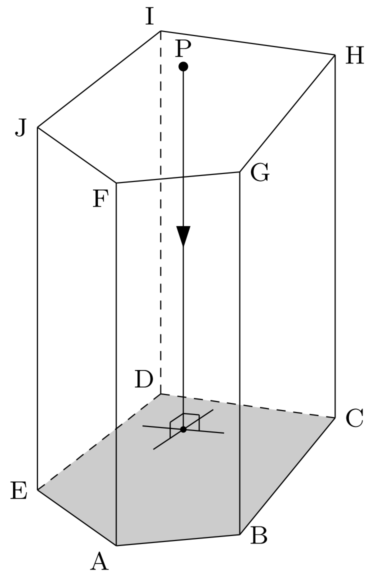
さっきまで、平面の中にある図形の高さについて考えてきました。そして、高さを考えるときには「底辺を決めること」と「底辺に向かい合っている点から底辺へ垂直に進むこと」が重要であるということをおさらいしました。私たちはこれから立体図形の高さのことを考えることにします。この場合、底辺の代わりの役割を果たすのは「底面」です。このことを頭に入れておいて、本題に入ることにしましょう。

例 10　ナントカ柱の高さ



右の図を見てください。これは五角柱ですね。ところで普通、「ナントカ柱」では「底面」って最初から決まっているんですよね。あなたが自由に決められるわけではありませんね。ですからこの図の五角柱は、最初から底面を灰色にしてわかりやすくしておきました。

それでは、この五角柱の高さはどこを測ればよいか説明します。まず、底面に向かい合っている面の上にある点に注目します。つまり「上のふた」に乗っている点に注目します。上のふたに乗っている点だったら、どこでもかまいません。

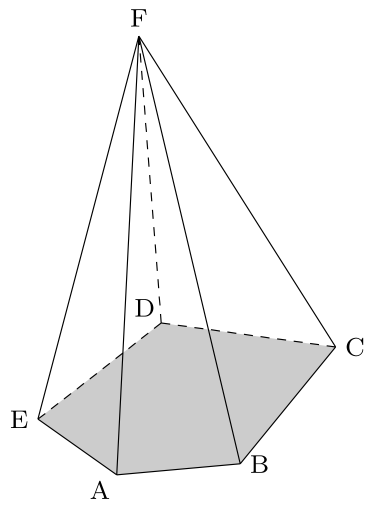


では右の図を見てください。この図では、上のふたの上に決めた点を P と名づけました。上のふたに乗っている点を 1 つ決めたら、この図のように、その点から底面へ向かって底面にぶつかるまで「垂直に」進みます。このとき進んだ距離が、この五角柱の高さです。つまり「上のふた」の上にある点から底面までの距離が、「ナントカ柱の高さ」ということです。点 P は、「上のふた」の上にさえあればどこでもかまいません。どこにあっ

ても底面にぶつかるまで垂直に」進む限り、進む距離は同じだからです。

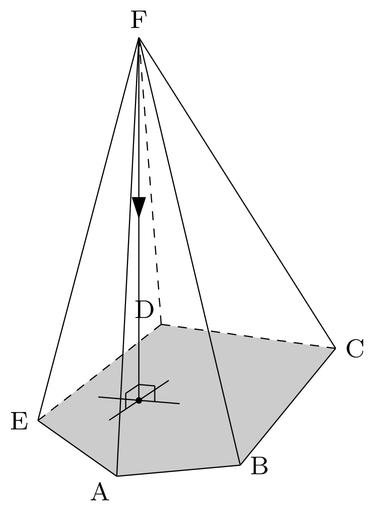
例 11　ナントカ錐の高さ

右の図を見てください。これは五角錐ですね。ところで普通、「ナントカ錐」では「底面」って最初から決まっているんですよね。あなたが自由に決められるわけではありませんね。ですからこの図の五角錐は、最初から底面を灰色にしてわかりやすくしておきました。



それでは、この五角錐の高さはどこを測ればよいか説明します。まず、底面に向かい合っている点を探します。「ナントカ錐」の場合、底面に向かい合っている点は「頂点」しかありませんね。(「ナントカ柱の頂点」ってどこのことか大丈夫ですよね。) というわけで、まず頂点に注目します。この図の五角錐では頂点は F ですね。そうしたら次は頂点から底面へ向かって、底面へぶつかるまで「垂直に」進みます。

右の図を見てください。この図のように頂点 F から底面へぶつかるまで、「底面に垂直に」進むわけです。そしてこのとき進んだ距離のことを、この五角錐の「高さ」というのです。つまり「ナントカ錐」の高さとは、頂点から底面へ向かって底面にぶつかるまで底面に「垂直に」進むときに進む距離のことです。



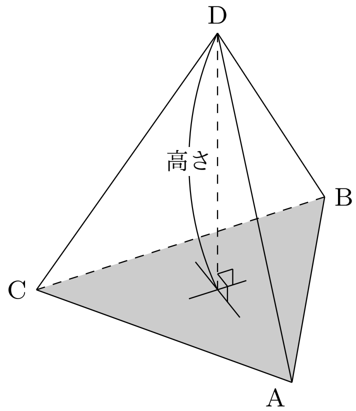
底面が自由に選べる立体図形の高さ

例 10 や例 11 で見たように、たいていの場合、ナントカ柱やナントカ錐では、どれが底面なのか決まっているのですが、中にはあなたが自由に底面を決められるものがありま

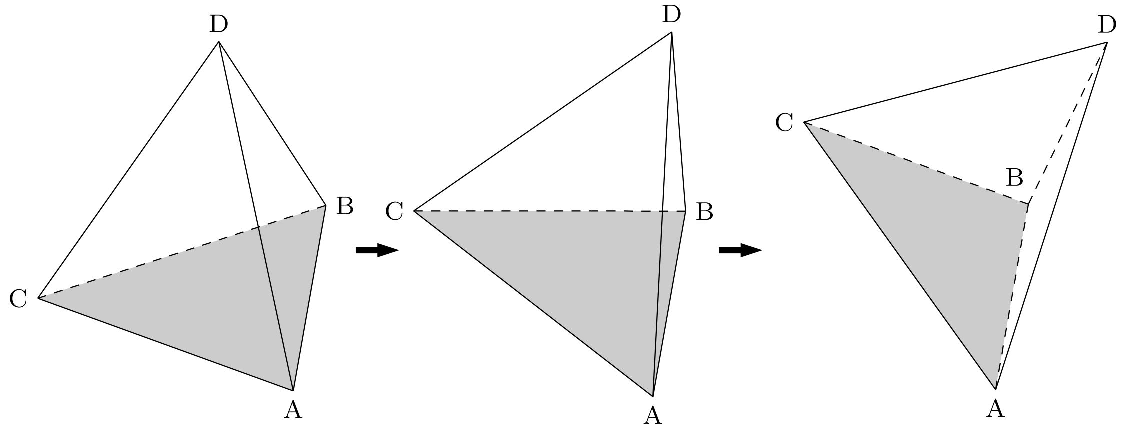
す。そうすると、高さもいろいろと考えられることになりますね。そのような例を見てみることにしましょう。

例 12　三角錐の底面はいろいろと選ぶことができるという話

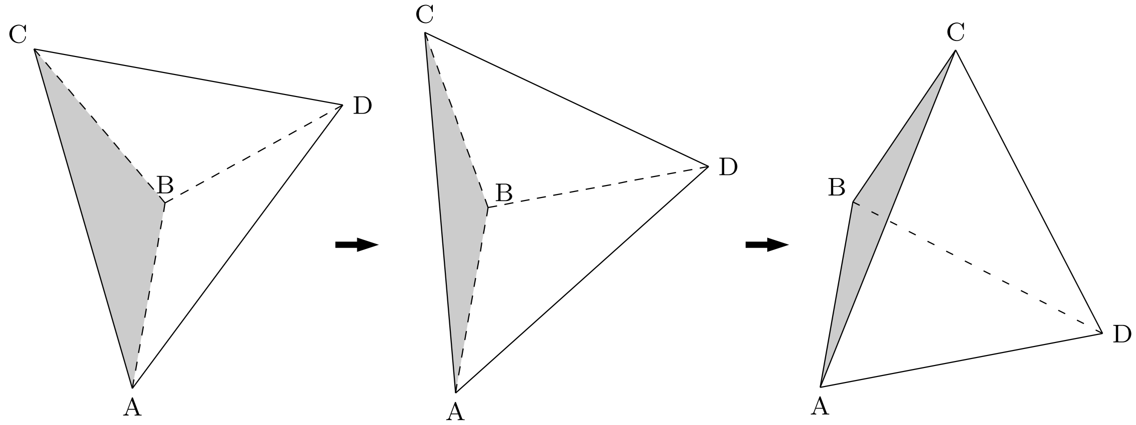
右の図を見てください。これは三角錐です。ナントカ錐」というのは、「ナントカ」という図形が底面になっていて、上のほうに行けば行くほどとがっている図形ですね。この三角錐では、三角形 ABC を底面と考え、灰色にしておきました。そうすると、頂点 D から三角形 ABC へ向かって、三角形 ABC にぶつかるまで「垂直に進む線分が、この三角錐の高さということになります。たぶんこの図を見たあなたも、「そうだよな、三角形 ABC が底面だな」って感じたかも知れません。しかし、三角形 ABC 以外の面を底面と考えてはいけないのでしょうか。



では、次の図を見てください。この図は、この三角錐を転がしていくところをあらわしています。

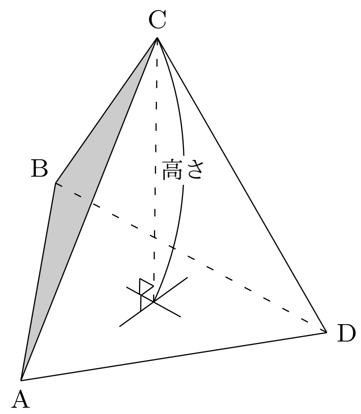


さらに転がしてみます。次の図を見てください。



どうですか？このように転がしてみると、さっきまでとは違う面が、あなたから見て「底」になっているように見えると思います。転がす前は、三角形 ABC が底面でしたね。（そしてその三角形 ABC は灰色に塗ってありました。）転がしたあと、灰色の三角形 ABC はあなたから見て「底」ではなく「左横」になっているはずです。そしてあなたから見て「底」にあるのは三角形 ABD ですね。転がしたあとのこの立体をよく見てみましょう。上のほうへ行けばいくほどとがっていきます。ですから、この向きで見ても、この立体は「錐」です。つまり、今度はこの立体を「底面が三角形 ABD である三角錐」と思うことができるのです。

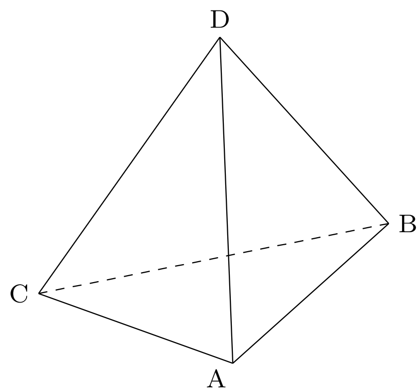
それではこのように、この三角錐を底面が三角形 ABD である三角錐と思ったとき、「高さ」はどこを測ればよいのでしょう。それはもちろん、底面に向かい合わせになっている頂点から底面へ向かって底面にぶつかるまで、底面へ垂直に進む長さですね。ですから、右の図のようになるわけです。



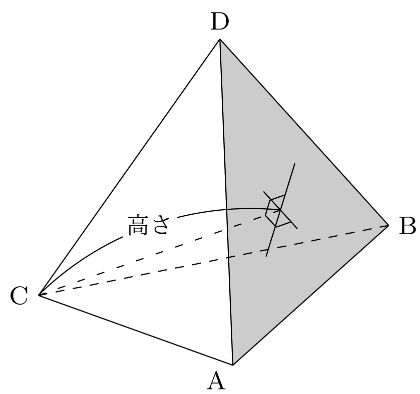
「底面」という言葉は、「底」になる面という意味ですから、「ナントカ柱」や「ナントカ錐」を見取り図にするとき、「底面」をあなたから見て「底」に見えるように描くことが多いわけです。でも慣れてきた人は、頭の中で立体を転がして考えたり、転がさないでも図を見ればわかるようになっていくことでしょう。ですから、これからそういう人のため

に、転がした図ではなく、もとの図のままでさっきの話を考えることにします。

　右の図を見てください。これはこの例の最初に出てきた図です。ただし今度は、必ずしも三角形 ABC を底面と考えるわけではないので、三角形 ABC は灰色にしてありません。また「高さ」をあらわす線も描いてありません。さっきは、この三角錐を転がした図を見ながら「底面」や「高さ」を考え、」三角形 ABD を底面にしてもこの立体は三角錐と思うことができるということがわかりました。そしてそのときどこが高さになるか考えてみました。ここではこのことを、転がさないもとの図で考えてみます。

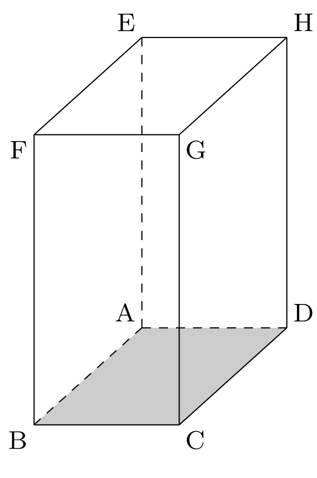


　では右の図を見てください。これから三角形 ABD を底面と考えるので、三角形 ABD を灰色にしておきました。そうすると、高さはどこになるのでしょう。もうおわかりですね。「ナントカ錐」の高さは、底面を決めると、底面に向かい合っている頂点から底面へ向かって、底面にぶつかるまで底面に垂直に進む距離ですよね。ですから今の場合、頂点 C から底面である三角形 ABD へ向かってぶつかるまで垂直に進むことになります。そのときにできる、右の図のような線分の長さが高さということになりますね。



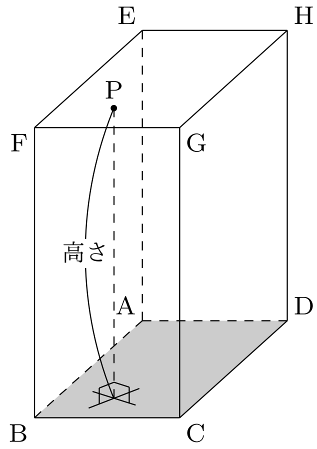
例 13　四角柱の底面はいろいろと選ぶことができるという話

　右の図を見てください。これは四角柱ですが、ただの四角柱ではありません。底面が「長方形」の四角柱です。このことをしっかり頭に入れて続きを読んでください。底面は長方形と言いましたが、どれなのかというと四角形 ABCD です。今、四角形 ABCD を底面と考えることにしてあるので、この図では四角形 ABCD



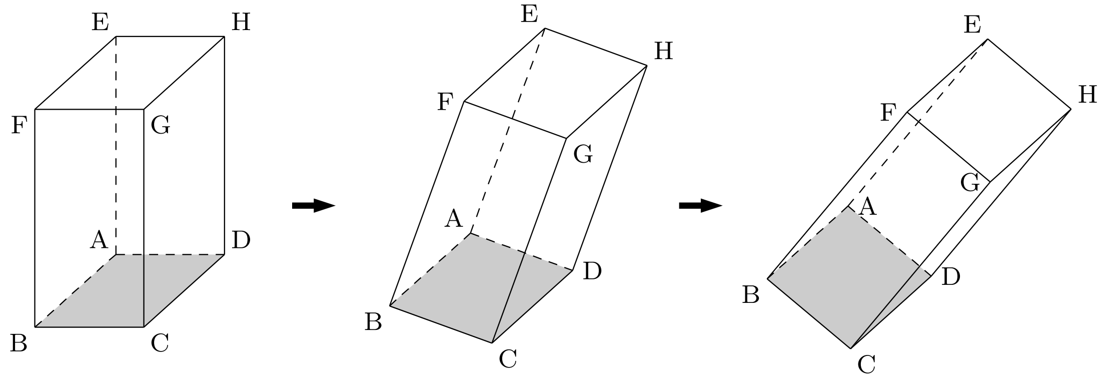
を灰色にしてあります。

「ナントカ柱」というのは、「ナントカ」という図形が「底面」になっていて、上に行っても「ずっと同じ図形のまま柱のようになっている図形」ですね。では、この四角柱の高さはどこを測ればよいのでしょう。たしか、ナントカ柱の高さとは次のように考えるのでしたね。まず、底面に向かいあっている面の上に 1 つ点を決め、次にその点から底面へ向かって底面にぶつかるまで底面に垂直に進み、進んだ距離を測れば良いのでしたね。今、四角形 ABCD を底面と決めたのでした。ですから、まず「底面に向かい合っている面」である四角形 EFGH の上に 1 つ点を決め、底から底面 ABCD へ向かって底面 ABCD にぶつかるまで底面に「垂直に」進めば良いですね。

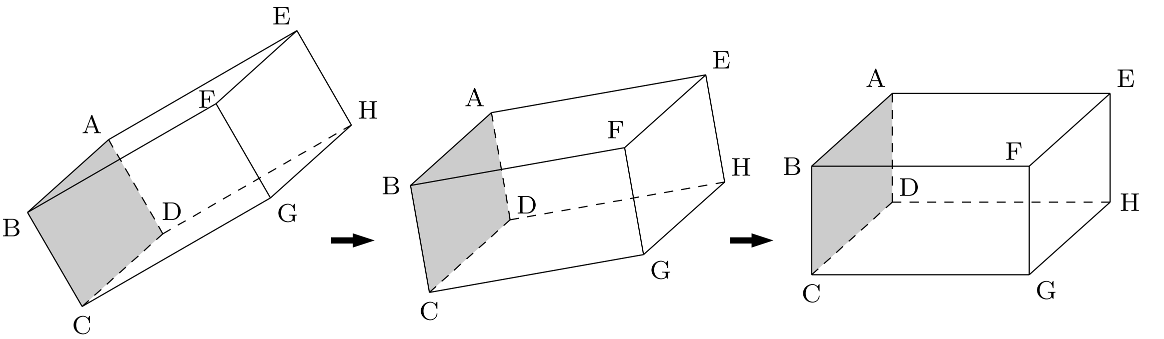


右の図を見てください。この図では「四角形 ABCD に向かい合う面である四角形 EFGH」の上に決めた点を P と名づけました。そして点 P から底面である四角形 ABCD へ向かって、四角形 ABCD にぶつかるまで、四角形 ABCD に垂直に進んだ線分を点線で描いておきました。この線分の長さが、「底面を四角形 ABCD にしたときの高さ」になるわけです。点 P は、底面に向かい合っている四角形 EFGH の上だったらどこにあってもかまわないのですよね。ということは、P を E だと考えてもよいですし、P を F だと考えてもよいですし、P を G だと考えてもよいですし、P を H だと考えてもよいわけです。ですからこの場合、高さは辺 EA、辺 FB、辺 GC、辺 HD の長さと同じになります。

ところで今、四角形 ABCD を底面と考えているのですが、他の面を底面にして、この立体を四角「柱」と見ることはできるのでしょうか。このことを考えるため、この四角柱を転がしてみることにします。次の図を見てください。

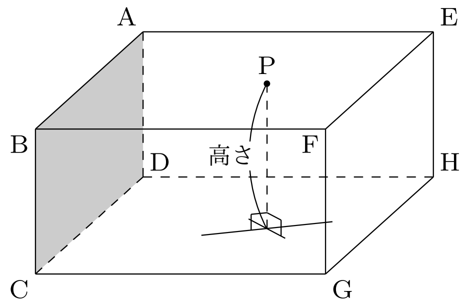


もう少し転がすと次の図のようになります。



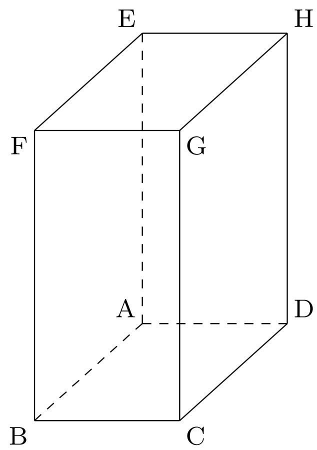
どうですか？このように転がしてみると、さっきまでとは違う面が、あなたから見て「底」になっているように見えると思います。転がす前は四角形 ABCD が底面でしたね。（そしてその四角形 ABCD は灰色に塗ってありました。）転がしたあと、灰色の四角形 ABCD はあなたから見て「底」ではなく「左横」になっているはずです。そしてあなたから見て「底」にあるのは四角形 DCGH ですね。転がしたあとのこの立体をよく見てみましょう。上のほうへいくらいってもずっと四角形 DCGH と同じ形のまま柱の形をしています。（注意してください。これは、もともとの底面である四角形 ABCD が、ただの四角形ではなくて長方形だったからです。ありふれた四角柱では、転がしてもこのようにならないことがあります。）ですから、この向きで見ても、この立体は「柱」です。つまり、今度はこの立体を「底面が四角形 DCGH である四角柱」と思うことができるのです。

それではこのように、この四角柱を「底面が四角形 DCGH である四角柱」と思ったとき、「高さ」はどこを測ればよいのでしょう。もちろん、底面に向かい合わせになっている面の上にある点から底面へ向かって底面にぶつかるまで、底面へ垂直に進む長さですね。ですから今度は、四角形 ABFE の上に点 P を 1 つ決めて、そこから新しい底面 DCGH に向かって底面 DCGH にぶつかるまで「垂直に」進めば良いわけです。つまり右の図のようになるわけです。

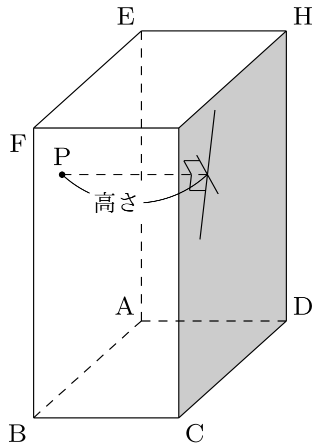


「底面」という言葉は、もともと「底」になる面という意味ですから、「ナントカ柱」や「ナントカ錐」を図にするとき、「底面」をあなたから見て「底」に見えるように描くことが多いわけです。でも慣れてきた人は、頭の中で立体を転がして考えたり、転がさないでも図を見ればわかるようになったりするでしょう。ですから、これからそういう人のために、転がした図ではなく、もとの図のままでさっきの話を考えてみます。

右の図を見てください。これはこの例の最初に出てきた図です。ただし今度は、必ずしも四角形 ABCD を底面と考えるわけではないので、四角形 ABCD は灰色にしてありません。また「高さ」をあらわす線も描いてありません。さっきは、この四角柱を転がした図を見ながら「底面」や「高さ」を考えてみましたね。さっきの話では、四角形 DCGH を底面にしてもこの立体は四角柱と思ってよいことがわかりました。そしてそのときどこが高さになるか考えてみました。ここではこのことを、転がさないもとの図で考えてみます。



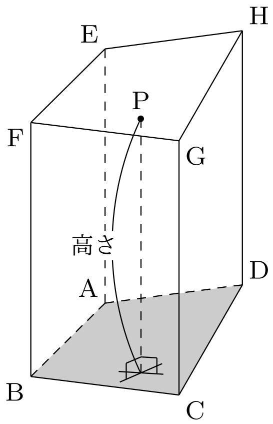
では右の図を見てください。これから四角形 DCGH を底面と考えるので、四角形 DCGH を灰色にしておきました。そうすると、高さはどこになるのでしょう。もうおわかりですね。「ナントカ柱」の高さは、底面を決めると、底面に向かい合っている頂点から底面へ向かって、底面にぶつかるまで、底面に垂直に進む距離ですよね。ですから、今の場合、四角形 AEFB の上にある点 P を 1 つ決め、その点から底面である四角形 DCGH へ向かってぶつかるまで垂直に進むことになります。そのときにできる、右の図のような線分の長さが高さということになりますね。この場合、高さは辺 EH、辺 FG、辺 BC、辺 AD の長さとも同じになります。



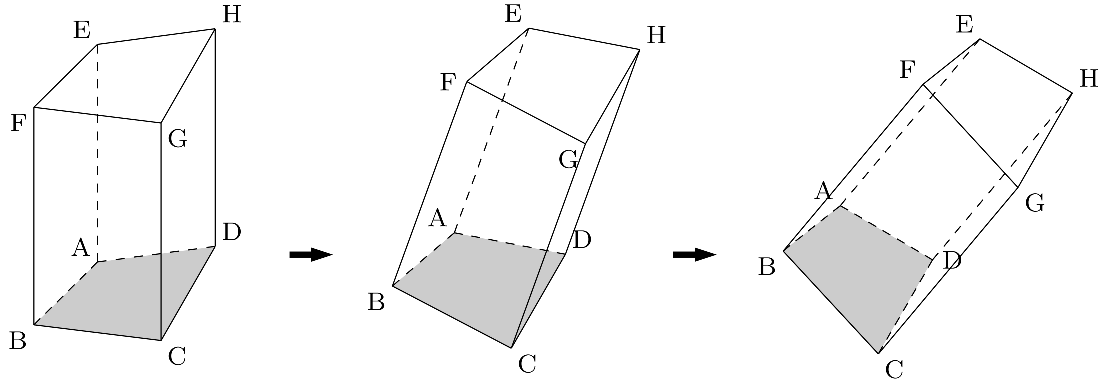
例 14　たいていのナントカ柱やナントカ錐は底面は選べないという話

右の図を見てください。これは、四角形 ABCD を底面と考えると、四角柱と思うことができる立体です。底面 ABCD に向かい合う面の上に点 P をとり、点 P から底面 ABCD へ向かって垂直に、「高さを表す線」も点線で描いておきました。

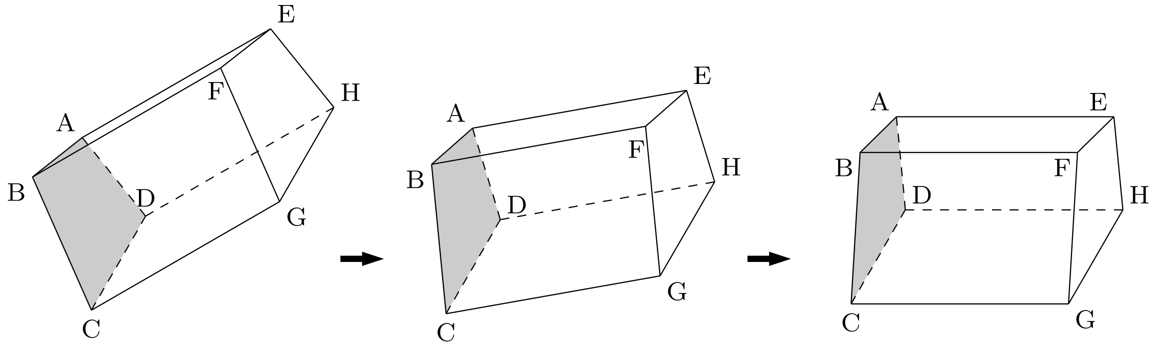
注意してほしいことがあります。この図を見ると想像できると思いますが、底面と考えた四角形 ABCD は長方形ではないのです。このことは今とても大切なことなので、しっかり頭に入れておいてください。



それでは、これから、「この四角柱では四角形 ABCD 以外の面を底面と考えても良いのか」ということを悩むことにします。そこで、この四角柱を転がしてみることにします。次の図を見てください。

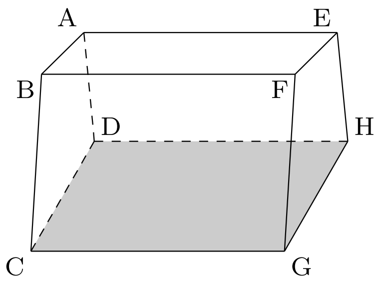


さらに転がしていくと次のようになります。



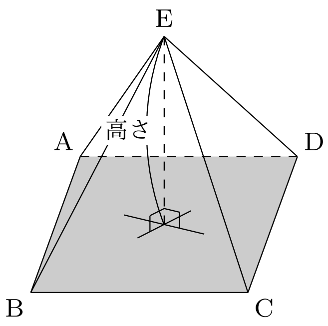
どうですか？このように転がしてみると、さっきまでとは違う面が、あなたから見て「底」になっているように見えると思います。転がす前は四角形 ABCD が底面でしたね。（そしてその四角形 ABCD は灰色に塗ってありました。）転がしたあと、灰色の四角形 ABCD はあなたから見て「底」ではなく「左横」になっているはずです。そしてあなたから見て「底」にあるのは四角形 DCGH ですね。では、四角形 DCGH を底面と考えて、この立体を四角「柱」と思っても良いのでしょうか。転がしたあとのこの立体をよく見てみましょう。

では右の図を見てください。あなたのために、四角形 DCGH を灰色にして図を描いておきました。たしか「ナントカ柱」って、いくら上のほうに行っても「底」にある図形と同じ形のまま「柱」の形をしている図形ですよね。ところが、この図の向きでこの立体を見ると、上のほうに行けば行くほど狭くなっていきます。ですから、この向きでこの立体を見ると、とても「柱」の形をしているとはいえません。というわけで、この立体は「底

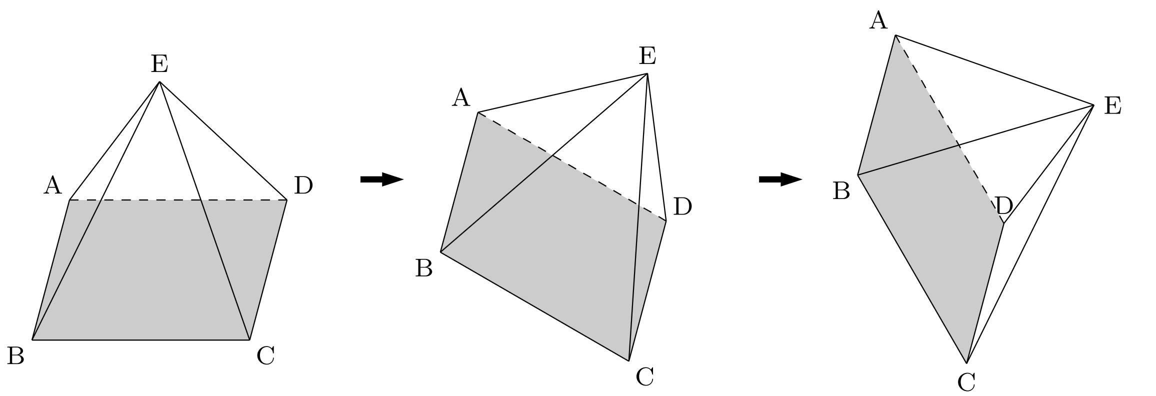


面が四角形 CDGH である四角柱」と考えるわけにはいかないのです。

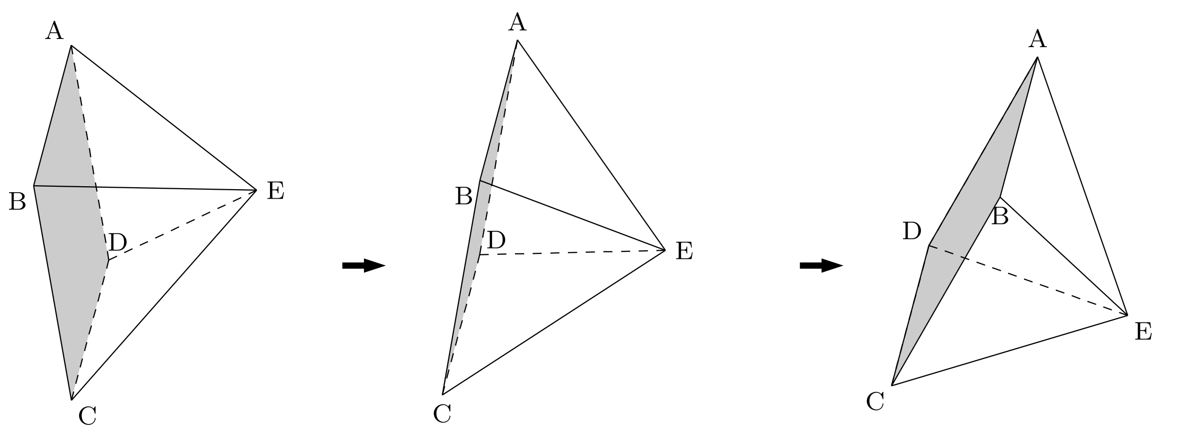
　では次は、右の図の四角錐について考えてみましょう。これは、四角形 ABCD を底面と考えると、四角錐と思うことができる立体です。よく、この立体、三角っぽいので三角錐だと思っている人がいますが、違うんですよ。これ、四角錐なんですよ。この図では、底面をわかりやすくするために、「この四角錐の底面である四角形 ABCD」を灰色にしておきました。そして高さを表す線を点線で描いておきました。



　それではこれから、「この四角錐では四角形 ABCD 以外の面を底面と考えても良いのか」ということを悩んでみることにします。そこで、この立体を転がしてみることにします。次の図を見てください。

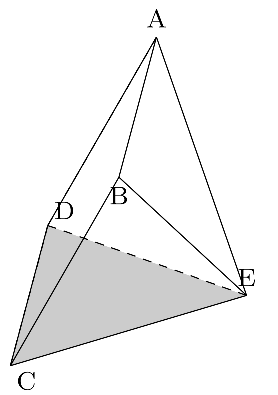


　さらに転がしていくと次のようになります。

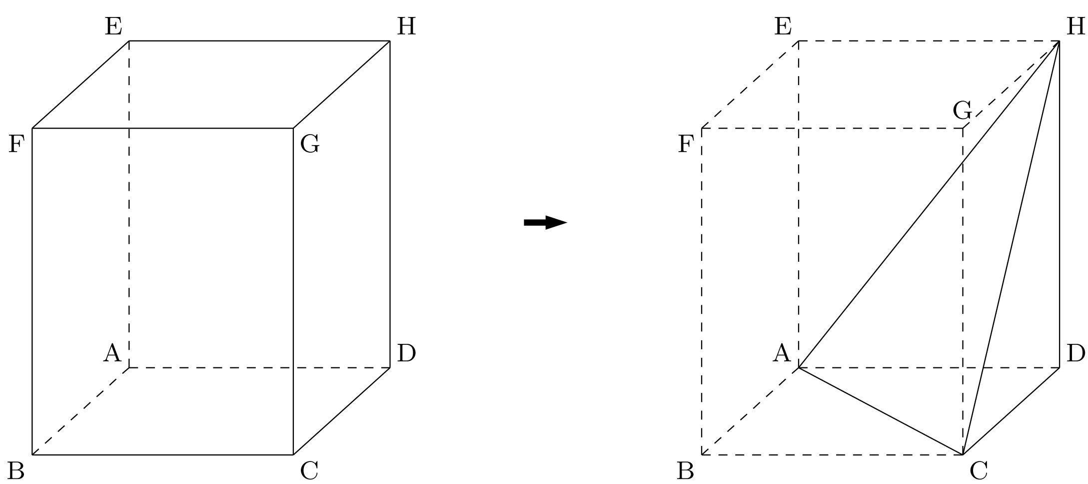


どうですか？このように転がしてみると、さっきまでとは違う面が、あなたから見て「底」になっているように見えると思います。転がす前は四角形 ABCD が底面でしたね。（そしてその四角形 ABCD は灰色に塗ってありました。）転がしたあと、灰色の四角形 ABCD はあなたから見て「底」ではなく「左横」になっているはずです。そしてあなたから見て「底」にあるのは三角形 CED ですね。では、三角形 CED を底面と考えて、この立体を四角「錐」と思っても良いのでしょうか。転がしたあとのこの立体をよく見て考えることにしましょう。

では右の図を見てください。あなたのために、三角形 CED を灰色にして図を描いておきました。たしか「ナントカ錐」って、上のほうに行けば行くほどとがっている立体ですよね。ところが、この図の向きでこの立体を見ると、上のほういくら行ってもとがっていきませんよね。つまり、この向きでこの立体を見ると、とても「錐」の形をしているとはいえないわけです。というわけで、この立体は「底面が三角形 CED であるナントカ錐」と考えるわけにはいかないのです。



問 23. 次の図を見てください。



左に描かれているのは底面が「長方形」の四角柱です。この四角柱を削っていくと、この図の右に描いてあるような立体を取り出すことができます。取りだされた図形について、以下の問に答えなさい。

(1) この立体は、三角形 ACD を底面とする「錐」と考えることはできますか？もしできるなら、高さはどこを測ればよいですか。理由もきちんと付けて答えなさい。
(2) この立体は、三角形 CDH を底面とする「錐」と考えることはできますか？もしできるなら、高さはどこを測ればよいですか。理由もきちんと付けて答えなさい。
(3) この立体は、三角形 ADH を底面とする「錐」と考えることはできますか？もしできるなら、高さはどこを測ればよいですか。理由もきちんと付けて答えなさい。
(4) この立体は、三角形 ACH を底面とする「錐」と考えることはできますか？もしできるなら、高さはどこを測ればよいですか。理由もきちんと付けて答えなさい。
(5) 取り出された立体の名前を答えなさい。

答えを見る

2.9　空間の中に 2 つの平面があるときの位置関係

以前、「空間の中に 2 つの直線があるときの位置関係」や、「空間の中に直線と平面があるときの位置関係」について学びました。覚えていますか？忘れてしまった人すぐ、このテキストで復習してください。

ここではこれから「空間の中の 2 つの平面の位置関係」について調べていきます。しかしここではまず「平面の中」の 2 つの「直線」の位置関係についておさらいします。

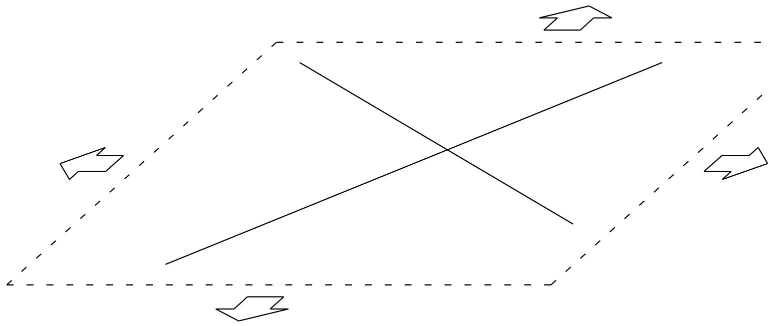
おさらい: : 平面の中に 2 つの直線があるときの位置関係

ここでは簡単におさらいするだけにします。今、平面の中のことだけを考えるのですから、全世界は平面だけです。つまり、平面の外へ出て行くことはできないのです。このことをしっかり頭の中に入れて、この先の説明を読んでください。

平面の中に 2 本直線があると、次のようなことが起こります。

平面の中の 2 本の直線の位置関係その 1：2 本の直線が 1 つの点で交わっている

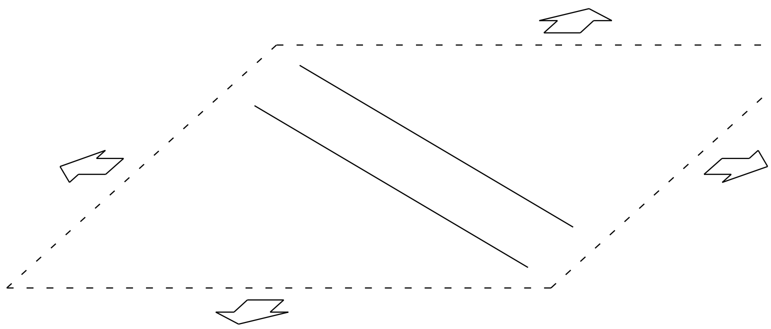
次の図のようになっている場合です。



念のために注意をしておきます。今、全世界は平面の中だけです。この図では、平面は点線で描かれています。点線の外にも、矢印のほうに、平面は限りなく広がっています。しかし、今、全世界は平面の中だけです。つまり、この平面の上や下の世界はありません。ですから、この図に描かれている 2 本の直線も、この平面より上のほうや下のほうに出ている部分はありません。

平面の中の 2 本の直線の位置関係その 2：2 本の直線はどこまで行っても交わらない

次の図のようになっている場合です。



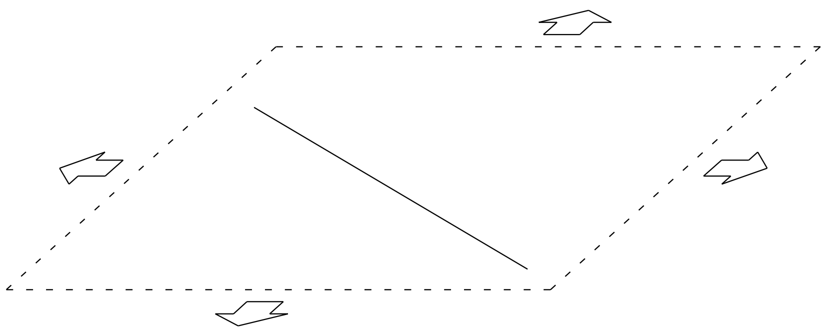
念のために注意をしておきます。今、全世界は平面の中だけです。この図では、平面は点線で描かれています。点線の外にも、矢印のほうに、平面は限りなく広がっています。しかし、今、全世界は平面の中だけです。つまり、この平面の上や下の世界はありません。

ですから、この図に描かれている 2 本の直線も、この平面より上のほうや下のほうに出ている部分はありません。

あなたもきっと知っていると思いますが、こういうとき「2 つの直線は平行である」というのでしたね。

平面の中の 2 本の直線の位置関係その 3：2 本の直線がぴったり重なっている

次の図のようになっている場合です。



念のために注意をしておきます。今、全世界は平面の中だけです。この図では、平面は点線で描かれています。点線の外にも、矢印のほうに、平面は限りなく広がっています。しかし、今、全世界は平面の中だけです。つまり、この平面の上や下の世界はありません。ですから、この図に描かれている 2 本の直線も、この平面より上のほうや下のほうに出ている部分はありません。

よく見てくださいね。この図、1 本しか直線が描かれていないように見えますが、本当は 2 本あるんですよ。でも、ぴったり重なっているので 1 本にしか見えないんです。心の目で見ればきっと 2 本あるのがわかるでしょう。

以上 3 つのパターンを紹介しました。実は、これ以外にはないのです。平面の中に 2 本直線があるとき、この 3 パターン以外のことが起きることはないのです。これは大切なことなので、しっかり頭に入れておいてください。

おさらい終わり

では本題に入ります。いま、「平面」の中の 2 つの「直線」のことをおさらいしましたが、これから「平面」の中ではなく、「空間」の中の出来事を考えるのです。また、2 つの直線」ではなく 2 つの「平面」のことを考えるのです。そして、空間の中の 2 つの平面の位置関係にはどんなものがあるのか考えるのです。

質問 下敷きを 2 枚用意してください。そして片方の下敷きを左手に持ち、もう片方の下敷きを右手にもってください. 下敷きをいろいろな向きやいろいろな場所に変えて、2 枚の下敷きの位置関係、つまり空間の中の 2 つの平面の位置関係にはどんな場合があるのか考えてください。

では 10 分待ちます。じっくりと観察して悩んでください。

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

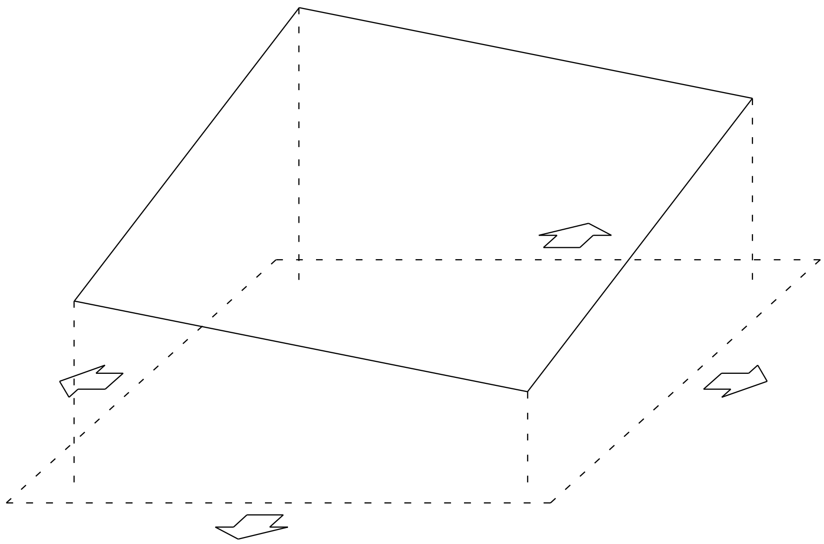
はい、10 分たちました。それでは答えをあなたに教えることにしましょう。

質問の答え

「平面」の中の 2 つの「直線」の位置関係は、「交わる」平行である」「一致している」の 3 通りでした。実は、「空間」の中の 2 つの「平面」の位置関係も「交わる」「平行である」一致している」の 3 通りなのです。これから図を使ってこの 3 通りのことを見ていくこと

にします。

詳しい話に入る前に、前置きの話をします。次の図を見てください。



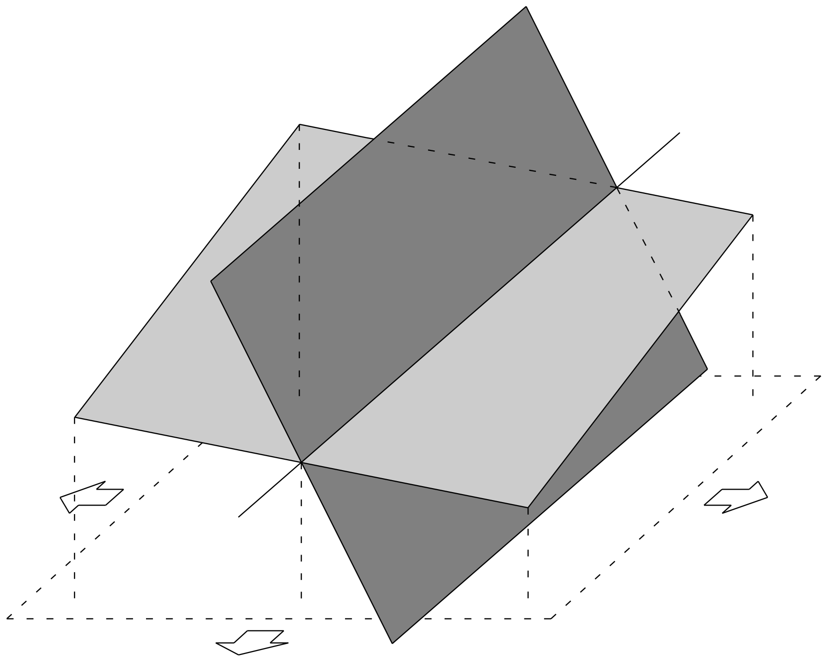
この図には「空間の中にある平面」が実線で 1 枚描かれています。これまでも何度か説明してきたように、下のほうに点線で描いてある平面は、図を「空間っぽく見せる」ために描いているもので、深い意味はありません。この平面は。基準の高さをわかりやすくするだけのものです。空間は、この点線で描かれた平面の上のほうにも下のほうにも果てしなく広がっています。これから、空間の中の平面と直線のことを図を使って考えるのですが、注目する平面は実線で描かれている平面のほうです。このことをあらかじめ注意しておきます。

空間の中に 2 つの平面があるときの位置関係は 3 通り考えられる

それではこれから、この図にさらに 1 つの平面が加わったらどんなことが起きるか見ていきます。さっき答えを言ってありますが、たしか 3 通りのことが起きるのでしたね。

空間の中の 2 つの平面の位置関係その 1：2 つの平面が交わっている

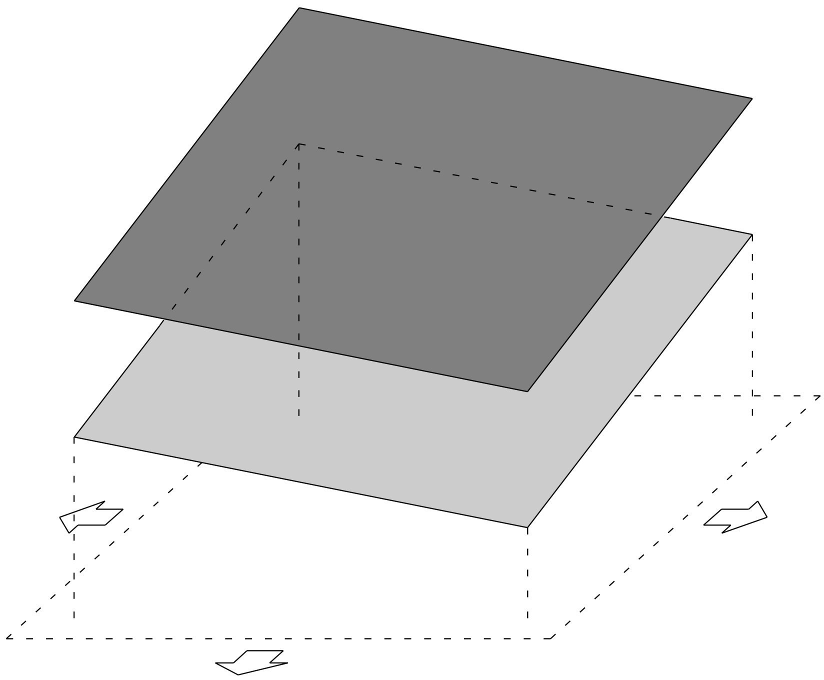
次の図のようになっている場合です。



わかりやすくするために、2 つの平面をそれぞれ濃い灰色と薄い灰色にしておきました。（念のため言っておきます。図では 2 つの平面にはふちがありますが、本当は平面は平らなままふちの外へ限りなく広がっているのですよね。）図を見るとわかるように、このように 2 つの平面が空間の中で交わると、交わった所に直線ができるのです。

空間の中の 2 つの平面の位置関係その 2：2 つの平面が平行になっている

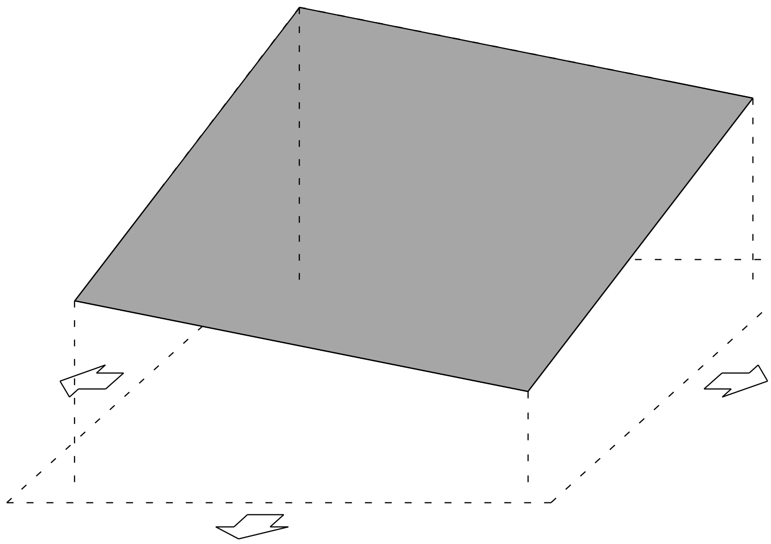
次の図のようになっている場合です。



わかりやすくするために、2 つの平面をそれぞれ濃い灰色と薄い灰色にしておきました。（念のため言っておきます。図では 2 つの平面にはふちがありますが、本当は平面は平らなままふちの外へ限りなく広がっているのですよね。）2 つの平面は果てしなく広がっているわけですが、このように 2 つの平面が空間の中で平行になっていると、2 つの平面はどこまで行ってもぶつかることはありません。（いい加減な言い方をすると、2 つの平面の間の「幅」はどこまで行っても変わらないということです。）

空間の中の 2 つの平面の位置関係その 3：2 つの平面が一致している

次の図のようになっている場合です。



わかりやすくするために、2 つの平面をそれぞれ濃い灰色と薄い灰色にしておいたのですが、2 つの平面が一致しているので区別がつかなくなってしまいました。つまり、この図では 1 枚しか平面が描いてないように見えますが、本当は 2 枚あるんですよ。ぴったり重なっているので 1 枚に見えるのです（念のため言っておきます。図では 2 つの平面にはふちがありますが、本当は平面は平らなままふちの外へ限りなく広がっているのですよね。）2 つの平面は果てしなく広がっているわけですが、このように 2 つの平面が空間の中で一致していると、2 つの平面はどこまで行っても一致したままです。

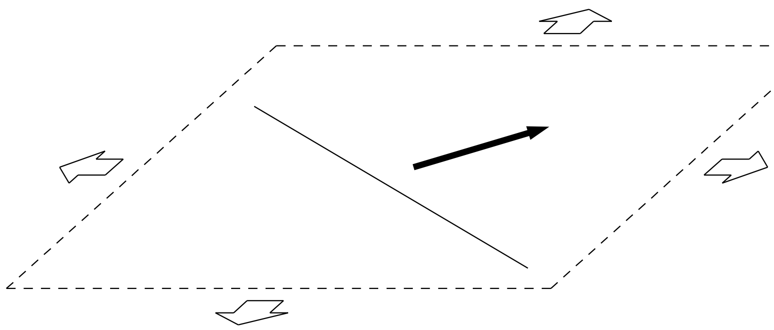
おまけの話

以上見てきたように。「平面の中に 2 つの直線があるときどんな位置関係がありえるのか」という質問と、「空間の中に 2 つの平面があるときどんな位置関係がありえるのか」という質問の答えは同じになりました。「平面の中」が空間の中」に変わり、「2 つの直線」が「2 つの平面」」に変わっても 2 つのモノの位置関係は「交わる」「平行である」「一致している」の 3 通りなのでした。ではどうして「平面の中の 2 つの直線の位置関係」を調べ

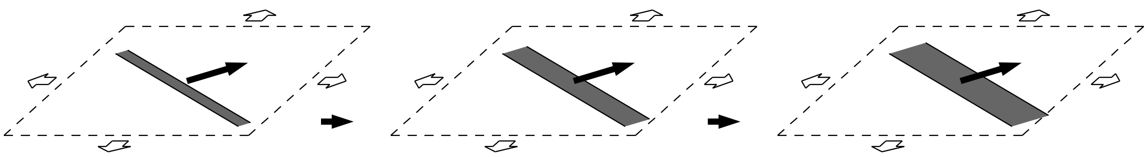
ても「空間の中の 2 つの平面の位置関係」を調べても、「交わる」「平行になる」「一致する」という同じ 3 通りとなるのでしょうか。これは偶然なのでしょうか。それとも何かわけがあるのでしょうか。ここでこれから考えてみることにします。（少し難しい話なので、「私には無理」という人はこの先は読まなくてもかまいません。）

まず、平面の中や空間の中で直線を動かすと面ができるという話をします。

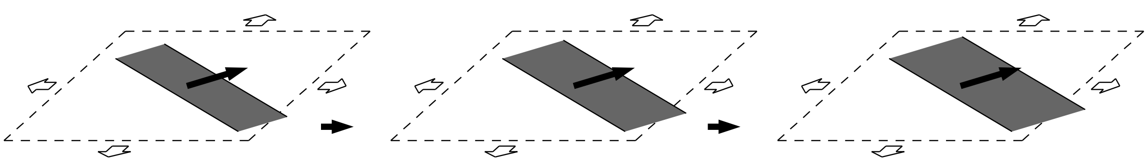
では、次の図を見てください。



平面の中に直線が一本あります。また、直線のそばに黒い矢印が描かれています。この直線を平面の中で矢印のほうへゆっくりすこしづつ動かしていくと、動いた跡（あと）は平面になります。次の図を見てください。

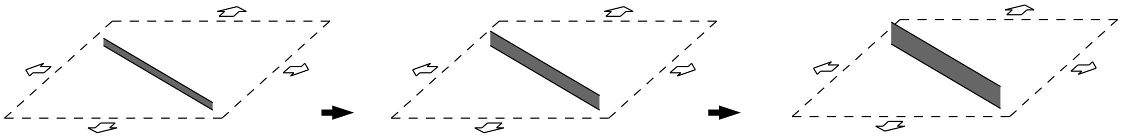


直線にはインクがたっぷり含まれていて、直線が動いて行くと通過した跡にインクがしみていくと思っておくと良いかも知れません。それでは、直線をもう少し動かしてみましょう。次の図を見てください。

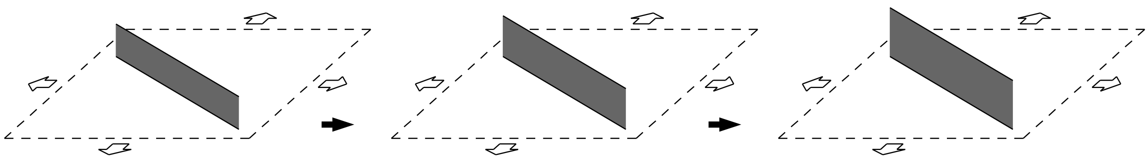


だんだん黒い平面が広がっていきますね。このようにして、平面の中で直線が動いていくと、通過した跡に平面ができていくのです。

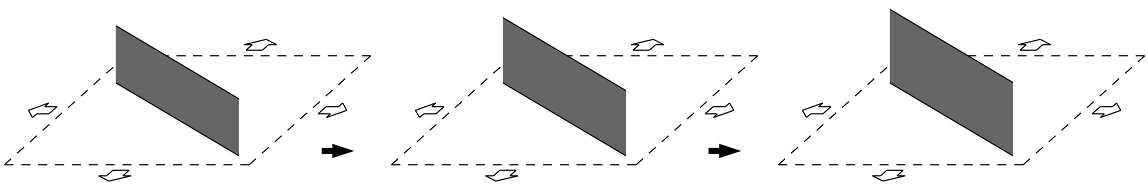
では今度は、直線を空間の中で動かしてみましょう。何度も言っていますが、空間は上のほうにも下のほうにも限りなく広がっています。そこで今度は、直線を、真上にゆっくり少しづつ動かしてみます。そうするとやはり、通過した跡 (あと) は平面になります。次の図を見てください。



空間の中にだんだん「面」ができていくのがわかりますね。では、直線をもっと上に持ち上げてみましょう。次の図を見てください。



だんだん黒い面が広がっていきます。さらに直線を持ち上げてみます。次の図を見てください。

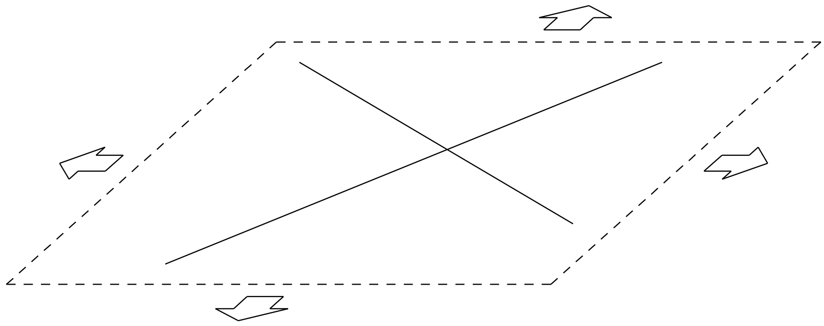


黒い面がどんどん広がっていくことがわかりますね。このように、空間の中で直線がある方向にまっすぐ動いていっても、直線が通過したあとは平面となっていくのです。

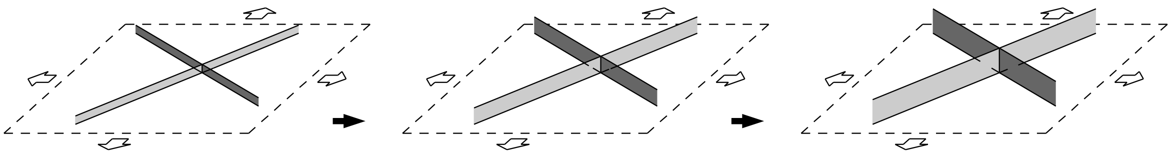
ここまで、平面の中や空間の中で直線を動かすと面ができるという話でした。では、本題に入りましょう。

平面の中で 2 つの直線が交わっている状態を空間の中で 2 つの平面が交わっている状態に対応させて考えることができるという話

次の図を見てください。

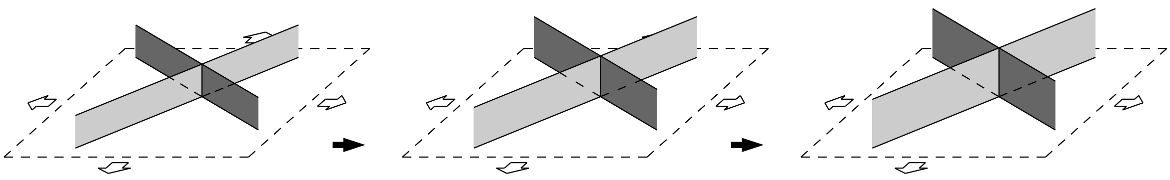


この図は、平面の中で 2 つの直線が交わっている所をあらわしています。今、2 つの直線は、点線で囲まれた平面に含まれているわけです。ところで、空間は点線で囲まれた平面の上のほうにも下のほうにも果てしなく広がっています。ですからさっきまでの話のように、この 2 つの直線を真上にゆっくり少しずつ動かしていくことができます。次の図を見てください。

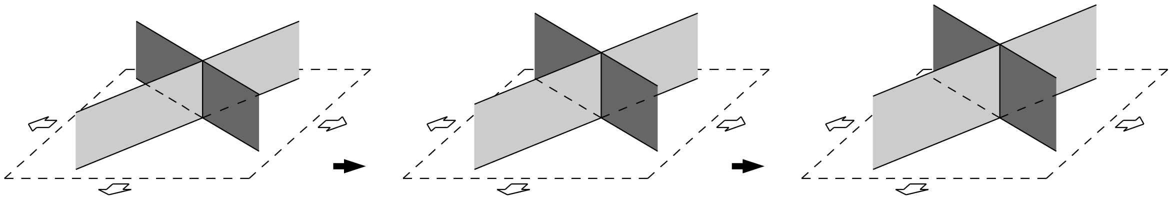


この図のように、もともとあった 2 つの直線が通過した跡は、だんだん空間の中の 2 つの平面となっていきます。

2 つの直線をもっと真上に持ち上げていきましょう。すると、次の図のようになります。



この図を見るとわかるように、2 つの平面がさらに上のほうへだんだん広がっていきます。それでは 2 つの直線をさらに持ち上げてみます。次の図を見てください。



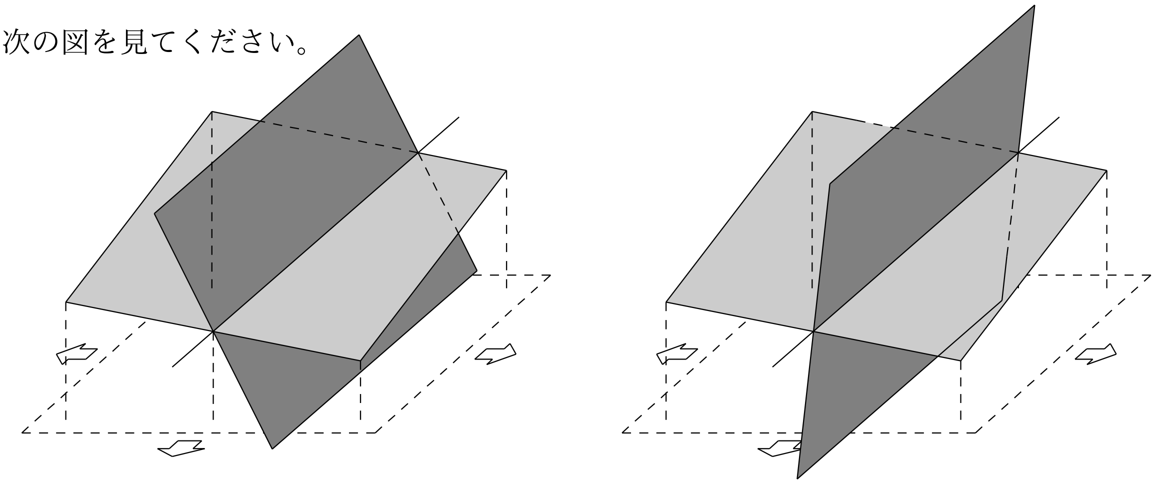
このように 2 つの平面はまたさらに上へ広がってくわけです。2 つの直線が通過した跡に 2 つの平面ができていくとき、初め平面の中に含まれていた 2 つの直線の交点もまっすぐ上へ移動し、移動した跡に直線ができます。この直線は 2 つの平面の交わった所となっているわけです。

今の話の要点をまとめてみます。まず平面の中で 2 つの直線が交わっていました。空間は上のほうにも下のほうにも限りなく広がっています。そこで 2 つの直線を真上にゆっくり少しずつ動かしていきました。直線の動いたあとは、平面になります。ですから 2 つの平面ができていくわけです。そしてもともと 2 つの直線が交わっていた点は、まっすぐ上にのびていき、2 つの平面の交わった所に直線ができるのです。これは次のようなことを意味しています。「空間の中でまっすぐ上に持ち上げる」という操作によって、直線は「平面」に対応するわけですが、このとき「2 つの直線が交わった状態」は「2 つ平面が交わった状態」に対応することになるのです。つまり、「平面の中で 2 つの直線が交わった状態」と「空間の中で 2 つの平面が交わっている状態」を対応付けることができるのです。

ここでは「平面の中で 2 つの直線が交わっている状態」を「2 つの平面が空間の中で交わっている状態」に対応させて考えてみましたが、他の場合も同じように考えることができます。つまり、平面の中の直線を真上に持ち上げていくという操作によって「平面の中で 2 つの直線が平行になっている状態」を「空間の中で 2 つの平面が平行になっている状態」に対応付けしたり、「平面の中で 2 つの直線が一致している状態」を「空間の中で 2 つの平面が一致している状態」に対応付けすることができます。ですから、「平面の中の 2 つの直線の位置関係」と「空間の中の 2 つの平面の位置関係」はどちらも。「交わる」「平行である」「一致している」の 3 通りなのです。（本当はもっと精密な議論をしないといけないのですが、細かい議論をしていくとついてこれなくなる人が出てくるので、大体の話をしました。）

空間の中の 2 つの平面が垂直になっているってどういう状態？

次の図を見てください。



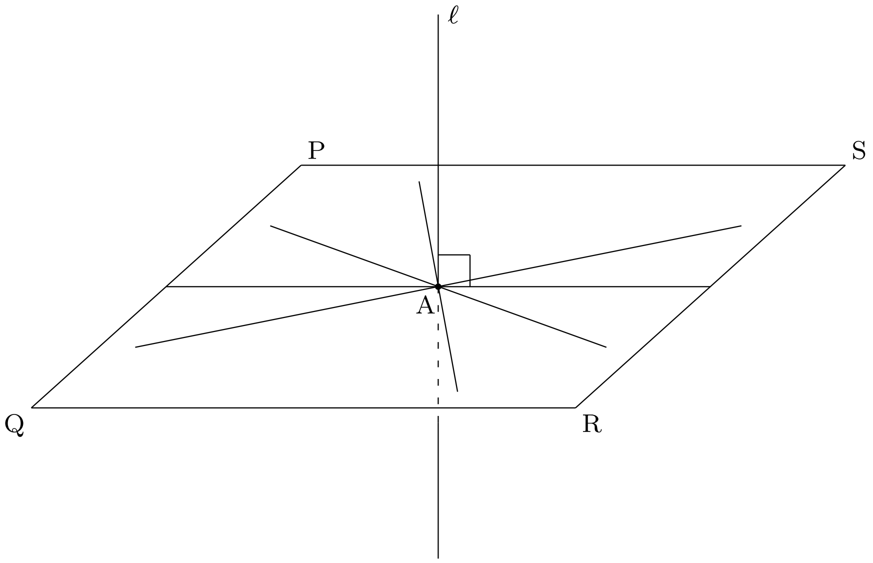
左と右のどちらの図も、2 つの平面が空間の中で交わっている所をあらわしています。実は左の図では、濃い灰色の平面と薄い灰色の平面は「垂直に」交わっていないのですが、右の図では、濃い灰色の平面と薄い灰色の平面は「垂直に」交わっているのです。（あなたにもそんなふうに見えますか？「えー、そんなことといわれても・・・」と思った人もいるかもしれません。そりゃぁそうですよね。空間の中にあるものを無理やり紙の上に描いているのですから、図を見てもピンと来ないかもしれませんね。ぜひ、下敷きを 2 枚用意して、あれこれと下敷きを組み合わせたりして、自分でもどんな風になっているのか考えてみてください。）ですが、そもそも 2 つの平面が空間の中で「垂直に」交わるってどういうことなのでしょう。「垂直に」交わっているのと、「垂直ではなく」交わっているのでは何がどう違うのでしょう。もし分度器や定規を持っていたら、どこを測れば 2 つの平面が垂直に交わっているのかそうではないのか判断できるのでしょう。このようなことをこれから考えることにします。そこでまずおさらいしたいことがあります。それは、空間の中で直線が平面に垂直に交わっているときのことです。

おさらい：空間の中で直線が平面に垂直に交わるとは

89 ページから始まる数ページで、空間の中で直線が平面に垂直に交わるとはどういうことなのかということを学びました。結論は次のようなことでした。

空間の中で直線が平面に垂直であるとはそもそもどういう意味？

空間の中で直線と平面が 1 点で交わっているとします。ここではその直線を ℓ、平面を平面 PQRS と呼ぶことにします。では次の図を見てください。

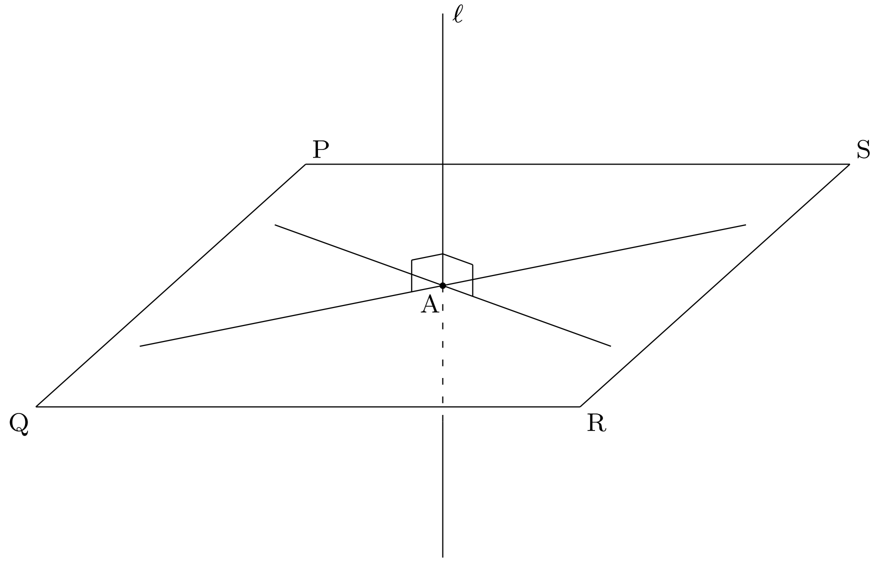


この図には平面 PQRS の上に乗っている直線で点 A を通る直線が 4 本かかれていますが、このほかにも平面 PQRS の上に乗っている直線で点 A を通る直線が無数にあります。それら全ての直線に対して、直線 ℓ が垂直になっているとき、「直線 ℓ は平面 PQRS に垂直である」ということにします。

これが、「そもそも空間の中で直線が平面に垂直になっているということの意味」です。ある直線が、平面の中にありとあらゆる直線に垂直になっているとき、その直線はその平面に垂直であるというわけです。でも「ありとあらゆる直線」っていくらでもあるんですよね。そんな、キリなく、無数にあるものに対して、垂直になっていることを全て調べるなんてできませんよね。でも、昔の人がいっしょうけんめい研究してくれたおかげで、全て調べなくてもいいんです。実は次のようなことがわかっているのです。

空間の中で直線が平面に垂直であると断言するには

空間の中で直線と平面が 1 点で交わっているとします。ここではその直線を ℓ、平面を平面 PQRS と呼ぶことにします。では次の図を見てください。

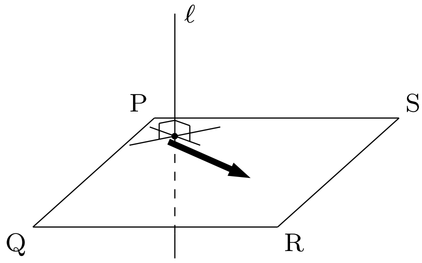


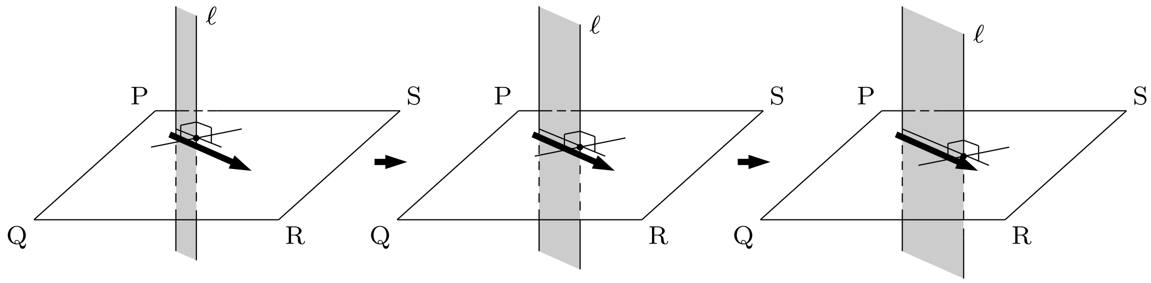
この図には平面 PQRS の上に乗る直線で点 A を通る直線が 2 本かかれています。もちろんこのほかにも、平面 PQRS の上には点 A を通る直線が無数にあります。ですが、実は、初めにあった 2 本の直線に対して、直線 ℓ が垂直になっていたら、「直線 ℓ は平面 PQRS に垂直である」と断言できるのです。

おさらい終わり

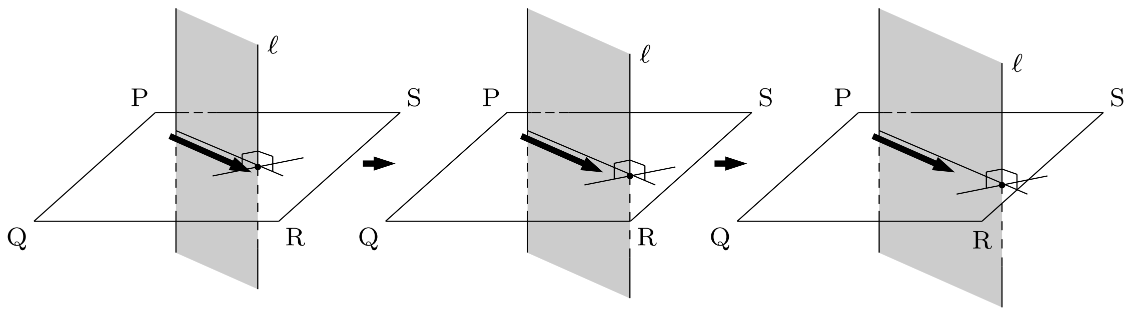
では本題に入りましょう。本当は、「空間の中の直線と平面が垂直であるとはどういうことなのか」ではなく「空間の中の 2 つの平面が垂直であるとはどういうことなのか」ということを考えたいのでしたね。ところで以前、123 ページから始まる数ページで「空間の中で直線を動かしていくと、動いた跡に平面ができる」ということを学んでいます。そこで、次のようなことを考えてみようと思います。

右の図を見てください。この図のように、空間の中で直線 ℓ が平面 PQRS に垂直に交わってるとします。この図には、黒い矢印が描かれています。そこで直線 ℓ を、「平面 PQRS に垂直になったまま、まっすぐ矢印のほうに」動かしてみましょう。するとどんなことが起こるでしょうか。では次の図を見てください。





さらに動かしてみましょう。すると次の図のようになっていきます。

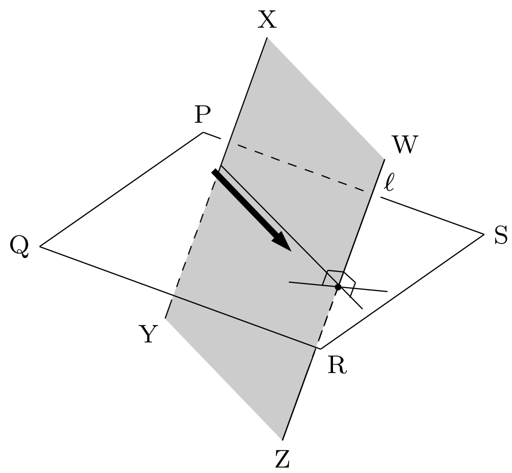


これらの図では直線 ℓ の動いた跡にできた平面を灰色にしてあります。直線 ℓ は平面 PQRS に「垂直なまま」動かしたのですから。直線 ℓ の動いた跡にできた平面は、平面 PQRS に垂直になっていると考えるべきでしょう。ですから、次のように約束するのが一番良いと考えられます。

空間の中で 2 つの平面が垂直になっているとは？

右の図を見てください。空間の中で 2 つの平面が交わっているとします。ここではその 2 つの平面をそれぞれ、平面 PQRS と平面 XYZW と呼ぶことにします。

この図にであらわされているように、平面 XYZW は「平面 PQRS に垂直になっていた直線 ℓ を、平面 PQRS に垂直なまま、まっすぐ動かしてできた跡」になっていると思うことができるとき、「平面 XYZW は平面 PQRS に垂直に交わっている」ということにします。

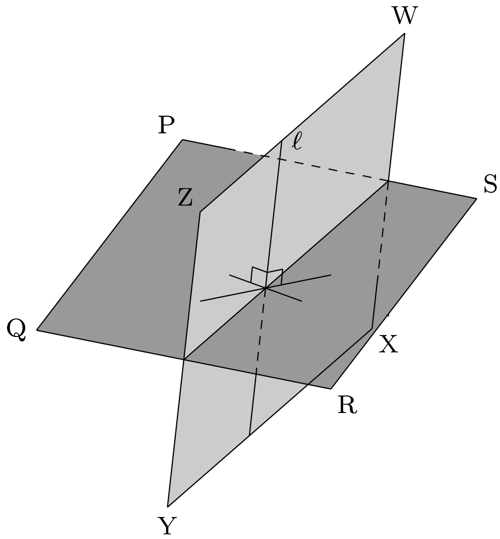


これが、そもそも、「空間のなかで 2 つの平面が垂直になっている」ということの意味です。つまり、「片方の平面」が「もう片方の平面に垂直になっている直線を、もう片方の平面に垂直なまま、まっすぐ動かしてできた跡」と考えられるということですから、「片方の平面」の中には「もう片方の平面に垂直な直線」がいくらでも限りなくたくさん含まれているわけです。

では次に、「2 つの平面が空間の中で垂直なのかそうでないのか判定する方法」を教えることにしましょう。昔の人がいろいろ悩んでくれたおかげで、次のようなことがわかっているのです。

空間の中で2つの平面が垂直になっていると断言するには？

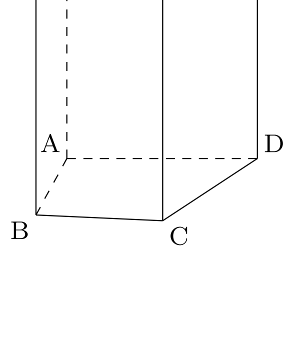
右の図を見てください。空間の中で2つの平面が交わっているとします。ここではその2つの平面をそれぞれ、平面PQRSと平面XYZWと呼ぶことにします。



実は、「片方の平面」の中に、「もう片方の平面に垂直になっている直線」が1本でも含まれていれば、2つの平面は垂直になっていると断言してよいのです。ですから、例えばこの図にであらわされているように、平面XYZWの中に、平面PQRSに垂直になっている直線ℓが含まれていれば、平面XYZWは平面PQRSに垂直に交わっていると断言できるのです。

補足：どうしてこのように断言してよいのでしょうか。いま、私たちは数学の学習をしているのですから、本当ならば、きちんと理由を言わなくてはいけません。まぁ、そうはいっても、立体のことを学び始めたばかりの人にとって、理由をきちんと言うことは大変なことかも知れませんね。そこで、ここでは、簡単に説明しておくことにします。片方の平面XYZWの中にもう片方の平面PQRSに垂直になっている直線が一本でも見つかれば、その直線をある方向にまっすぐ、平面PQRSに垂直なまま動かしていくと、その跡が平面XYZWになっていくのです。

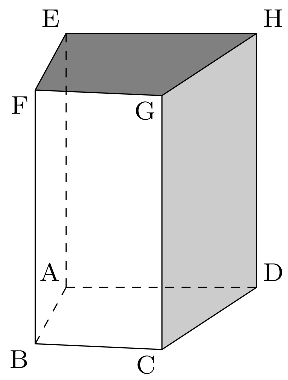
例15　右の図の立体を見てください。これは、四角柱と呼ばれる立体ですね。私たちはこれから、この立体の2つの面に注目してみることにします。そしてその2つの面が垂直なのかどうかきちんと判定してみようと思います。



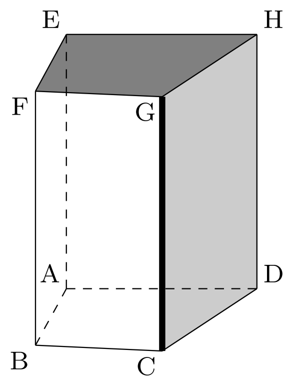
例えば、平面EFGHと平面CDHGに注目してみること

にします。

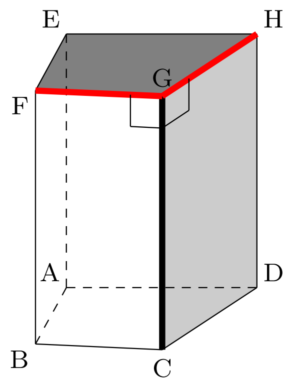
では、右の図を見てください。あなたのために、注目している 2 つの面を灰色にしておきました。ところでこの 2 つの平面ですが、垂直になっている気がしますよね。でも、垂直になっているということをきちんと説明するとしたら、どんな説明の仕方をすればよいでしょうか。「垂直なもんは垂直なんだよ！」なんていっていてもダメですよね。この例の前に、大切なことが枠で囲まれて書いてありましたね。「空間の中で 2 つの平面が垂直になっていると断言するには？」ってやつです。それによると、「片方の平面の中に、もう片方の平面に垂直になっている直線が 1 本でも含まれていれば、2 つの平面は垂直になっていると断言してよい」のでしたね。ではもう 1 度、図を良く見て考えてみましょう。そうすると、なかなかいけている直線があるではありませんか。それは、直線 CG です。



次に、右の図を見てください。見やすいように直線 CG を太くしておきました。ところで、この立体は四角「柱」なのですから、側面は全て「長方形」ですね。長方形ってそもそも「4 つの角が全部 90° の四角形のこと」なんですよね。ということは、この立体の角 FGC や角 CGH って 90° ですよね。



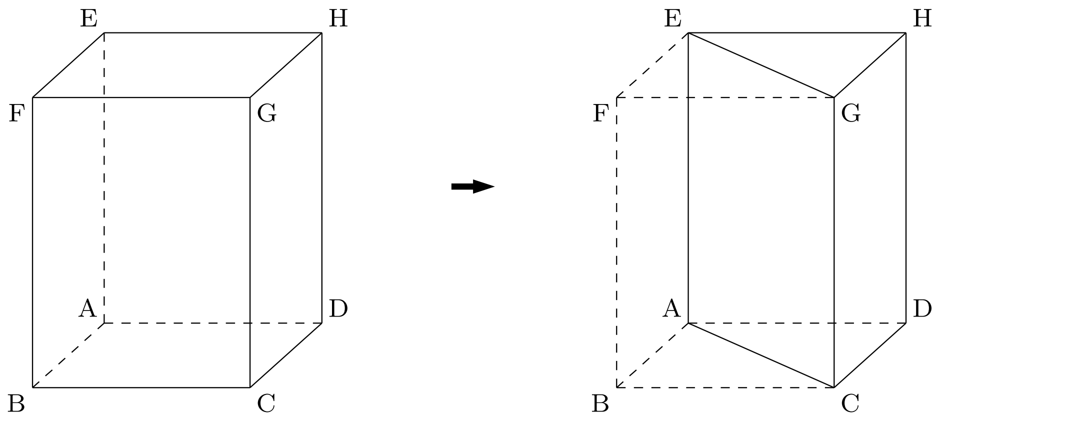
さらに、右の図を見てください。あなたのために、角 FGC や角 CGH の所に直角マークをつけておきました。また、直線 FG と直線 HG は赤くしておきました。ところで、直線 FG と直線 HG（つまり赤い 2 つの直線）はもちろん平面 EFGH（濃い灰色の平面）に含まれていますよね。ですから、直線 CG は濃い灰色の平面に含まれている 2 つの直線に垂直ってことですよね。だって前に 129 ページで、「ある直線がある平面の中にあ



る 2 つの直線に垂直だったら、その直線はその平面に垂直であると断言できる」ということをおさらいしてありますよね。

ここまでくれば、もうこれできちんと理由がいえたようなものです。いろいろと調べてみたら、平面 CDGH（薄い灰色の平面）に含まれている直線 CG は平面 EFGH（濃い灰色の平面）に垂直であることが判明したのですよね。ですから、「薄い灰色の平面」の中にはとにかく、少なくても 1 本は、「濃い平面に垂直な直線」が含まれているということですね。ということは、この例の前に学んだことにより、薄い灰色の平面は濃い灰色の平万に垂直であると断言できますよね。

問 24. 次の図を見てください。



左の図は「底面が長方形 ABCD」の四角柱です。この四角柱を削っていくと、右の図のような、「底面が三角形 ACD」の三角柱ができます。この三角柱について以下の問に答えなさい。

(1) $\angle$ADC の大きさは何度ですか。理由を付けて答えなさい。

(2) 平面 EGH と平行な面は、この三角柱にありますか。もしあるならば、あるだけ全部、面の名前を答えなさい。あなたの答えた面はどうして平面 EGH と平行なのか、理由も簡単に言いなさい。

(3) 平面 CDHG と平行な面は、この三角柱にありますか。もしあるならば、あるだけ

全部、面の名前を答えなさい。あなたの答えた面はどうして平面 CDHG と平行なのか、理由も簡単に言いなさい。

(4) 平面 ACGE と平行な面は、この三角柱にありますか。もしあるならば、あるだけ全部、面の名前を答えなさい。あなたの答えた面はどうして平面 ACGE と平行なのか、理由も簡単に言いなさい。

(5) 平面 EGH と垂直な面は、この三角柱にありますか。もしあるならば、あるだけ全部、面の名前を答えなさい。あなたの答えた面はどうして平面 EGH と垂直なのか、理由もきちんと言いなさい。

(6) 平面 CDHG と垂直な面は、この三角柱にありますか。もしあるならば、あるだけ全部、面の名前を答えなさい。あなたの答えた面はどうして平面 CDHG と垂直なのか、理由もきちんと言いなさい。

(7) 平面 ACGE と垂直な面は、この三角柱にありますか。もしあるならば、あるだけ全部、面の名前を答えなさい。あなたの答えた面はどうして平面 ACGE と垂直なのか、理由もきちんと言いなさい。

答えを見る

第3章

空間の中で線や面を動かすと通過した跡は立体の表面や側面になるという話

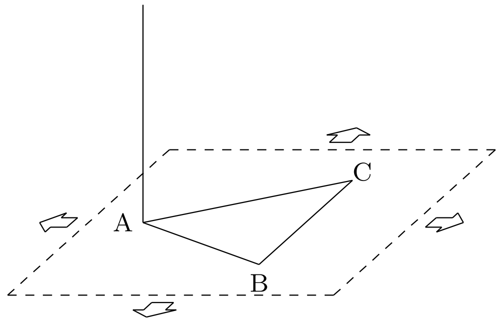
3.1　空間の中で線を動かすと・・・

空間の中で線を動かすと通過した跡に面ができるという話は、これまでにも何度か出てきましたね。復習も含めて、例を見ながら学んでいくことにしましょう。

例 16　床の上に「ナントカ角形」や「円」をおき、床に垂直な線分を周に沿って一回りさせると、「ナントカ柱」の側面ができる。

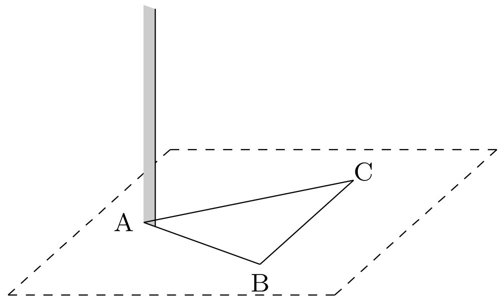
右の図を見てください。床の上に三角形がおかれています。

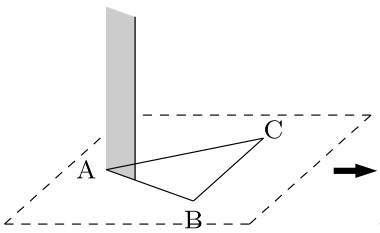
ここでまず、ある長さの線分を用意することにします。そして、その線分を、床に「垂直に」たててみます。ただし、床におかれた三角形の周の上のどこかに立てることにします。この図では床におかれた三角形 ABC の頂点 A の所に

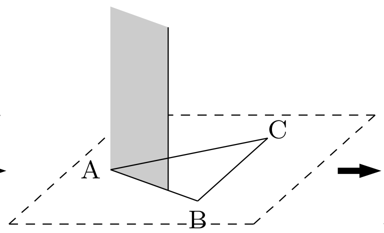


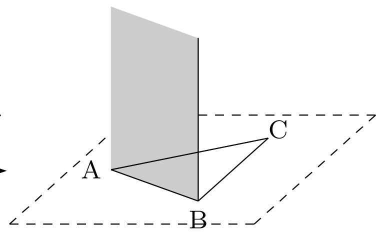
線分をたててみました。

次は、さっきたてた線分を三角形の周に沿って、床に垂直なままゆっくり動かしていきます。右の図を見てください。線分が通過した跡に灰色の面ができています。面はまだまだ狭いのですが、線分を床においた三角形の周に沿って床に垂直なまま、さらに動かしていけば面は広がっていきます。次の図を見てください。

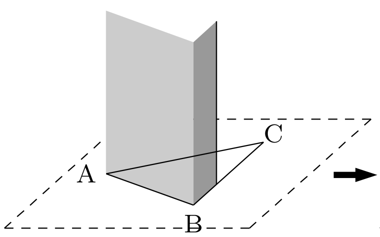


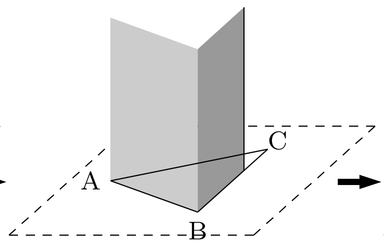


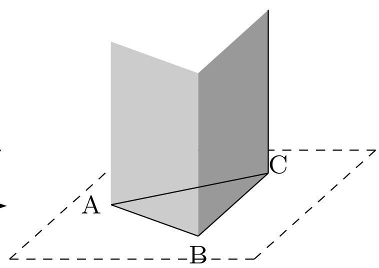




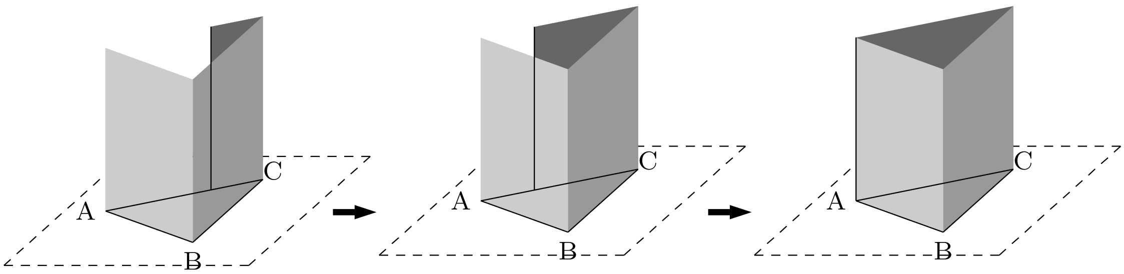
この図のように、面はだんだん広がっていきます。そしてこの図では、床に垂直に立てた線分は頂点 B の所まで動いてきました。ではさらに線分を床に垂直なまま、三角形の周に沿って動かしてみます。頂点 B で動く方向が変わりますね。すると次の図のようになっていきます。





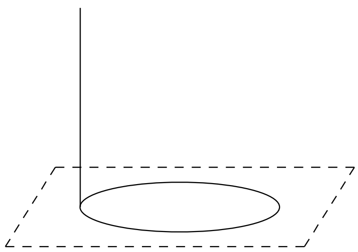


さっきまでとは違う面が新しくできていきます。線分は頂点 C の所まできました。さらに続けてみましょう。線分は進む方向を変えます。線分は床に垂直なまま、今度は頂点 C から頂点 A へ向かうのです。

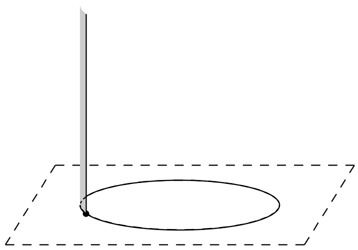


ついに線分は頂点 A へ戻ってきました。またさっきまでとは違う面ができていきます。この面は、私たちから見て裏側の面なのですが、見えているところだけを一番濃い灰色にしてあります。（最後の図を見ると、一番濃い灰色の面は、「ふた」のように見えてしまうかも知れませんが、それは違います。空間の中の出来事を紙の上に無理して描いているのでそう見えてしまうのです。）

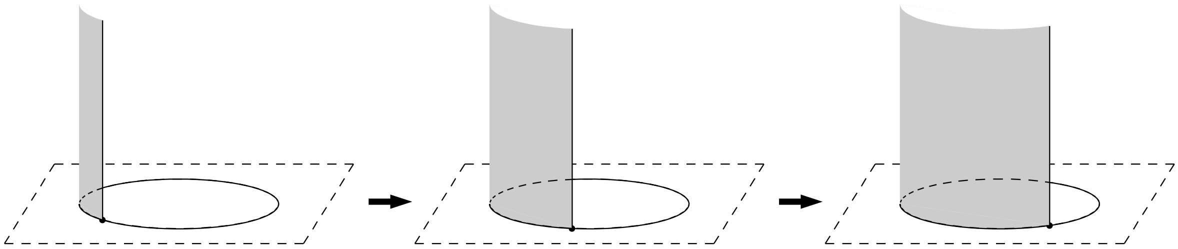
結局、灰色の面が 3 つできたのですが、これはどう見ても、三角柱の側面ですね。詳しく言うと、「底面が三角形 ABC である三角柱」の側面ができたのです。



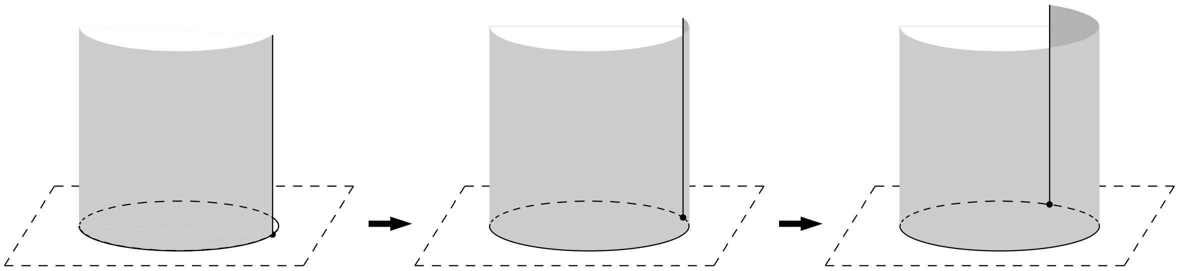
では右の図を見てください。今度はまず床に「円」がおいてあります。ここでまた、ある長さの線分を用意することにします。そして、その線分を、床に「垂直に」たててみます。ただし、床におかれた円の周の上のどこかに立てることにします。この図では床におかれた円の一番左端の点に線分をたててみました。



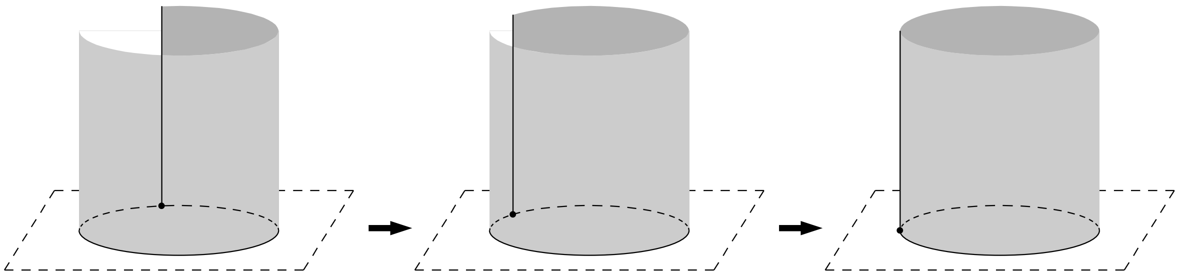
次は、さっきたてた線分を三角形の周に沿って、床に垂直なままゆっくり動かしていきます。右の図を見てください。線分が動いた跡に灰色の面ができています。面はまだまだ狭いのですが、線分を床においた三角形の周に沿って床に垂直なままさらに動かしていけば、面は広がっていきます。次の図を見てください。



さらに線分を移動させます。次の図を見てください。



あなたから見て、裏側の面ができ始めています。さらに線分を移動させましょう。すると次のようになっていきます。



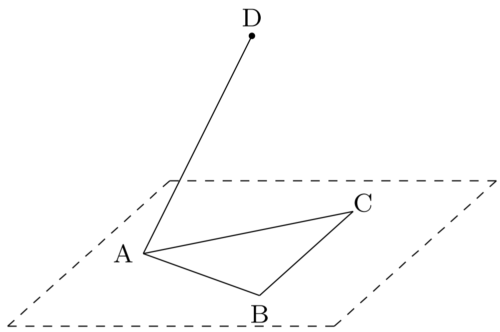
線分は円周を 1 周してもとの場所に戻ってきました。そして曲がった面ができました。（最後の図を見ると、濃い灰色の面は、「ふた」のように見えてしまうかも知れませんが、それは違います。空間の中の出来事を紙の上に無理して描いているのでそう見えてしまうのです。）

これはどう見ても、円柱の側面ですね。

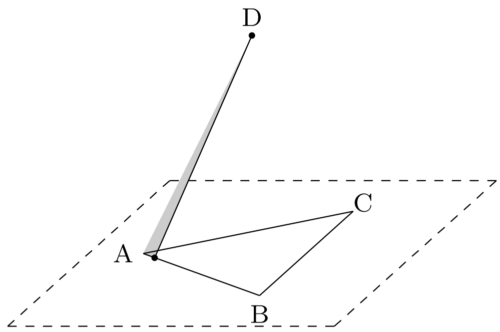
例 17　床の上に「ナントカ角形」や「円」をおき、上のほうに 1 つの点を決め、決めた点と、「ナントカ角形」や「「円」の周を結んでできる線分を周に沿って 1 周りさせると、「ナントカ錐」の側面ができる。

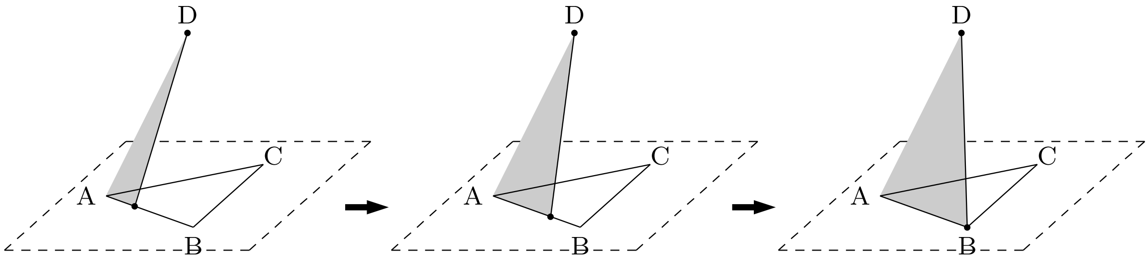
右の図を見てください。床の上に三角形がおかれています。この図では床におかれた三角形を三角形 ABC と呼ぶことにしてあります。

ここでまず、床におかれたた三角形の上のほうに 1 つ点を決めます。そしてその点と、三角形の周上の点を結んで線分を作ります。この図では三角形 ABC の上のほうに決めた点を D と呼ぶことにしました。また、三角形 ABC の周上の点として、頂点 A を使うことにします。そして点 D と頂点 A を結んで線分を作るわけです。

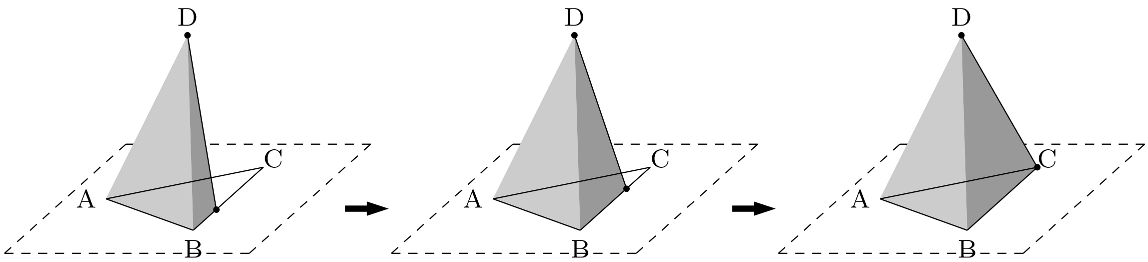


次は、さっきできた線分を三角形の周に沿ってゆっくり動かしていきます。ただし、線分の両端の点のうち、三角形の周上の点だけを三角形の周に沿って移動させます。ですから、線分のもう片方の端は点 D にくっついたまま動かないようにします。（わかりにくい人は、次のように考えてみてください。初め点 D と、三角形 ABC の頂点 A を結んで線分 AD を作りましたね。この線分はゴムでできていて、伸びたり縮んだりできると思ってください。それではあなたは、このゴムの端のうち、頂点 A に結ばれているほうを持つことにしましょう。そしてゴムの端を持ったまま、ゴムの端をゆっくり三角形の周に沿って、A から B のほうへ動かすのです。その間、ゴムのもう片方の端は点 D につながれたままにしておきます。最初のうちは、ゴムは少しずつ伸びながら、ゆっくり移動して行きます。）右の図を見てください。線分が動いた跡に灰色の面ができています。面はまだまだ狭いのですが、線分を床においた三角形の周に沿ってさらに動かしていけば面は広がっていきます。次の図を見てください。

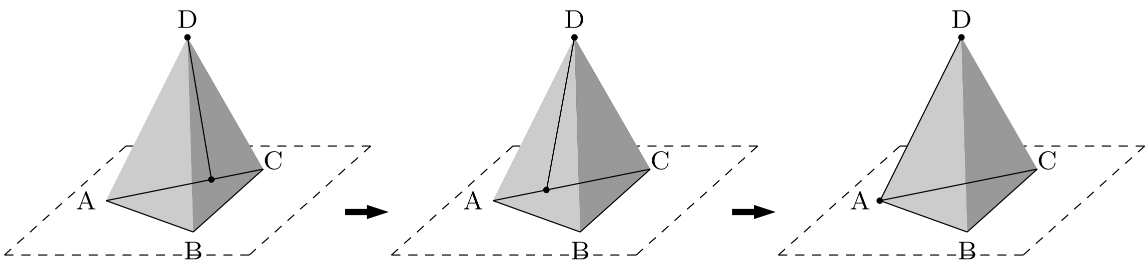




この図のように、面はだんだん広がっていきます。そしてこの図では、点 D と床においた三角形の周上の点を結んでできた線分は頂点 B の所まで動いてきました。ではさらに線分を三角形の周に沿って動かしてみます。頂点 B で動く方向が変わりますね。すると次の図のようになっていきます。



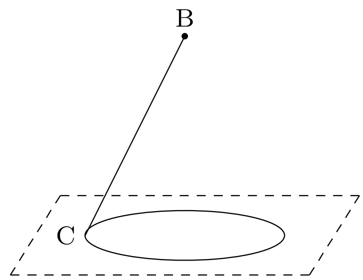
さっきまでとは違う面が新しくできていきます。線分は頂点 C の所まできました。さらに続けてみましょう。線分は進む方向を変えます。線分は点 D と結ばれたまま、今度は頂点 C から頂点 A へ向かうのです。



ついに線分は頂点 A へ戻ってきました。さっきまでとはまた違う面ができていったわけです。線分はあなたから見て、立体の裏側を移動しています。つまり、移動している線分はこちら側からは見えません。ですから広がっていく面もこちらからは見えません。で

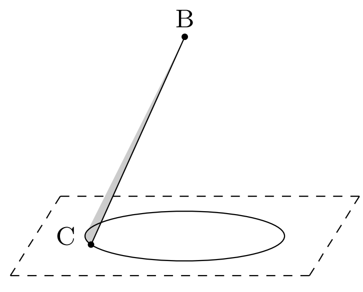
すが念のため、移動していく線分だけは図に描いておきました。本当は、裏側にちゃんと面が出来上がっていっているのです。

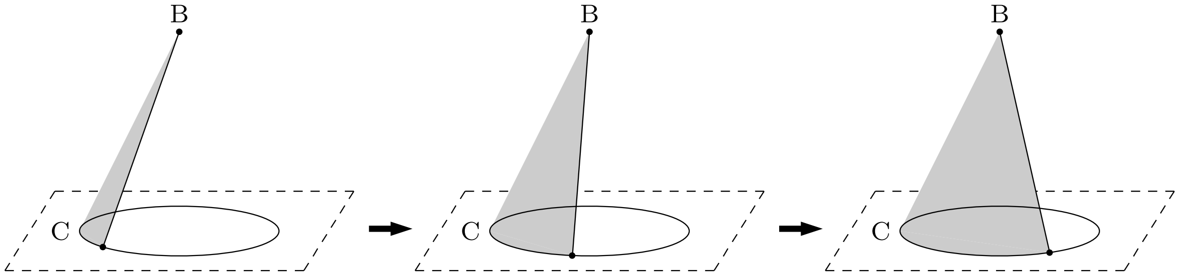
こちらからは見えない面も含めて灰色の面が 3 つできたのですが、これはどう見ても、三角錐の側面ですね。詳しく言うと、底面が三角形 ABC である三角錐の側面ができたのです。



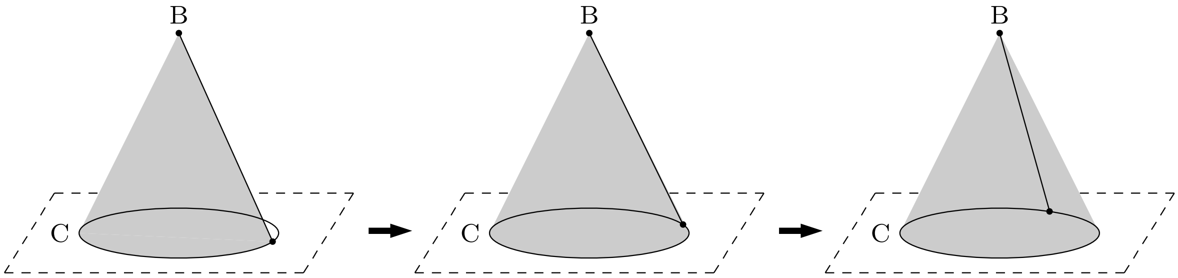
では右の図を見てください。今度はまず床に「円」がおいてあります。ここでまた、床におかれたた円の上のほうに 1 つ点を決めます。そしてその点と、円の周上の点を結んで線分を作ります。この図では円の上のほうに決めた点を B と呼ぶことにしました。また、円の周上の点として、こちらから見て一番左端の点を使うことにします。ここでは一番左端の点を点 C と呼ぶことにしました。そして点 B と点 C を結んで線分を作りました。

次は、さっきできた線分を円周に沿ってゆっくり動かしていきます。ただし、線分の両端の点のうち、円周上の点だけを円周に沿って移動させます。ですから、線分のもう片方の端は点 B にくっついたまま動かないようにします。（わかりにくい人は次のように考えてみてください。初め点 B と、円周上の点 C を結んで線分 CB を作りましたね。この線分はゴムでできていて、伸びたり縮んだりできると思ってください。それではあなたは、このゴムの端のうち、点 C に結ばれているほうを持つことにしましょう。そしてゴムの端を持ったまま、ゴムの端をゆっくり円周に沿って動かすのです。その間、ゴムのもう片方の端は点 B につながれたままにしておきます。）右の図を見てください。線分が動いた跡に灰色の面ができています。面はまだまだ狭いのですが、線分を床においた円の周に沿ってさらに動かしていけば面は広がっていきます。次の図を見てください。

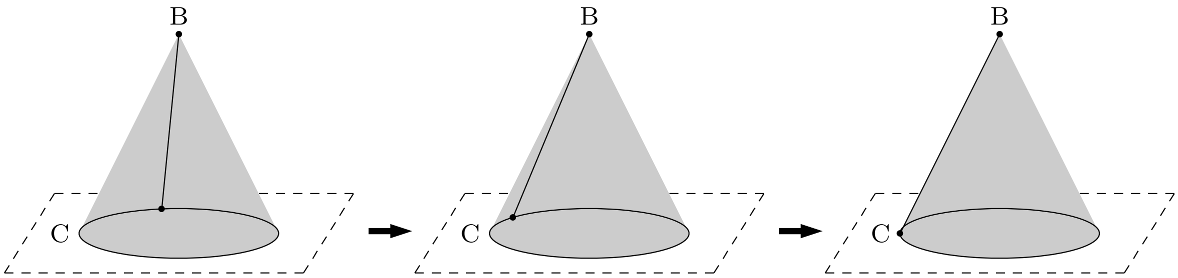




さらに線分を移動させます。次の図を見てください。



線分はあなたから見て、立体の裏側へ移動していきます。あなたから見て裏側の面ができ始めています。こちらからは裏側の面は見えませんが、ちゃんと面は広がっていきます。念のため移動している線分だけ図に描いておきました。それではさらに線分を移動させましょう。すると次のようになっていきます。



線分は円周を 1 周してもとの場所に戻ってきました。線分はあなたから見て立体の裏側を移動しています。つまり、移動している線分はこちら側からは見えません。ですから広がっていく面もこちらからは見えません。ですが念のため、移動していく線分だけは図に描いておきました。本当は、裏側にちゃんと面が出来上がっていっているのです。そして曲がった面ができました。

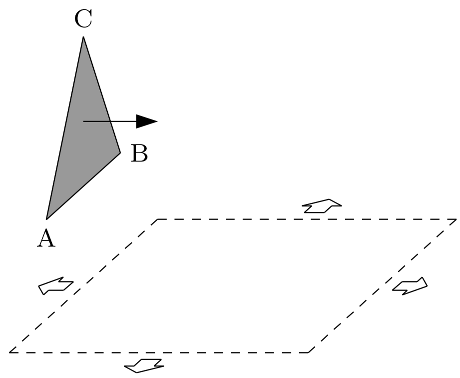
これはどう見ても、円錐の側面ですね。

3.2　空間の中で面を動かすと・・・

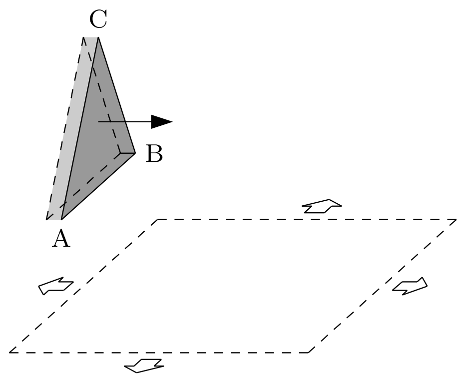
ここでは「空間の中で面を動かすと、動いた跡は何かしらの立体図形になる」という話をします。例を使って学んでいくことにしましょう。

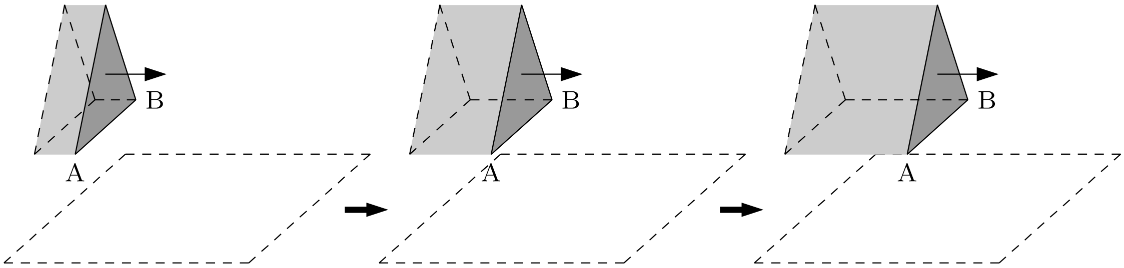
例 18　空間の中で、面でできた図形を一定の距離平行に動かすと「ナントカ柱」ができる。

右の図を見てください。空間の中に濃い灰色の三角形 ABC が浮いています。この図には黒い矢印も描かれています。これから、空間の中で、この三角形 ABC を、面の向きを変えないで、ゆっくり少しずつ、黒い矢印のほうへ平行に移動しようと思います。移動していくにつれ、三角形 ABC が通過した跡が薄い灰色になっていくと考えてください。

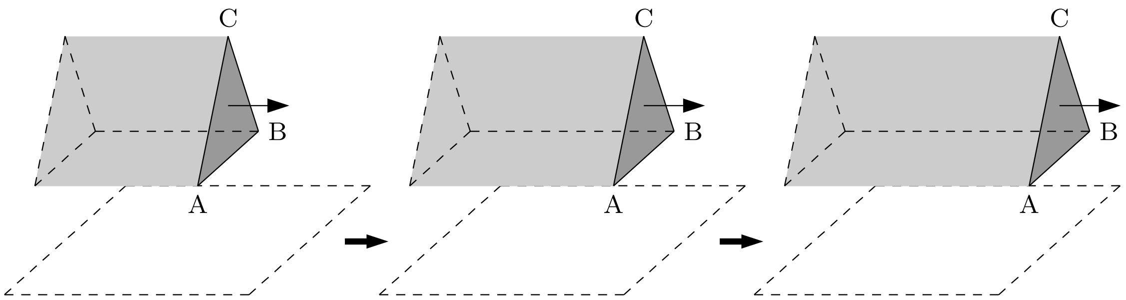


では少しだけ移動してみることにしましょう。右の図を見てください。三角形は向きを変えずにまっすぐ右に少しだけ平行に移動しました。その結果、三角形にはほんの少し厚みがつきました。ではさらに三角形を矢印のほうへまっすぐ向きを変えないで平行に動かしてみます。すると次の図のようになっていきます。



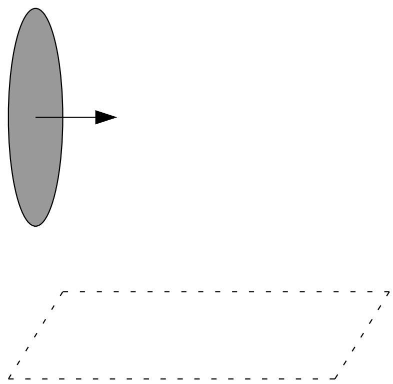


さらに三角形を矢印のほうへ平行に移動してみます。すると次のようになります。

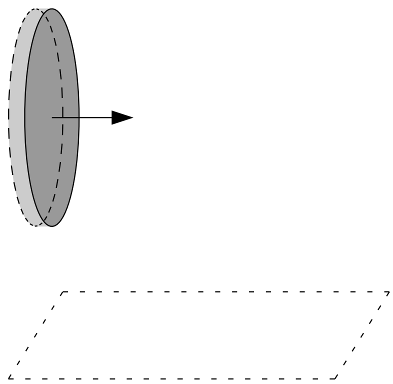


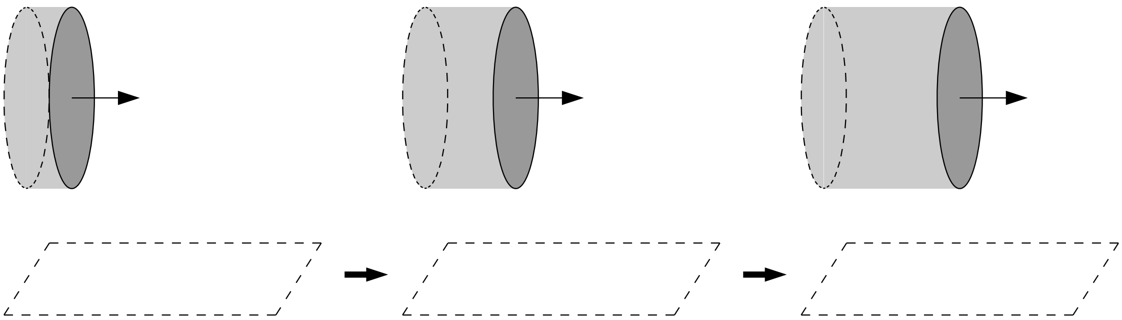
三角形 ABC にはどんどん厚みがついていきます。この図を見るとわかるとおり、三角形 ABC が通過した跡は、中身のつまった三角柱となるのです。

では右の図を見てください。今度は、空間の中に濃い灰色の円が浮いています。この図には黒い矢印も描かれています。これから、空間の中で、この円を、面の向きを変えないで、ゆっくり少しずつ、黒い矢印のほうへ平行に移動しようと思います。移動していくにつれ、円が通過した跡が薄い灰色になっていくと考えてください。

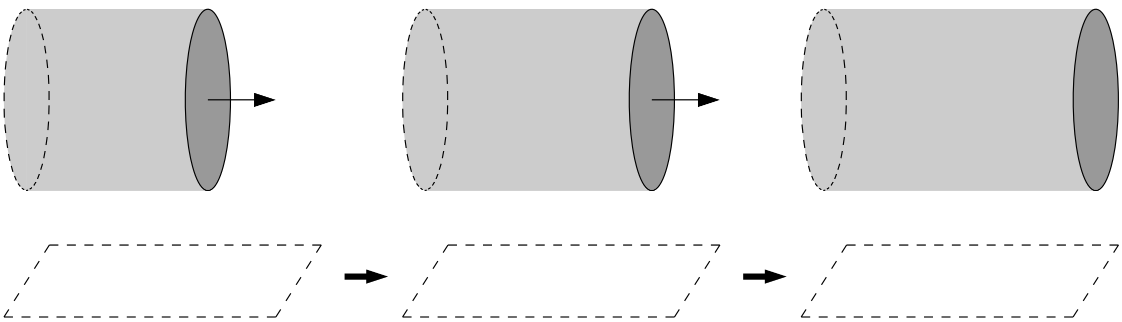


では少しだけ移動してみることにしましょう。右の図を見てください。円は向きを変えずにまっすぐ右に少しだけ平行に移動しました。円が通過した跡は薄い灰色になります。その結果、円にはほんの少し厚みがつきました。ではさらに円を矢印のほうへまっすぐ向きを変えないで平行に動かしてみます。すると次の図のようになっていきます。

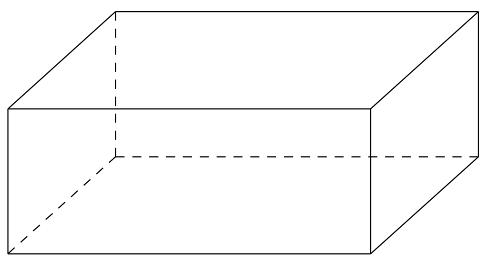




さらに、濃い灰色の円を矢印のほうへまっすぐ、面の向きを変えずに平行に移動してみましょう。すると、円の通った跡が薄い灰色になって次の図のようになっていきます。



円にはどんどん厚みがついていきます。この図を見てわかるとおり、濃い灰色の円が通過した跡は、中身のつまった円柱となるのです。

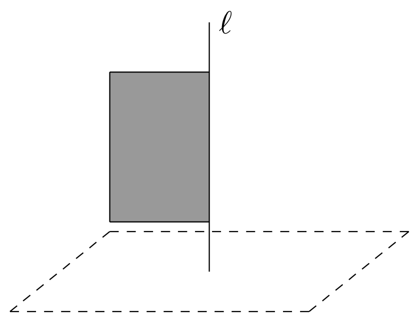


問 25. 例 18 の説明がよく理解出来た人のためのための問題です。

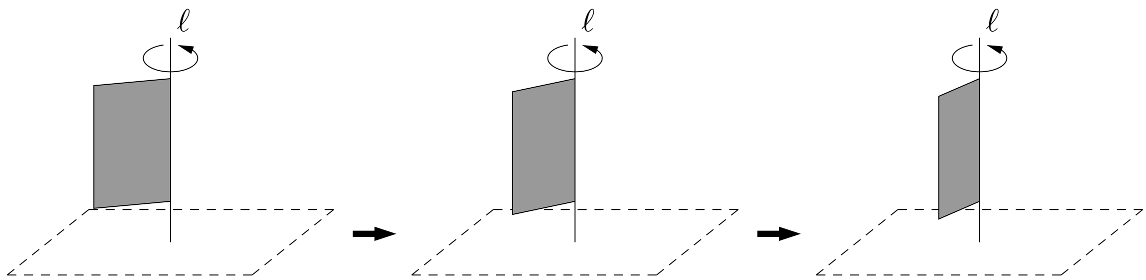
右の図は「直方体」と呼ばれている図形です。私たちの身の回りには、この形の立体が結構たくさんあります。ティッシュペーパーの箱を始めとして、多くのの箱はこの形をしていますね。では直方体についての質問です。直方体は、さっき例 18 で説明した立体と同じように、「ある形をした面を、ある方向に向きを変えずに平行に移動した跡」としてできる立体と考えることができます。では、どんな図形をどっちに移動すればよいのでしょう。

答えを見る

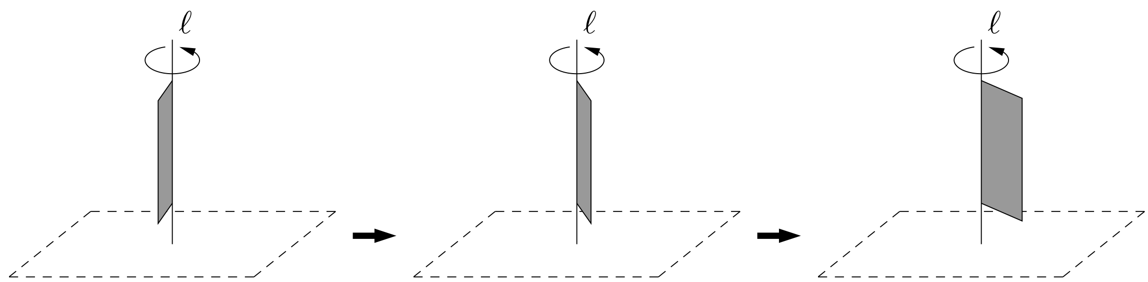
例 19　空間の中で、面でできた図形をある直線を軸にして回転すると「回転体」と呼ばれる立体ができる。



右の図を見てください。灰色の長方形が空間の中に、床に垂直に浮かんでいます。またこの図には直線 ℓ が描かれています。直線 ℓ は、床に垂直に立っています。そして長方形は右側の辺で直線 ℓ に貼り付けられています。（長方形の形をした旗が地面に垂直にたてられていると思っても構いません。）これからこの長方形を、直線 ℓ を軸にしてゆっくり少しずつ回転しようと思います。次の図を見てください。

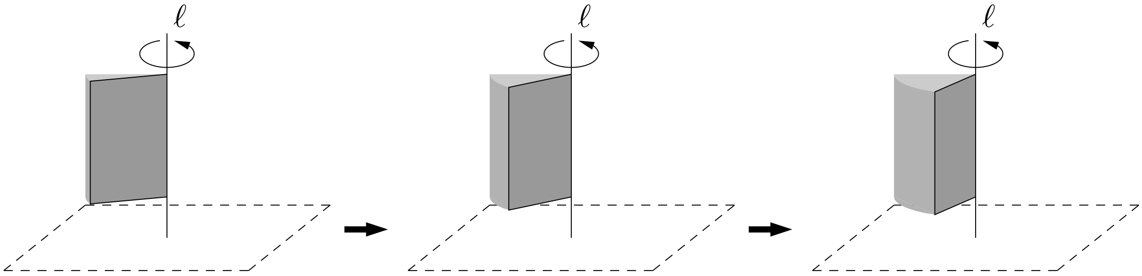


さらに回転してみます。すると次のようになります。

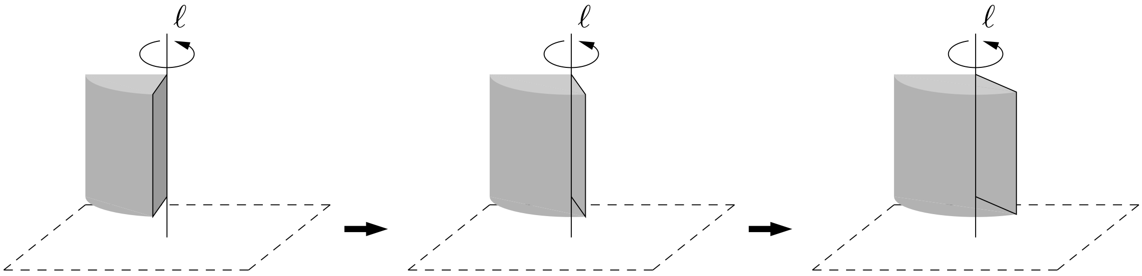


どうなっていくのか想像出来ましたか？想像できなかった人は、棒と長方形の紙を用意して、実際に旗を作って回転してみてください。（前から何度も言っていることですが、数学では実物を作ってよく観察するというのは大切なことなのです。）

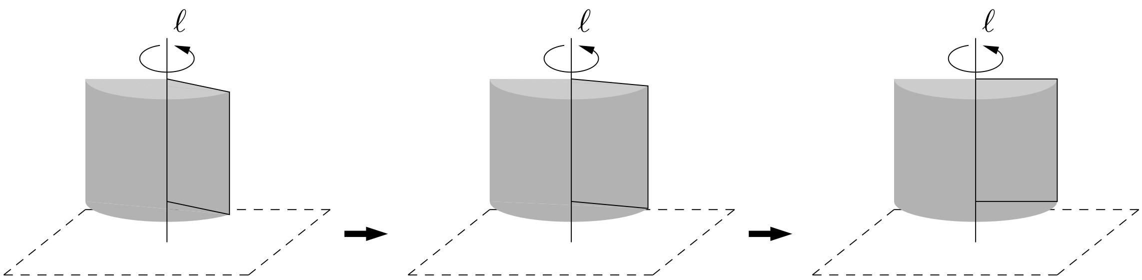
さて、ここまでは予行演習です。これからもやはり、さっきまでのように灰色の長方形を直線 ℓ の周りに回転していくのですが、今度は長方形の通過した跡が薄い灰色になると考えてください。すると次の図ようになります。



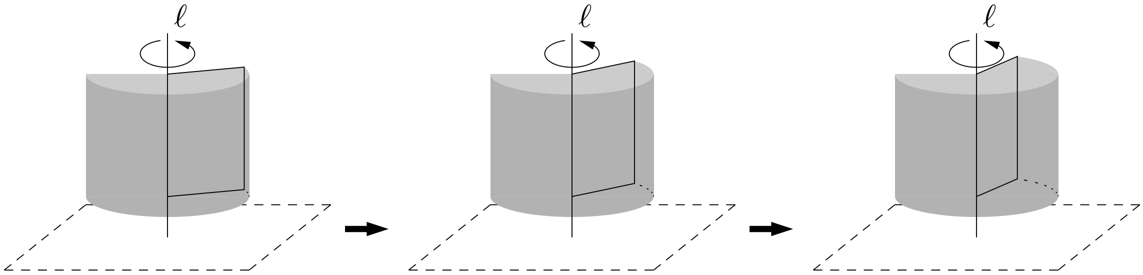
さらに回転してみます。次の図を見てください。



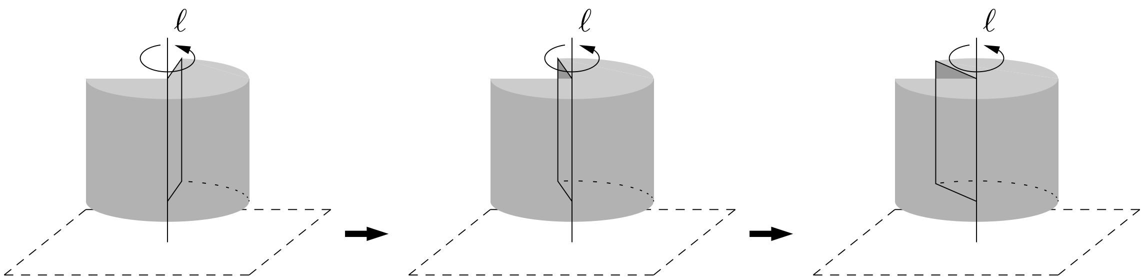
あなたから長方形は見えなくなりました。手前の方に長方形の通過した部分ができていくので、あなたからは長方形は見えないのです。ですが念のため、長方形が透けて見えたことにして図の中に長方形を描いておきました。ではさらに、直線を軸にして長方形を回転していきましょう。次の図を見てください。



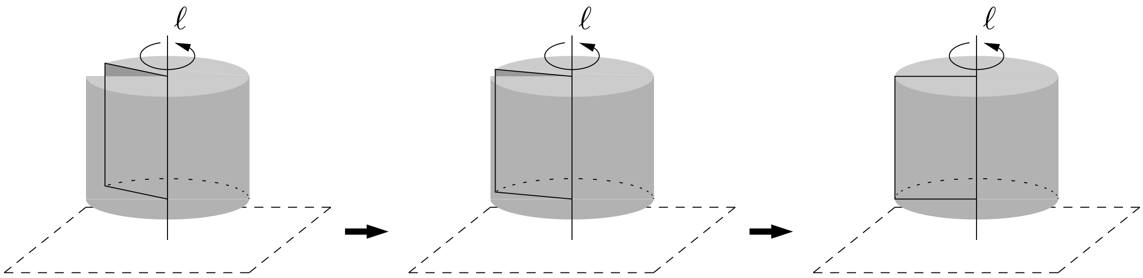
やはりここでも、もうあなたから長方形は見えません。手前の方に長方形の通過した部分ができていくので、あなたからは長方形は見えないのです。ですが念のため、長方形が透けて見えたことにして図の中に長方形を描いておきました。ではさらに、直線を軸にして長方形を回転していきましょう。次の図を見てください。



長方形はあなたから見て裏側を通過していきます。ですからあなたから長方形は見えません。ですがこの図でも念のため、長方形が透けて見えたことにして図の中に長方形を描いてあります。ではさらに、直線を軸にして長方形を回転していきましょう。次の図を見てください。



ここでもやはり、長方形はあなたから見て裏側を通過していきます。ですからあなたから長方形はほとんど見えませんが、この図の真ん中の図と右の図で、長方形が少しだけ見えています。この図でも念のため、長方形が透けて見えたことにして図の中に長方形を描いてあります。ではさらに、直線を軸にして長方形を回転していきましょう。次の図を見てください。

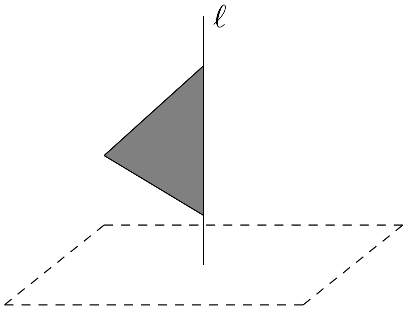


ここでもやはり、長方形はあなたから見て裏側を通過していきます。ですからあなたから長方形はほとんど見えませんが、この図の左の図と真ん中の図で、長方形が少しだけ見えています。この図でも念のため、長方形が透けて見えたことにして図の中に長方形を描

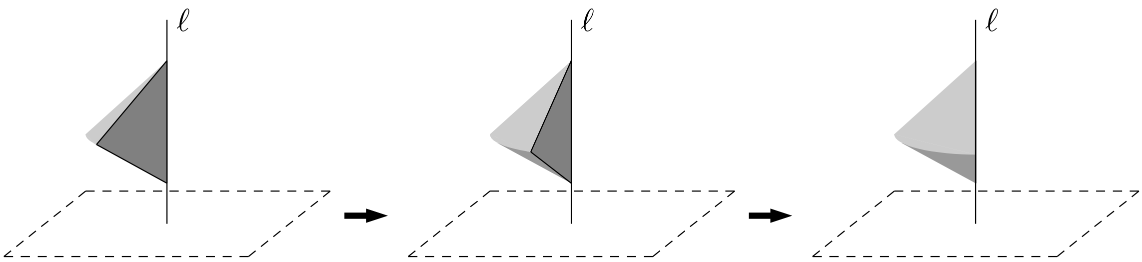
いてあります。この図ではついに、長方形は 360° 回転してもとの場所に戻ってきました。これで立体の完成です。長方形が通過した跡に中身のつまった立体ができたのです。

この立体はどう見ても円柱ですね。

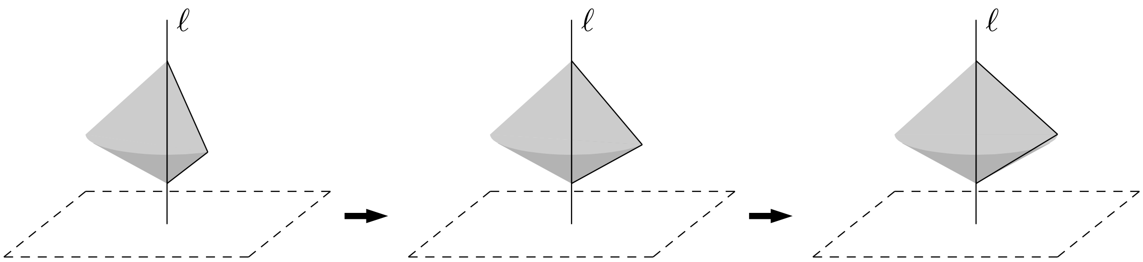
では右の図を見てください。今度は灰色の三角形が空間の中に、床に垂直に浮かんでいます。またこの図には直線 ℓ が描かれています。直線 ℓ は、床に垂直に立っています。そして三角形は右側の辺で直線 ℓ に貼り付けられています。（三角形の形をした旗が地面に垂直にたてられていると思っても構いません。）



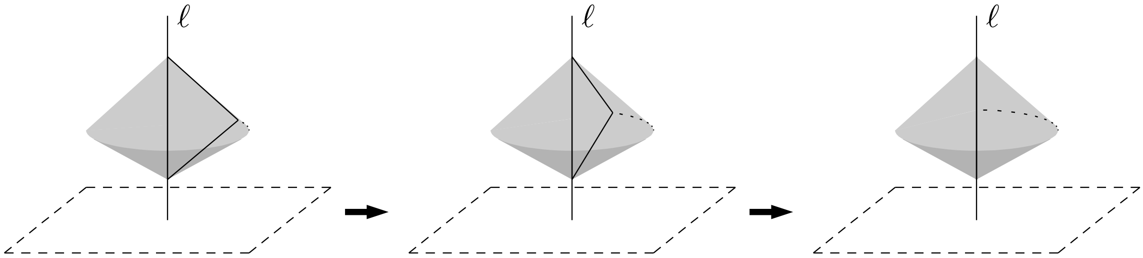
これからこの三角形を、直線 ℓ を軸にしてゆっくり少しずつ回転しようと思います。三角形が通過した跡は薄い灰色になっていくと考えてください。では、次の図を見てください。



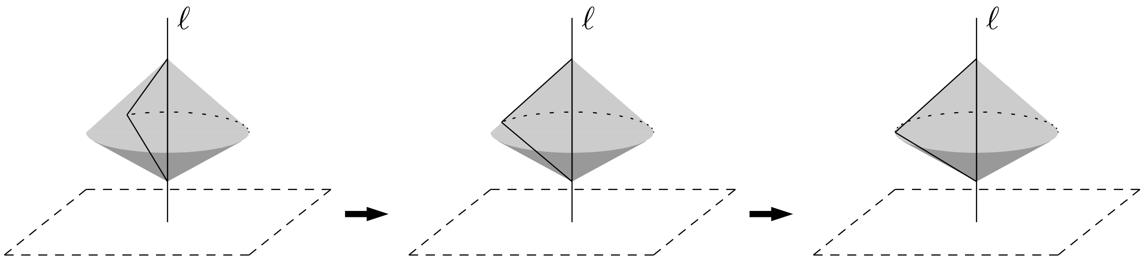
もしかするとこの図の一番右で、「あれっ、三角形が消えちゃった」と思った人もいるかもしれません。しかし三角形は消えていません。一番右では三角形は 90° 回転したのです。そのため、あなたのほうから見ると三角形は線のように見えているのです。ではさらに回転してみます。次の図を見てください。



あなたから三角形は見えなくなりました。三角形の手前に三角形の通過した部分ができていくので、あなたのほうからは三角形は見えないのです。ですが念のため、三角形が透けて見えたことにして図の中に三角形を描いておきました。ではさらに、直線を軸にして三角形を回転していきましょう。次の図を見てください。



三角形はあなたから見て裏側を通過していきます。ですからやはり、もうあなたから三角形は見えません。ですがこの図でも念のため、三角形が透けて見えたことにして図の中に三角形を描いてあります。また、もしかすると、この図の一番右で三角形が消えたと思った人もいるかもしれません。しかし三角形は消えていません。三角形は 270° 回転しています。そのため、あなたのほうから見ると三角形は線のように見えているのです。ではさらに、直線を軸にして三角形を回転していきましょう。次の図を見てください。



ここでも三角形はあなたから見て裏側を通過していきます。ですからあなたから三角形は見えません。ですがこの図でも念のため、三角形が透けて見えたことにして図の中に三角形を描いてあります。この図の一番右では、ついに、三角形は 360° 回転してもとの場所に戻ってきました。これで立体の完成です。三角形が通過した跡に中身のつまった立体ができたのです。

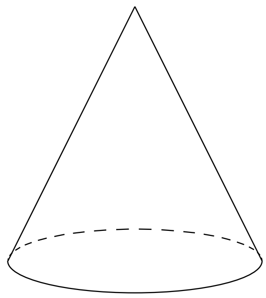
この立体は、2 つの円錐をくっつけてできた形をしていますね。

以上 2 つの例を見ました。長方形を直線の周りに回転させると「中身のつまった円柱」

ができましたね。また三角形を直線の周りに回転させると、「中身のつまった 2 つの円錐をくっつけた形をしている立体」ができました。このように、面でできている図形をある直線を軸にして回転していくと、中身のつまった立体ができます。このようにしてできる立体は**回転体**と呼ばれています。ですから「円柱」は回転体の仲間なのです。

問 26. 例 19 の説明がよく理解出来た人のための問題です。

右の図を見てください。これは円錐と呼ばれている立体図形ですね。この立体は、例 19 に出てきた立体と同じように、「面でできたある図形を、ある直線を軸にして回転した跡としてできた図形」と思うことができます。では、どんな図形をどんな直線を軸にして回転すればよいですか。



答えを見る

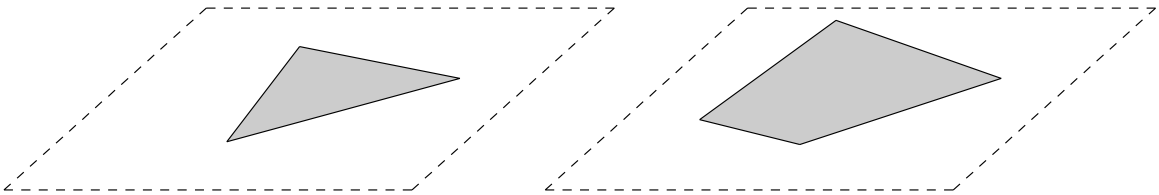
第4章

中身とふちのある図形

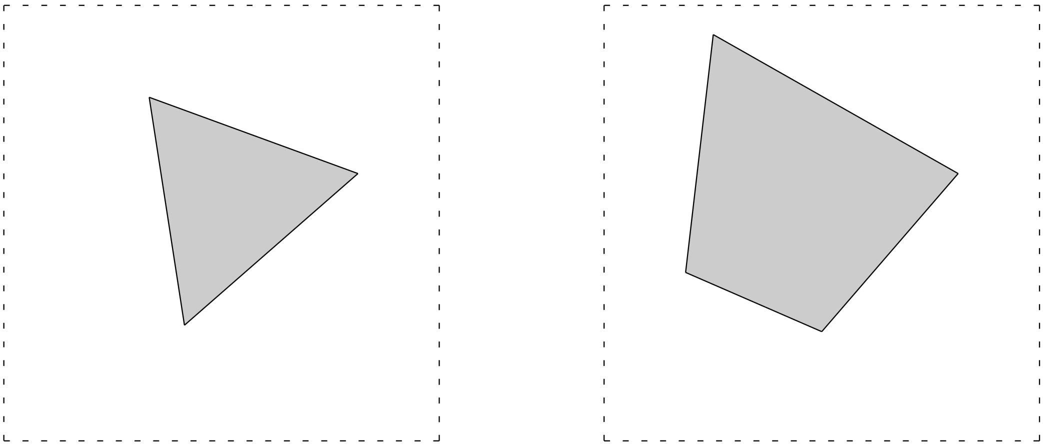
私たちはこれから、長さ、面積、体積といったことについて学習します。ですがその前に、大切なものの見方を説明します。それは、私たちが出会う図形には「中身」と「ふち」があることが多いということです。

4.1 平面の中にある図形の中身とふち

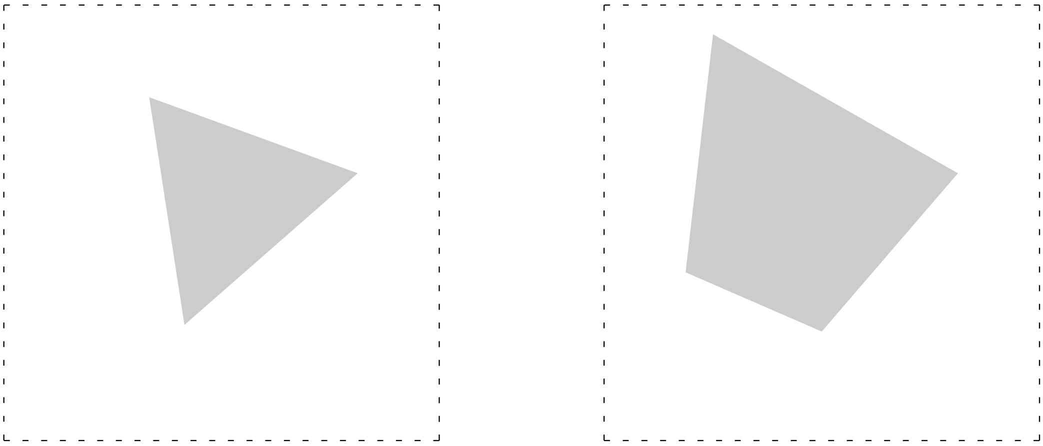
次の図を見てください。



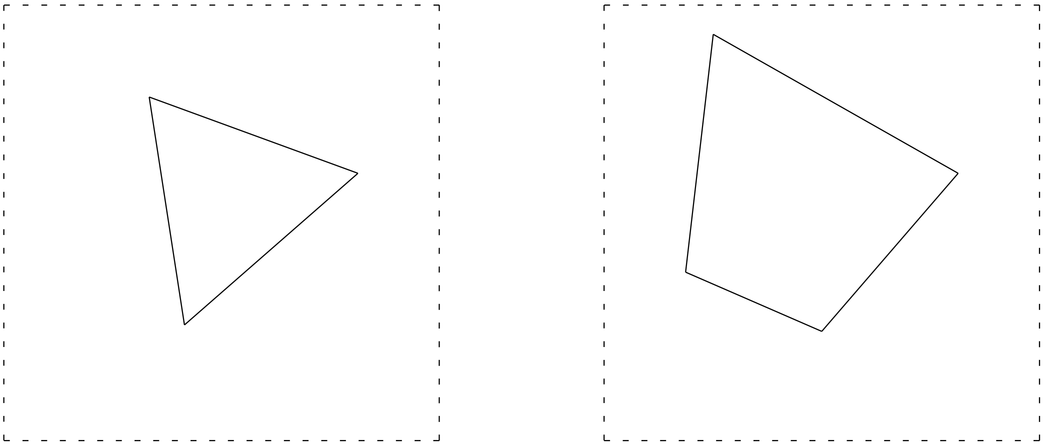
この図の四角い点線は「平面」をあらわしています。この図で左側に描かれているのは「平面の中にある三角形」です。またこの図で右側に描かれているのは「平面の中にある四角形」です。この図は平面を斜め上から見た図なので、正確な形が少しわかりにくいかもしれませんね。そこで、平面を真上から見た図を描いてみることにします。すると次のようになります。



どちらの図形にも「中身」と「ふち」があります。詳しく説明することにしましょう。次の図を見てください。これは、さっきの三角形と四角形の「中身」だけを描いたものです。



今度は三角形と四角形の「ふち」だけを描いてみます。すると次のようになります。

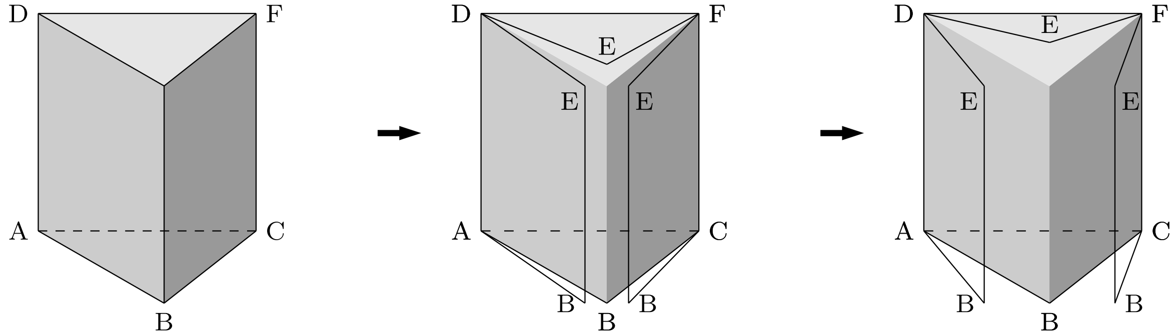


このように、三角形や四角形には、「中身」と「ふち」があるわけです。中身とふちを

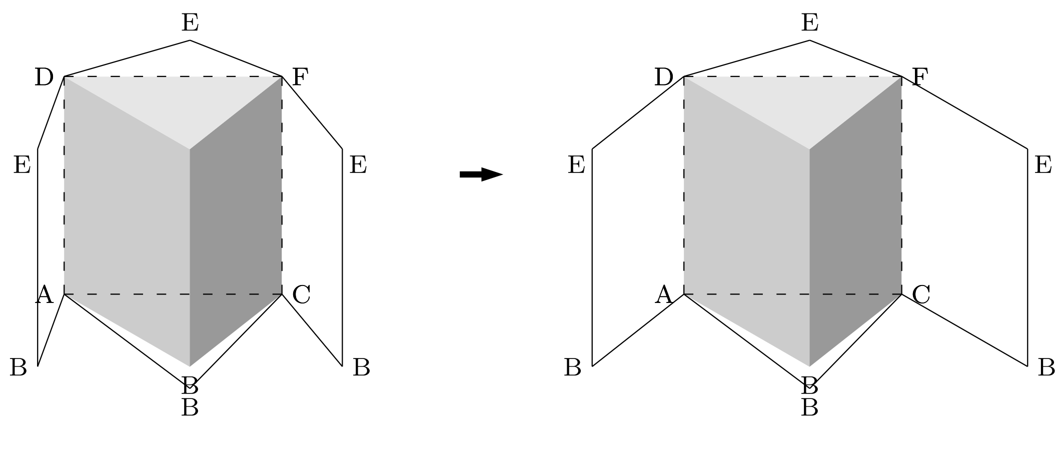
合わせると、「三角形」や「四角形」ができるわけです。数学では平面の中にある図形のふちのことを「周」ということがあります。「三角形の周」とか「四角形の周」といったりするわけです。

4.2　空間の中にある図形の中身とふち

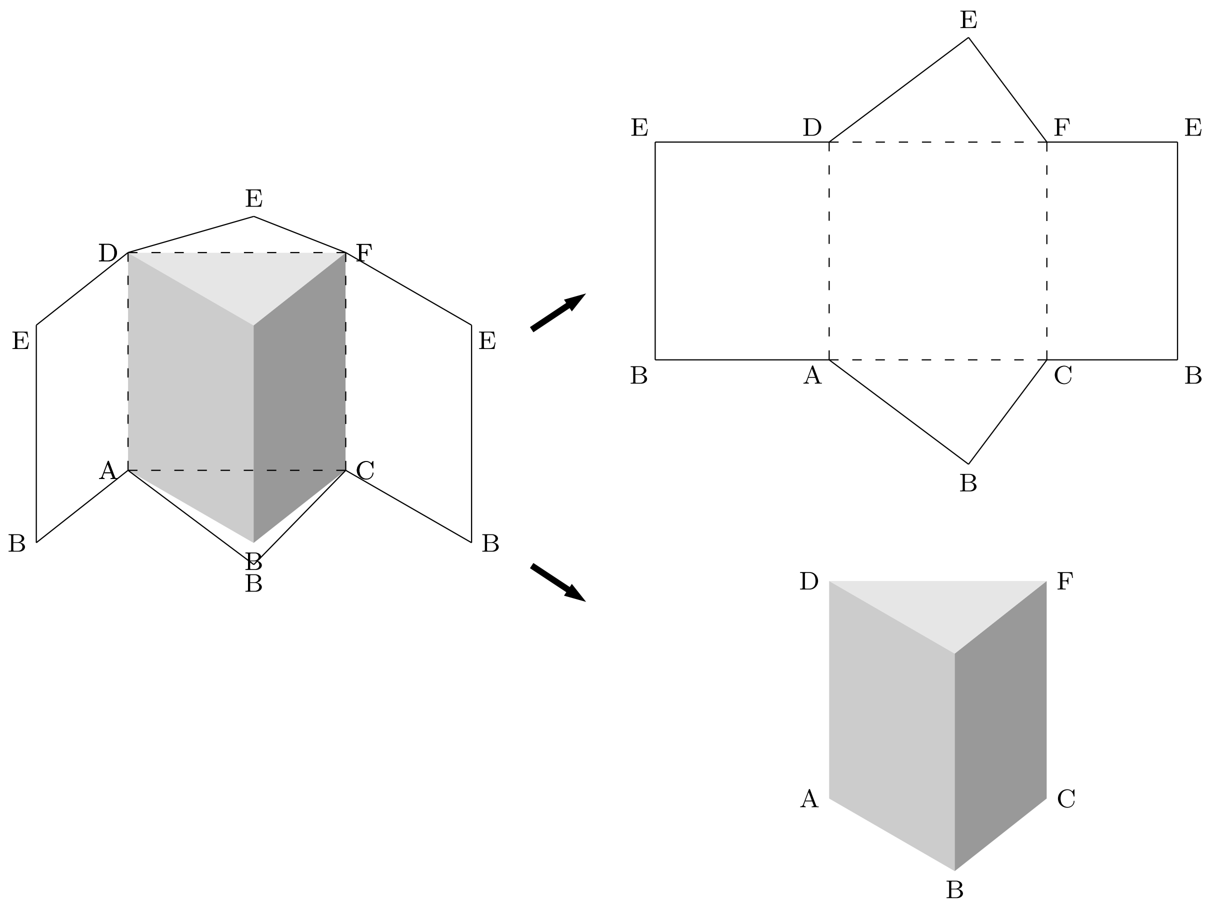
次の図を見てください。



この図は、「中身のつまった三角柱の皮をむいている所」を表しています。これは、みかんの皮をむくのと似ています。もっともっとむいていき、中身を取り出すことにしましょう。では次の図を見てください。



だんだん中身がはっきり見えてきました。さらに三角柱の皮をむいてみましょう。次の図を見てください。



最後の図では、めでたく皮が外れて中身を取り出すことができました。最後に皮はまっ平らにされました。まっ平らになった皮は、この立体の「展開図」になっていますね。

この話でわかってほしいのは、三角柱のような空間の中にある立体でも「中身」と「ふち（または皮）」があるということです。数学では空間の中にある立体の「ふち（または皮）」のことを**表面**ということがあります。ですからこの三角柱では、はがされた皮の部分を「三角柱の表面」といったりするわけです。

第5章

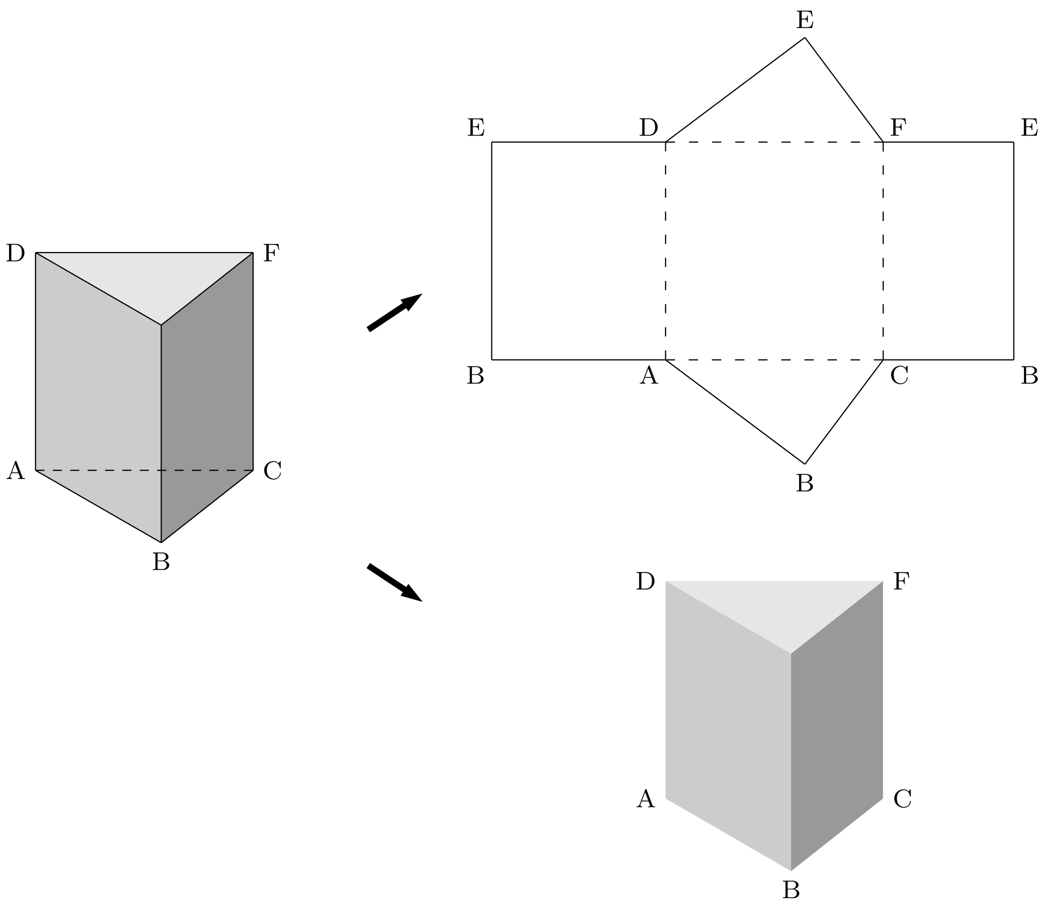
立体の表面積と体積

これから本題に入り、立体図形の「表面の面積」や「体積」について学びます。つまり、立体図形の「表面の広さの計算の仕方」や「中身の大きさの計算の仕方」について考えていくわけです。

5.1　立体の表面積

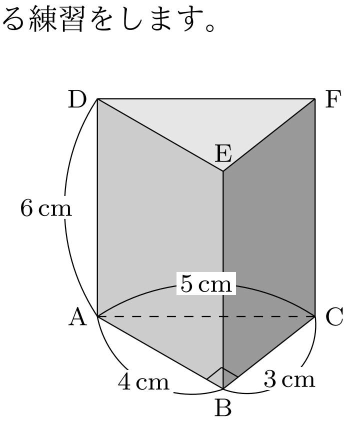
前の章では、図形の「ふち」と「中身」について考えました。そして、157 ページから始まる数ページの中で、立体の「表面」とは何なのかということを学びました。少し乱暴な言い方をすると、立体図形の「表面」とは、その立体の「皮」ということでしたね。

では次の図を見てください。



この図は、三角柱の皮をむいて中身を取り出し、「表面」と「中身」に分けたことをあらわしています。（中身を取り出していく途中の図は、157 ページから始まる数ページに描かれています。途中がわからなくなってしまっている人はもう一度見なおしてください。）今から気にしたいのは、「表面」の面積です。そして、「表面全部の面積」のことを**表面積**と呼ぶことにします。

それではこれから、例を使って、立体の表面積を求める練習をします。

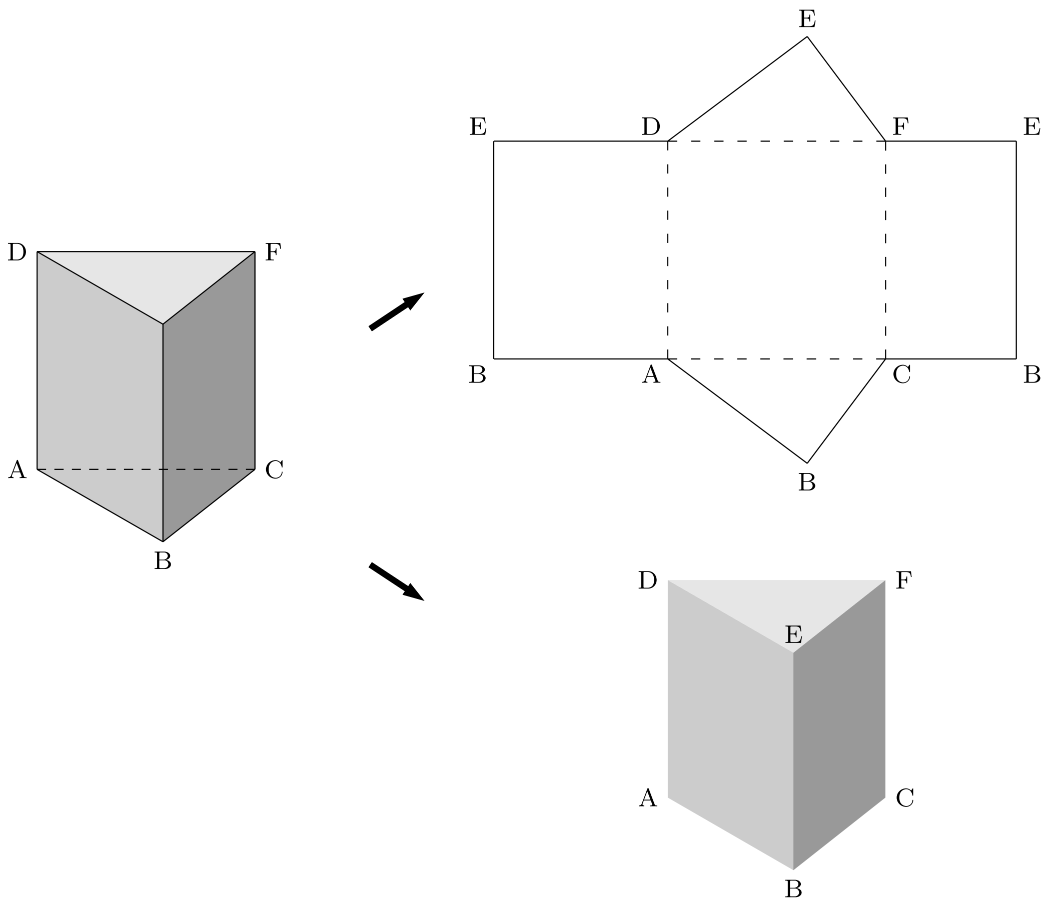


例 20　右の図を見てください。これは、底面が直角三角形の三角柱です。底面である三角形 ABC では、角 ABC が直角になっています。そして辺 AB の長さは 4 cm、辺 BC の長さは 3 cm、辺 AC の長さは 5 cm となっています。またこの三角柱の高さは 6 cm で、つ

まり辺 AD の長さは 6 cm です。

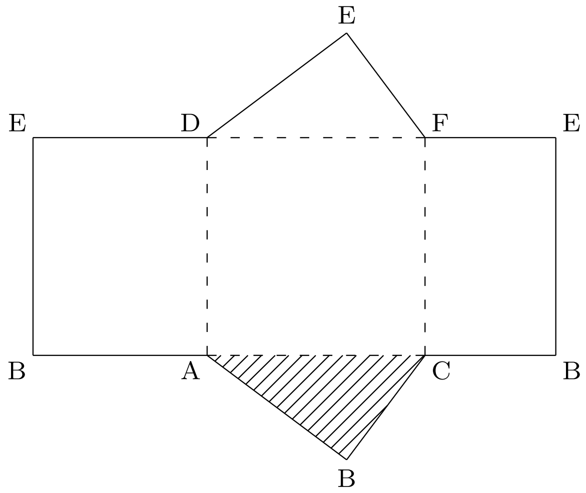
それでは、この三角柱の表面積を求めることにしましょう。

まず表面がどうなっているのかしっかり調べましょう。そこで、この三角柱の皮をはいで、表面と中身に分けてみます。すると次のようになりますね。

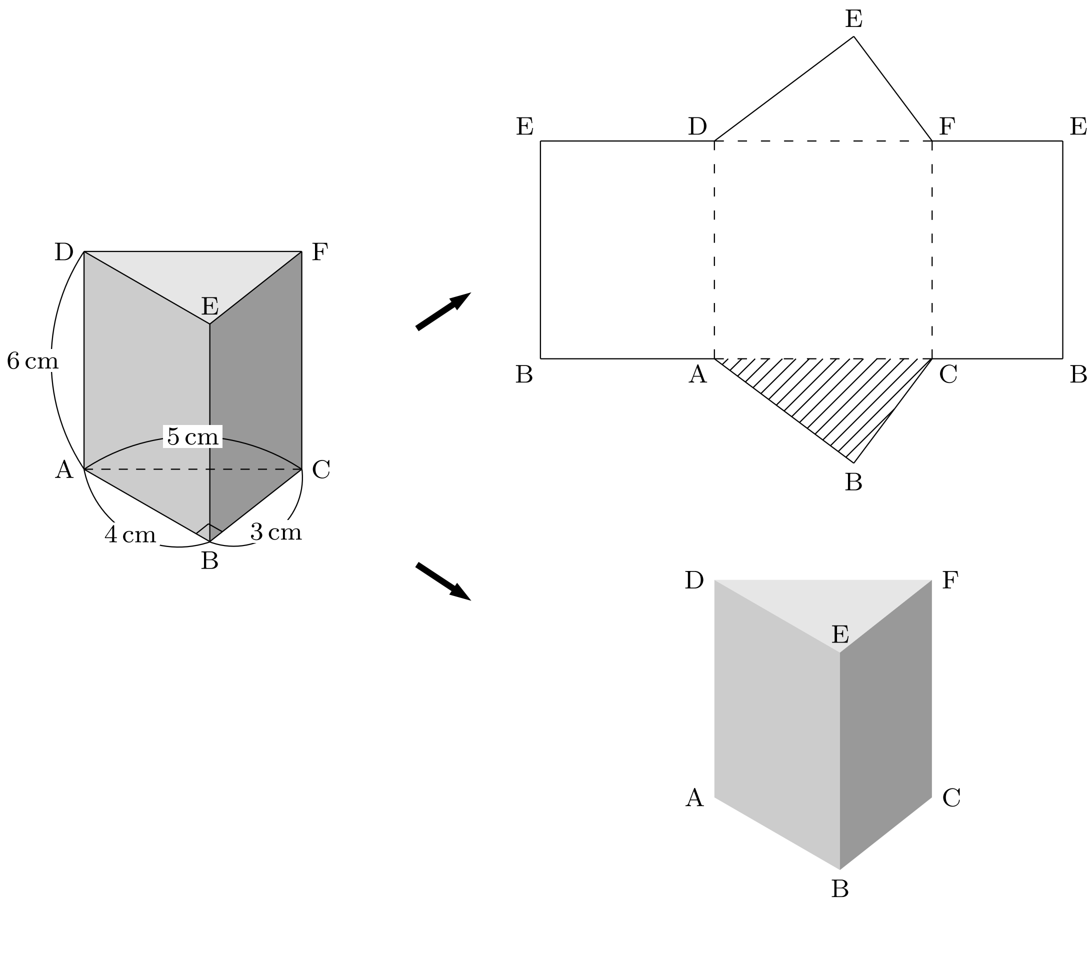


表面（つまり「むいた皮」）の図をよく見てください。三角形が 2 枚、長方形が 3 枚ありますね。2 枚の三角形はもともと三角柱の「ふた」と「底」になっていたものです。3 枚の長方形はもともと三角柱の周りの面、つまり「側面」になっていたものです。表面の面積を求めたいのですから、これらの面の面積を 1 つ 1 つ求めて、最後に合計すればよいですね。では、1 つ 1 つの面について、面積を計算していきましょう。

右の図を見てください。まあ、どの面から面積を求めても良いのですが、まず例えば、この三角柱の底面になっている三角形 ABC の面積を求めてみようと思います。右の図では、これから面積を求める面（つまり三角形 ABC）に斜線をつけてわかりやすくしておきました。

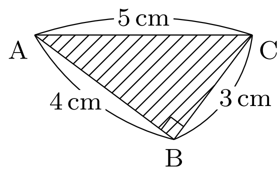


ところで、この三角形の面積を求めようとしても、三角形の辺の長さとか形が正確にわかっていないといけませんね。どの辺が何 cm になっているのでしょうか。またどこか 90° の角はあるでしょうか。そこで、皮をはぐ前の三角柱の図ともう一度見比べることにします。次の図を見てください。



今見てもらった図では、皮をはぐ前の三角柱（つまりこの図の左の立体）に、辺の長さや、角の大きさを書き込んでおきました。これを見れば、これから面積を求めようとしている三角形 ABC についての情報が得られますね。

皮をはぐ前の三角柱の図と皮をはいだ後の図を比べると、これから面積を求める三角形 ABC の辺や角は、右の図のようになっていることがわかりますね。

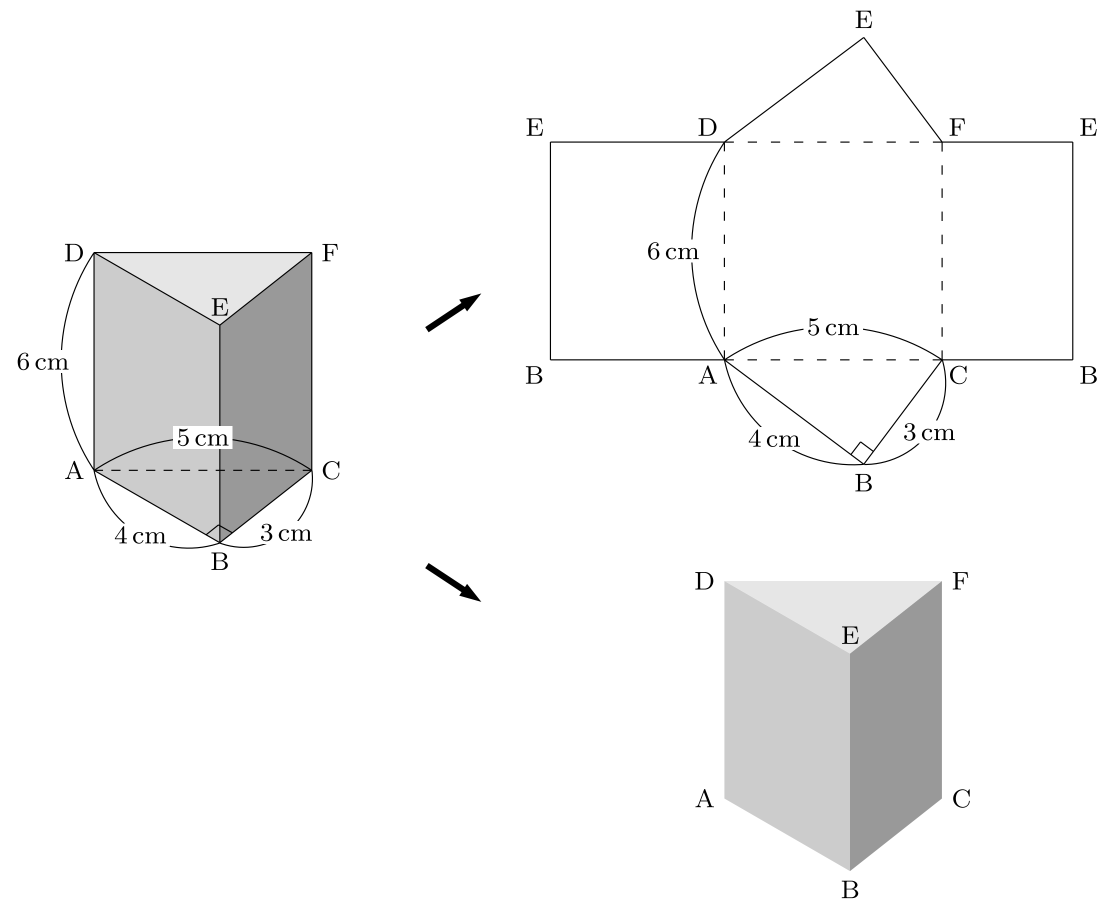


ではこの図を見ながら、三角形 ABC の面積を求めてみます。角 ABC が直角なのですから、辺 AB を三角形 ABC の底辺だと思えば、高さは辺 BC ですね。そうすると、三角形 ABC の面積は、「底辺」かける「高さ」かける「$\frac{1}{2}$」を計算すればよいので、

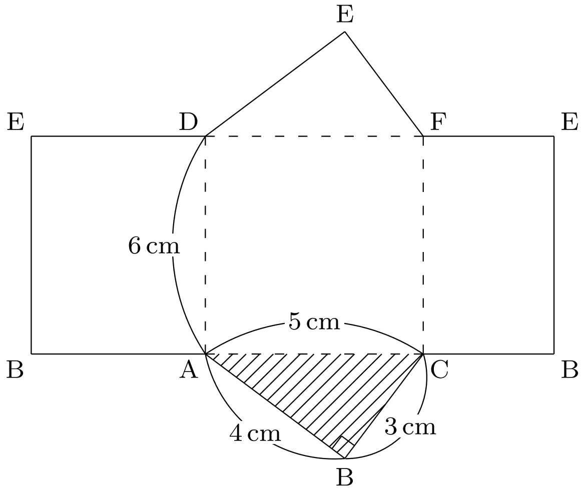
$$4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 6\,(\mathrm{cm}^2)$$

となりますね。これで、三角柱の底面になっている三角形 ABC の面積を求めることができました。

それでは他の面の面積も求めることにしましょう。もう 1 度、皮をはぐ前の三角柱の図と皮をはいだ後の図を見比べてみます。次の図を見てください。



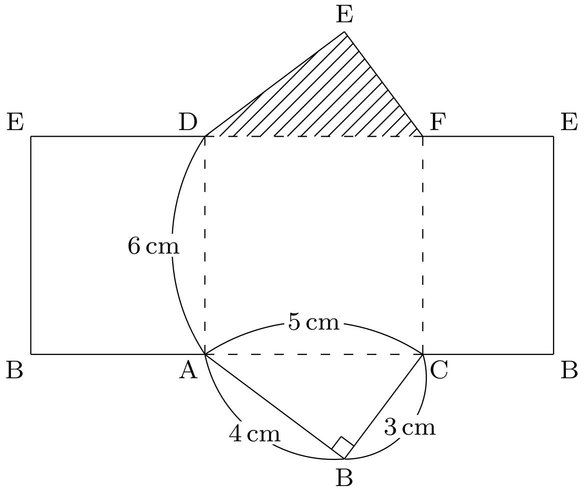
はいだ皮（つまり表面）の図にも、辺の長さを少しだけ書いてみました。ではあらためて、この表面の図を見ながら順番に一つずつ、それぞれの面の面積を求めてみることにします。あなたのために、求める面には斜線をつけてわかりやすくしておきます。



さっき計算したように、

$$\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積} = 4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 6\,(\mathrm{cm}^2)$$

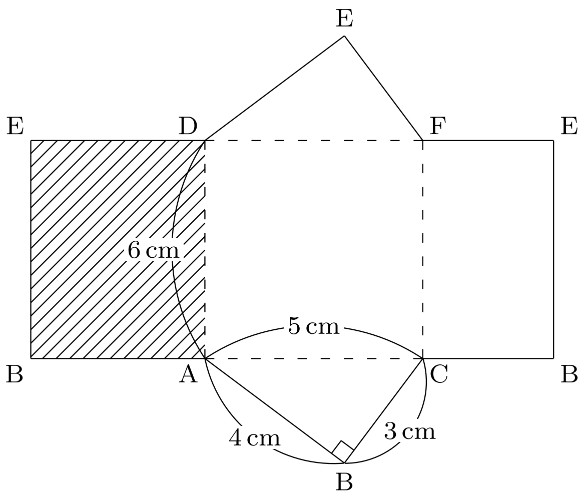
ですね。



もともとこの立体は三角「柱」ですから、「底面」と「上のふた」は同じ図形です。ですから △DEF と △ABC の面積も同じです。ですから、

$$\triangle\mathrm{DEF}\ の面積 = 4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 6\,(\mathrm{cm}^2)$$

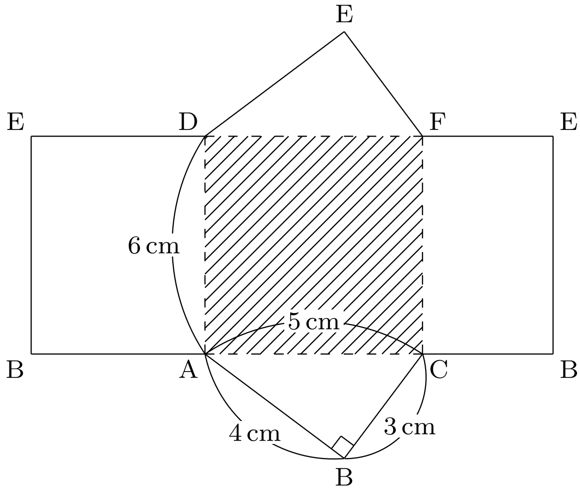
ですね。



斜線のついている四角形 ABED ですが、これは長方形ですね。（もともとこの立体は三角「柱」なので、側面は全て長方形なのです。）この長方形の縦 AD の長さは図にもあるように 6 cm ですが、この長方形の横 AB の長さは何 cm なのでしょう。もともとの立体の図と見比べてみれば、この長方形の「横 AB」がもともと立体のどこにあったのかわかりますよね。そうすれば、この長方形の横 AB の長さは 4 cm だってわかりますね。というわけで、

$$長方形\ \mathrm{ABED}\ の面積 = 6 \times 4 = 24\,(\mathrm{cm}^2)$$

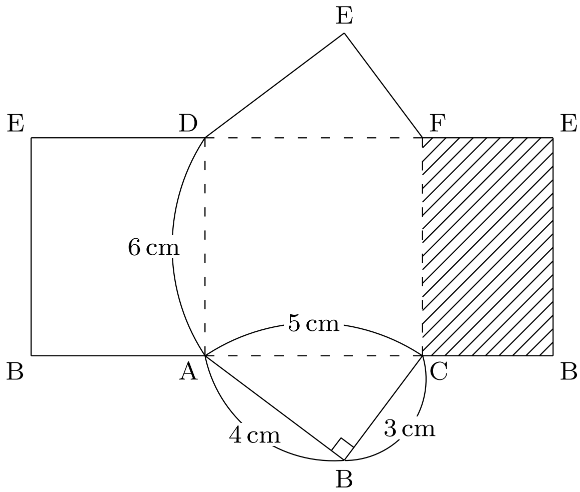
ですね。



斜線のついている四角形 ACFD ですが、これは長方形ですね。（もともとこの立体は三角「柱」なので、側面は全て長方形なのです。）図にもあるように、この長方形では縦の長さは 6 cm で横の長さは 5cm です。というわけで、

長方形 ACFD の面積 $= 6\times 5 = 30\,(\mathrm{cm}^2)$

ですね。



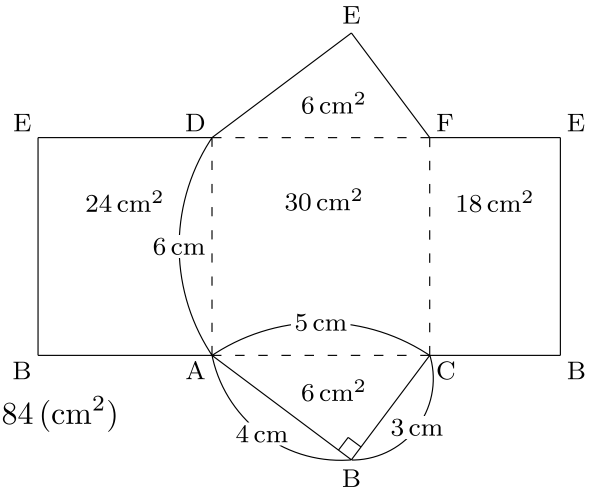
斜線のついている四角形 CBEF ですが、これは長方形ですね。（もともとこの立体は三角「柱」なので、側面は全て長方形なのです。）図にはこの長方形の縦 CF の長さや横 CB の長さは描かれていません。しかし、この長方形がもとの立体のどこにあったのか考えれば、縦 CF の長さや横 CB の長さもわかりますよね。縦は 6 cm で横は 3 cm ですね。というわけで、

長方形 CBEF の面積 $= 6\times 3 = 18\,(\mathrm{cm}^2)$

ですね。

以上で、全ての面の面積を求めることができました。

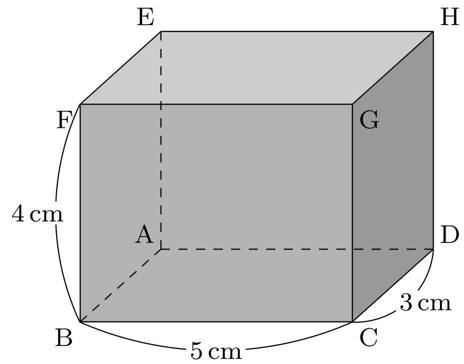
それでは右の図を見てください。これまで求めてきたそれぞれの面の面積をこの図に書き込んでおきました。あとはこれらの面積を全て合計すれば、この三角柱の表面積を求めることができますね。ですから、



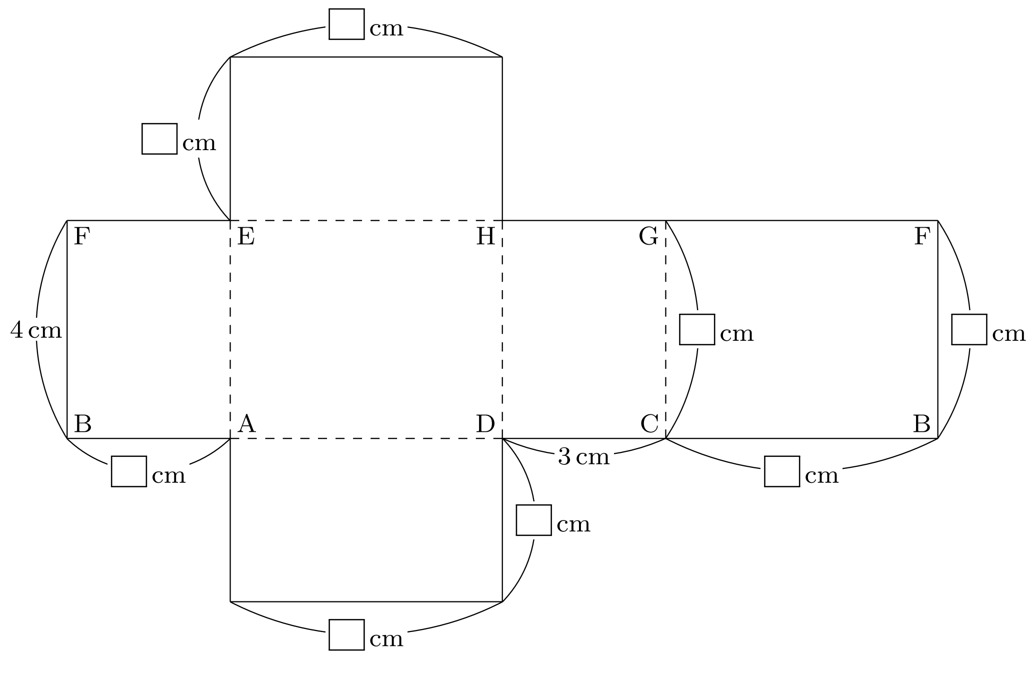
この三角柱の表面積 $= 6+6+24+30+18 = 84\,(\mathrm{cm}^2)$

となりますね。

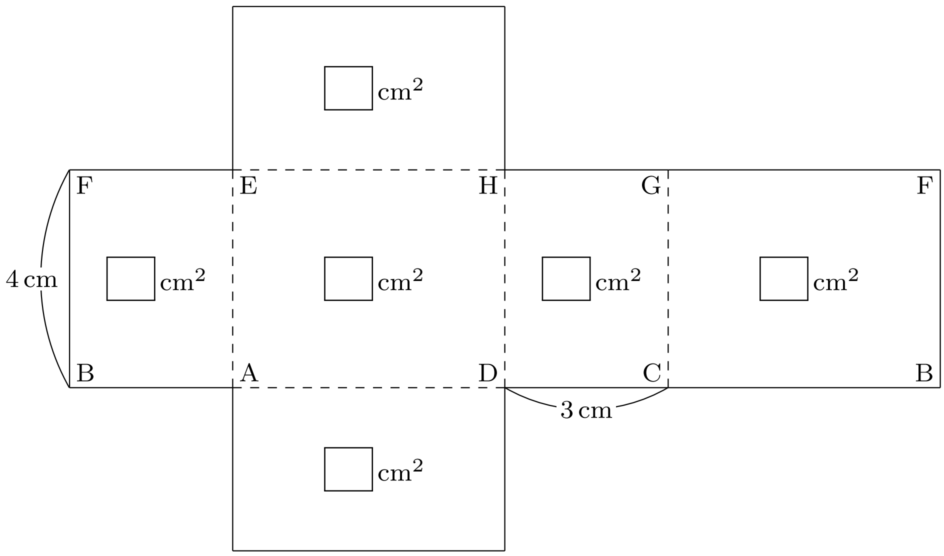
問 27. 右の図を見てください。これは四角柱ですが、底面である四角形 ABCD は長方形であるとします。この四角柱の表面積をこれから求めようと思います。以下の問に順番に答えることにより、この四角柱の表面積を求めなさい。



(1) 次の図は、この四角柱の表面の図です。この図の空欄に正しい数を書きなさい。



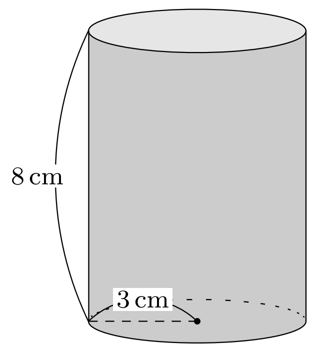
(2) 次の図は、(1) と同じ、この四角柱の表面の図です。1 つ 1 つの面の面積を計算して、この図の空欄に書き込みなさい。



(3) (2）で求めた全ての面の面積を合計して、この四角柱の表面積を求めなさい。

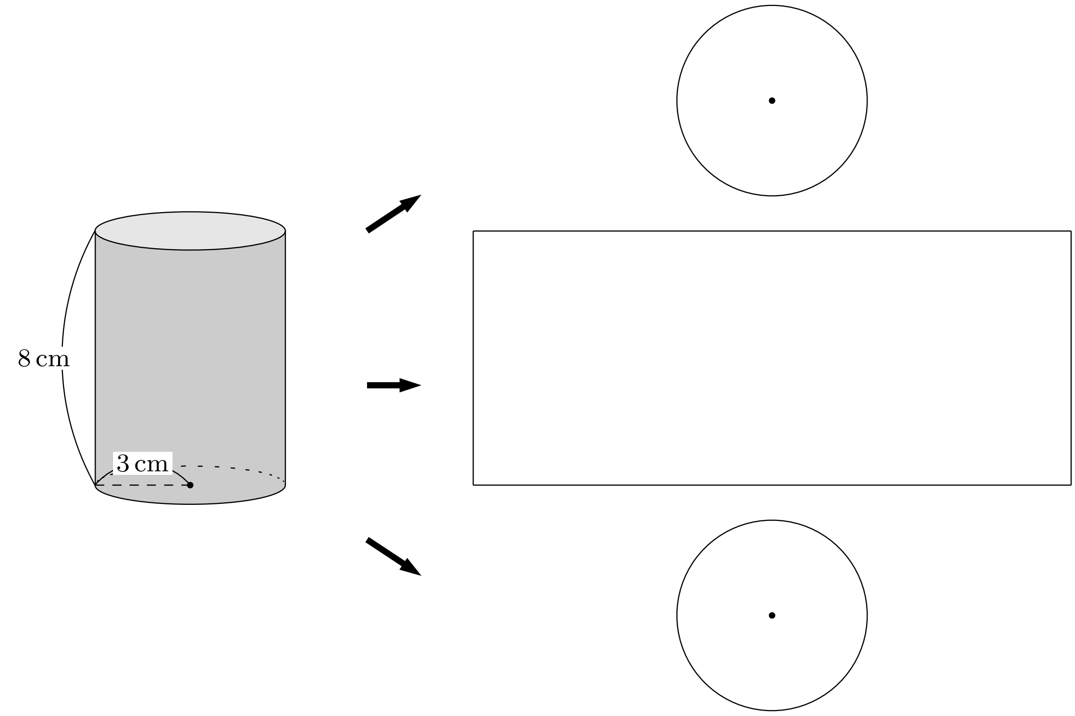
答えを見る

問 28. 右の図は円柱です。この円柱の底面の円の半径は 3 cm で、この円柱の高さは 8 cm です。これから以下の問を順に解いて、この円柱の表面積を求めていくことにします。



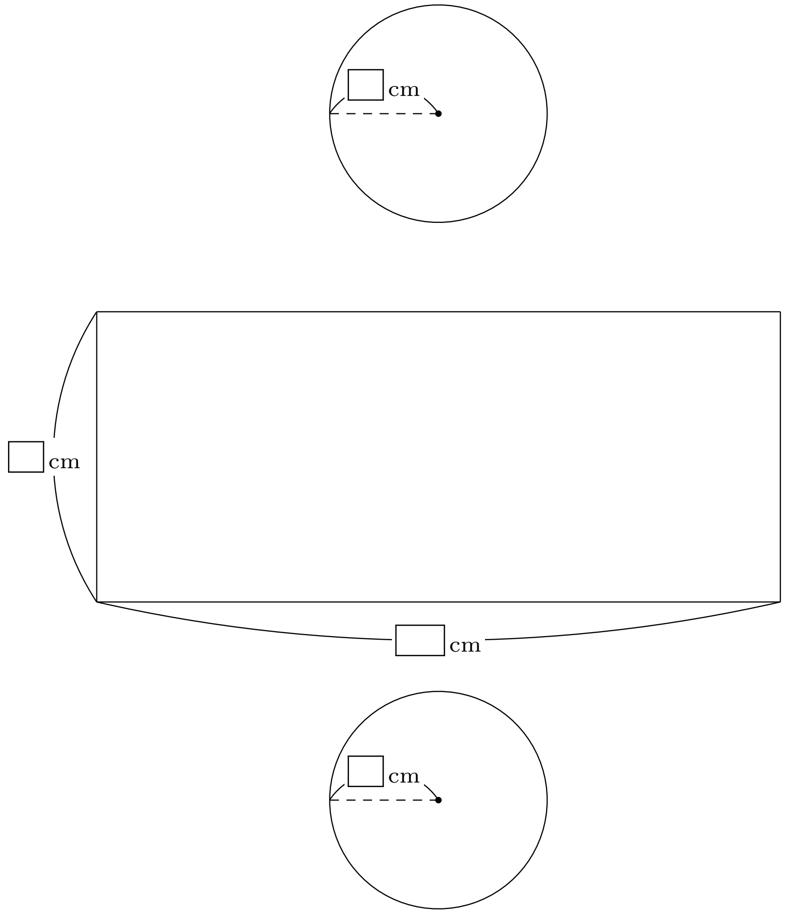
(1) まず次の文の空欄に正しい数や言葉を記入しなさい。

この円柱の皮をはいで、表面を作ると、次の図のように 3 つの部品になりますね。



円が 2 つ、長方形が 1 つできるわけです。2 つの円の半径はどちらも $\boxed{\quad}$ cm ですね。また長方形の縦の長さは $\boxed{\quad}$ cm ですよね。ここまでは簡単にわかりますが、それでは長方形の横の長さはどれだけなのでしょう。もとの円柱の図を見ても書いてありませんよね。うーん、困りました。あっ、でも、もとの円柱では長方形の「横」は、円の $\boxed{\qquad}$ と貼り合わさっていたではないですか。ということは、この長方形の横の長さを求めるには、円の $\boxed{\qquad}$ の長さを求めればよいですね。ところで、円の周りの長さって、円の直径かける円周率って計算するんでしたよね。円周率は $3.14\cdots$ ではなくて π という文字であらわすことにすると、この円の周りの長さは $\boxed{\quad}$ cm ですね。ですから、長方形の横の長さも $\boxed{\quad}$ cm ですね。

これでいろいろな長さがわかりましたね。それでは次の図の空欄に正しい数や式を記入してください。



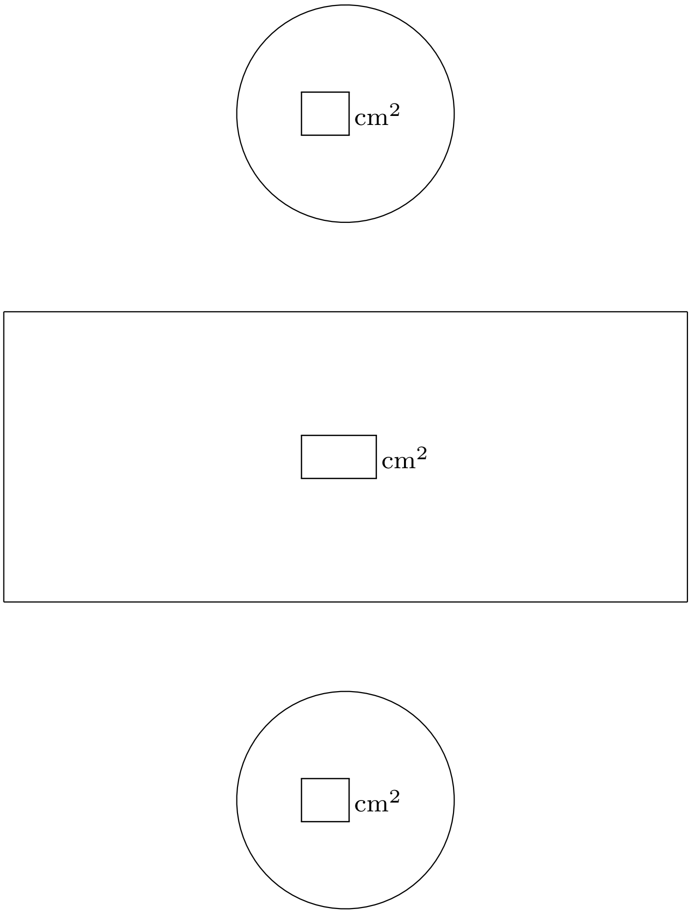
(2) まず、次の文の空欄に正しい言葉を書きなさい。

円の面積は、□かける□かける円周率で求めることができます。ですから、この円柱の「ふた」と「底」になっている円の面積は、どちらも

$$\square \times \square \times \pi = \square \, (\mathrm{cm}^2)$$

となるわけです。

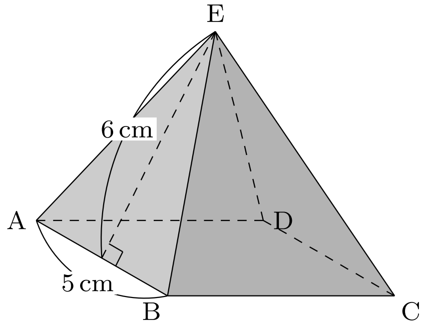
では次に、それぞれの部品の面積を次の図の空欄に書き込んでください。



(3) それぞれの面の面積を合計して、この円柱の表面積を求めなさい。

答えを見る

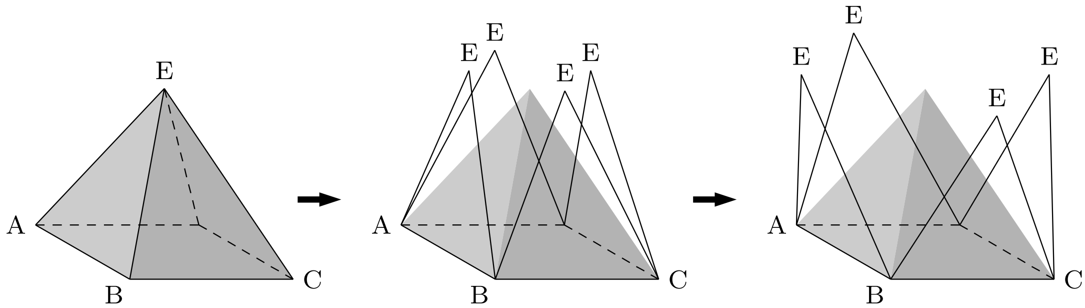
例 21　右の図を見てください。これは、「底面が正方形」の四角錐です。またこの四角錐では、頂点は「底面のど真ん中の真上」にあります。（念のために言っておきますが、四角錐の中でも、「底面が正方形」で、「頂点が底面のど真ん中の真上にある」ものは「正四角錐」と呼ばれるのでしたね。）この四角錐では、底面である四角形 ABCD は正方形なのですから、4 つの角はす全て直角で、辺の長さは全て同じです。



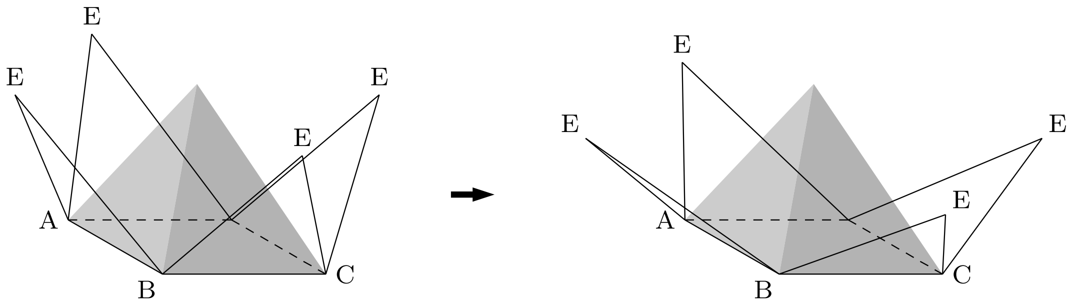
いまこの四角錐では、底面の正方形の辺の長さは 5 cm であるとします。ところでこの四角錐は、頂点は「底面のど真ん中」の真上にあるのですから、側面はどれも同じ大きさ、

同じ形の二等辺三角形です。いまこの四角錐では、側面になっている二等辺三角形の高さは 6 cm であるとします。

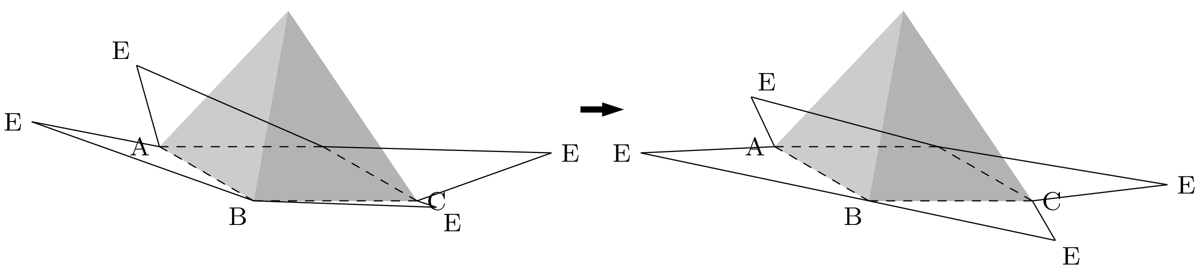
それでは、この四角錐の表面積を求めることにしましょう。そのために、この四角錐の皮をはいで、表面と中身に分けていくことにします。みかんの皮をむいて、中身を取り出すのと同じようにするわけです。すると次の図のようになっていきます。



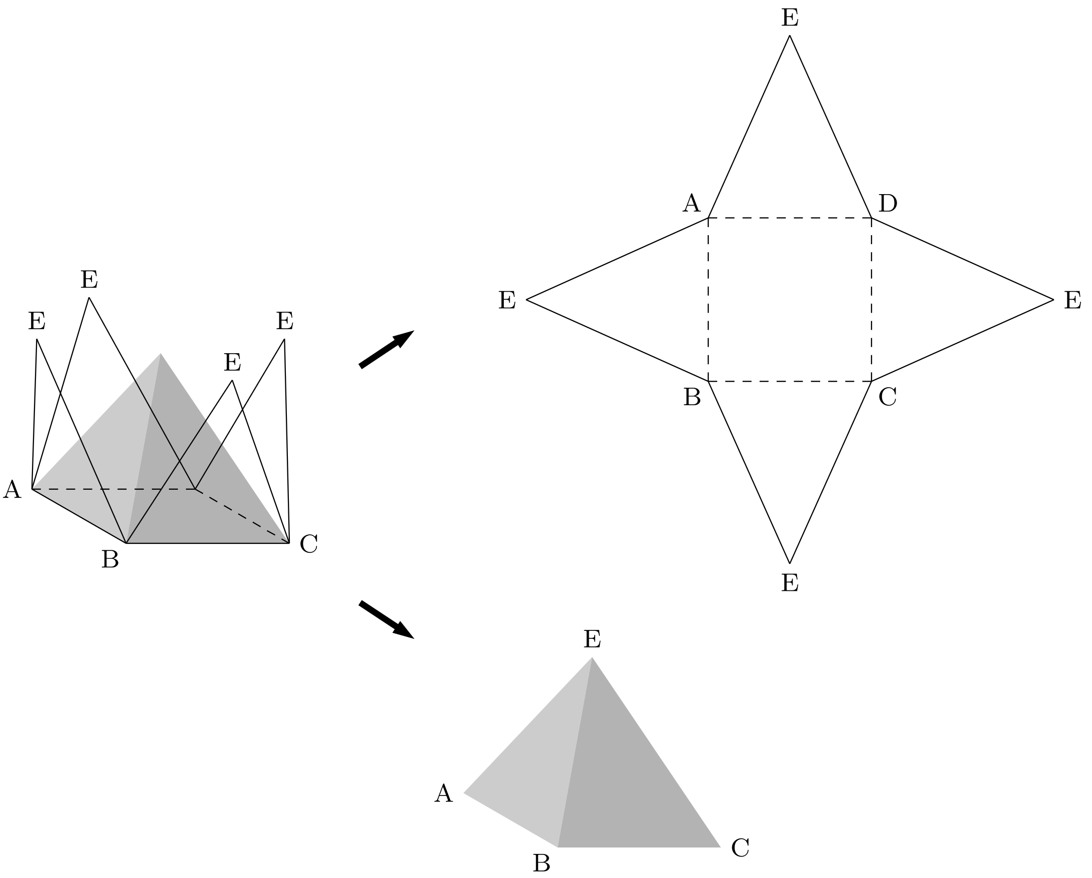
さらに続けると次のようになります。



さらに続けて、むいた皮（つまりこの四角錐の表面）をまっ平らにしてみます。次の図を見てください。

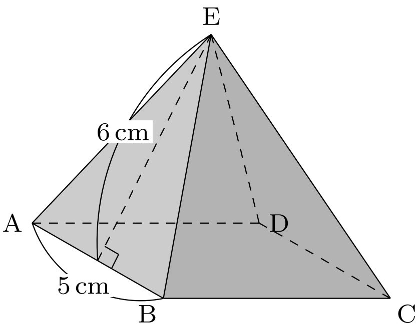


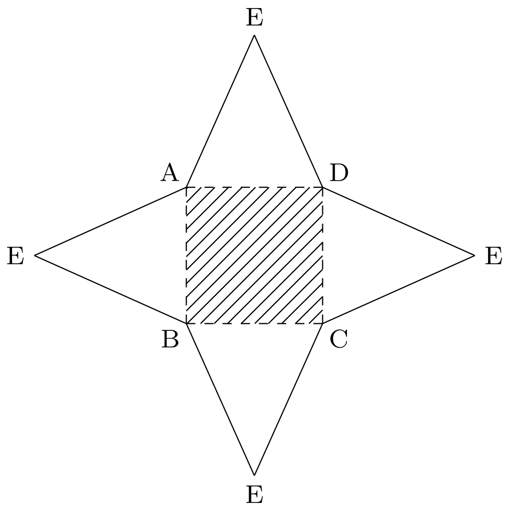
むいた皮（つまりこの四角錐の表面）がまっ平らになりました。それでは中身と表面を分けてみます。結局次のようになるわけです。



表面（つまり「むいた皮」）の図をよく見てください。正方形が 1 枚、三角形が 4 枚あります。正方形はもともと四角錐の「底」になっていたものです。4 枚の三角形はもともと四角錐の周りの面、つまり「側面」になっていたものです。表面の面積を求めたいのですから、これらの面の面積を 1 つ 1 つ求めて最後に合計すればよいですね。では、1 つ 1 つの面について、面積を計算していくことにします。

ところで、1 つ 1 つの面の面積を求めるためにはどこが何 cm なのかわからないといけませんね。右の図を見てください。念のため、もともとの四角錐ではどこが何 cm だったのか確認してください。どうですか？思い出せましたか？それではそれぞれの面の面積を求めることにします。

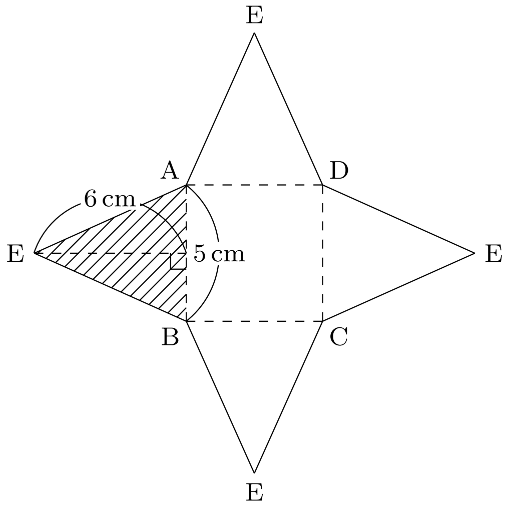




ではまず、底面になっていた正方形の面積を求めてみます。左の図では、念のためあなたのために、これから面積を求めようとしている正方形に斜線をつけておきました。ところでこの正方形の一辺の長さはどれだけなのかというと、もちろん 5 cm ですね。ということは、この正方形の面積は、

$$5 \times 5 = 25\,(\mathrm{cm}^2)$$

ですね。



次は側面になっていた三角形の面積を求めてみます。左の図でも、念のため、あなたのために、これから面積を求めようとしている三角形のひとつに斜線をつけておきました。ところでこの三角形ですが、もとの四角錐を思い出すと、左の図にも書いてあるように、底辺が 5 cm で高さが 6 cm の三角形と思うことができますね。ということは、この三角形の面積は、

$$5 \times 6 \times \frac{1}{2} = 15\,(\mathrm{cm}^2)$$

ですね。

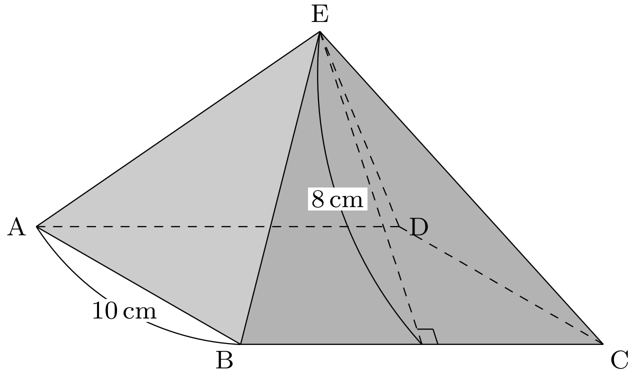
このほかにもまだ 3 つ三角形の面があるのですが、この四角錐は「正」四角錐なので、ほかの 3 つの三角形の面積だって $15\,(\mathrm{cm}^2)$ ですね。

これで全ての面の面積がわかりました。正方形の面積は $25\,\mathrm{cm}^2$ でした。また、4 枚ある三角形の面の面積はどれも $15\,\mathrm{cm}^2$ でしたね。ですから、この四角錐の表面積を求めるには、これらを合計して、

$$25 + 15 + 15 + 15 + 15 = 85\,(\mathrm{cm}^2)$$

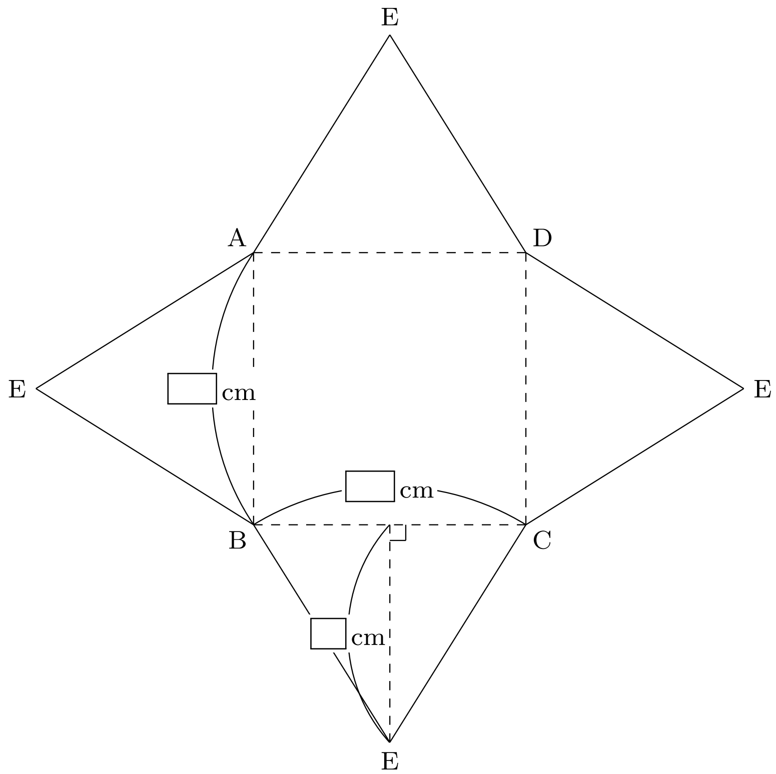
となりますね。

問 29. 右の図を見てください。これは、底面が正方形の四角錐です。またこの四角錐では、頂点は「底面のど真ん中」の真上にあります。つまりこの四角錐は「正四角錐」です。この四角錐では、底面の正方形 ABCD の一辺の長さは 10 cm です。またこの四角錐では、頂点 E から辺 BC へぶつかるまで辺 BC に垂直に進んだときの長さは 8 cm です。

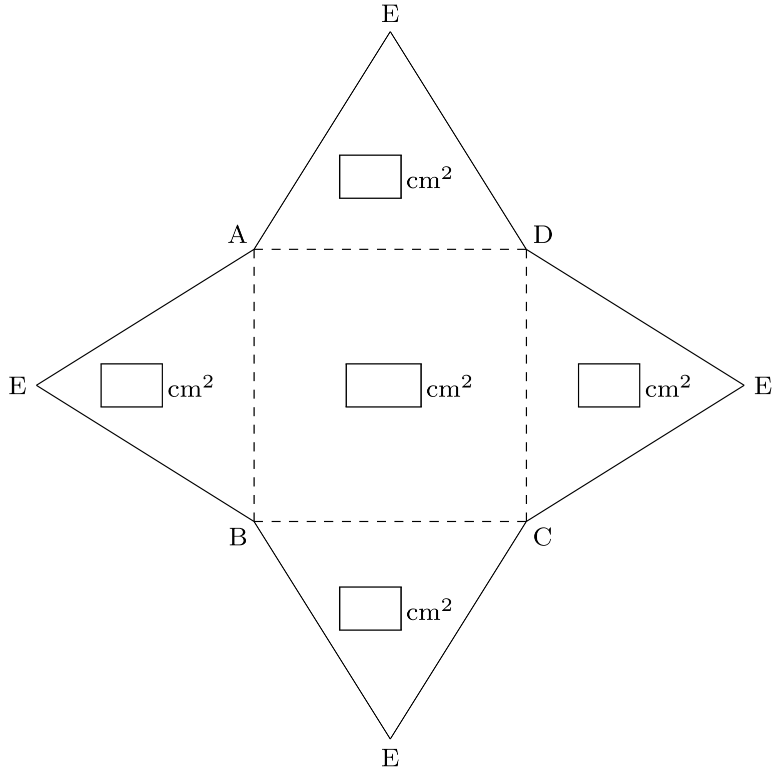


それでは、以下の問に順番に答えることにより、この四角錐の表面積を求めることにしましょう。

(1) 次の図は、この四角柱の表面の図です。この図の空欄に正しい数を記入しなさい。



(2) 次の図は、(1) と同じ、この四角柱の表面の図です。1 つ 1 つの面の面積を計算して、この図の空欄に正しい数を記入しなさい。



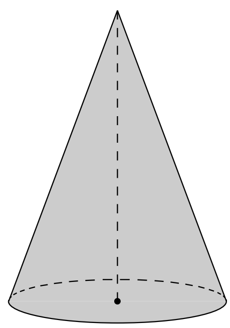
(3) (2) で求めた全ての面の面積を合計して、この四角錐の表面積を求めなさい。

答えを見る

次は円錐の表面積について考えてみようと思います。ですがその前に少しおさらいの問題を解きたいと思います。

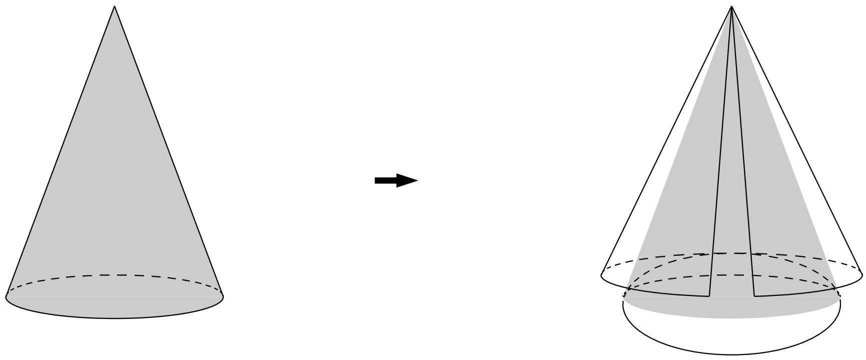
例題 3　円錐についてのおさらい

右の図を見てください。これは円錐と呼ばれている立体図形ですね。この円錐では、頂点は底面の円の中心の真上にあるとします。この円錐について以下の問に答えなさい。



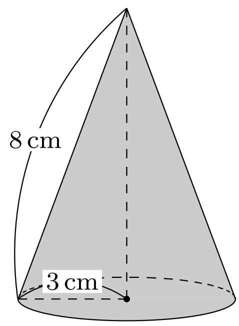
(1)　次の図を見てください。この図は、この円錐の皮（つまり表面）をはいでいき、表

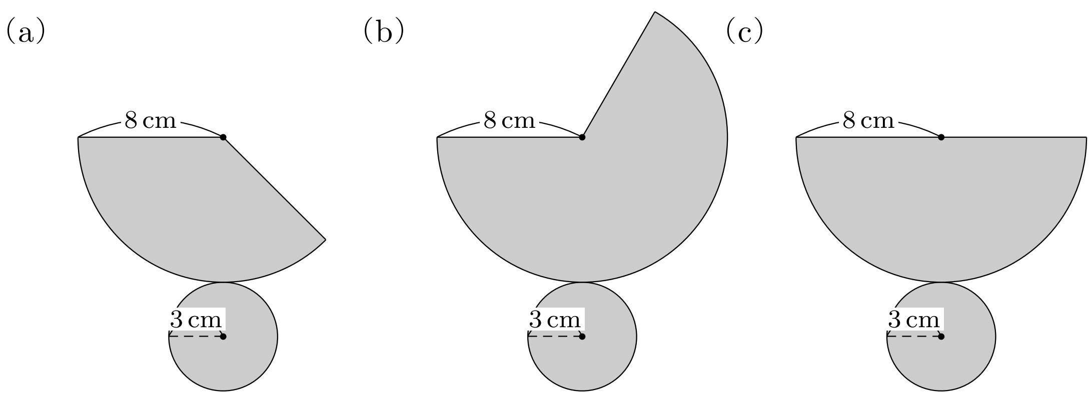
面と中身に分けようとしているところをあらわしています。



このまま表面をはがしていくと、表面は 2 つの部品からできているということがわかるはずです。それぞれの部品の名前を言いなさい。

(2)　右の図を見てください。図にも記入してありますが、実はこの円錐の底面の円の半径は 3 cm で、頂点から「底面である円ののふち」までの長さは 8 cm です。この円錐の表面を図にすると、どんな感じになると思いますか。次のうち最も本当っぽいものを選びなさい。



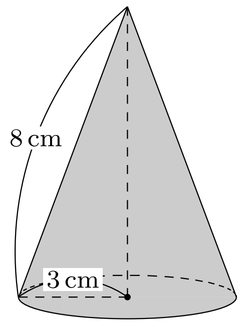


解答

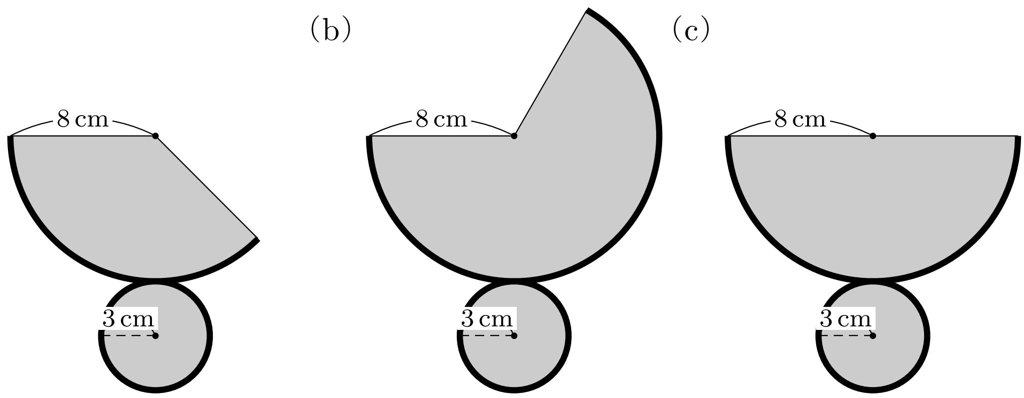
(1)　どんな円錐でも、表面は「円」と「おうぎ型」からできていますね。詳しく言うと、

底面は円で、側面はおうぎ型ですね。

(2) 右の図を見てください。この円錐の底面である円の半径はもちろん 3 cm ですね。また側面であるおうぎ型の半径が 8 cm であることもわかりますね。 ところでおうぎ型のほうですが、半径が 8 cm であるとわかっても、まだまだ不明な点がありますよね。半径が同じでも、中心角が変わればおうぎ型の形もいろいろと変わるからです。そこでこのような問題をあなたに出したのですが、3 つの図のうち、どれが一番本当っぽいのかどうすればわかるでしょう。もう一度、3 つの図を見てみることにします。たしか次のようになっていました。



(a)　　(b)　　(c)

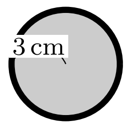


実はこの図は、問題にあった図をそのまま描いたわけではなく、あなたのために大切な所を太く描いておきました。

この円錐の表面の図を見ながら、円錐を頭の中で想像して組み立ててみてください。太くなっている所どうしはぴったり重なるということがわかりますよね。ということは、太くなっている所は長さが同じでなくてはいけませんね。この 3 つの図では、底面の円はみんな同じですから、「底面の円の周りの長さ」だって同じです。それに対して、この 3 つの図では、「おうぎ型の部分で太く描いてあるところの長さ」は、(b) が一番長く、(c) がその次に長く、(a) が一番短いですよね。それでは、

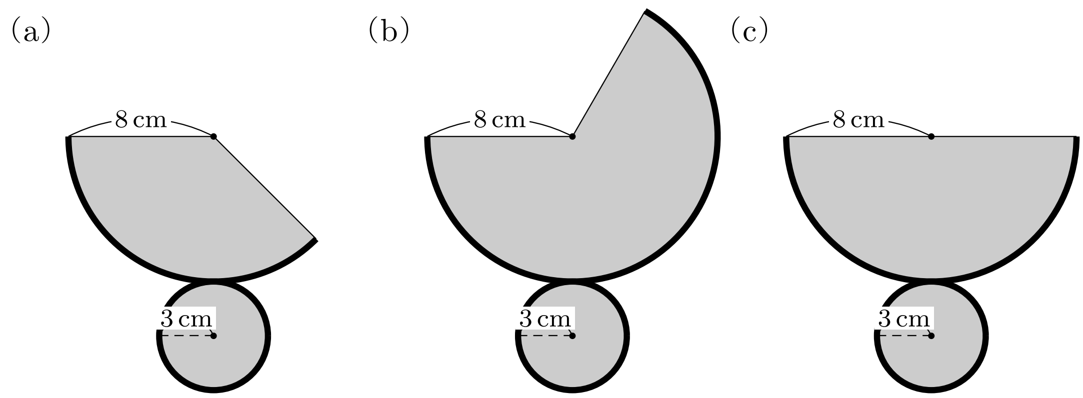
「おうぎ型の部分で太く描いてあるところの長さ」が「底面の円の周りの長さ」と同じ長さになっているのは (a) でしょうか。それとも (b) でしょうか。それとも (c) なのでしょうか。

このことを解決するには、太くなっている所の長さを求めてみると良さそうです。というわけで、まず、底面の円の周りの長さを求めてみることにします。



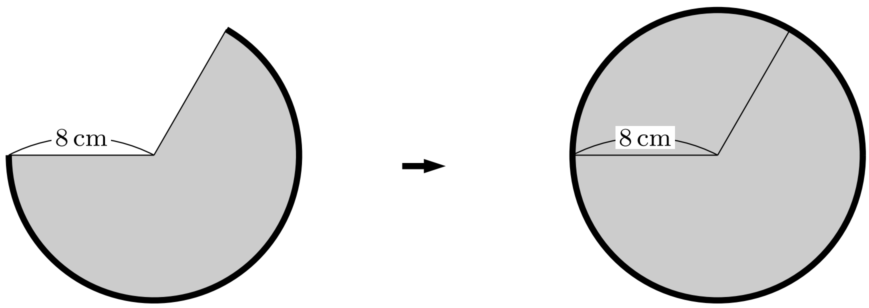
右の図を見てください。これは底面の円だけを描いた図です。ところであなたは「円周率」って覚えていますか。円周率ってそもそも、「円の周りの長さは円の直径の何倍になっているか」という質問の答えになっている数のことでしたね。そして円周率のことを π という文字であらわすのでしたね。この円は半径が 3 cm です。ということは直径は 6 cm ですね。そして、円の周りの長さは「直径の円周率倍」なのですから、この円の周りの長さは 6π cm ですね。ということは、おうぎ型のほうも太くなっている所の長さは 6π cm でなくてはならないということになります。

ではもう一度、3 つの図を見てみることにしましょう。



この中で、「おうぎ型の太くなっている所の長さ」が 6π cm になっているものがあるとしたらどれでしょう。私たちはかなり前に平面図形のことを学びましたが、そのとき、こういうことを考えるにはおうぎ型と同じ半径の円のことを考えるのが良いということを学んでいますね。（覚えていますか？これはとても大切なことです。

忘れてしまった人は、平面図形のテキストを探して今すぐ復習してください。）つまり、おうぎ型を「円がかけてしまったもの」と考えて、かけたところを補って、完全な円と比べてみるのです。というわけで、このおうぎ型と同じ半径、つまり半径 8 cm の円のことを考えてみることにします。次の図を見てください。

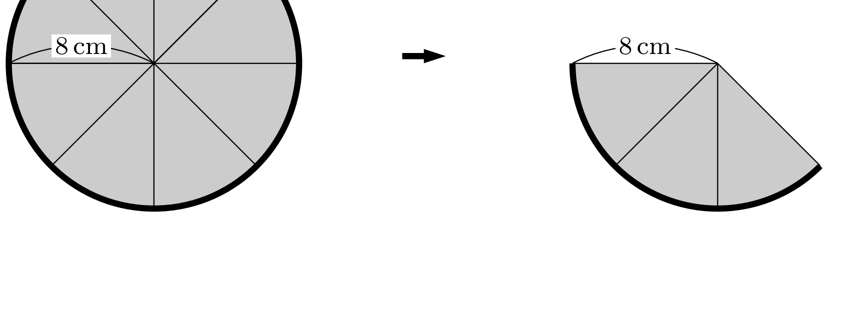


もうくどく言いませんが、円の周りの長さを求めるには、円の直径に円周率をかければよいのでしたね。ということは、この図の右側の円では、円の周りの長さは 16π cm ですね。

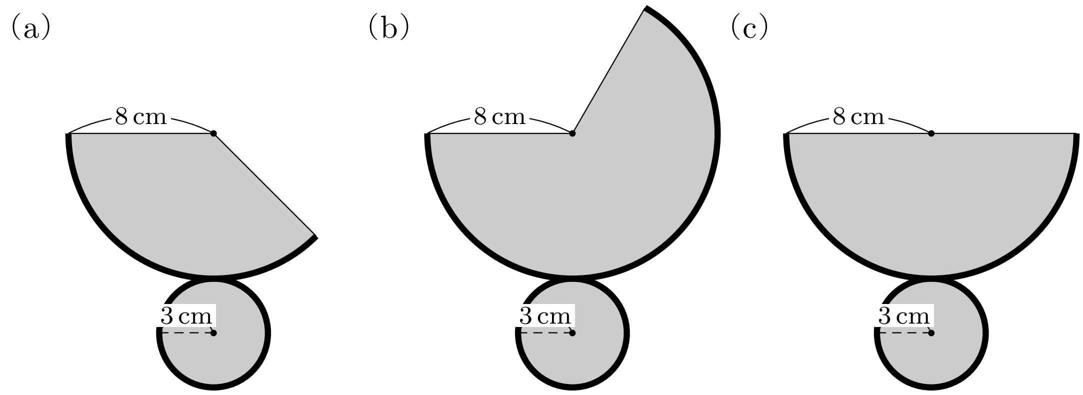
ここでおうぎ型の太くなっている所の長さを思い出してみましょう。もうとっくに求めてありますよね。たしか 6π cm でしたね。

これで重要なことがわかります。「かけた部分を補った完全な円の周りの長さ」は 16π cm ですが、「おうぎ型の太くなっている所の長さ」は 6π cm なのです。ということは、おうぎ型は円の $\dfrac{6\pi}{16\pi}$ なのです。約分してわかりやすくすると、おうぎ型は円の $\dfrac{3}{8}$ なのです。つまり、このおうぎ型は、円を 8 等分したうちの 3 個分ということです。

では次の図を見てください。

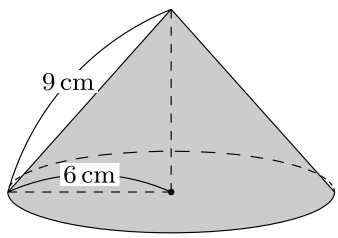


円を 8 等分して 3 個集め、おうぎ型にしてみました。このおうぎ型こそ、この問題で求めていたおうぎ型です。ではこの問題の 3 つの図をもう一度見てみましょう。



この 3 つの図の中で、一番本当っぽいのは (a) ですね。

問 30. 右の図を見てください。これは円錐と呼ばれている立体図形です。この円錐では、頂点は底面の円の中心の真上にあるとします。図にもかかれていますが、この円錐では底面になっている円の半径は 6 cm で、頂点から「底面でになっている円ののふち」までの長さは 9 cm です。以下の問に答えなさい。



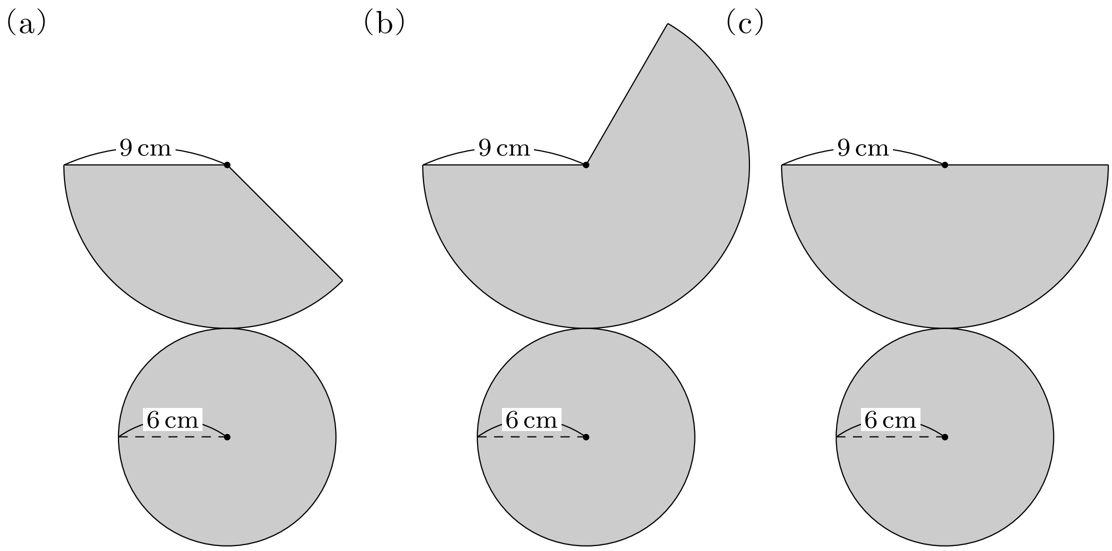
(1) この円錐の底面になっている円の周りの長さを求めなさい。

(2) この円錐の側面になっているおうぎ型の半径は何 cm ですか。

(3) 「この円錐の側面になっているおうぎ型」と同じ半径の円を思い浮かべ、その円の周りの長さを求めなさい。

(4) 「この円錐の側面になっているおうぎ型」と「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」を比べることにします。「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」を何等分してそのうちの何個分を集めると、「この円錐の側面になっているおうぎ型」になりますか。

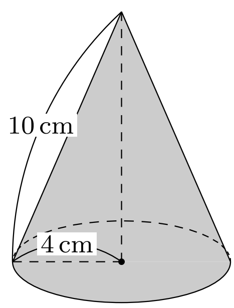
(5) この円錐の表面を図にすると、どんな感じになると思いますか。次のうち最も本当っぽいものを選びなさい。



答えを見る

ではおさらいの話は終わりにして、円錐の表面積を求める話に進みましょう。

例題 4　右の図を見てください。これは円錐と呼ばれている立体図形ですね。この円錐では、頂点は底面の円の中心の真上にあるとします。図にもかかれていますが、この円錐では底面になっている円の半径は 4 cm で、頂点から「底面になっている円のふち」までの長さは 10 cm です。これから以下の問に順番に答えていくことにより、この円錐の表面積を求めたいと思います。



注意：この例題の前にあった例題や問が理解できなかった人は、この例題を解いてはいけません。必ず、まず、この例題の前にあった例題や問をしっかり学習してください。

(1)　この円錐の底面になっている円の周りの長さを求めなさい。

(2)　この円錐の側面になっているおうぎ型の半径は何 cm ですか。

(3)　この円錐の側面になっているおうぎ型」と同じ半径の円を思い浮かべ、その円の周りの長さを求めなさい。

(4)　「この円錐の側面になっているおうぎ型」と「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」を比べることにします。「この円錐の側面になっているおうぎ

型と同じ半径の円」を何等分してそのうちの何個分を集めると、「この円錐の側面になっているおうぎ型」になりますか。

(5) 「この円錐の側面になっているおうぎ型」の面積を求めなさい。

(6) 「この円錐の底面になっている円」の面積を求めなさい。

(7) この円錐の表面積を求めなさい。

解答

(1) あっさり説明しましょう。底面は半径が 4 cm の円ですね。直径は 8 cm なので、周りの長さは、

$$8 \times \pi = 8\pi\,(\mathrm{cm})$$

ですね。

(2) 図を見ればわかるようにもちろん 10 cm ですね。

(3) 半径が 10 cm の円の周りを求めればよいということですね。直径は 20 cm なので、

$$20 \times \pi = 20\pi\,(\mathrm{cm})$$

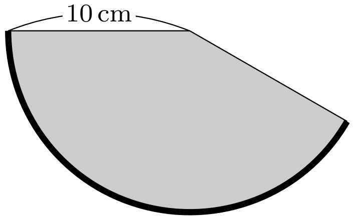
ですね。

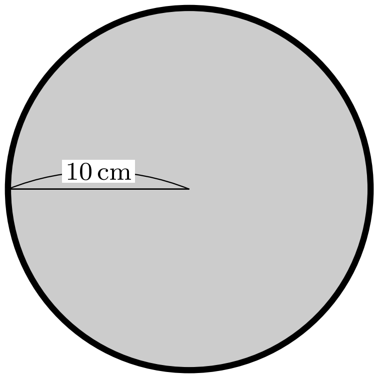
(4) ここはとても重要な所なので少し詳しく説明します。

「この円錐の側面になっているおうぎ型」の「弧」の長さと、「この円錐の底面になっている円」の周りの長さは同じですよね。だってもともとぴったり貼り合わさっていたのですから。たしか、さっき、(1) で「この円錐の底面になっている円」の周りの長さは 8π cm だって求めましたね。というわけで、「この円錐の側面になっているおうぎ型」の「弧」の長さも 8π cm なわけです。

一方、「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」の周りの長さは (3) で求めたように 20π cm でしたね。

ここまでの話を整理しましょう。次の図を見てください。





左の図は「この円錐の側面になっているおうぎ型」のつもりですが、太くなっている所の長さは 8π cm であることがこれまでにわかっていますね。一方、右の図は、「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」ですが、太くなっている所の長さは 20π cm であることがこれまでにわかっていますね。

ということは、「この円錐の側面になっているおうぎ型」は「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」の $\dfrac{8\pi}{20\pi}$ です。約分してわかりやすくすると $\dfrac{2}{5}$ ですね。ですから「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」を 5 等分してそのうちの 2 個分を集めると、「この円錐の側面になっているおうぎ型」になるのです。

(5) (4) で重要なことがわかりましたね。「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」を 5 等分してそのうちの 2 個分を集めると、「この円錐の側面になっているおうぎ型」になるのです。ですから「この円錐の側面になっているおうぎ型」の面積も「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」の面積の $\dfrac{2}{5}$ ですね。というわけで、まず「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」の面積を求めてしまいましょう。円の面積は「半径」かける「半径」かける「円周率」で求められるのでしたね。ですから、「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」の面積は、

$$10 \times 10 \times \pi = 100\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

となります。これに $\dfrac{2}{5}$ をかければ「この円錐の側面になっているおうぎ型」の面

積になるのですから、計算してみると、

$$100\pi \times \frac{2}{5} = 40\pi(\mathrm{cm}^2)$$

となります。

(6) 底面の円の半径は 4 cm でしたね。ということは底面の円の面積は、

$$4 \times 4 \times \pi = 16\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

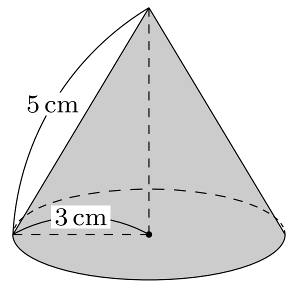
ですね。

(7) 「この円錐の側面になっているおうぎ型」の面積と「この円錐の底面になっている円」の面積を合計すれば「この円錐」の表面積になりますね。ですから、

$$40\pi + 16\pi = 56\pi(\mathrm{cm}^2)$$

となります。

問 31. 右の図を見てください。これは円錐と呼ばれている立体図形ですね。この円錐では、頂点は底面の円の中心の真上にあるとします。図にもかかれていますが、この円錐では底面になっている円の半径は 3 cm で、頂点から「底面になっている円のふち」までの長さは 5cm です。これから以下の問に順番に答えていくことにより、この円錐の表面積を求めてください。



(1) この円錐の底面になっている円の周りの長さを求めなさい。

(2) この円錐の側面になっているおうぎ型の半径は何 cm ですか。

(3) 「この円錐の側面になっているおうぎ型」と同じ半径の円を思い浮かべ、その円の周りの長さを求めなさい。

(4) 「この円錐の側面になっているおうぎ型」と「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」を比べることにします。「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」を何等分してそのうちの何個分を集めると、「この円錐の側面

になっているおうぎ型」になりますか。

(5) 「この円錐の側面になっているおうぎ型」の面積を求めなさい。

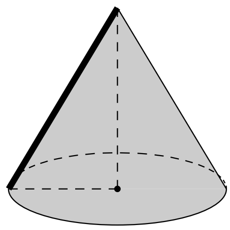
(6) 「この円錐の底面になっている円」の面積を求めなさい。

(7) この円錐の表面積を求めなさい。

答えを見る

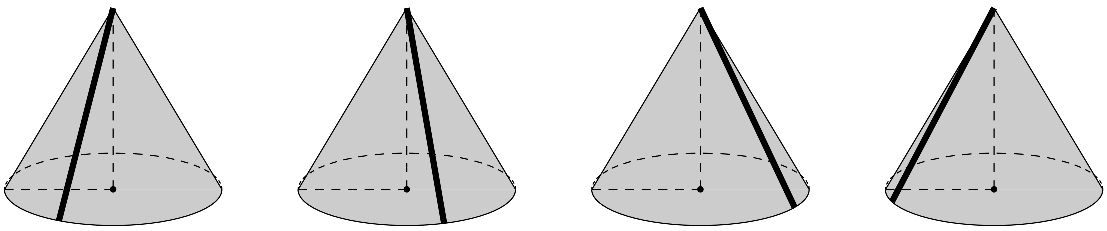
補足：母線という言葉について

例題 4 や問 31 で円錐のことを学習しました。そしてどちらの問題にも、「頂点から底面になっている円のふちまでの長さ」という言い回しが出てきましたね。



何のことかもうおわかりだと思いますが、念のため図を使って確認することにします。右の図を見てください「頂点から底面になっている円のふちまでの長さ」とは、この図で太くなっている線の長さのことですね。

では次の図を見てください。



同じ円錐をいくつか横に並べて描いておきました。そしてどの円錐の図にも、「頂点と底面になっている円のふちを結んでできる線分」を太く描いておきました。ところで、この太くなっている線の長さですが、どれも全部同じ長さですよね。だって、この円錐は、頂点が底面の円の中心の真上にあるのですから、側面はおうぎ型になっているんですよね。だったら、「頂点」と、「底面になっている円のふち」のどこを結んでも同じ長さですよね。

円錐では、この図のような、「頂点」と「底面になっている円のふち」を結んでできる線分のことを**母線**と呼んでいます。

円錐以外の立体でも「母線」と呼ばれる線があるものがあります。実は「ナントカ柱」

にも母線があるのですが、ここではこの話はやめておきましょう。

補足終わり

問 32. 底面の半径が 6 cm で、母線の長さが 9 cm の円錐の表面積を求めなさい。

答えを見る

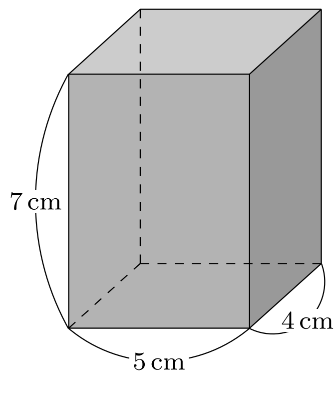
補足：側面積という言葉について

これまでいろいろな立体図形を学びましたが、「ナントカ柱や「ナントカ錐」と呼ばれているものには、「底面」と「側面」があるのでしたね。また、「底面」と「側面」を合わせて「表面」」になるわけですね。そしてさっきまで、いろいろな立体の「表面積」について学んできました。もちろん「表面積」は「底面」の面積と「側面」の面積をあわせたものです。これに対して、「側面」の面積だけのことを「側面積」と呼びます。ですから、「側面積を求めなさい」と言われたら、側面の面積だけを求めればよいのです。

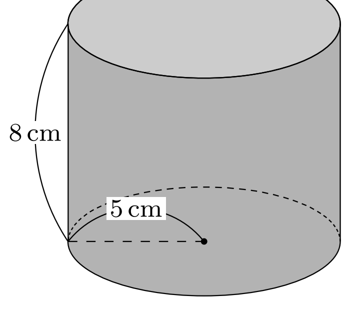
補足終わり

問 33. 次の立体の側面積を求めなさい。

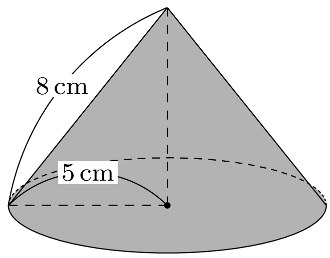
(1) 右の図のような、底面が長方形の四角柱。底面の長方形は縦の長さが 4 cm で横の長さは 5 cm。四角柱の高さは 7 cm。



(2) 右の図のような、底面が円の円柱。底面の円は半径が 5 cm。円柱の高さは 8 cm。



(3) 右の図のような、底面が円の円錐。円錐の頂点は、底面の円の中心の真上にある。底面の円は半径が 5 cm。母線の長さは 8 cm。



答えを見る

5.2　立体の体積

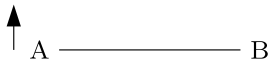
ナントカ柱の体積はどう計算したらいいの？

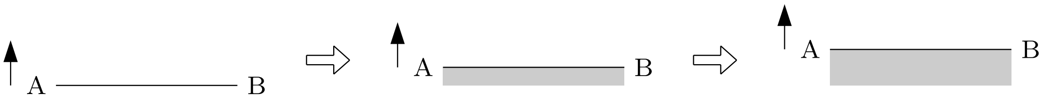
これから立体の体積について学びますが、その前に「体積」という言葉について少し考えてみることにします。「体積」と似ている易しいものとして、「面積」や「長さ」という言葉があります。そこでまず、「長さ」と「面積」の関係について説明することにしましょう。

「長さ」と「面積」の関係について

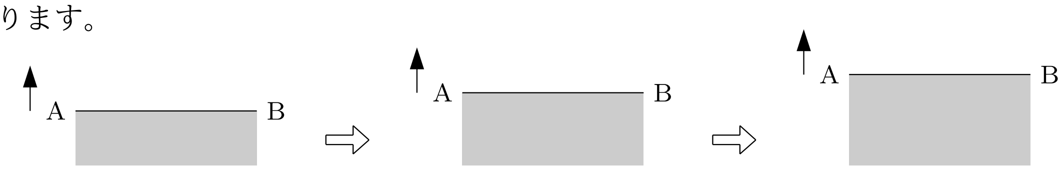
「長さ」というのは線（まっすぐな線や曲がった線）がどれぐらい長いのかということを数で表したもので、「面積」というのは面がどのぐらい広いのかということを数で表したものですね。ところで以前、線を動かしていくと線が通過した跡が面になるという話をしました。覚えていますか？

まず、右の図を見てください。線分 AB と矢印が描かれています。これからこの線分 AB を矢印のほうへ、まっすぐ平行に動かしてみようと思います。では次の図を見てください。



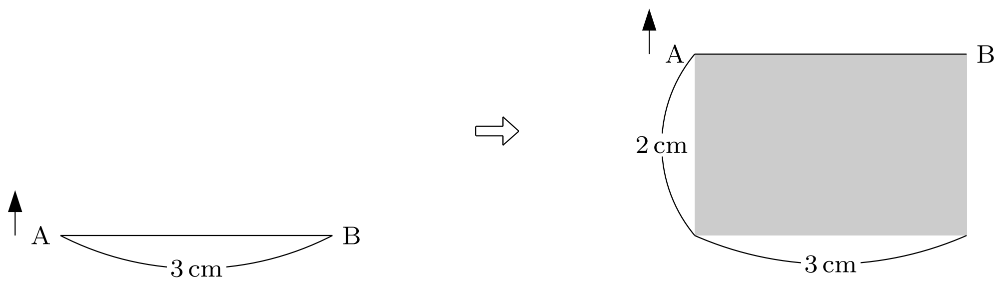


線分 AB がだんだん矢印の方向へまっすぐ平行にずれていき、線分 AB の通過した跡が灰色になっていきます。さらに線分 AB を動かしてみましょう。すると次の図のようになります。



もっと線分 AB を動かしても良いのですが、きりがないのでこの辺やめておきます。図を見るとわかるように、線分 AB の通過した跡は長方形になります。（初めに言ったように、線を動かすとその跡が面になったのです。）

ではここで、線分 AB の「長さ」と線分 AB が通過した跡にできた面の「面積」の関係について考えてみましょう。次の図を見てください。



これはさっきの説明のように、線分 AB を矢印のほうへ動かすと、線分 AB の通過した跡が長方形になるということを表した図です。この図では、図にも書いておきましたが線分 AB の長さは 3 cm で、矢印のほうへ 2 cm 動かしているとしましょう。つまり、今、長さ 3 cm の線分を用意したわけです。そして、線分と「垂直な方向」へ線分を 2 cm ずらしていきました。そうすると線分の通過した跡は長方形になるのですが、この長方形の面積はいくつなのでしょう。それはもちろん、

$$3 \times 2 = 6\,(\mathrm{cm}^2)$$

ですね。

この話であなたにわかってほしいのは、

ある長さの線分を、線分と垂直に動かしていくとき、線分が通過してできる長方形の面積は、「線分の長さ」と「線分を動かした長さ」をかけると求められる

いうことです。もう一度言います。今度は式も使って言いますが、

ある長さの線分を線分と垂直な方向へずらしていきます。そうすると線分が通過した後に長方形ができますが、

$$\text{線分が通過した跡にできた長方形の面積} = \text{線分の長さ} \times \text{線分を動かした長さ}$$

がなりたっている

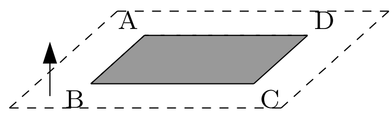
ということです。

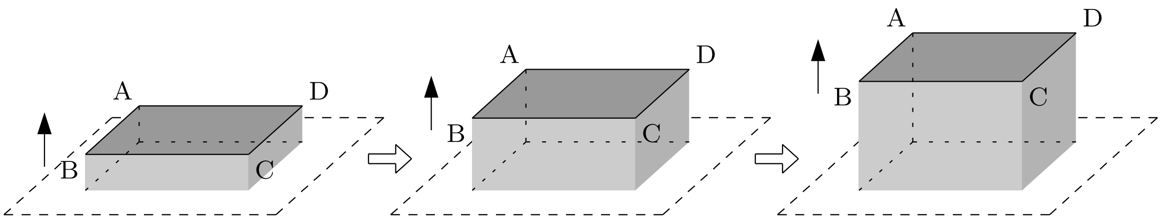
「長さ」と「面積」の関係についての話はここまでにして、次に「面積」と「体積」の関係について考えてみます。

「面積」と「体積」の関係について：ナントカ柱の場合

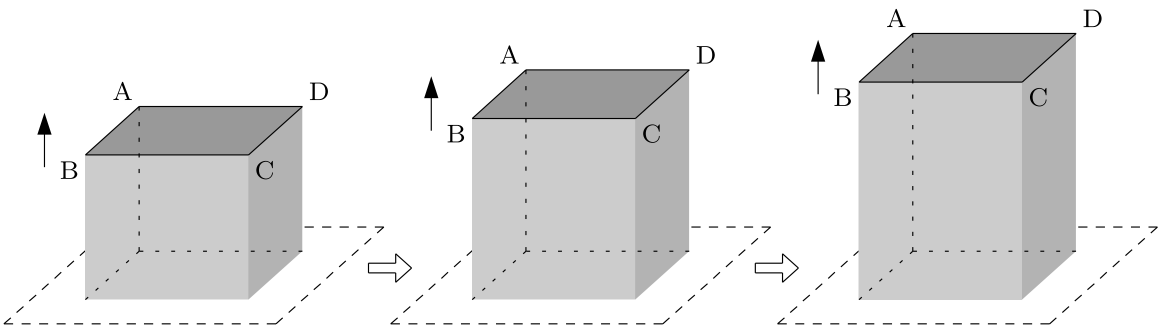
「面積」というのは面がどのぐらい広いのかということを数で表したもので、「体積」というのは立体がどのぐらい大きいのかということを数で表したものですね。ところで以前、面を動かしていくと面が通過した跡が立体になるという話を学びましたね。覚えていますか？

ではまず、右の図を見てください。床の上に灰色の長方形 ABCD がおかれています。またこの図には矢印が描かれていますが、この矢印は床に垂直で、真上を向いています。これからこの長方形を矢印の方向へ、まっすぐ平行に動かすことにします。つまり、灰色の長方形を、水平なまま、まっすぐ上に、床から浮かせていくわけです。では次の図を見てください。長方形 ABCD の通過した跡が灰色になっていきます。



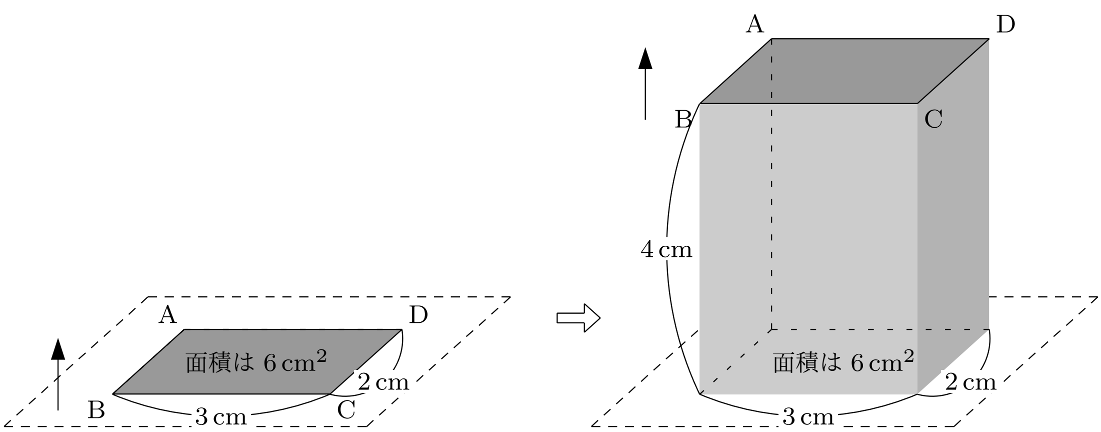


長方形 ABCD がだんだん矢印のほうへまっすぐ水平なままずれていき、長方形 ABCD の通過した跡が灰色になっていきます。さらに長方形 ABCD を動かしてみましょう。すると次のようになります。



さらに長方形を上のほうへ動かしても良いのですが、きりがないのでこの辺でやめておきましょう、図を見るとわかるとおり、長方形 ABCD の通過した跡は四角柱になります。（初めに言ったように、面を動かすと, 面が通過した跡が立体になったのです。）ではここで、長方形 ABCD の「面積」と長方形 ABCD が通過した跡にできた立体の「体積」の関係について考えてみましょう。

次の図を見てください。



これは、さっきのように長方形 ABCD を矢印のほうへ動かすと、長方形 ABCD の通

過した跡が四角柱になるということを表した図です。この図では、図にも書いておきましたが長方形の縦や横の長さはぞれぞれ 2 cm と 3 cm で、面積が 6 cm^2 になっているとします。またこの長方形 ABCD を矢印のほうへ 4 cm 動かしているとしましょう。

高さが 4 cm の四角柱ができたわけですが、この四角柱の「体積」はどれだけなのでしょうか。小学校では

「長方形の縦の長さ」かける「長方形の横の長さ」かける「四角柱の高さ」

で求めることができるということを学んでいますね。ところでこのかけ算についてちょっと考えてみると、

「長方形の縦の長さ」と「長方形の横の長さ」をかけると「長方形の面積」になる

わけですし、

「四角柱の高さ」は「長方形を動かした長さ」になっている

わけですよね。ということは

四角柱の体積は「床の上に用意した長方形の面積」かける「長方形を動かした長さ」でもとめられる

ということになりますね。つまり、この四角柱の体積は、小学生流の計算法で「縦の長さ」かける「横の長さ」かける「高さ」として計算すると、

$$2 \times 3 \times 4 = 24\,(\mathrm{cm}^3)$$

と求めることができますが、このかけ算の 2×3 の所は長方形の面積 6 を求めていることになっているわけです。つまり、

$$6 \times 4 = 24\,(\mathrm{cm}^3)$$

を計算していることになります。ですから結局この計算は、「床の上に用意した長方形の面積」かける「長方形を動かした長さ」をしていることになっているわけです。

ここであなたにわかってほしいのは、

> ある面積の面を面と垂直に動かしていくとき、面が通過してできるナントカ柱の体積は、「面の面積」と「面を動かした長さ」をかけると求められる

ということです。もう一度言います。今度は式も使って言います。

> ある面積の面を面と垂直な方向へずらしていきます。そうすると面が通過した後にナントカ柱ができますが、
>
> $$\text{面が通過した跡にできたナントカ柱の体積} = \text{面の面積} \times \text{動かした長さ}$$
>
> がなりたっている

ということです。

ここまで、「長さ」「面積」体積」の関係について大切なモノの見方を学びました。それではこれから本題に入ることにします。立体の体積を求める練習をしていきます。

ナントカ柱の体積を計算してみよう

さっき学んだ大切なモノの見方をもう一度書いておきましょう。

> 大切なモノの見方
>
> ある面積の面を面と垂直な方向へずらしていきます。そうすると面が通過した跡はナントカ柱になりますが、ナントカ柱の体積は
>
> $$\text{面が通過した跡にできたナントカ柱の体積} = \text{面の面積} \times \text{動かした長さ}$$
>
> で求めることができます。動かす面は初めナントカ柱の底面になっていて、動かす長さがナントカ柱の高さになるわけですから、ナントカ柱の体積は、
>
> $$\text{ナントカ柱の体積} = \text{底面積} \times \text{高さ}$$

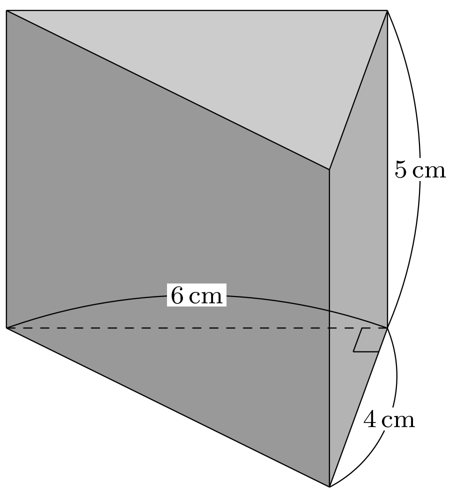
で求めることができると言ってもよいわけです。

何を言っているのかよくわからない人は、もう一度 190 ページを開いて『「面積」と「体積」の関係について』を復習してください。

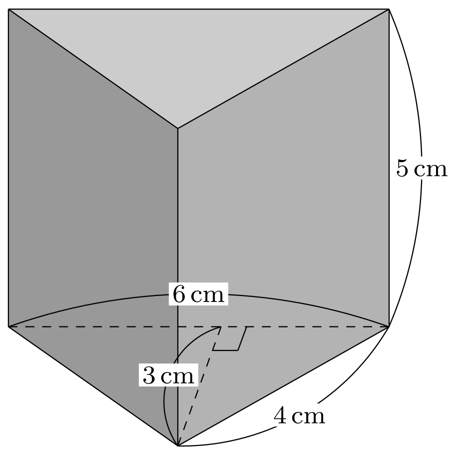
それではこの、「大切なモノの見方」を使って立体の体積を求める練習をしましょう。

例題 5　次の三角柱の体積を求めなさい。

(1)　底面が直角三角形の三角柱



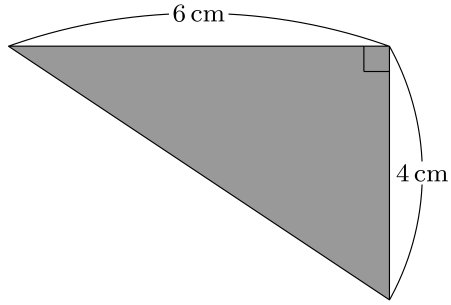
(2)　底面が直角三角形かどうかわからない三角柱



解答

ナントカ柱の体積は「底面積」かける「高さ」で求められるのでしたね。ですから、まず底面積を計算し、次に高さをかければよいですね。

(1)　この三角柱の底面の形や辺の長さのことをきちんと確認するため、底面を真上から見てみることにします。すると右の図のようになっているはずです。この三角形の面積を求めてみましょう。4 cm の辺と 6 cm の辺が垂直に交わっていま



すね。ですからこの三角形では、例えば 4 cm の辺を底辺だと考えると、6 cm の辺を高さだと思うことができます。（もちろん 6 cm の辺を底辺だと考えて、4 cm の辺を高さだと思っても良いわけです。）というわけで、この三角形の面積は、

$$4 \times 6 \times \frac{1}{2} = 12\,(\mathrm{cm}^2)$$

となりますね。（三角形の面積は「底辺」かける「高さ」かける「にぶんのいち」でもとめることができるのでしたね。）これでこの三角柱の底面積を求めることができました。というわけで、あとは高さをかければ三角柱の体積を求めることができます。

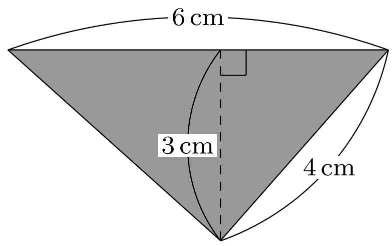
この三角柱の高さは 5 cm です。ですから、この三角柱の体積は、

$$12 \times 5 = 60\,(\mathrm{cm}^3)$$

ですね。

(2) ではまず 194 ページを開いて、この問題の立体の見取り図をもう一度よく見てください。

この三角柱の底面の形や辺の長さのことをきちんと確認するため、底面を真上から見てみることにします。すると右の図のようになっているはずです。この三角形の面積を求めてみましょう。この三角形では、例えば 4 cm の辺を底辺だと考えると、6 cm の辺を高さだと思うことはできません。（もちろん 6 cm の辺を底辺だと考えて、4 cm の辺を高さだと思うこともできません。）なぜなら、4 cm の辺と 6 cm の辺が垂直に交わっていないからです。底辺をあらわす辺と、高さを表す線分は垂直でなければならないのですよね。この図をよく見ると、3 cm の線分が描いてあります。そして、この線分は 6 cm の辺に垂直になっています。ですから、6 cm の辺を底辺と考え、3 cm の線分を高さと考えればよいのです。というわけで、この三角形の面積は、



$$6 \times 3 \times \frac{1}{2} = 9\,(\mathrm{cm}^2)$$

となりますね。これでこの三角柱の底面積を求めることができました。というわけで、あとは高さをかければ三角柱の体積を求めることができます。

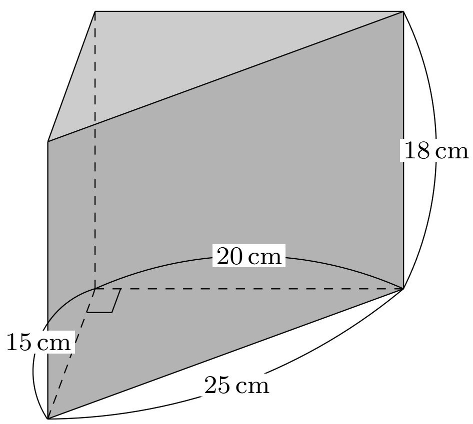
この三角柱の高さは 5 cm です。ですから、この三角柱の体積は、

$$9 \times 5 = 45\,(\mathrm{cm}^3)$$

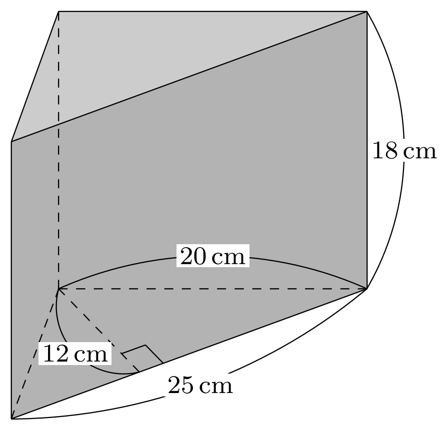
ですね。

問 34. 次のナントカ柱の体積を求めなさい。

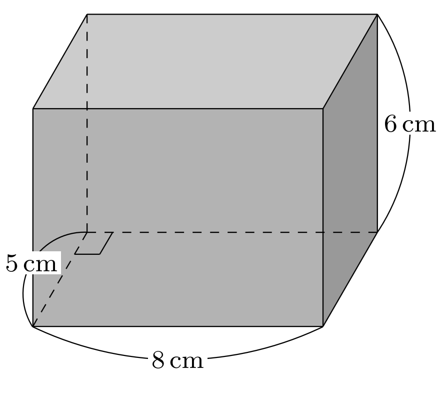
(1) 三角柱



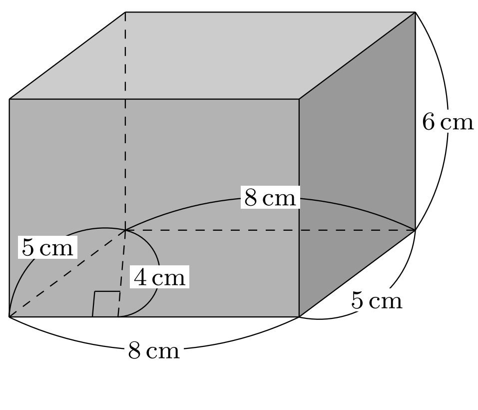
(2) 三角柱



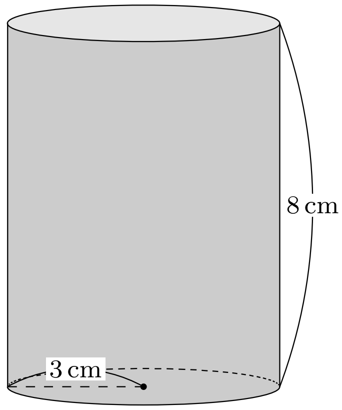
(3) 四角柱



(4) 四角柱



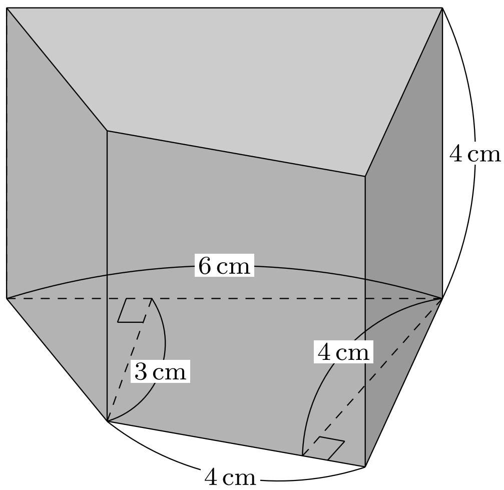
(5) 円柱



答えを見る

話を進めます。今度は、「もう少し複雑な形のナントカ柱の体積」を求める練習をしてみましょう。

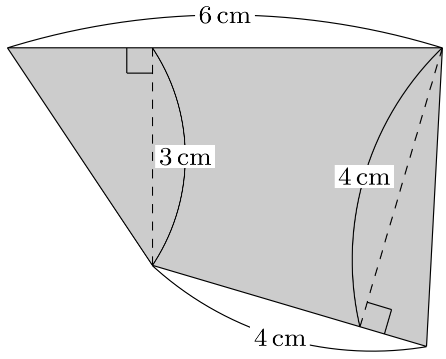
例題 6　右の図のナントカ柱の体積を求めなさい。



解答

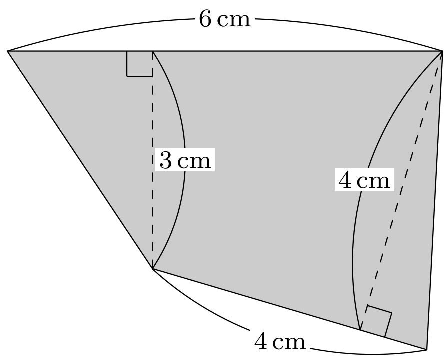
ナントカ柱の体積は「底面積」かける「高さ」で求めるのでしたね。

このナントカ柱では、底面は四角形です。では、底面積を求めるためにまず底面の四角形を詳しく調べます。底面を真上から見てみることにしましょう。すると右の図のようになっているはずです。この四角形ですが、長方形ではありませんよね。ですから「縦の長さ」かける「横の長さ」のようにして面積を計算することはできませんね。またこの四角形は、平行四辺形や台形でもないようです。ではどうすればよいでしょうか。



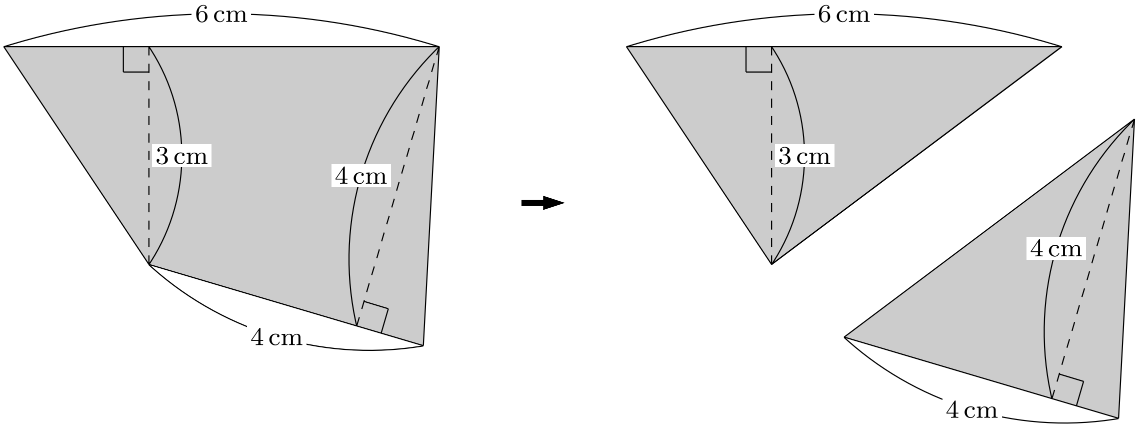
ところで小学校で習った四角形の面積を求める公式を思い出してみると、「長方形」「平行四辺形」「台形」についてのものぐらいですよね。ということは、この四角形の面積は、あなたの知っている公式を 1 回使うだけでは求められないのかも知れません。何か工夫が必要なようです。ではもう一度、底面を真上から見たみ図を良く見ることにしましょう。

右の図を見てください。あなたのために、もう一度、底面を真上から見た図を描いておきました。

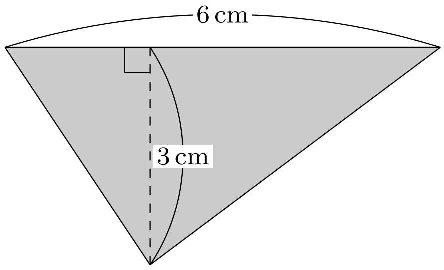


2 つの頂点から、点線が出ていますね。(3 cm の長さの線分や 4 cm の長さの線分のことです。) そして、この 2 つの線分は、四角形の辺に垂直になっていますね。(直角マークが描いてありますよね。) この 2 つの線分、何か役に立たないのでしょうか。ちょっと考えてみます。うーん、どうすればよいのでしょう。あっ、この 2 つの点線の線分ですが、線分がぶつかっている辺の長さ、わかっているではありませんか。3 cm の線分は 6 cm の辺と垂直にぶつかっていて 4 cm の線分は 4 cm の辺と垂直にぶつかっているのですよね。これはラッキーです。いいことを思いつきました。あなたもきっともう気付いていますよね。

次の図を見てください。



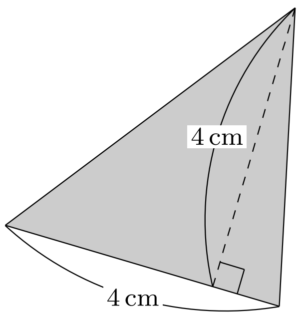
四角形の対角線で四角形を切ってみると、この図のように四角形は 2 つの三角形に分かれます。この 2 つの三角形ですが、ラッキーなことに面積を求められるではありませんか。だって、どちらの三角形も底辺の長さと高さがわかりますよね。というわけで、2 つの三角形の面積を求めてみることにします。



こちらの三角形では、点線で描かれている 3 cm の線分と、三角形の 6 cm の辺は垂直になっています。ですから、6 cm の辺を底辺だと考えれば、高さは 3 cm になるわけです。ですからこの三角形の面積は、

$$6 \times 3 \times \frac{1}{2} = 9\,(\mathrm{cm}^2)$$

ですね。



また、こちらの三角形ですが、点線で描かれている 4 cm の線分と、三角形の 4 cm の辺は垂直になっています。ですから、4 cm の辺を底辺だと考えれば、高さは 4 cm になるわけです。ですからこの三角形の面積は、

$$4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8\,(\mathrm{cm}^2)$$

ですね。

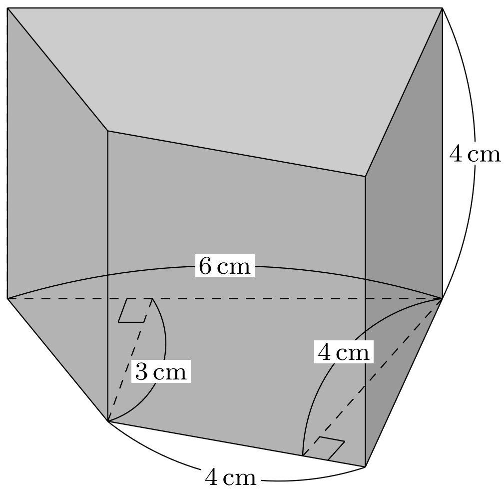
これで、底面の四角形を分割してできた 2 つの三角形の面積がわかりました。四角形の

面積は、この 2 つの三角形の面積を合計すればよいですよね。ですから、

$$底面の四角形の面積 = 9 + 8 = 17\,(\mathrm{cm}^2)$$

となりますね。

では、もう一度、四角柱の図を見てみましょう。右の図を見てください。あなたのためにもう一度四角柱の見取り図を描いておきました。



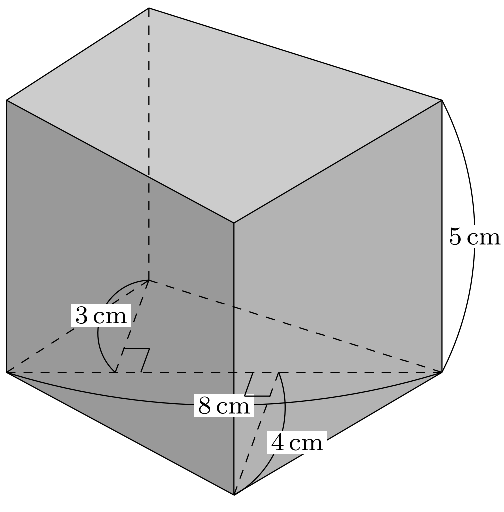
ナントカ柱の体積は、「底面積」かける「高さ」で求めることができるのでした。そしてもう「底面の四角形の面積」は $17\,\mathrm{cm}^2$ であることがわかったのでしたね。というわけで、あとは、高さをかければよいだけです。右の図を見てもわかるとおり、「高さ」は 4 cm です。ですから、

$$この四角柱の体積 = 17 \times 4 = 68\,(\mathrm{cm}^3)$$

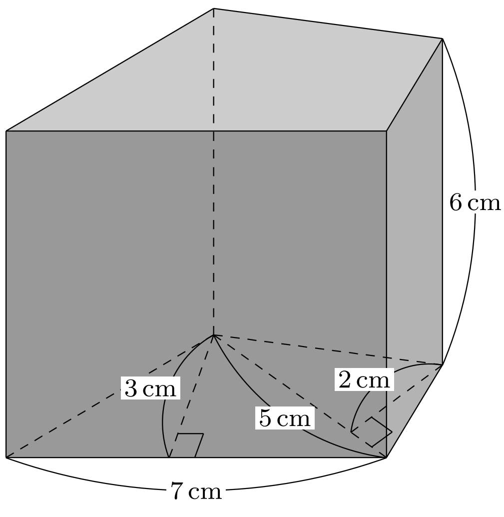
となりますね。

問 35. 次のナントカ柱の体積を求めなさい。

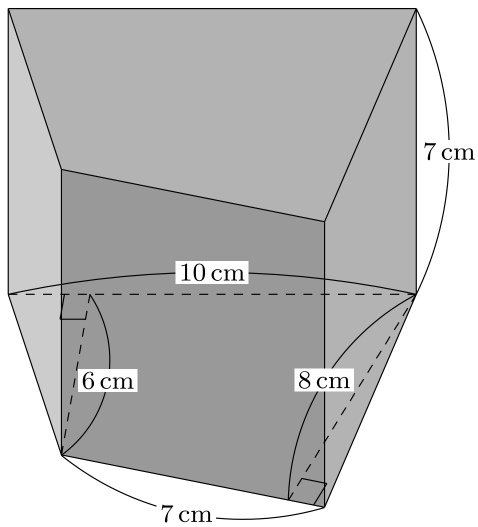
(1) 四角柱

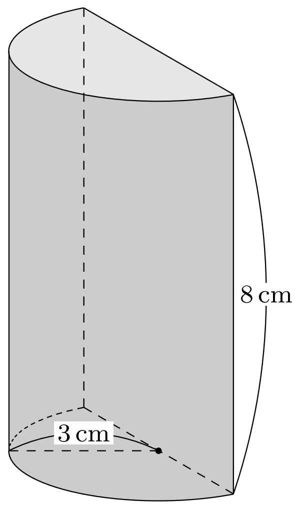


(2) 四角柱



(3) 四角柱　　(4) 半円柱





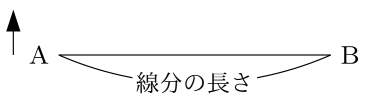
答えを見る

ナントカ錐の体積はどう計算するの？

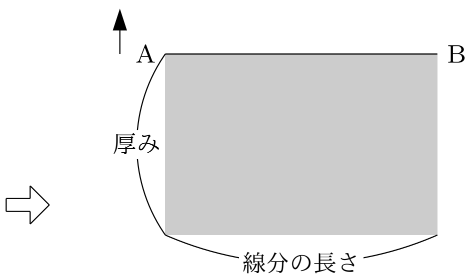
まずおさらいをします。

おさらい

188 ページから始まる数ページで、「線分の長さ」と「その線分が線分に垂直に動いて通過した跡としてできる長方形の面積」の関係について学びました。それだけではなく、「面の面積」と「その面が面に垂直に動いて通過した跡としてできる立体の体積」の関係についても学びました。次の図を見てください。



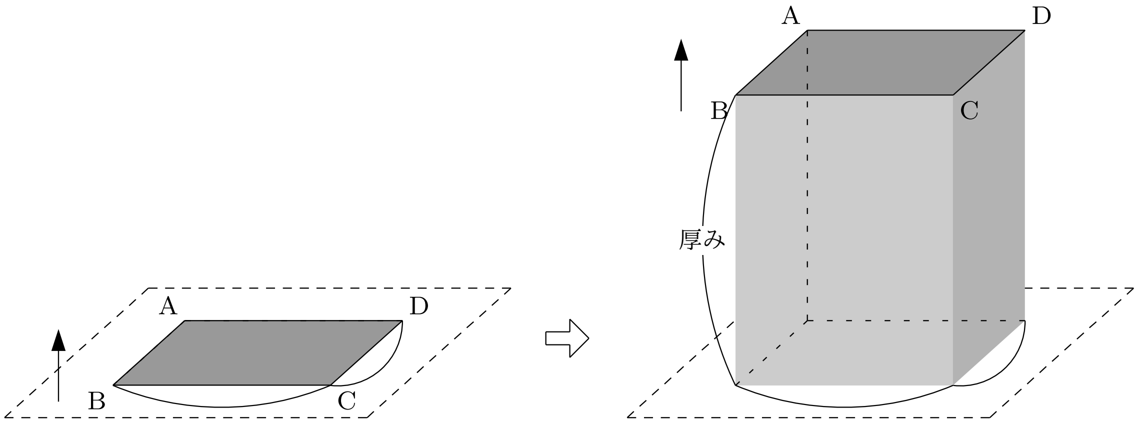
線分を線分に垂直にずらしていく。



線分が通過していくとその跡に線分に厚みのついた面ができる。
　できた面の面積 = 線分の長さ × 厚み
となっている。

この図を見るとわかるように、線分が線分に垂直に動くと、線分に「厚み」がつくわけです。そうすると、「厚みのついた図形の面積」は「厚みのつく前の図形の長さ」かける「厚み」となっているわけですね。

今度は次の図を見てください。



面を面に垂直にずらしていく。

面が通過していくとその跡に、面に厚みのついた立体ができる。

できた立体の体積 = 面の面積 × 厚み

となっている。

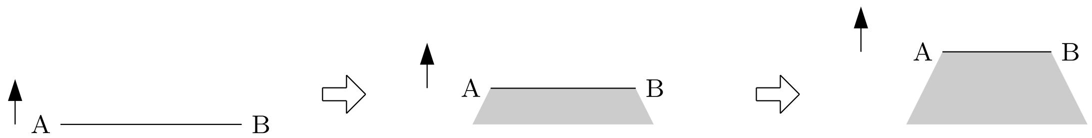
この図をみるとわかるように、面が面に垂直に動くと、面に「厚み」がつくわけです。このとき、「厚みのついた図形」の体積は「厚みのつく前の図形の面積」かける「厚み」となっていました。

ここまでの話、大丈夫ですか？わからなくなってしまっている人は、188 ページから復習しておいてください。

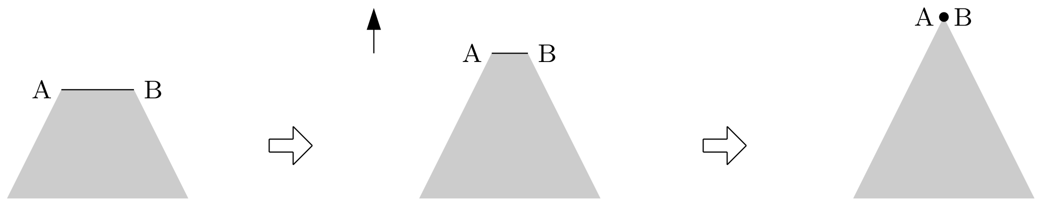
おさらい終わり

「面積」と「体積」の関係について：ナントカ錐の場合

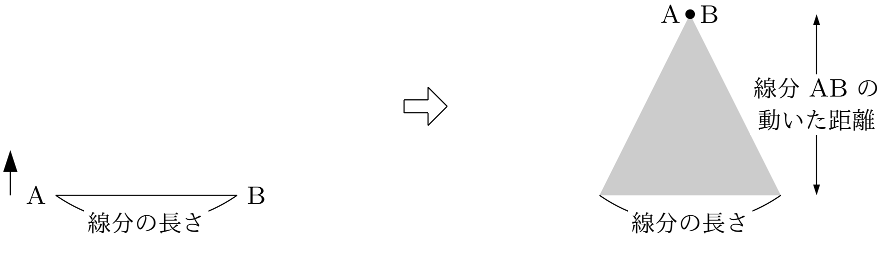
では、本題に入りましょう。今さっき、おさらいしたことと似ている話をします。次の図を見てください。



線分 AB がだんだん矢印の方向へまっすぐ平行にずれていき、線分 AB の通過した跡が灰色になっていきます。ただし、線分 AB は動いていくにつれて端が削られ、だんだん短くなります。詳しく言うと、「線分 AB がもとの位置からずれた距離」と「線分から削られた分の長さ」は比例しています。ですから、線分の通過した跡は、上にいくにつれてどんどん幅が狭くなります。さらに線分 AB を動かしてみましょう。すると次の図のようになります。

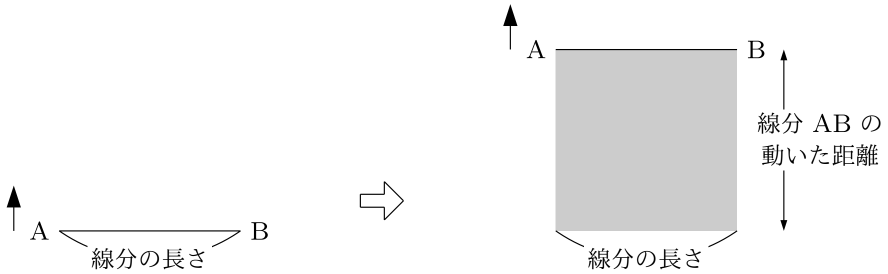


この図の一番右では、ついに線分 AB は点になってしまい、長さは 0 になってしまいました。というわけで、これ以上線分 AB を上へ動かすことはできません。では最後にできた図形を見てみましょう。線分が通過した跡としてできた図形は三角形ですね。ではここで、「もともとの線分 AB の長さ」と「線分 AB が短くなりながら線分 AB に垂直に動いた跡としてできた三角形の面積」の関係を考えてみます。つまり「もともとあった線分の長さ」と「最後にできた三角形の面積」の関係を調べます。次の図を見てください。

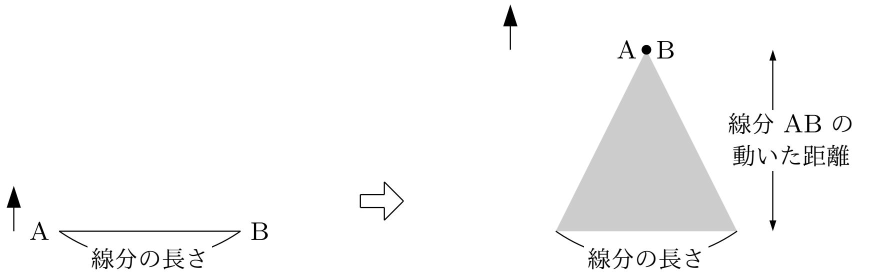


三角形の面積の計算の仕方は知ってますよね。この図を見るとわかるとおり、「最後に

できた三角形の面積」は「もともとあった線分の長さ」かける「線分の動いた距離」かける「$\frac{1}{2}$」で求めることができますね。ではここで、この話を「線分が短くならないで動いていく場合の話」と比べてみましょう。次の図を見てください。



線分が長さを変えずに通過した跡は長方形になる。
できた面の面積 = 線分の長さ × 線分の動いた距離
となっている。

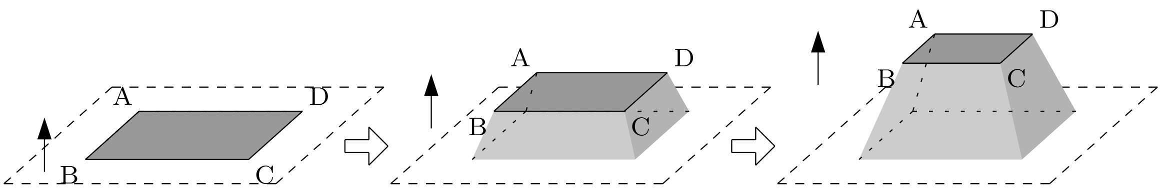


線分が短くなりながら通過した跡は三角形になる。
できた面の面積 = 線分の長さ × 線分の動いた距離 × $\frac{1}{2}$
となっている。

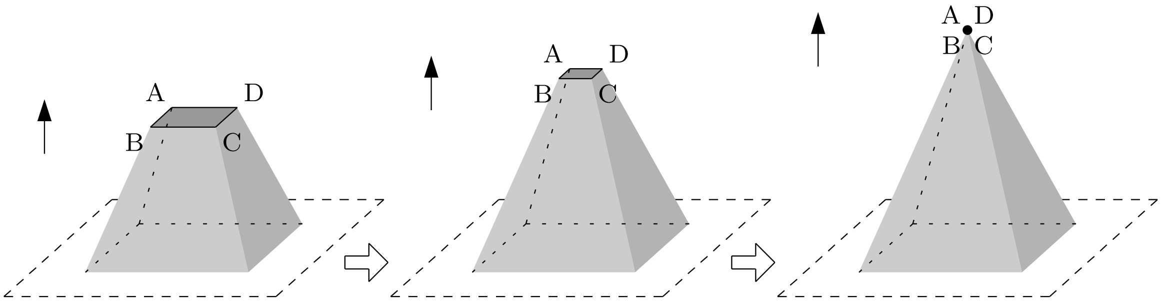
これらの場合に、線分が通過した跡にできるできる図形の面積の計算の仕方は次のようなものでしたね。

線分がそのままの長さで動いていく場合も、線分が短くなりながら動いていく場合も、出来上がる面の面積を求めるにはまず、「線分の長さ」と「線分が動いた距離」をかけざんずるわけです。そして、線分が短くなりながら動いていく場合は、さらに「$\frac{1}{2}$」をかけるわけです。つまり、線分がそのままの長さで動いていく場合と、線分が短くなりながら動いていく場合では「$\frac{1}{2}$」をかけるかかけないかの違いがあるわけです。

実はナントカ柱の体積とナントカ錐の体積の違いも、この話と似ています。次の図を見てください。



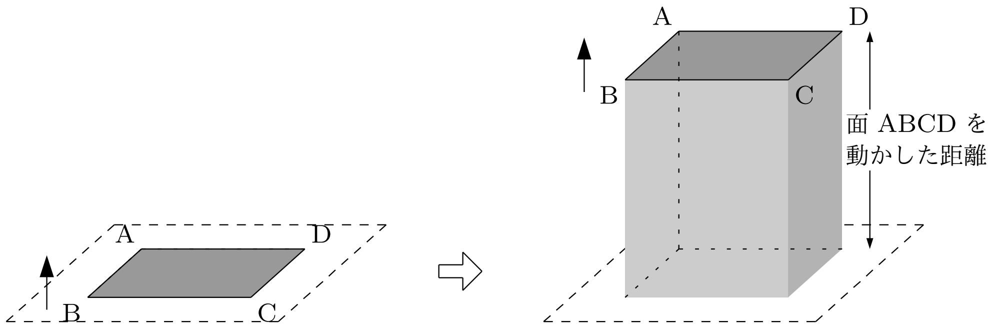
長方形 ABCD がだんだん矢印のほうへまっすぐ水平なままずれていき、長方形 ABCD の通過した跡が灰色になっていきます。ただし、長方形 ABCD は動いていくにつれて端から削られだんだん小さくなります。（詳しく言うと、「長方形 ABCD がもとの位置からずれた距離」と「長方形 ABCD から削られた分の長さ」は比例しています。ですがまあ、どういうことかわからない人は、今は細かいことは気にしなくても良いです。）ですから、長方形 ABCD の通過した跡は、上にいくにつれてどんどん面が狭くなります。さらに長方形 ABCD を動かしてみましょう。すると次の図のようになります。



この図の一番右では、ついに長方形 ABCD は点になってしまい大きさは 0 になってしまいました。ですからこれ以上長方形 ABCD を上に動かすことはできません。では最後にできた図形を見てみましょう。「長方形 ABCD が小さくなりながら通過した跡としてできた図形」は四角錐ですね。

ではここで、「もともとの長方形 ABCD の面積」と「長方形 ABCD が小さくなりながら長方形 ABCD に垂直に動いた跡としてできた四角錐の体積」の関係を考えてみます。つまり「もともとあった長方形の面積」と「最後にできた四角錐の体積」にどんな関係があるのか調べることにします。そのために、この話を「面の大きさが変わらないで動いていく場合の話」と比べてみましょう。もちろんどちらの場合も、初めに用意する四角形 ABCD は同じにしておきます。そしてもちろん、面をずらす距離も同じにします。

面の大きさが変わらずに通過した跡はナントカ「柱」になります。次の図を見てください。



面を面に垂直にずらしていく。

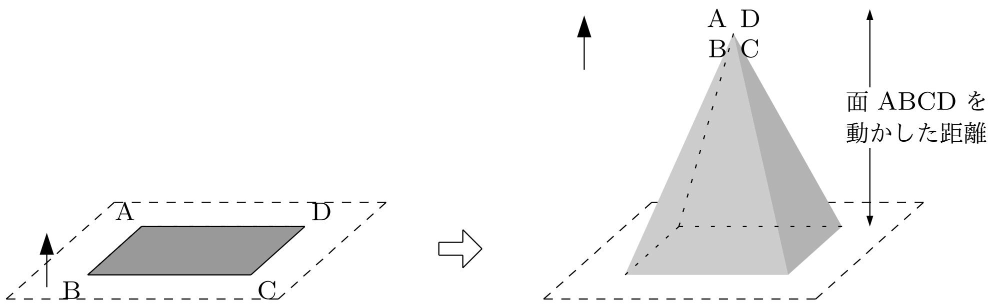
面が大きさを変えずに通過した跡は「柱」になる。
　できた立体の体積 = 面の面積 × 面を動かした距離
となっている。

この場合は、前に学んだように、

$$\text{できた立体の体積} = \text{面の面積} \times \text{面を動かした距離}$$

となるのでしたね。

一方、面が小さくなりながら通過した跡はナントカ「錐」になります。次の図を見てください。



面を面に垂直にずらしていく。

面が小さくなりながら通過した跡は「錐」になる。
「できた立体の体積」は「面の面積 × 面を動かした距離」
よりは小さいはずである。

この立体はどう見ても「面が大きさを変えずに通過した跡としてできた立体」より小さいですよね。ですから、この立体の体積は、「面が大きさを変えずに通過した跡としてできた立体」より小さいことになります。この 2 つの立体の関係は、前に学んだ、「線分が短くならないで通過した跡としてできた図形」と「線分が短くなりながら通過した跡とし

てできた図形」の関係と似ています。そしてたしか、「線分が短くなりながら通過した跡としてできた図形」の面積は「線分が短くならないで通過した跡としてできた図形」の面積にさらに「$\frac{1}{2}$」をかければ求められるのでした。ですからきっと、「面が小さくなりながら通過した跡としてできた立体」の体積は、「面が大きさを変えずに通過した跡としてできた立体」の体積に「ナントカ分の 1」かければよいのかも知れませんね。では「ナニ分の 1」をかければ良いのでしょう。これは少し難しいので答えを言ってしまう事にします。昔の人がいろいろと悩んでみたところ、「$\frac{1}{3}$」をかければよいということが突き止められたのです。というわけで、

$$\text{できた立体の体積} = \text{面の面積} \times \text{面を動かした距離} \times \frac{1}{3}$$

となるということです。言い換えると、

$$\text{ナントカ錐の体積} = \text{底面積} \times \text{高さ} \times \frac{1}{3}$$

となっているのです。

補足：昔の人はどうやって $\frac{1}{3}$ という数を見抜いたのでしょうか？あなたもぜひ、自分で考えてみてください。

ナントカ錐の体積を計算してみよう

さっき学んだ大切なモノの見方をもう一度書いておきましょう。

-大切なモノの見方：ナントカ錐の体積について-

ある面を面と垂直な方向へずらしていきます。ただし、面をいい感じで小さくしながら, 面が点になってしまうまでずらします。そうすると面が通過した跡はナントカ錐になります。そして、

$$\text{面が通過した跡にできたナントカ錐の体積} = \text{面の面積} \times \text{動かした長さ} \times \frac{1}{3}$$

と計算してこの立体の体積を求めることができます。

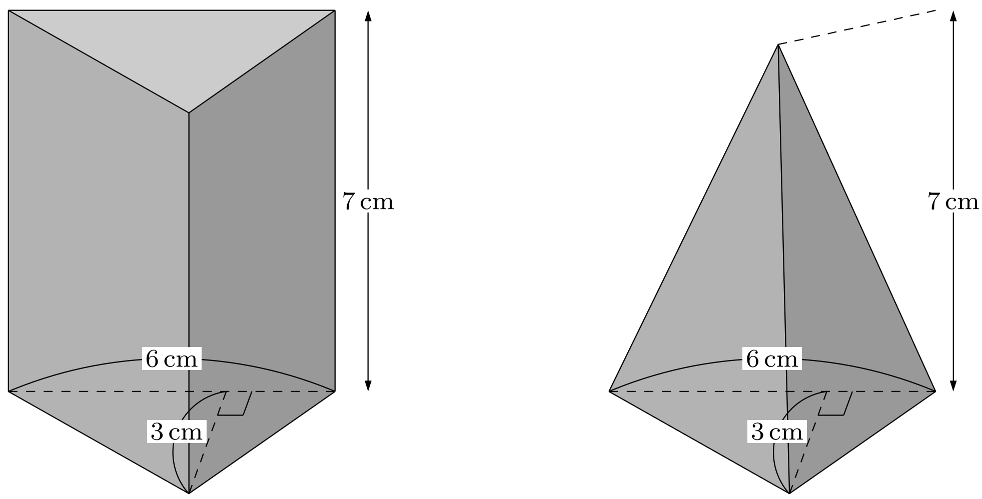
動かす面は「ナントカ錐の底面」になっていて、動かす長さが「ナントカ錐の高さ」になるわけですから、ナントカ錐の体積は、

$$\text{ナントカ錐の体積} = \text{底面積} \times \text{高さ} \times \frac{1}{3}$$

で求めることができると言ってもよいわけです。

何を言っているのかよくわからない人は、もう一度 202 ページを開いて『「面積」と「体積」の関係について：ナントカ錐の場合』を復習してください。

例題 7　次の図を見てください。



左の立体は三角柱で右の立体は三角錐ですね。どちらの立体も、底面は「底辺が 6 cm で高さが 3 cm の三角形」です。またどちらの立体も高さは 7 cm です。以下の問に答えてください。

(1)　この図の三角柱の体積を求めなさい。

(2)　この図の三角柱の体積とこの図の三角錐の体積を比べることにします。三角錐の体積は三角柱の体積のなん分のいくつですか。

(3)　この図の三角錐の体積を求めなさい。

解答

(1) ナントカ柱の体積は、「底面積」かける「高さ」で求めることができるのでしたね。

ではまず、底面積を求めてみます。底面は「底辺が 6 cm で高さが 3 cm の三角形」ですから、

$$\text{底面積} = 6 \times 3 \times \frac{1}{2} = 9\,(\mathrm{cm}^2)$$

ですね。

あとは、この三角柱の高さをかければよいですね。というわけで、

$$\text{この三角柱の体積} = 9 \times 7 = 63\,(\mathrm{cm}^3)$$

となりますね。

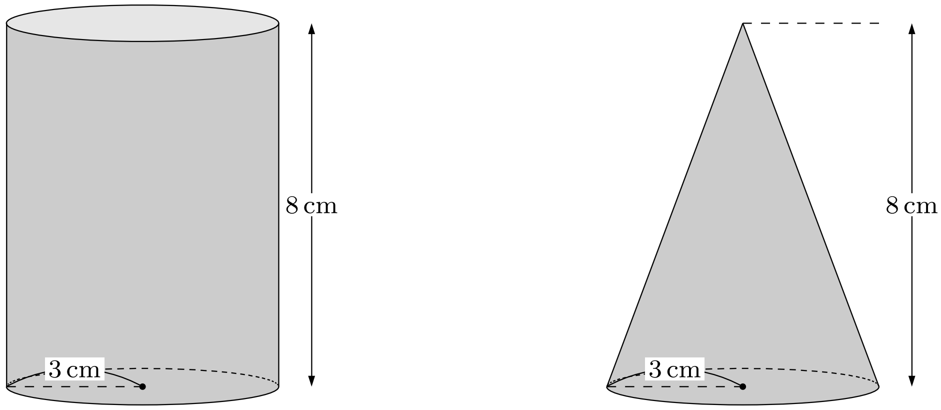
(2) 底面が同じで高さも同じ「ナントカ柱」と「ナントカ錐」の体積は $\frac{1}{3}$ の食い違いがあるのでしたね。詳しく言うと、「ナントカ錐の体積」は「ナントカ柱の体積」の $\frac{1}{3}$ なのでしたね。

(3) (2) がちゃんとわかった人はこの問題は大丈夫ですね。

$$\text{この三角錐の体積} = 63 \times \frac{1}{3} = 21\,(\mathrm{cm}^3)$$

ですね。

問 36. 次の図を見てください。



左の立体は円柱で右の立体は円錐ですね。どちらの立体も、底面は「底面は半径が 3 cm

の円」です。またどちらの立体も高さは 8 cm です。以下の問に答えてください。

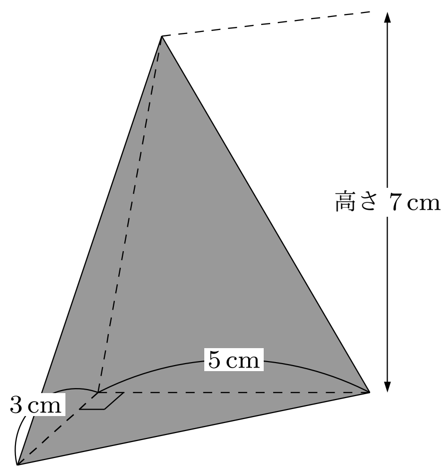
(1) この図の円柱の体積を求めなさい。

(2) この図の円柱の体積とこの図の円錐の体積を比べることにします。円錐の体積は円柱の体積のなん分のいくつになっているはずですか。何も計算しないで答えなさい。

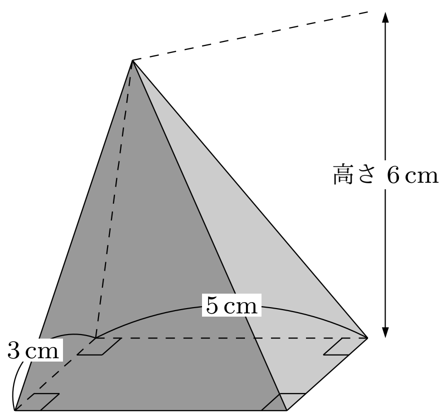
(3) この図の円錐の体積を求めなさい。　答えを見る

問 37. 次のナントカ錐の体積を求めなさい。

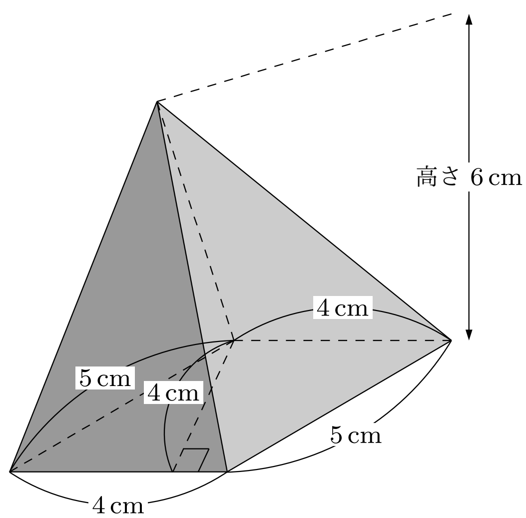
(1) 三角錐



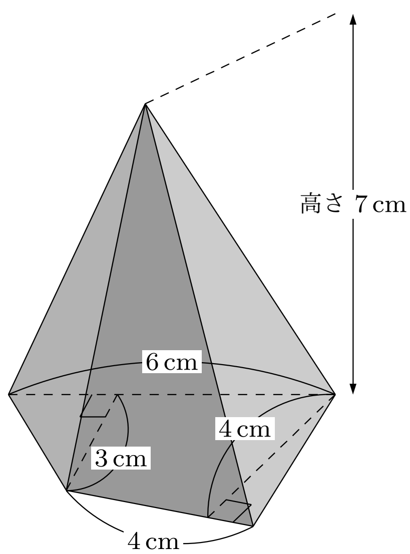
(2) 四角錐



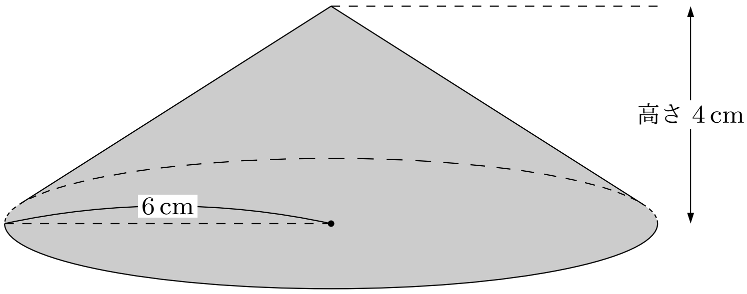
(3) 四角錐



(4) 四角錐

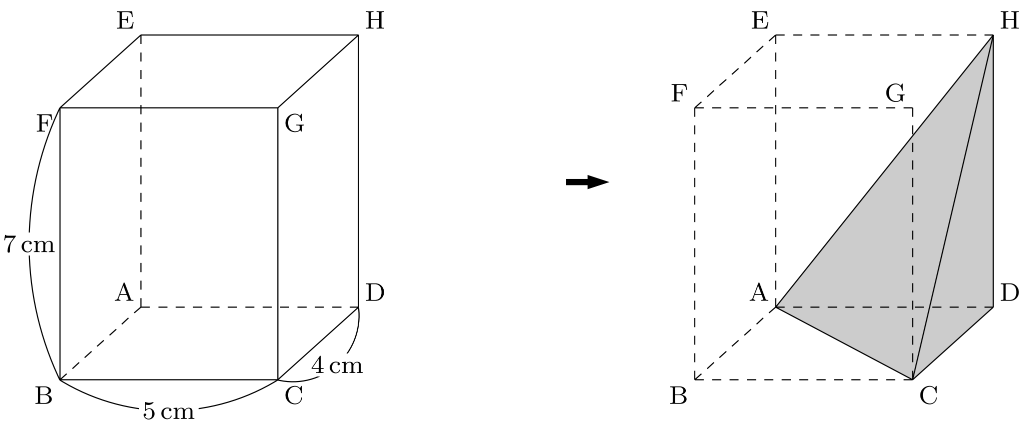


(5) 円錐



答えを見る

問 38. 次の図を見てください。



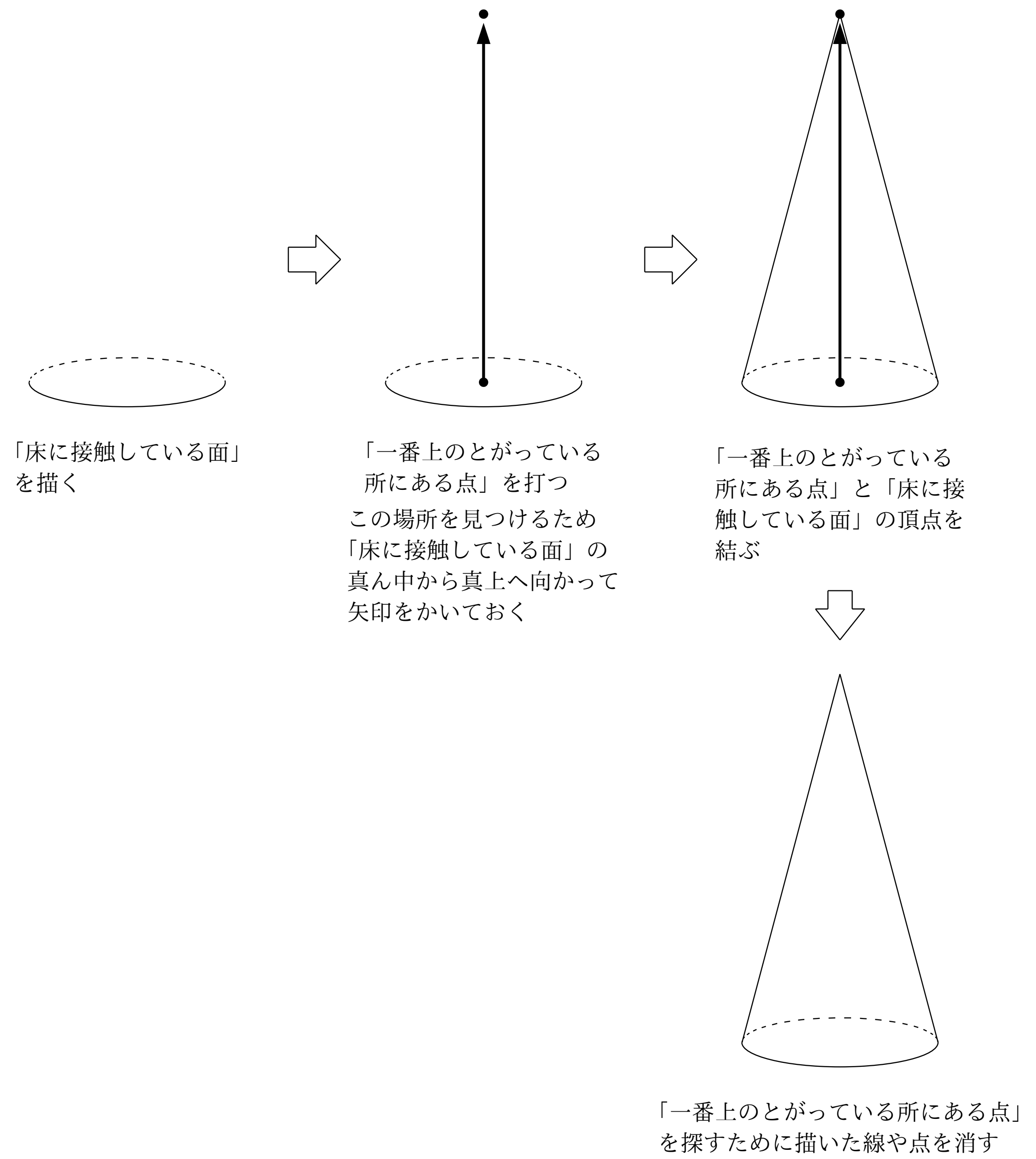
左に描かれているのは底面が「長方形」の四角柱です。図を見るとわかるように、この四角柱の幅は 5 cm、奥行きは 4 cm、高さは 7 cm です。この四角柱を削っていくと、この図の右に描いてあるような立体を取り出すことができます。取りだされた図形の体積を求めなさい。

答えを見る

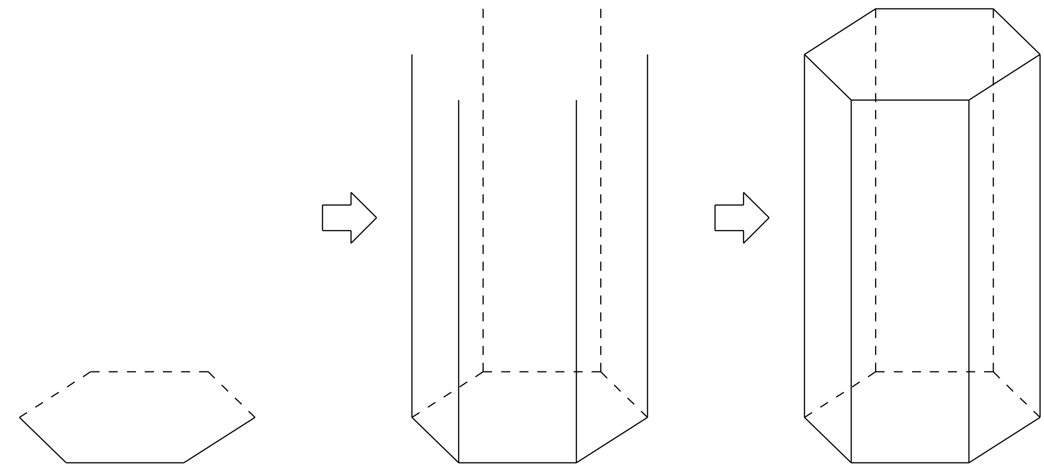
問の解答

問 1.

(1)

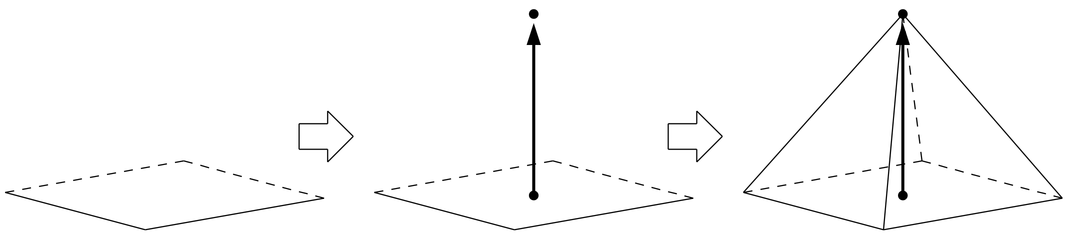

「床に接触している面」
を描く
「一番上のとがっている
所にある点」を打つ
この場所を見つけるため
「床に接触している面」の
真ん中から真上へ向かって
矢印をかいておく
「一番上のとがっている
所にある点」と「床に接
触している面」の頂点を
結ぶ
「一番上のとがっている所にある点」
を探すために描いた線や点を消す

(2)



「床に接触している面」を描く　「まっすぐ上に伸びていく辺」を描く　「上のふた」を描く

(3)

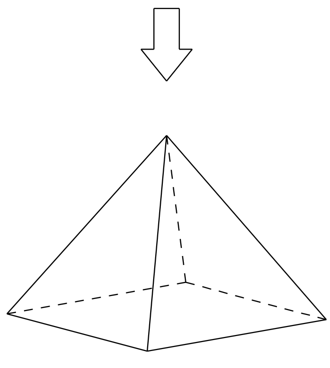


「床に接触している面」
を描く

「一番上のとがっている
所にある点」を打つ

この場所を見つけるため
「床に接触している面」の
真ん中から真上へ向かって
矢印をかいておく

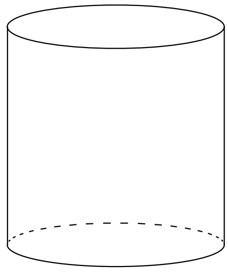
「一番上のとがっている
所にある点」と「床に接
触している面」の頂点を
結ぶ



「一番上のとがっている所にある点」
を探すために描いた線や点を消す

本文へ戻る

問 2.

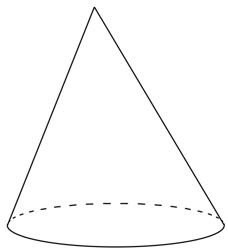


(1) 厚紙で形も大きさも同じ図形をたくさん作り、それらをまっすぐ上に積み重ねて右の立体図形を作るには、円を厚紙でたくさん作っておけばばよいですね。

(2) 円柱という名前になります。

本文へ戻る

問 3.

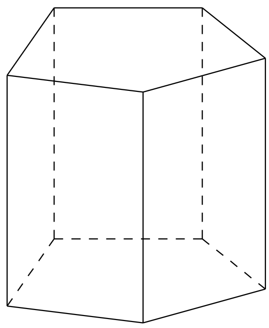


(1) 右の図の立体をを例 6 のようにして作るには、まず初めに、円を床におけばよいですね。

(2) 例 6 のように考えると、この立体図形の名前は円錐ですね。

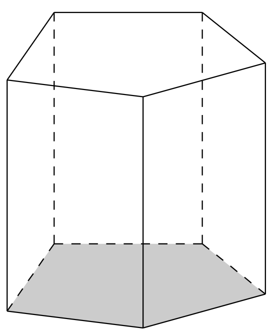
本文へ戻る

問 4. 右の図の立体図形について考える問題でしたね。



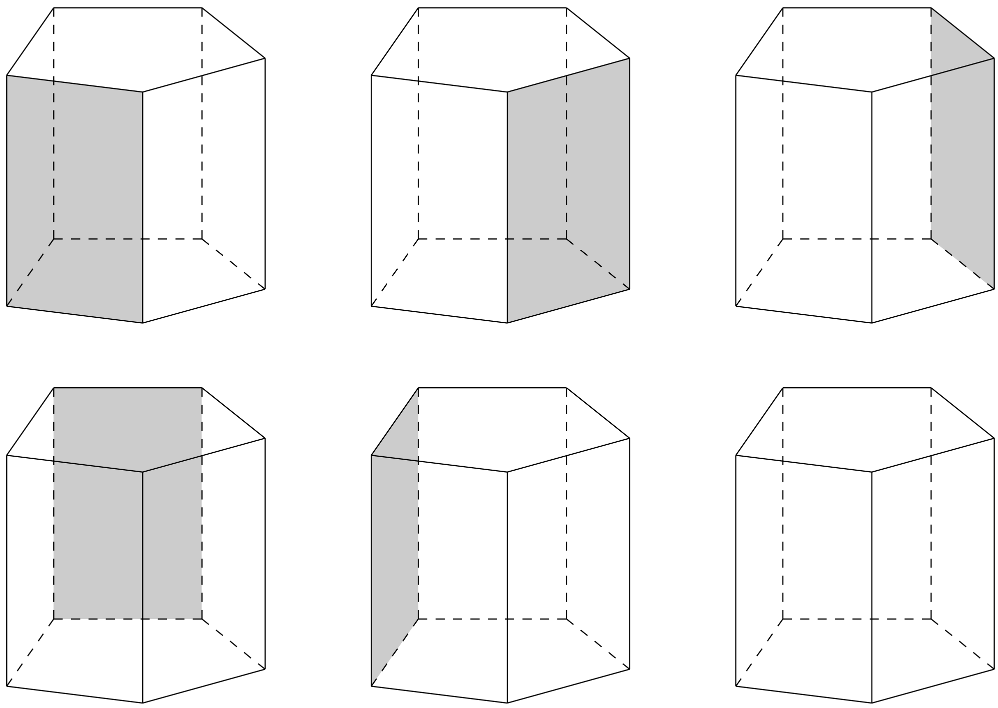
(1) この立体図形の名前は五角柱です。

(2) この立体図形の底面は、右の図で灰色になっているところです。



(3) この立体図形には 5 枚側面があります。

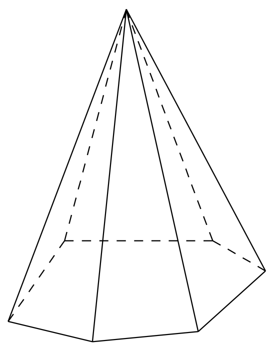
(4) 5 枚あるこの立体図形の側面をそれぞれ灰色に塗ると、次の図のようになります。



(5) この立体図形には頂点はありません。

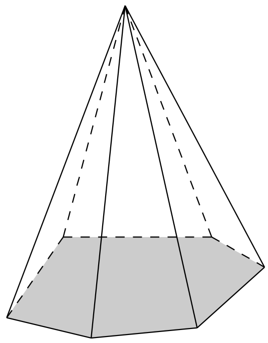
本文へ戻る

問 5. 右の図の立体図形について考えるこ問題でしたね。



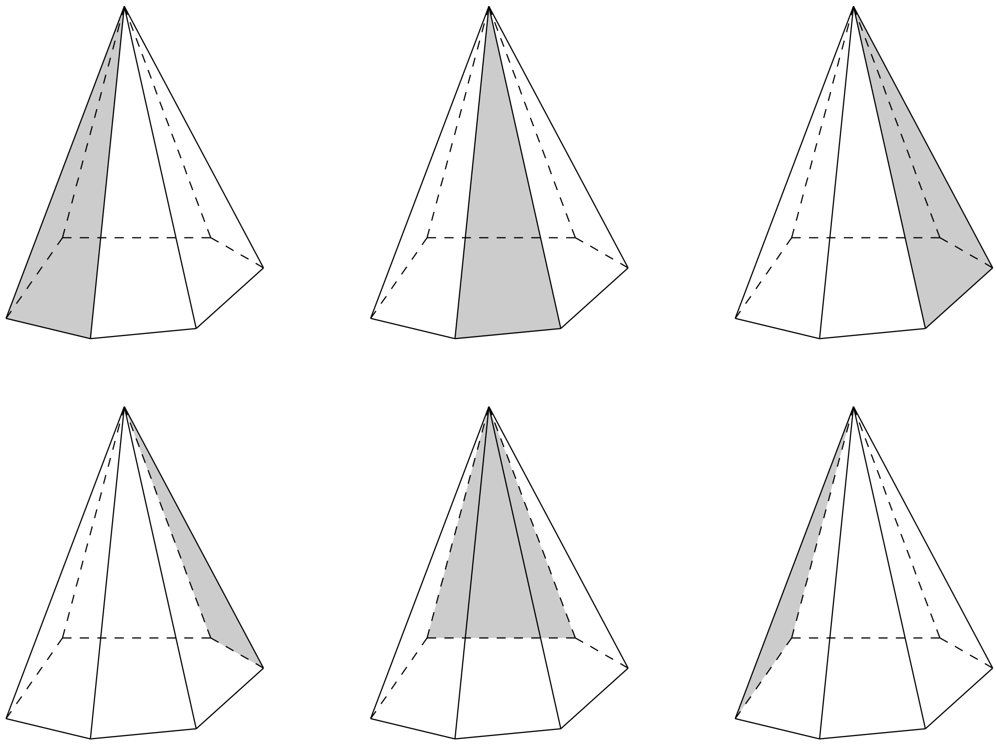
(1) この立体図形の名前は六角すいです。

(2) この立体図形の底面は右の図の灰色に塗られているところです。

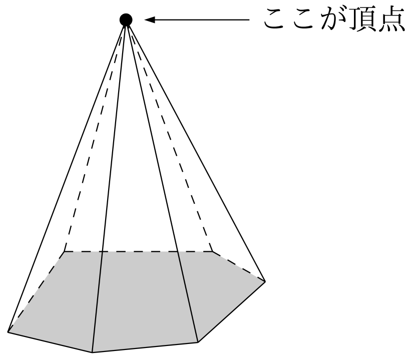


(3) この立体図形には 6 枚側面があります。

(4) この立体図形の 6 枚の側面は、次の図でそれぞれ灰色に塗られているところです。

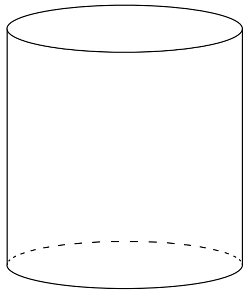


(5) この立体図形には頂点があります。右の図の黒い点のところです。



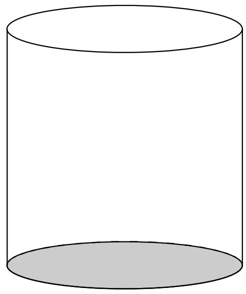
本文へ戻る

問 6. 右の図の立体図形について考える問題でしたね。



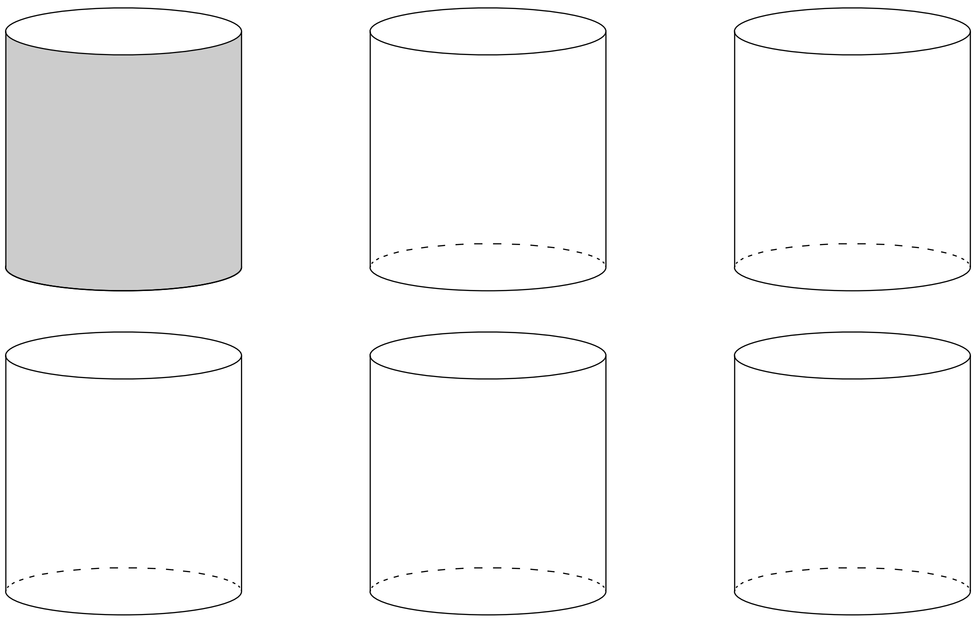
(1) この立体図形の名前は円柱です。

(2) この立体図形の底面は。右の図で灰色になっているところです。



(3) この立体図形には 1 枚側面があります。

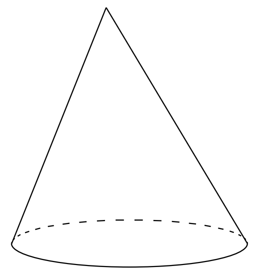
(4) この立体図形の 1 枚の側面は、次の図で灰色に塗られているところです。



(5) この立体図形には頂点はありません。

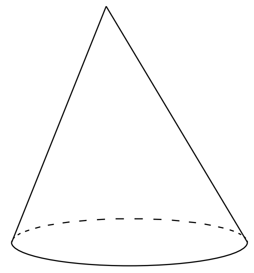
本文へ戻る

問 7. 右の図の立体図形について考える問題でしたね。



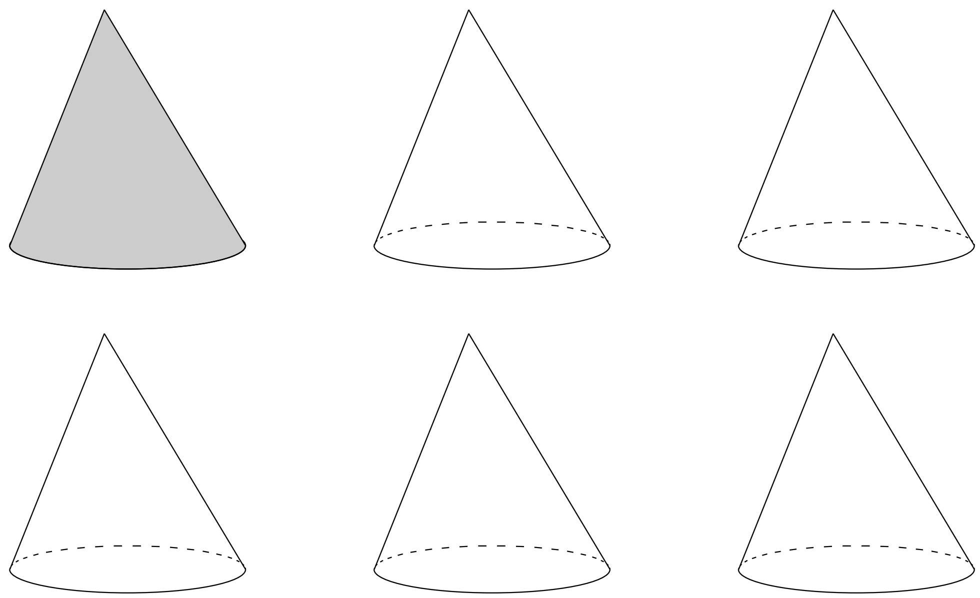
(1) この立体図形の名前は円すいです。

(2) この立体図形の底面はどれですか。右の図で、底面を鉛筆で塗りなさい。

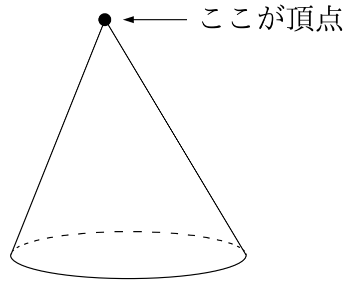


(3) この立体図形には 1 枚側面があります。

(4) この立体図形の 1 枚の側面は、次の図で灰色になっているところです。

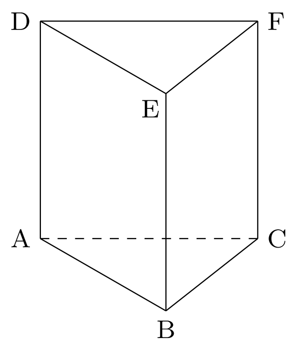


(5) この立体図形には頂点はあります。右の図の黒い点のところです。



本文へ戻る

問 8. 右の図の立体図形について考える問題でしたね。



(1) この立体の名前は三角柱です。

(2) この立体の底面の名前は三角形 ABC です。

(3) この立体には側面が 3 枚あります。それらの名前は

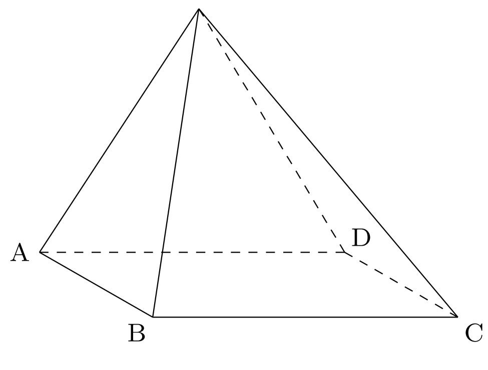
四角形 ABED、四角形 BCFE、四角形 CADF

です。

(4) この立体には頂点はありません。

本文へ戻る

問 9. 右の図の立体図形について考える問題でしたね。



(1) この立体の名前は四角すいです。

(2) この立体の底面の名前は四角形 ABCD です。

(3) この立体には側面が 4 枚あります。それらの名

前は

三角形 ABE、三角形 BCE、三角形 DAE

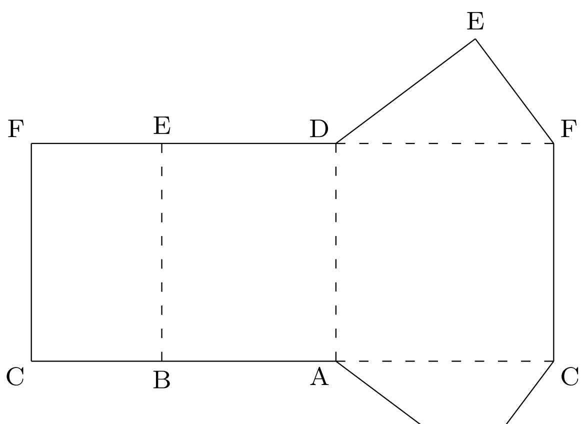
です。

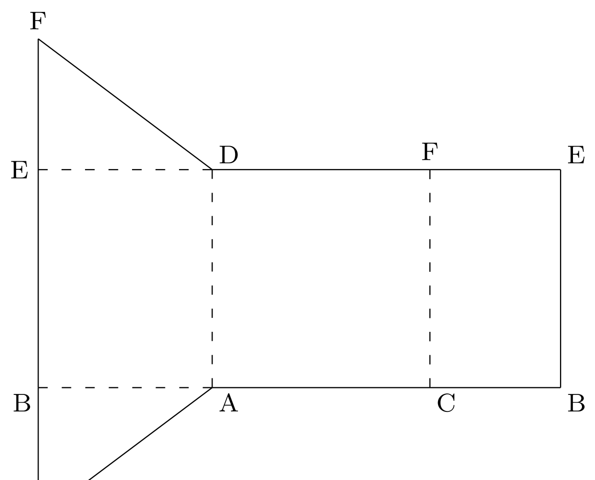
(4) この立体には頂点があります。頂点の名前は E

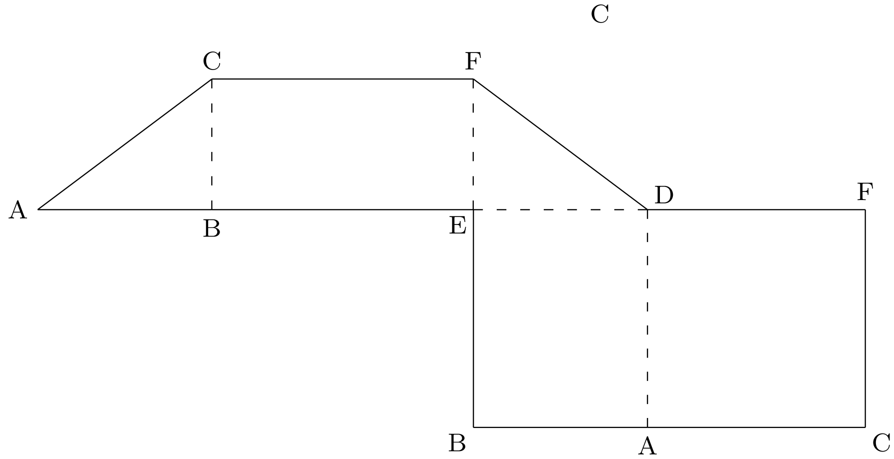
です。

本文へ戻る

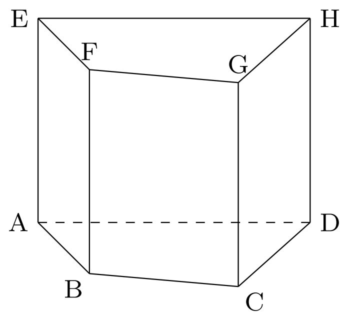
問 10. 例えば次のような展開図を描くことができます。







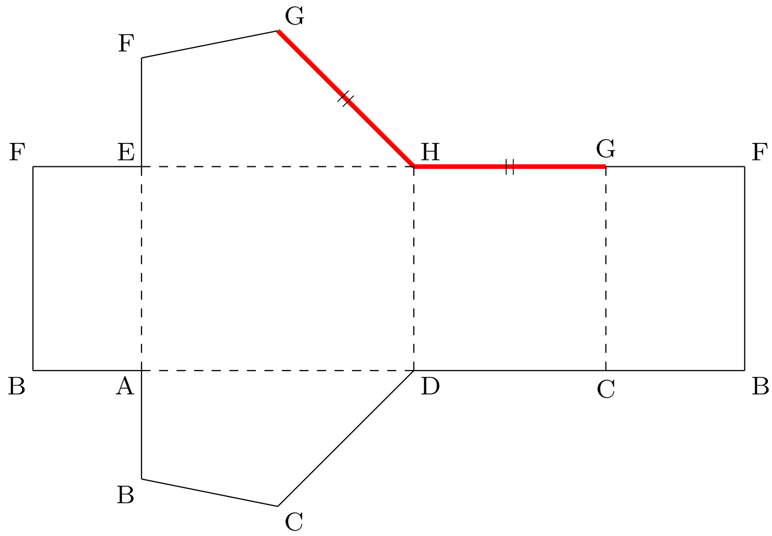
もちろん、この他にもいろいろあります。 本文へ戻る



問 11. 右の図の立体図形について考える問題でしたね。

(1) この立体図形の名前は四角柱です。

(2) この立体図形の展開図は例えば次のようになります。



ここで大切な注意をしておきます。

例えばこの展開図では、赤くなっている 2 つの辺はもともとぴったり貼り合わさっていたのですから、長さは同じでないといけないのです。赤くなっているところ以外にも、もともとぴったり貼り合わさっていたところはいろいろありますが、もちろんそれらの長さも等しくないといけないのです。つまり**展開図を作るときには、「もともとぴったり貼り合わさっていたところ」の長さは同じにしておかなくてはいけない**のです。そうしないと、展開図を組み立てたとき、「すきま」ができてしまったりしてきちんと立体図形ができなくなってしまうのです。

(3) 実際にあなたの作った展開図を切り抜いてください。

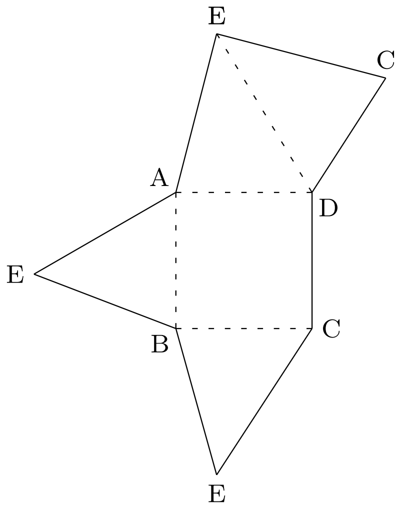
(4) 「切り抜いた展開図を組み立てて、テープで張り合わせてください。そして、図と

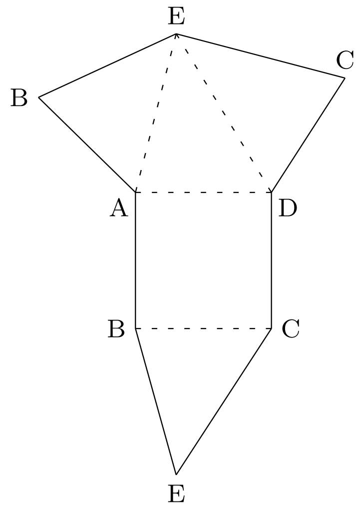
見比べて、ちゃんとできているか確かめてください。うまく張り合わせることができましたか？ずれてしまった所はありませんでしたか？」という問題でしたね。

(3) の解答で注意をしたことを思い出してください。展開図を作るときには、「もともとぴったり貼り合わさっていたところ」の長さは同じにしておかなくてはいけないのですね。そうしないと、展開図を組み立てたとき、「すきま」ができてしまったりしてきちんと立体図形ができなくなってしまうからですね。

本文へ戻る

問 12. 例えば次のような展開図を描くことができます。

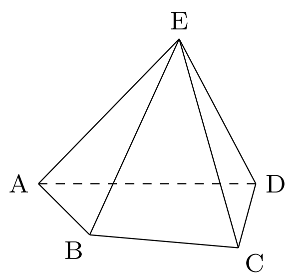




もちろん、この他にもいろいろあります。

本文へ戻る

問 13. 『右の図の立体図形について考えることにします。紙とはさみとテープを用意しておいてください。』ということでした。

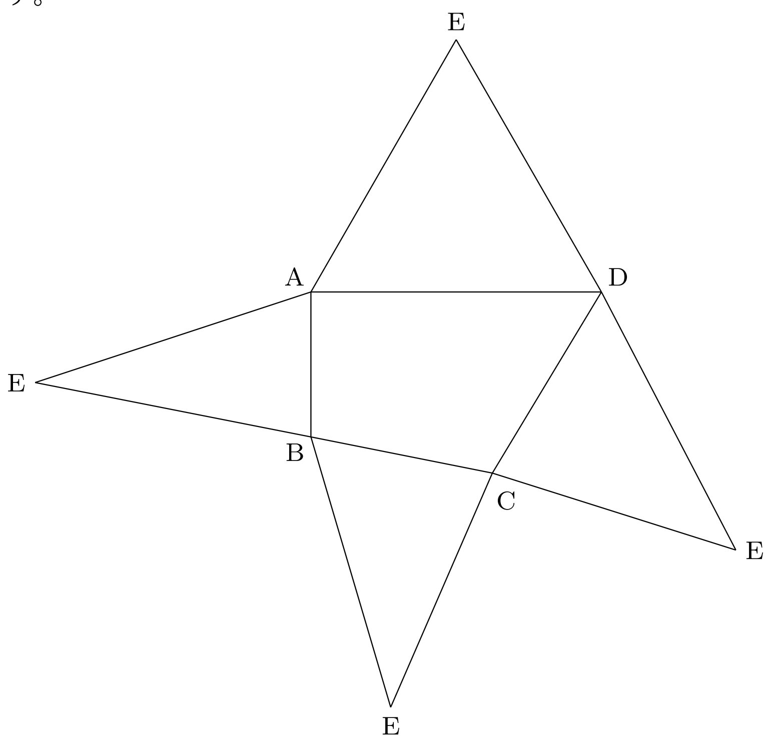


(1) 『この立体図形の名前を答えなさい。』という問題でした。

底面の図形 ABCD は四角形です。そしてこの図形は上の方に行くに連れてきれいにとがっていきます。つまり「錐」の仲間です。というわけで、この図形の名前は

「四角錐」ですね。

(2) 『紙にこの立体図形の展開図を描いて下さい。』という問題でした。例えば次のようになります。



(3) 『はさみであなたの作った展開図を切り抜いてください。』という問題でした。

やってみてください。

(4) 『切り抜いた展開図を組み立てて、テープで張り合わせてください。そして、図と見比べて、ちゃんとできているか確かめてください。うまく張り合わせることができましたか？ずれてしまった所はありませんでしたか？』という問題でした。

この問題に描いてあった見取り図を見るだけで、正確な展開図を作るのは難しかったと思います。きっといろいろなところの長さが合っていなくてうまく貼り合わすことができない辺が出てきてしまったことでしょう。

ちなみに、(2) の解答に描いてある展開図はかなり正確に作ってあります。紙に印刷してハサミで切り抜き組み立ててみてください。

本文へ戻る

問 14. 正ナントカ柱について答える問題でしたね。

(1) 正ナントカ柱の側面はどれも長方形です。

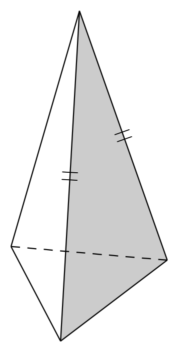
(2) 正ナントカ柱の側面はもちろん 1 枚だけではありませんが、「形」や「大きさ」は全て同じです。

本文へ戻る

問 15. 正三角錐について答える問題でしたね。

(1) 正三角錐の側面はどれも二等辺三角形です。

(2) 正三角錐の側面はもちろん 1 枚だけではありませんが、「形」や「大きさ」は全て同じです。

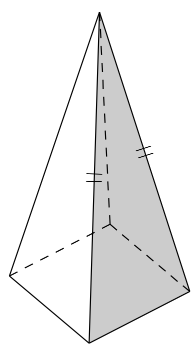


本文へ戻る

問 16. 正四角錐について答える問題でしたね。

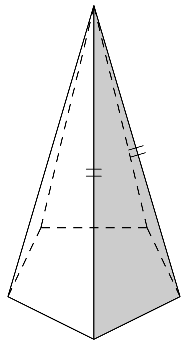
(1) 正四角錐の側面はどれも二等辺三角形です。

(2) 正四角錐の側面はもちろん 1 枚だけではありませんが、「形」や「大きさ」は全て同じです。



本文へ戻る

問 17. 正五角錐について答える問題でしたね。

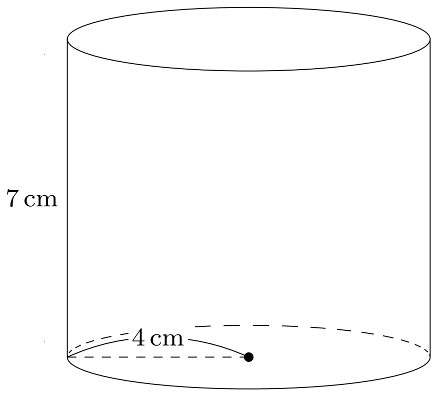


(1) 正五角錐の側面はどれも二等辺三角形です。

(2) 正五角錐の側面はもちろん 1 枚だけではありませんが、「形」や「大きさ」は全て同じです。

本文へ戻る

問 18. 右の図の円柱の展開図を作り、実際に組み立てる問題でしたね。



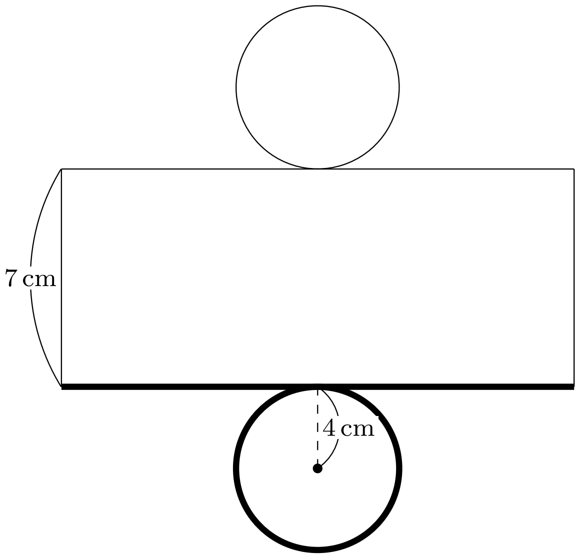
(1) 底面の円の周りの長さを求めるのですよね。

底面の半径は 4 cm ですから直径は 8 cm です。ということは、

$$周りの長さ = 8 \times \pi = 8\pi\,(\mathrm{cm})$$

ということになりますね。

(2) 側面の長方形の横の長さを求めるのですよね。



右の図を見てください。これは正確な図ではありませんが、この問題の円柱を展開したところを想像して適当に描いた図です。

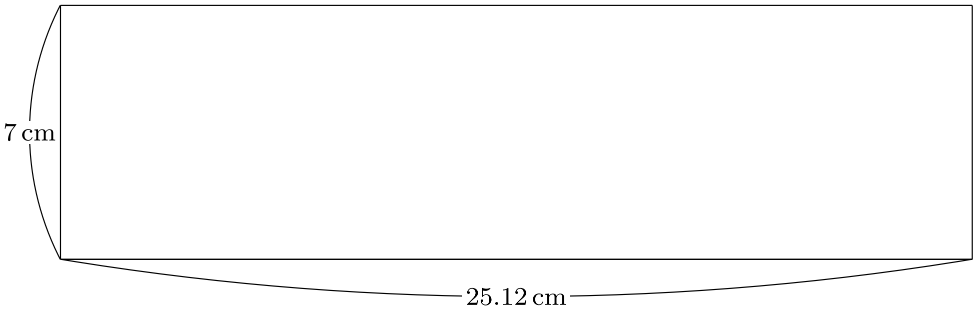
太く描かれた所がぴったり貼り合わさって円柱になっていたわけですよね。ですから太く描かれているところの長さは等しいわけです。つまり、「側面の長方形の横の長さ」と「底面の円の周りの長さ」は同じですね。ですから (1) の答えが出せた人は

$$\text{側面の長方形の横の長さ} = 8\pi\,(\text{cm})$$

ということがわかりますよね。

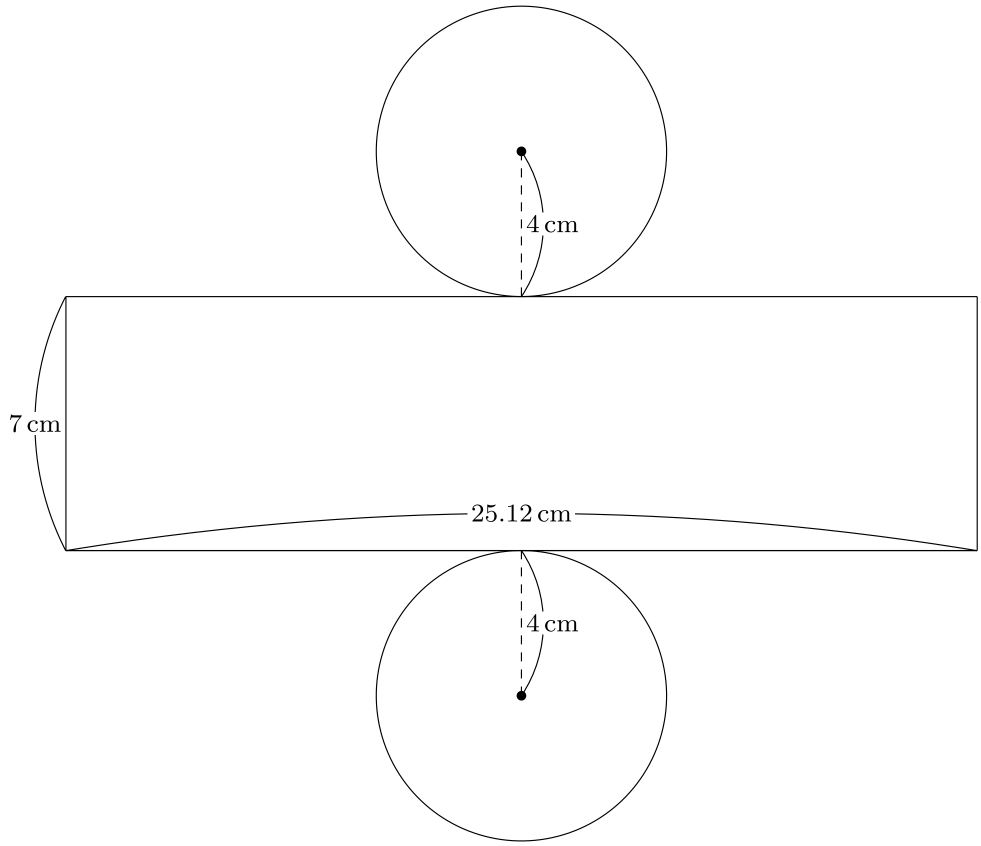
(3) この円柱の展開図をできるだけ正確に描くのでしたね。

まず、側面の長方形をできるだけ正確に描きます。(2) で側面の長方形の横の長さは $8\pi\,(\text{cm})$ であることがわかりました。π は 3.14 ぐらいの数ですから $8\pi\,(\text{cm})$ というのは 25.12 cm ぐらいということになります。ですから、横の長さが 25.12 cm ぐらいで縦の長さが 7 cm の長方形を描けばよいわけです. もちろん定規の目盛りを使って長さはできるだけ正確にしておきます。すると次のようになります。



次は、底とフタになる円を付け加えます。円の半径は 4 cm でしたね。そこで、定

規の目盛りを使ってコンパスを正確に 4 cm の幅に開いておきます。そして、さっき描いた長方形の横の辺から 4 cm 離れたところにコンパスの針をさし、くるっとコンパスを回転させて円を描きます。すると次のようになります。

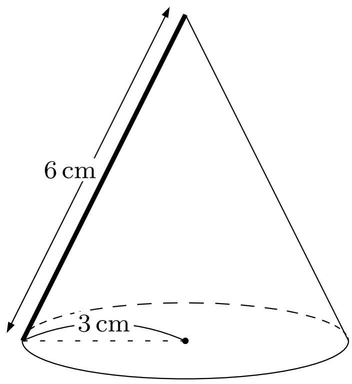


これでかなり正確な展開図が完成です。

(4) あなたの描いた展開図を切り抜いて円柱を組み立ててみてください。正確な展開図ができた人は組み立てたとき、すきまなくぴったり貼り合わさるはずです。

本文へ戻る

問 19. 右の図の円錐の展開図を作り、実際に組み立てる問題でしたね。



(1) 底面の円の周りの長さを求めるのですよね。

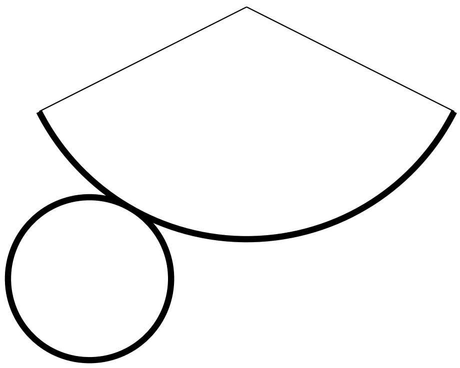
底面の半径は $3\,\mathrm{cm}$ ですから直径は $6\,\mathrm{cm}$ です。ということは、

$$周りの長さ = 6 \times \pi = 6\pi\,(\mathrm{cm})$$

ということになりますね。

(2) 側面のおうぎ型のふちのうちの曲がってる部分 (つまり側面のおうぎ型の弧) の長さを求めるのですよね。

右の図を見てください。これは正確な図ではありませんが、この問題の円錐を展開したところを想像して適当に描いた図です。



太く描かれた所がぴったり貼り合わさって円錐になっていたわけですよね。ですから太く描かれているところの長さは等しいわけです。つまり、「側面のおうぎ型のふちのうちのまっがている部分の長さ」と「底面の円の周りの長さ」は同じですね。ですから (1) の答えが出せた人は

$$側面の長方形の横の長さ = 6\pi\,(\mathrm{cm})$$

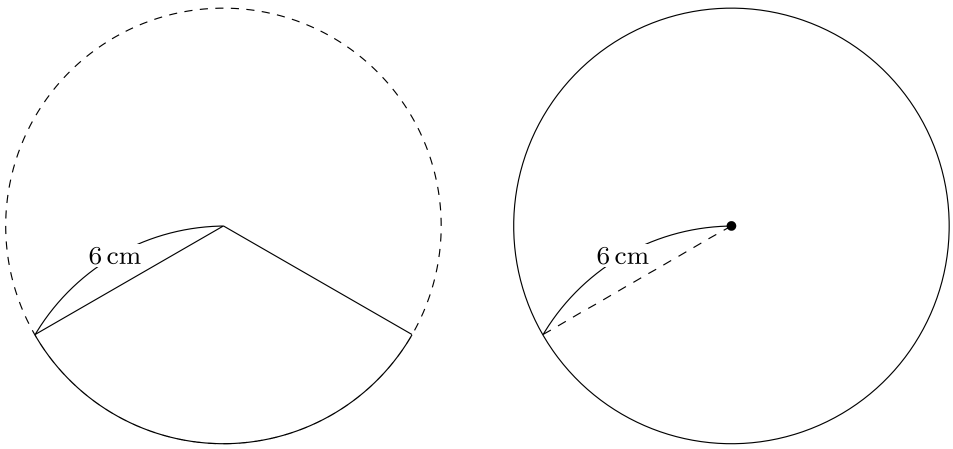
ということがわかりますよね。

(3) この円錐の展開図をできるだけ正確に描くのでしたね。

まず、側面のおうぎ型をできるだけ正確に描きます。そのために側面のおうぎ型のことを詳しく調べることにしましょう。こう

おうぎ型を描くには、半径と中心角の大きさがわかっていないといけません。この問題のもともとの図を見れば、半径は 6 cm であるとわかります。しかし、この問題には側面となるおうぎ型の中心角については何も書いてありませんでした。ところで、(2) で側面のおうぎ型弧の長さは 6π (cm) であることがわかったのですよね。そこで、このことを手がかりに、中心角の大きさを考えてみることにしましょう。たしか、こんな時はおうぎ型と同じ半径の円と比べてみると良いのですよね。（こういうことは以前おうぎ型の学習をした時に学んでいますよね。）

では次の図を見てください。



この図の左側はかなり適当に描いた側面になっているおうぎ型です。ただしこれはかなり適当に描いた図です。中心角はまだわかっていません。弧の長さは (2) で 6π (cm) であることがわかっています。

この図の右側は側面になっているおうぎ型と同じ半径の円です。直径は 12 cm となるので、この円の円周の長さは 12π cm ですね。

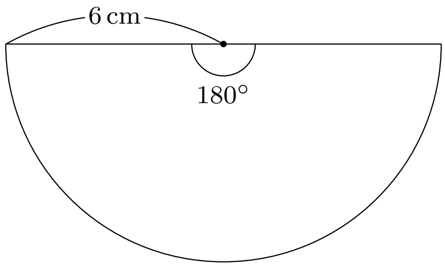
ということは、おうぎ型の弧の長さは円の周りの長さの $\dfrac{6\pi}{12\pi}$、つまり $\dfrac{1}{2}$ なわけで

すね。ところで、弧の長さと中心角は比例しているのですよね。ですから、おうぎ型の中心角も円の中心角 (つまり 360°) の $\dfrac{1}{2}$ ということになります。よって、

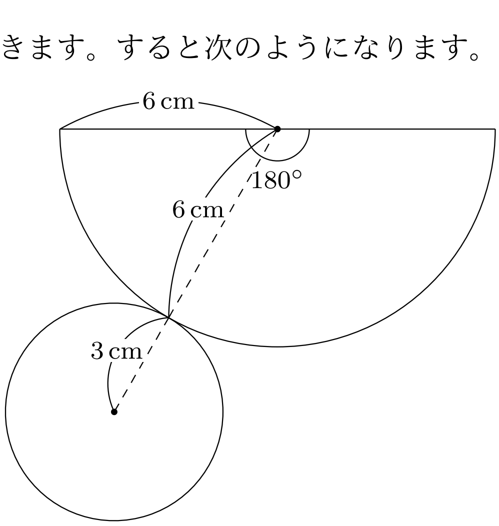
$$\text{おうぎ型の中心角} = 360 \times \frac{1}{2} = 180^\circ$$

ということになるわけです。

これで側面になっているおうぎ型は半径が 6 cm で中心角は 180° であることがわかりました。いま私たちは展開図を正確に作ろうとしているのでしたね。そこでまず、分度器、定規、コンパスを使って側面になっているおうぎ型を描いてみましょう。定規の目盛りを使ってコンパスを正確に 6 cm の幅に開いておき、分度器を使ってきちんと中心角が 180° になるようにおうぎ型を描くのです。すると次のようになりますね。



次は、底になる円を付け加えます。円の半径は 3 cm でしたね。そこで、定規の目盛りを使ってコンパスを正確に 3 cm の幅に開いておきます。そして、さっき描いたおうぎ型の弧から 3 cm 離れたところにコンパスの針をさし、くるっとコンパスを回転させて円を描きます。すると次のようになります。

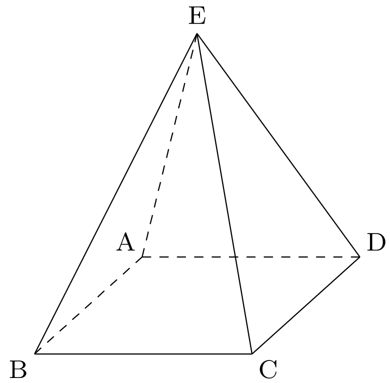


これでかなり正確な展開図が完成です。

(4) あなたの描いた展開図を切り抜いて円錐を組み立ててみてください。正確な展開図ができた人は組み立てたとき、すきまなくぴったり貼り合わさるはずです。

本文へ戻る

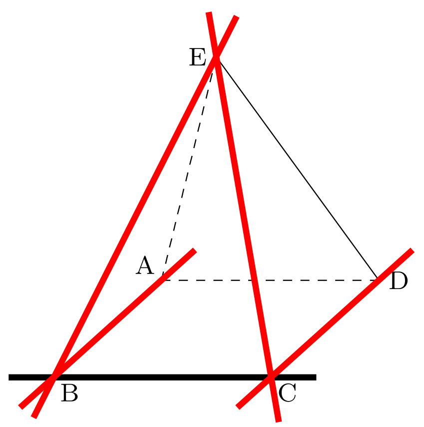
問 20. 右の図の正四角錐の「辺」の位置関係についての問題でした。ただし、「辺」を両側に延長して、両側に果てしなく伸びている「直線」として考えることにしました。



(1) 直線 BC と交わる辺は「点 B で交わるもの」と「C で交わるもの」だけです。そのようなものを探すと、右の図で赤くなっている直線が見つかります。ですから答えは、

直線 AB、直線 EB、直線 DC、直線 EC

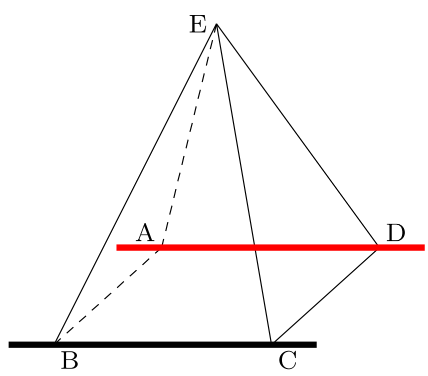
です。



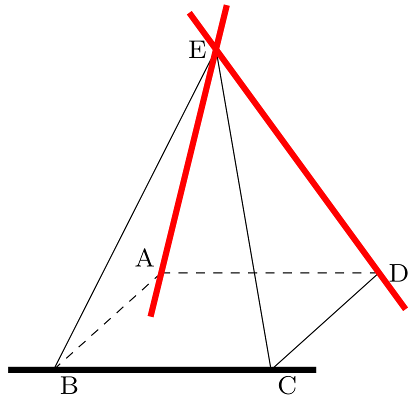
(2) 直線 BC と平行な辺をさがすのですから、直線 BC と方向が同じ直線を探せばよいわけです。そのようなものを探すと、右の図で赤くなっている直線が見つかります。ですから答えは、

直線 AD

です。



(3) 直線 BC とねじれの位置にある直線を探すのですから、直線 BC とは方向は違うけれど決して交わらない直線を見つければよいわけです。そのようなものを探すと、右の図で赤くなっている直線が見つかります。ですから答えは、

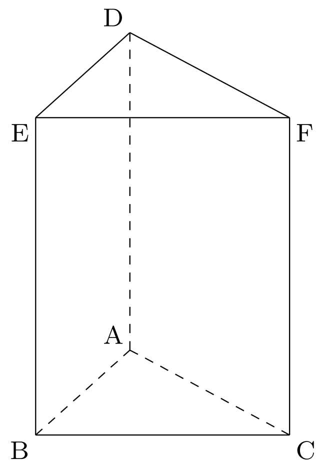


直線 AE、直線 DE

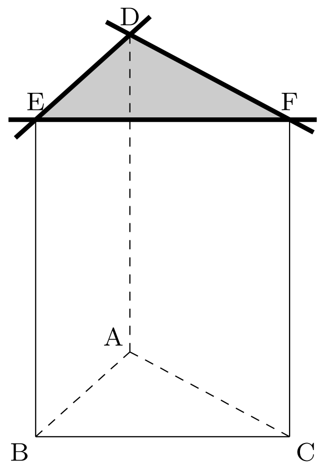
です。

本文へ戻る

問 21. 右の図の三角柱の「辺」と「面」の位置関係について考える問題でしたね。



(1) 平面 DEF 含まれている直線は



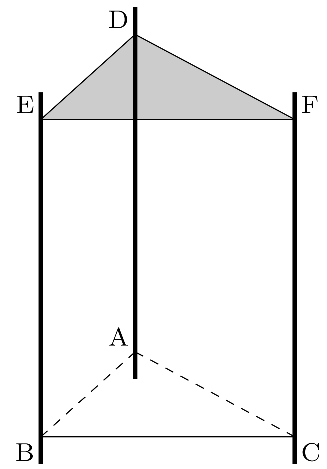
直線 DE、直線 EF、直線 DF

です。

(2) 平面 DEF と 1 点で交わる直線は

直線 AD、直線 BE、直線 CF

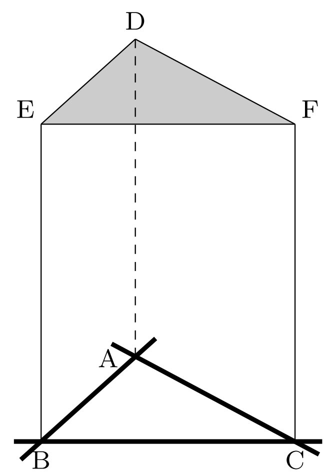
です。



(3) 平面 DEF と 1 と平行な直線は

直線 AB、直線 BC、直線 AC

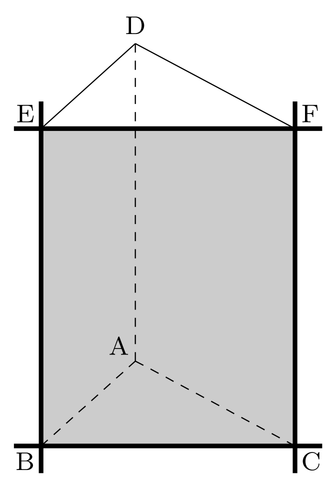
です。



(4) 平面 BCFE に含まれている直線は

直線 BC、直線 CF、直線 EF、直線 BE

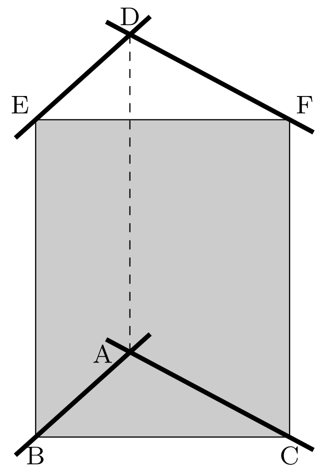
です。



(5) 平面 BCFE と 1 点で交わる直線は

直線 AB、直線 AC、直線 DE、直線 DF

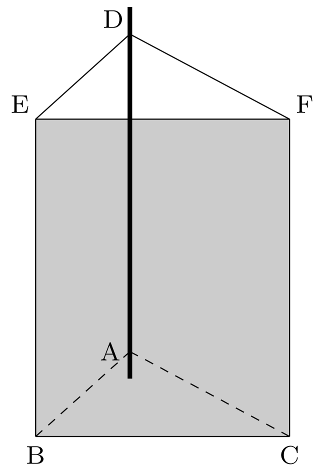
です。



(6) 平面 BCFE と平行な直線は

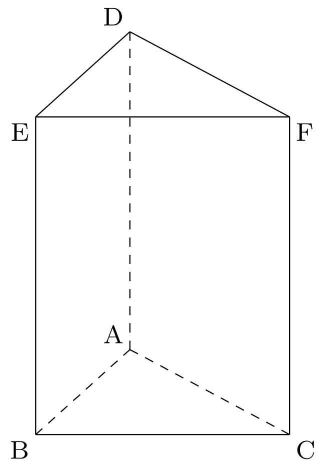
直線 AD

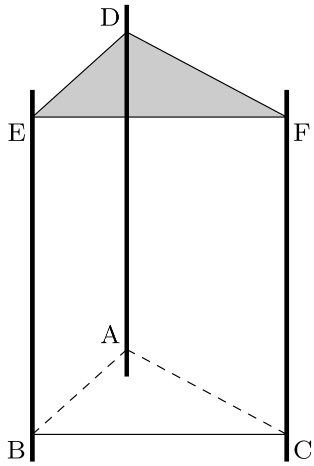
です。



本文へ戻る

問 22. 右の図の三角柱の面と辺の位置関係についての問題でしたね。





(1) 平面 DEF と垂直になっている辺は

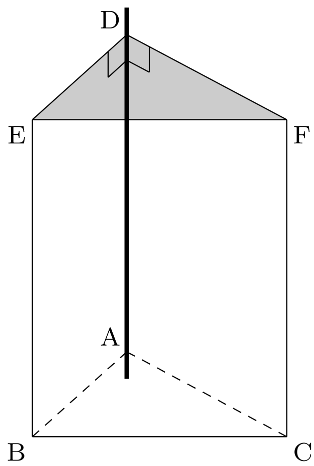
辺 AD、辺 BE、辺 CF

です。

それでは、例えば、「どうして辺 AD は平面 BE と垂直になっていると断言できるのか」説明しましょう。129 ページの「重要な事実：空間の中で直線が平面に垂直であると断言するには」を思い出してみましょう。そうするとこの場合、

平面 DEF に含まれているある 2 つの直線に対して辺 AD は垂直になっている

ということが判明すれば良いわけですね。



では右の図を見てください。この立体は三角「柱」ですから、側面は全て長方形です。ですから特に、側面になっている四角形 ADEB や四角形 CFDB は長方形です。そして長方形の角は全て $90°$ です。というわけで、$\angle$ADE や $\angle$FDA はどちらも $90°$ ということになります。これは結局、

AD は平面 DEF に含まれている直線 DE に垂直である

ということと、

AD は平面 DEF に含まれている直線 DF に垂直である

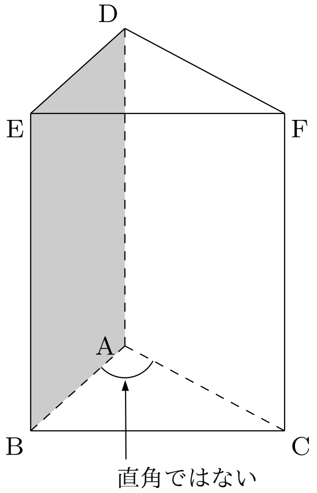
ということを意味します。

これでめでたく、

平面 DEF に含まれているある 2 つの直線に対して辺 AD は垂直になっている

ということが判明しました。ですから、129 ページの「重要な事実：空間の中で直線が平面に垂直であると断言するには」によれば、辺 AD は平面 DEF に垂直になっていると断言できるわけです。

(2) 底面になっている三角形 ABC は直角三角形ではない場合、つまり三角形 ABC の 3 つの角はどれも 90° ではない場合、平面 ADEB と垂直な辺はありません。



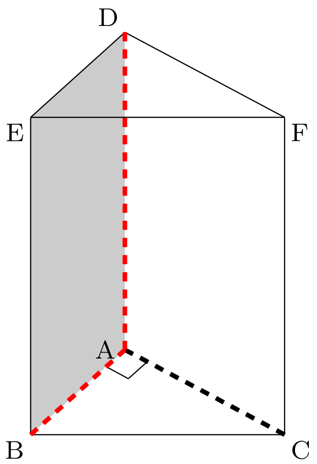
もしかすると辺 AC や辺 DF は平面 ADEB と垂直になっていると思った人もいるかもしれませんね。でもダメなんです。なぜダメなのか、理由を説明することにします。

辺 AC が平面 ADEB に垂直ではない理由

右の図を見てください。三角形 ABC は直角三角形ではありませんから、どこにも 90° の角はありません。ですから特に、∠BAC は直角ではありません。そうすると。辺 AC は「平面 ADEB に含まれている直線 AB」と垂直ではありませんね。ということは、とにかく 1 本、平面 ADEB 中に辺 AC と垂直になっていない直線が見つかってしまったわけです。ですから、平面 ADEB と辺 AC は垂直なはずはないのです。

辺 DF が平面 ADEB に垂直ではない理由もこれと同じことですよね。

(3) 右の図を見てください。辺 AC が平面 ADEB と垂直になっているということを断言するためには



辺 AC が辺 AB に垂直になっている

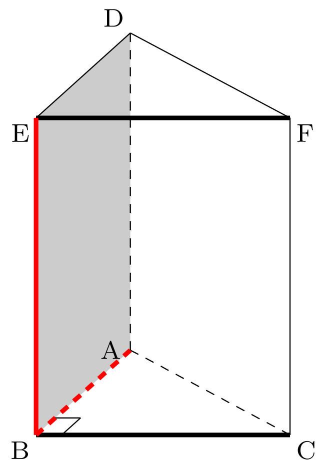
ということと、

辺 AC が辺 AD に垂直になっている

ということとが判明すればよいですね。

もしこれらのことが判明すれば、辺 AC は平面 ADEB に含まれている 2 つの直線と垂直になっているということになるので、129 ページの「重要な事実：空間の中で直線が平面に垂直であると断言するには」によって、辺 AC は平面 ADEB と垂直になっているということを断言できるわけです。

(4) 右の図を見てください。底面になっている三角形 ABC で角 ABC が 90° になっている場合の話でしたね。あまりそういうふうに見えないかもしれませんが、角 ABC に直角マークを付けておきました。



このとき、平面 ADEB と垂直になっている辺は

辺 BC、辺 EF

です。

もしかすると「そんなわけない」と思う人がいるといけないので、少し説明をしておきます。

ここでは「辺 BC が平面 ADEB と垂直になっている理由」だけ説明します。

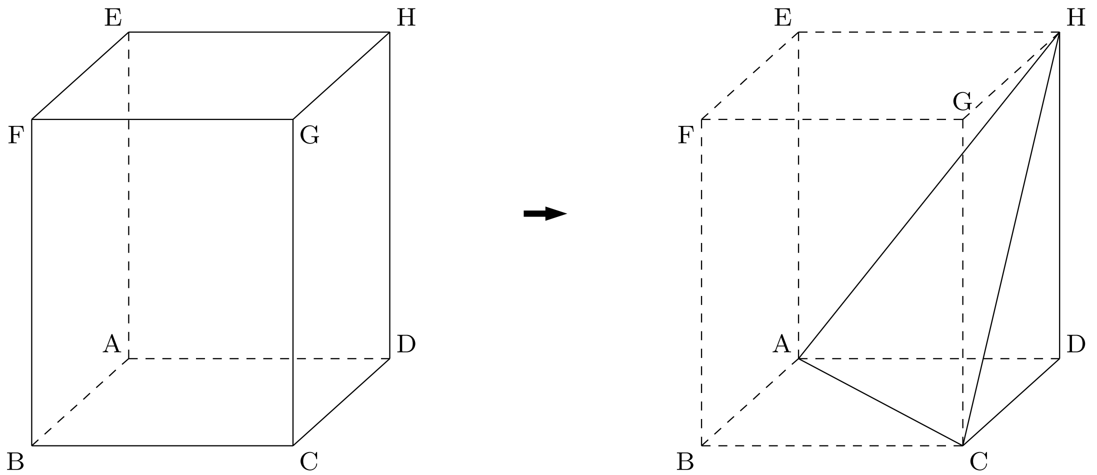
平面 ADEB は長方形ですから ∠ABE は 90° です。また今、三角形 ABC は ∠ABC が直角ということにしてあります。すると、

> 辺 BC（黒い太い辺）は、平面 ADEB に含まれている 2 つの直線 AB、BE（赤い 2 つの線）に垂直である

ということになりますね。ということでめでたく、129 ページの「重要な事実：空間の中で直線が平面に垂直であると断言するには」によって、辺 BC は平面 ADEB と垂直になっているということを断言できるわけです。

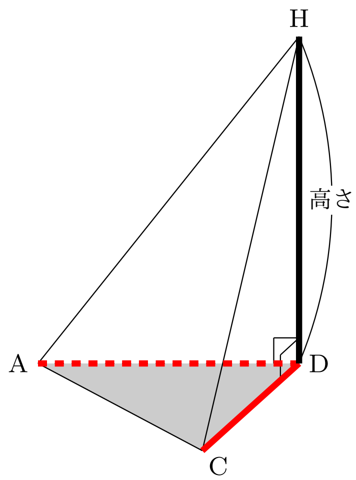
本文へ戻る

問 23.



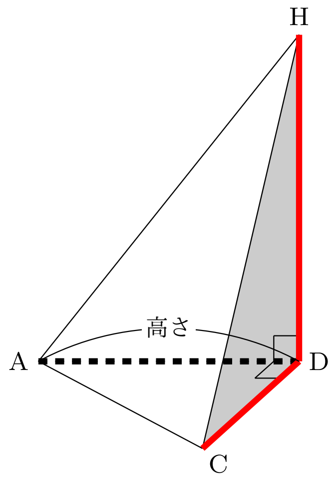
左に描かれているような「底面が長方形の四角柱」から取り出した、右に描いてあるような立体についての問題でしたね。

(1) この立体は、三角形 ACD を底面とする「錐」と考えることができます。その場合、高さは辺 DH の長さを測ればよいのです。それはどうしてなのか説明します。右の図を見てください。



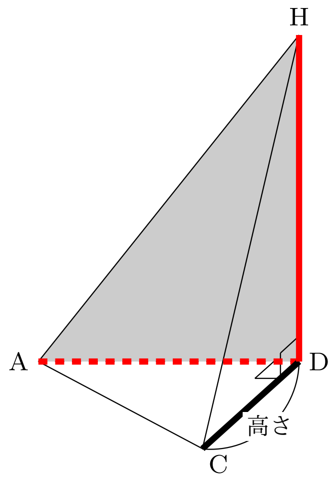
この立体は「底面が長方形の四角柱」を削って取り出したものでしたね。ですから、$\angle$HDC と $\angle$HDA は 90° であるのは間違いありません。というわけで、辺 DH は底面 ACD に含まれている 2 つの直線に垂直になっているわけです。ですから、辺 DH は面 ACD に垂直であると断言できます。というわけで、底面 ACD に向かい合っている頂点 H から底面 ACD へ向かって垂直に進むと、D に到着するということになります。つまりこれは、辺 DH の長さを測ればこの立体の高さになるということですよね。

(2) この立体は、三角形 CDH を底面とする「錐」と考えることができます。その場合、高さは辺 AD の長さを測ればよいのです。それはどうしてなのか説明します。右の図を見てください。

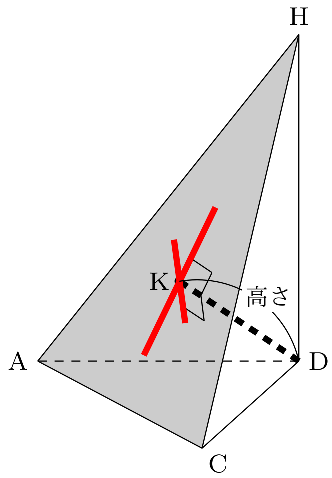


この立体は「底面が長方形の四角柱」を削って取り出したものでしたね。ですから、∠ADC と ∠HDA は 90° であるのは間違いありません。というわけで、辺 AD は底面 CDH に含まれている 2 つの直線に垂直になっているわけです。ですから、辺 AD は面 CDH に垂直であると断言できます。というわけで、底面 CDH に向かい合っている頂点 A から底面 CDH へ向かって垂直に進むと、D に到着するということになります。つまりこれは、辺 AD の長さを測ればこの立体の高さになるということですよね。

(3) この立体は、三角形 ADH を底面とする「錐」と考えることができます。その場合、高さは辺 DH の長さを測ればよいのです。それはどうしてなのか説明します。右の図を見てください。



この立体は「底面が長方形の四角柱」を削って取り出したものでしたね。ですから、∠HDC と ∠ADC は 90° であるのは間違いありません。というわけで、辺 CD は底面 ADH に含まれている 2 つの直線に垂直になっているわけです。ですから、辺 CD は面 ADH に垂直であると断言できます。というわけで、底面 ADH に向かい合っている頂点 C から底面 ADH へ向かって垂直に進むと、D に到着するということになります。つまりこれは、辺 CD の長さを測ればこの立体の高さになるということですよね。



(4) この立体は、三角形 ACH を底面とする「錐」と考えることができます。その場合、高さはどこを図ればよいか図で説明します。右の図を見てください。

頂点 D から底面 ACH へ向かって垂直に進みます。するとそのうち底面 ACH に到着します。到着した点の場所を K と呼ぶことにします。そうするとこの場合、高さは DK の長さを測ればよいのです。

(5) (1) から (4) が理解できた人は、この立体では、

どこを底面にしても底面は三角形である

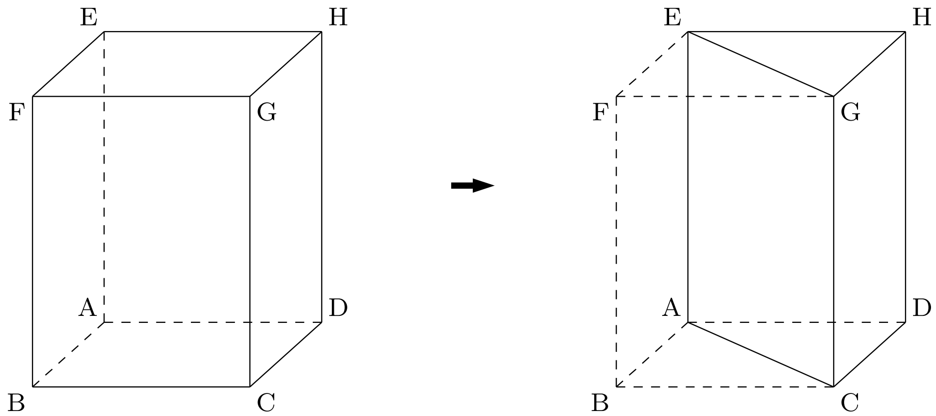
ということと、

どこを底面にしても上の方にいくととがっていく

ということがわかったと思います。ですから、どこを底面にしても、この立体の名前は「三角すい」ということになりますね。

本文へ戻る

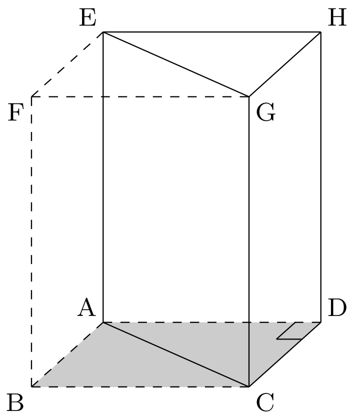
問 24.



左の図のような「底面が長方形 ABCD」の四角柱をを削ってできる、右の図のような「底面が三角形 ACD」の三角柱についての問題ですね。

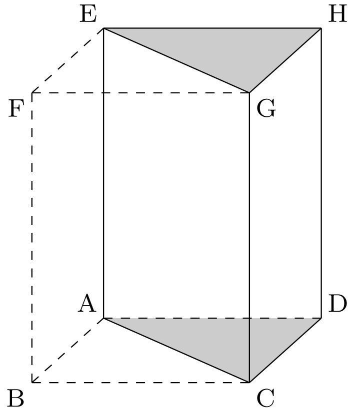
(1) ∠ADC の大きさは 90° です。

理由を言います。右の図を見てください。この三角柱はもともと「底面が長方形」の四角柱を削ってできたものです。そして、長方形の角は全て 90° です。∠ACD は四角柱の底面になっていた長方形の角なのですからその大きさは当然 90° ということになるのです。

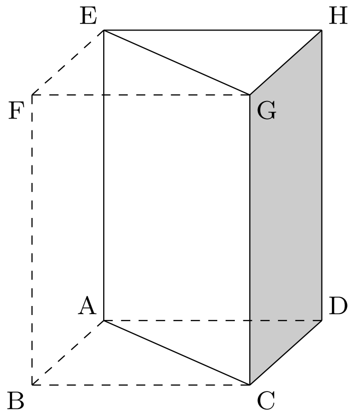


(2) 平面 EGH と平行な面は、平面 ACD です。

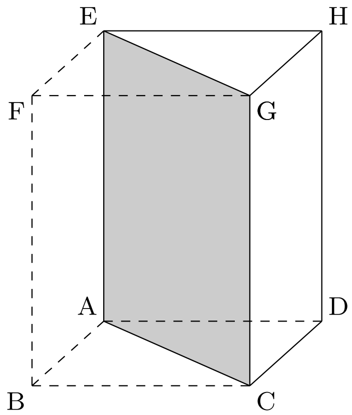
ナントカ柱では、「底」と「ふた」は平行なのです。



(3) 平面 CDHG と平行な面は、この三角柱にはありません。



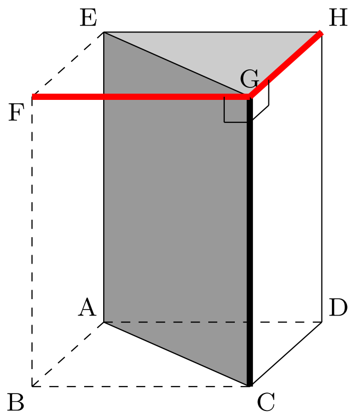
(4) 平面 ACGE とと平行な面は、この三角柱にはありません。



(5) 平面 EGH と垂直な面は、平面 ACGE、平面 CDHG、平面 ADHE の 3 つです。

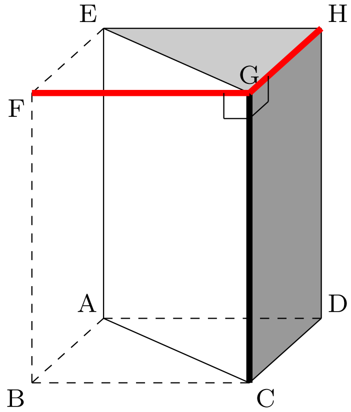
- 平面 ACGE が平面 EGH と垂直な理由を説明します。

  右の図を見てください。



四角柱の側面は全て長方形です。そして長方形の角は全て 90° です。ですから、∠FGC や ∠CGH の大きさはどちらも 90° です。ということは、平面 ACGE（濃い灰色の面）に含まれている直線 CG（黒い太い線）は平面 EGH に含まれている 2 つの直線 FG と GH（赤く描かれている 2 つの直線）に垂直ということになります。ですから、平面 ACGE は平面 EGH に垂直な直線を 1 つは含んでいるということになります。よって、132 ページで学んだ「空間の中で 2 つの平面が垂直になっていると断言するには？」によると、平面 ACGE が平面 EGH と垂直であると断言できることになるわけです。

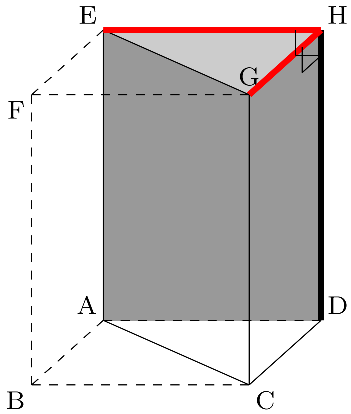
- 平面 CDHG が平面 EGH と垂直な理由を説明します。



右の図を見てください。

四角柱の側面は全て長方形です。そして長方形の角は全て 90° です。ですから、∠FGC や ∠CGH の大きさはどちらも 90° です。ということは、平面 CDHG（濃い灰色の面）に含まれている直線 CG（黒い太い線）は平面 EGH に含まれている 2 つの直線 FG と GH（赤く描かれている 2 つの直線）に垂直ということになります。ですから、平面 CDHG は平面 EGH に垂直な直線を 1 つは含んでいるということになります。よって、132 ページで学んだ「空間の中で 2 つの平面が垂直になっていると断言するには？」によると、平面 CDHG が平面 EGH と垂直であると断言できることになるわけです。

- 平面 ADHE が平面 EGH と垂直な理由を説明します。

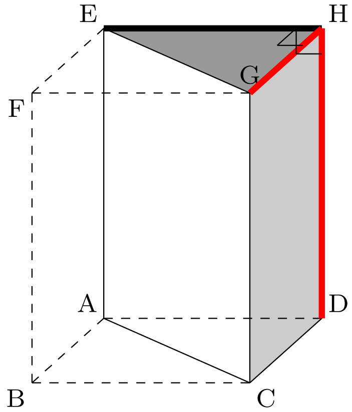


右の図を見てください。

四角柱の側面は全て長方形です。そして長方形の角は全て 90° です。ですから、∠EHD や ∠GHD の大きさはどちらも 90° です。ということは、平面 ADHE（濃い灰色の面）に含まれている直線 DH（黒い太い線）は平面 EGH に含まれている 2 つの直線 EH と GH（赤く描かれている 2 つの直線）に垂直ということになります。ですから、平面 ADHE は平面 EGH に垂直な直線を 1 つは含んでいるということになります。よって、132 ページで学んだ「空間の中で 2 つの平面が垂直になっていると断言するには？」によると、平面 ADHE が平面 EGH と垂直であると断言できることになるわけです。

(6) 平面 CDHG と垂直な面は、平面 EGH、平面 ADHE、平面 ACD の 3 つです。

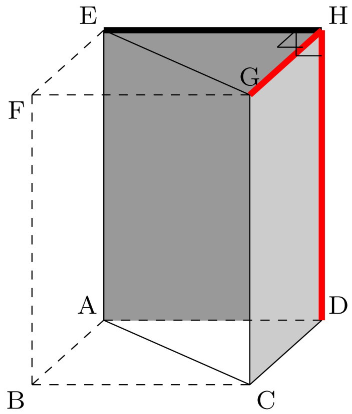
- 平面 EGH が平面 CDHG と垂直な理由を説明します。



右の図を見てください。

四角柱の側面は全て長方形です。そして長方形の角は全て 90° です。ですから、∠EHD や ∠EHG の大きさはどちらも 90° です。ということは、平面 EGH（濃い灰色の面）に含まれている直線 EH（黒い太い線）は平面 CDHG に含まれている 2 つの直線 GH と DH（赤く描かれている 2 つの直線）に垂直ということになります。ですから、平面 EGH は平面 CDHG に垂直な直線を 1 つは含んでいるということになります。よって、132 ページで学んだ「空間の中で 2 つの平面が垂直になっていると断言するには？」によると、平面 EGH が平面 CDHG と垂直であると断言できることになるわけです。

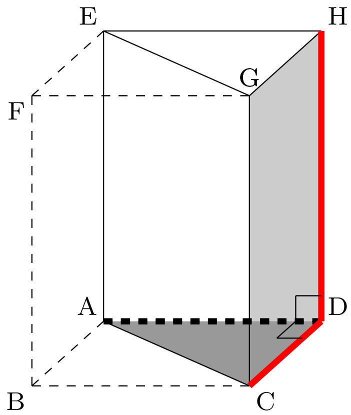
- 平面 ADHE が平面 CDHG と垂直な理由を説明します。



右の図を見てください。

四角柱の側面は全て長方形です。そして長方形の角は全て 90° です。ですから、∠EHD や ∠EHG の大きさはどちらも 90° です。ということは、平面 ADHE（濃い灰色の面）に含まれている直線 EH（黒い太い線）は平面 CDHG に含まれている 2 つの直線 GH と DH（赤く描かれている 2 つの直線）に垂直ということになります。ですから、平面 ADHE は平面 CDHG に垂直な直線を 1 つは含んでいるということになります。よって、132 ページで学んだ「空間の中で 2 つの平面が垂直になっていると断言するには？」によると、平面 ADHE が平面 CDHG と垂直であると断言できることになるわけです。

- 平面 ACD が平面 CDHG と垂直な理由を説明します。

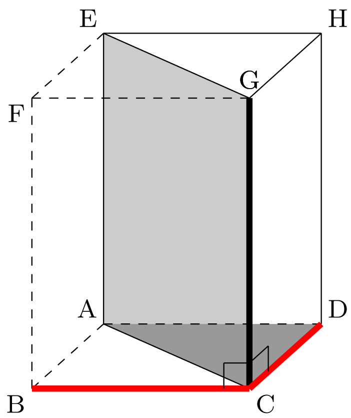


右の図を見てください。

四角柱の側面は全て長方形です。そして長方形の角は全て 90° です。ですから、∠ADH や ∠ADC の大きさはどちらも 90° です。ということは、平面 CD（濃い灰色の面）に含まれている直線 EH（黒い太い点線）は平面 CDHG に含まれている 2 つの直線 GD と DH（赤く描かれている 2 つの直線）に垂直ということになります。ですから、平面 ACD は平面 CDHG に垂直な直線を 1 つは含んでいるということになります。よって、132 ページで学んだ「空間の中で 2 つの平面が垂直になっていると断言するには？」によると、平面 ACD が平面 CDHG と垂直であると断言できることになるわけです。

(7) 平面 ACGE と垂直な面は、平面 ACD、平面 EGH の 2 つです。

- 平面 ACGE が平面 ACD と垂直な理由を説明します。

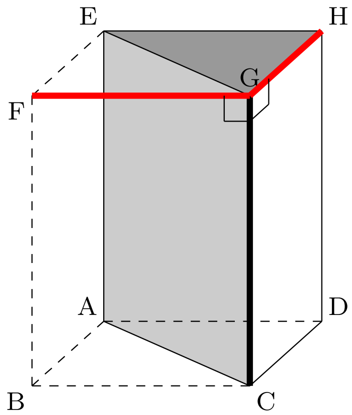


右の図を見てください。

四角柱の側面は全て長方形です。そして長方形の角は全て 90° です。ですから、∠BCG や ∠GCD の大きさはどちらも 90° です。ということは、平面 ACGH（薄い灰色の面）に含まれている直線 GC（黒い太い線）は平面 ACD に含まれている 2 つの直線 BC と CD（赤く描かれている 2 つの直線）に垂直ということになります。ですから、平面 ACGE は平面 ACD に垂直な直線を 1 つは含んでいるということになります。よって、132 ページで学んだ「空間の中で 2 つの平面が垂直になっていると断言するには？」によると、平面 ACGE が平面 ACD と垂直であると断言できることになるわけです。

- 平面 ACGE が平面 EGH と垂直な理由を説明します。

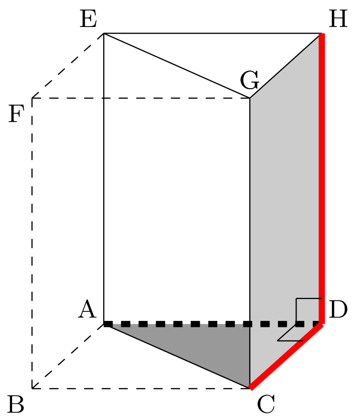
右の図を見てください。



四角柱の側面は全て長方形です。そして長方形の角は全て 90° です。ですから、∠FGC や ∠CGH の大きさはどちらも 90° です。ということは、平面 ACGE（薄い灰色の面）に含まれている直線 CG（黒い太い線）は平面 EGH に含まれている 2 つの直線 FG と GH（赤く描かれている 2 つの直線）に垂直ということになります。ですから、平面 ACGE は平面 EGH に垂直な直線を 1 つは含んでいるということになります。よって、132 ページで学んだ「空間の中で 2 つの平面が垂直になっていると断言するには？」によると、平面 ACGE が平面 EGH と垂直であると断言できることになるわけです。

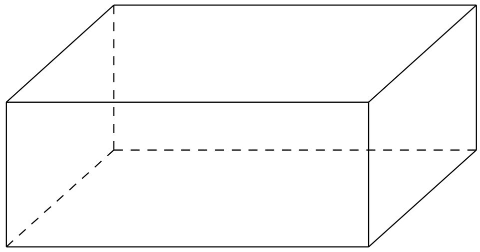
- 平面 ACD が平面 CDHG と垂直な理由を説明します。

右の図を見てください。



四角柱の側面は全て長方形です。そして長方形の角は全て 90° です。ですから、∠ADH や ∠ADC の大きさはどちらも 90° です。ということは、平面 CD（濃い灰色の面）に含まれている直線 EH（黒い太い点線）は平面 CDHG に含まれている 2 つの直線 GD と DH（赤く描かれている 2 つの直線）に垂直ということになります。ですから、平面 ACD は平面 CDHG に垂直な直線を 1 つは含んでいるということになります。よって、132 ページで学んだ「空間の中で 2 つの平面が垂直になっていると断言するには？」によると、平面 ACD が平面 CDHG と垂直であると断言できることになるわけです。

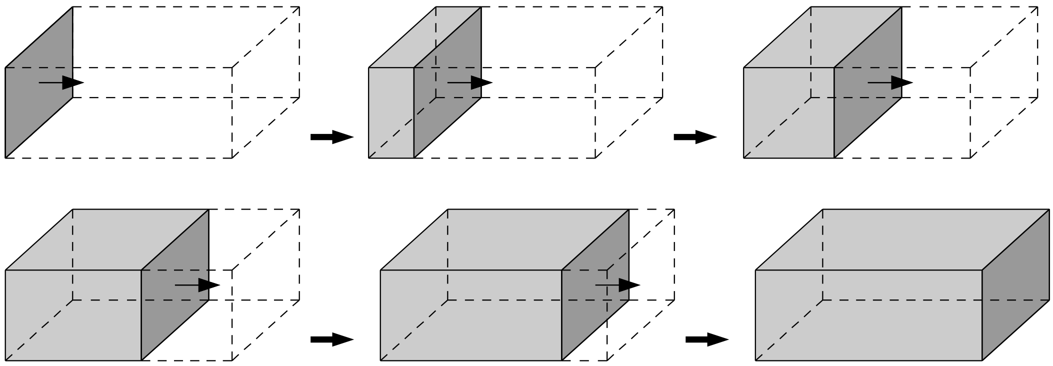
本文へ戻る



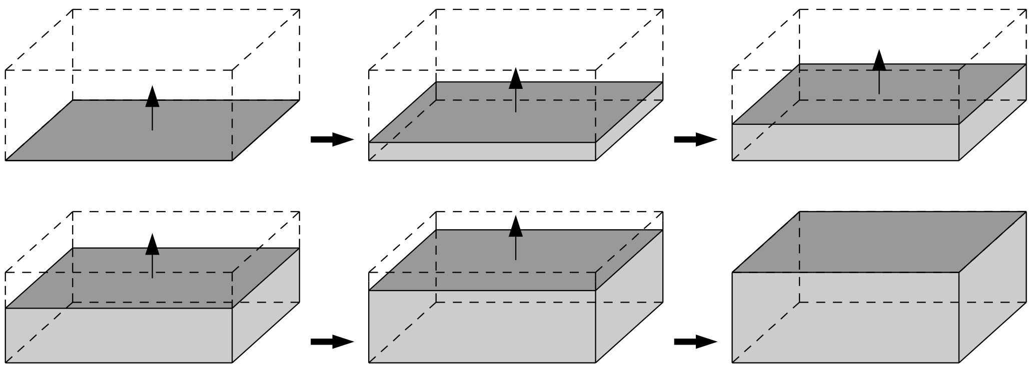
問 25. 右の図の「直方体」は「ある形をした面を、ある方向に向きを変えずに平行に移動した跡」としてできる立体と考えることができるのですが、どんな図形をどっちに移動すればよいのかという問題でしたね。

答えはいろいろとあります。いくつか例を紹介しましょう。

- 次の図を見てください。この直方体は、左端の長方形（次の図では濃い灰色にしてあります）を向きを変えずに右へ移動していくときに、長方形が通過した跡としてできる立体と考えることができます。

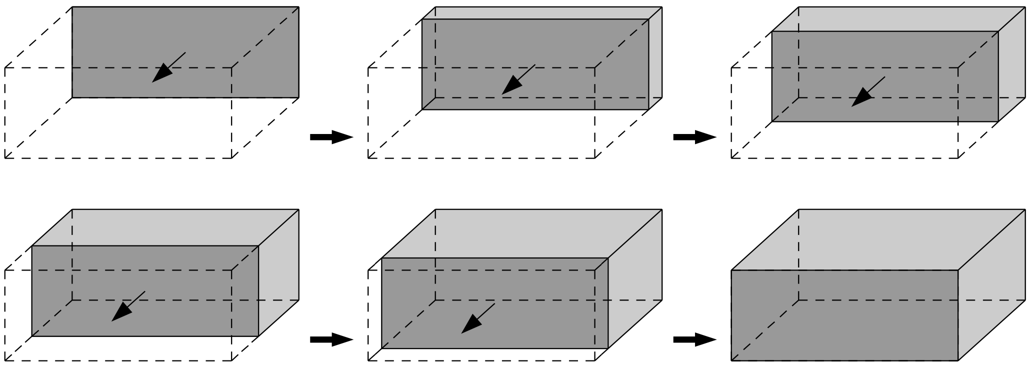


- 次の図を見てください。この直方体は、床においてある長方形（次の図では濃い灰色にしてあります）を向きを変えずに上へ移動していくときに、長方形が通過した跡としてできる立体と考えることができます。



- 次の図を見てください。この直方体は、一番奥にある長方形（次の図では濃い灰色にしてあります）を向きを変えずに手前へ移動していくときに、長方形が通過した

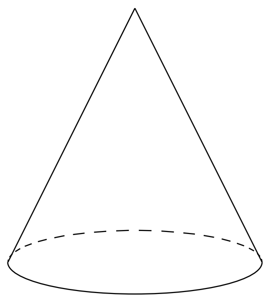
跡としてできる立体と考えることができます。



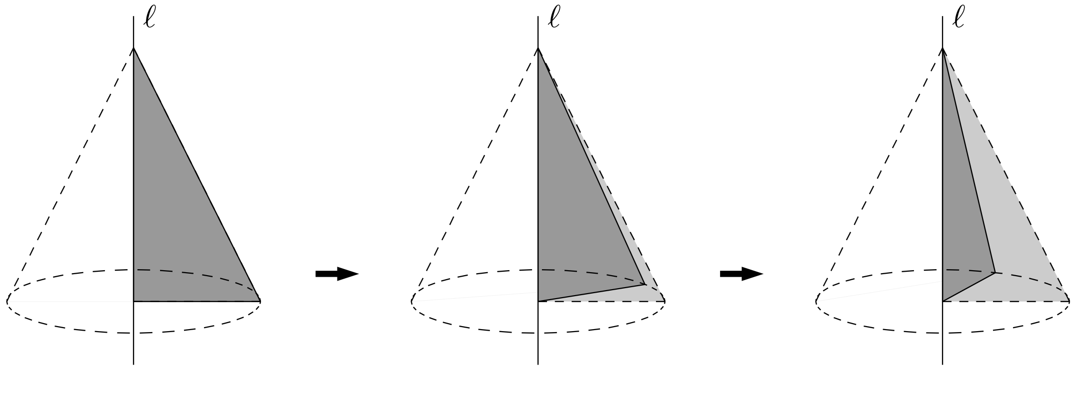
ここでは 3 つの例を紹介しましたが、この他にも答えはあります。これまで紹介した方法とは逆の方向に面を動かす方法がありますよね。

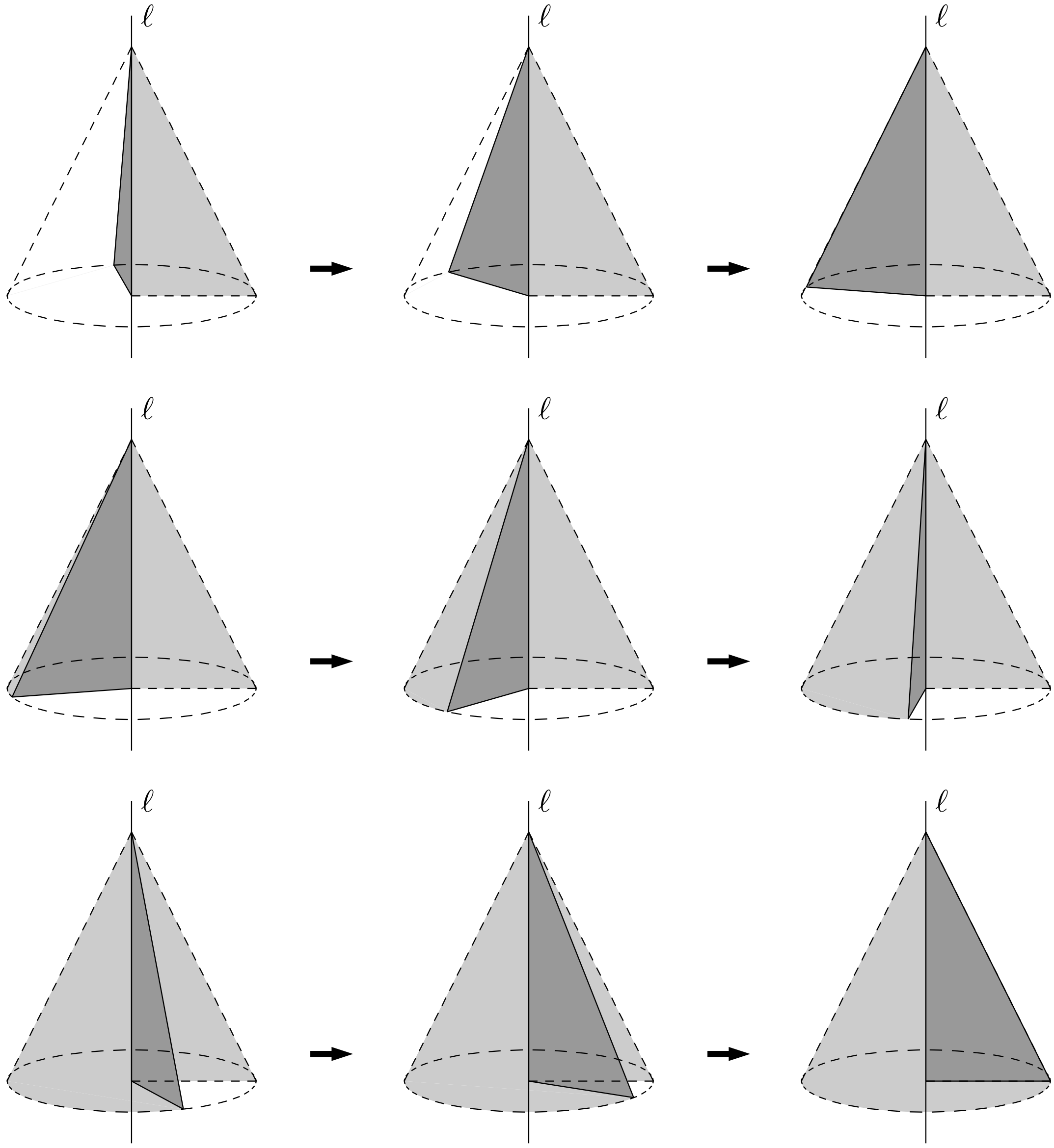
本文へ戻る

問 26.　右の図の円錐は、「面でできたある図形を、ある直線を軸にして回転した跡としてできた図形」と思うことができるわけですが、どんな図形をどんな直線を軸にして回転すればよいのか考える問題でしたね。



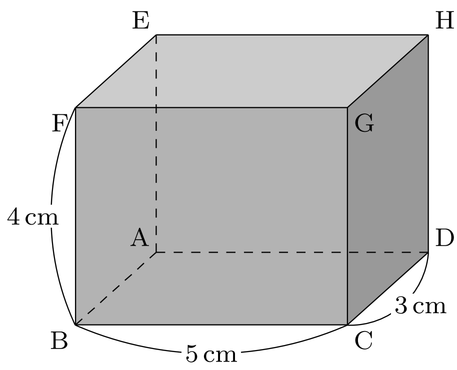
次の図を見てください。円錐の中に濃い灰色の直角三角形が描かれています。この円錐は、「この直角三角形」を「底面の中心と頂点を通る直線 ℓ」を軸にして 1 回転してできた図形と考えることができますね。



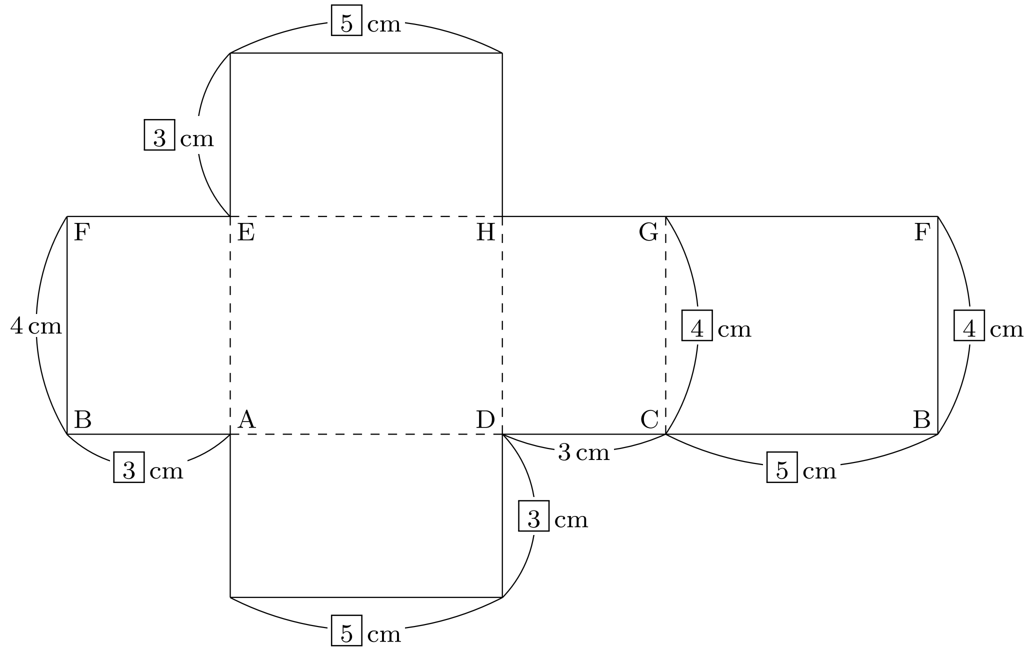


本文へ戻る

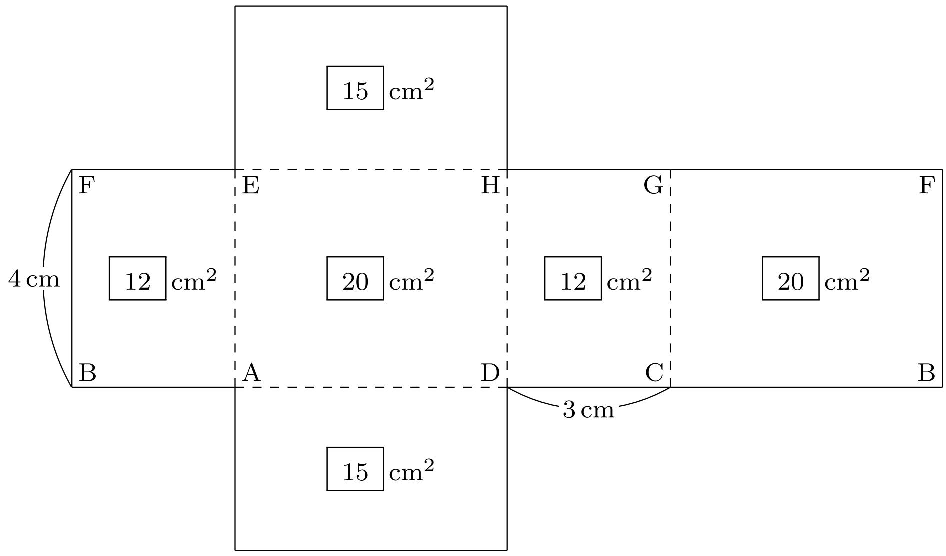
問 27. 右の図の四角柱の表面積を求める問題でした。ただし、底面である四角形 ABCD は長方形なのでしたね。



(1) この四角柱の表面の図に長さを書き込むと次のようになりますね。



(2) この四角柱の表面の図に、1 つ 1 つの面の面積を計算して書き込むと次のようになりますね。



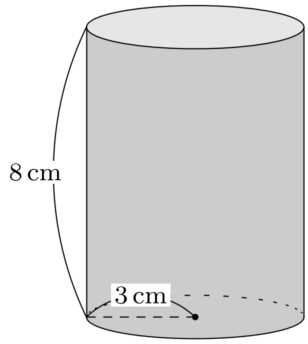
(3) (2) で求めた全ての面の面積を合計すると

$$\text{この四角柱の表面積} = 12 + 12 + 15 + 15 + 20 + 20$$
$$= 94\,\mathrm{cm}^2$$

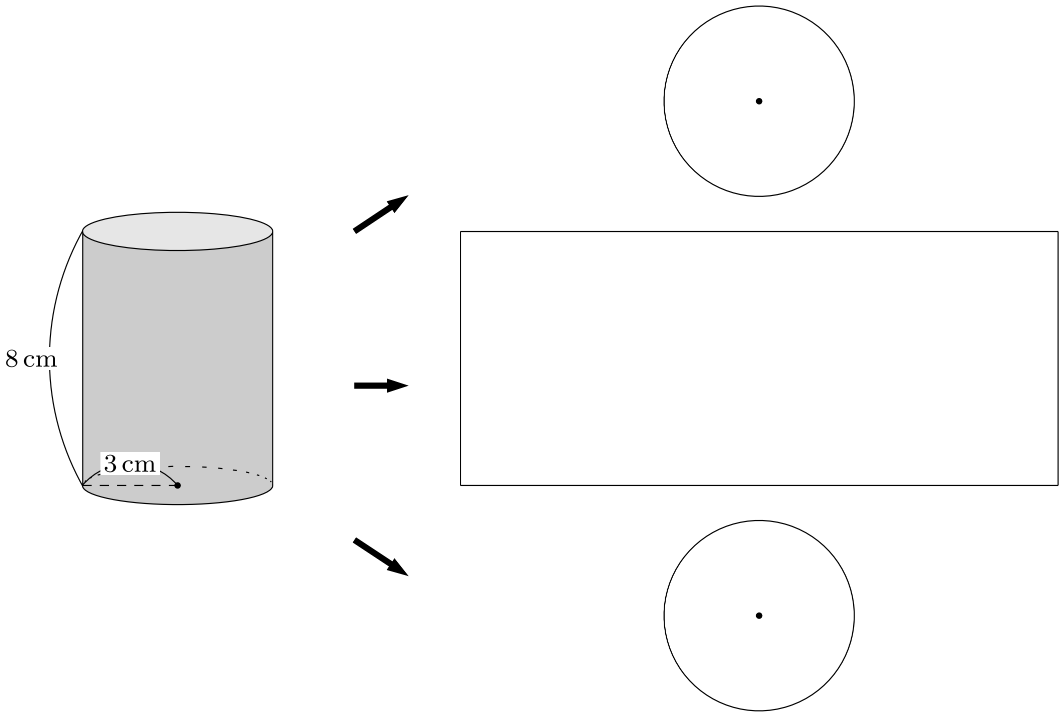
となります。

本文へ戻る

問 28. 以下の問を順に考えることにより、右の図の円柱の表面積を求める問題でしたね。



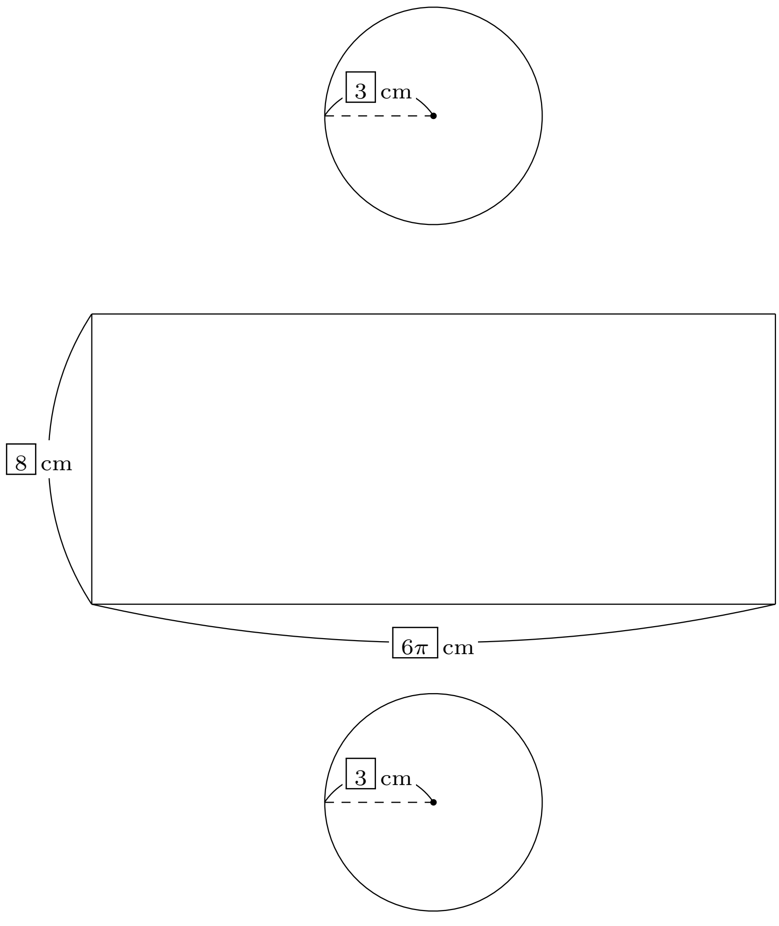
(1) この円柱の皮をはいで、表面を作ると、次の図のように 3 つの部品になりますね。



円が 2 つ、長方形が 1 つできるわけです。2 つの円の半径はどちらも $\boxed{3}$ cm ですね。また長方形の縦の長さは $\boxed{8}$ cm ですよね。ここまでは簡単にわかりますが、それでは長方形の横の長さはどれだけなのでしょう。もとの円柱の図を見ても書いてありませんよね。うーん、困りました。あっ、でも、もとの円柱では長方形の「横」は、円の $\boxed{\text{周り}}$ と貼り合わさっていたではないですか。ということは、この

長方形の横の長さを求めるには、円の $\boxed{\text{周り}}$ の長さを求めればよいですね。ところで、円の周りの長さって、円の直径かける円周率って計算するんでしたよね。円周率は $3.14\cdots$ ではなくて π という文字であらわすことにすると、この円の周りの長さは $\boxed{6\pi}$ cm ですね。ですから、長方形の横の長さも $\boxed{6\pi}$ cm ですね。

これでいろいろな長さがわかりましたね。それでは次の図の空欄に正しい数や式を記入してください。



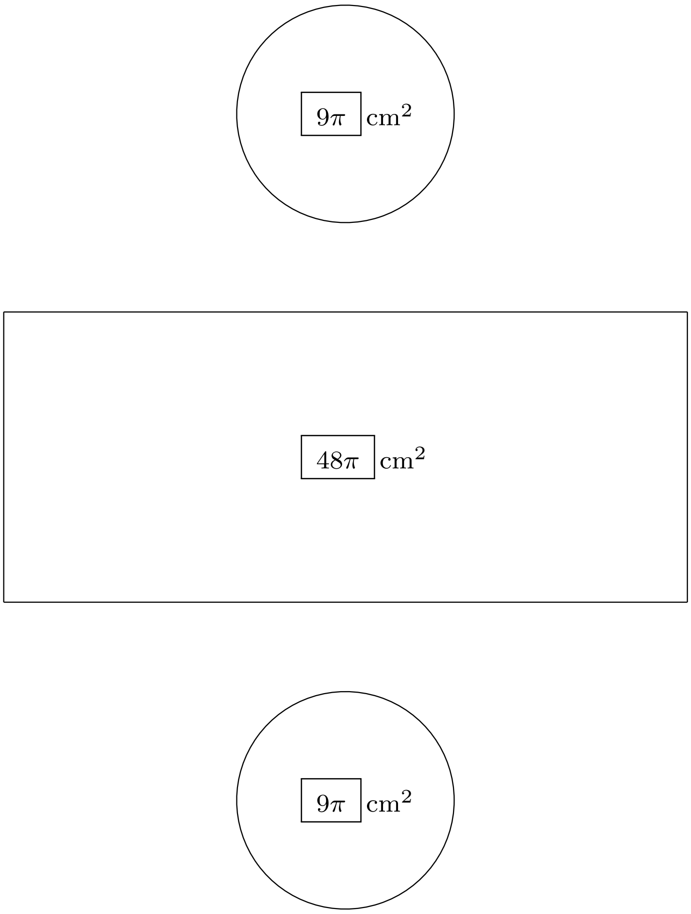
(2) まず、次の文の空欄に正しい言葉を書きなさい。

円の面積は、$\boxed{\text{半径}}$ かける $\boxed{\text{半径}}$ かける円周率で求めることができます。ですから、この円柱の「ふた」と「底」になっている円の面積は、どちらも

$$\boxed{3} \times \boxed{3} \times \pi = \boxed{9\pi}\,(\mathrm{cm}^2)$$

となるわけです。

では次に、それぞれの部品の面積を次の図の空欄に書き込んでください。



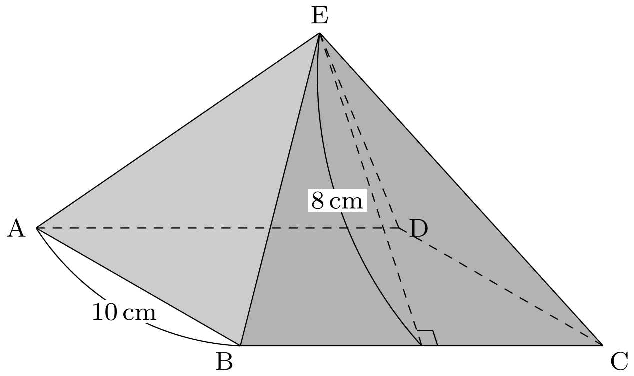
(3) それぞれの面の面積を合計すると

$$
\begin{aligned}
\text{この円柱の表面積} &= 9\pi + 48\pi + 9\pi \\
&= 66\pi\,(\mathrm{cm}^2)
\end{aligned}
$$

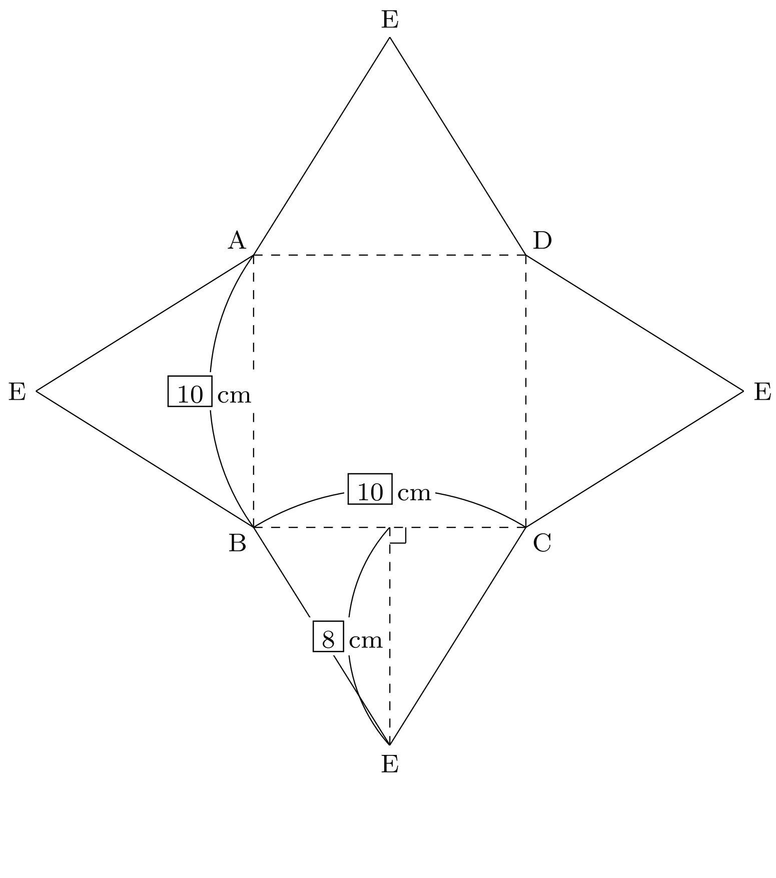
となります。

本文へ戻る

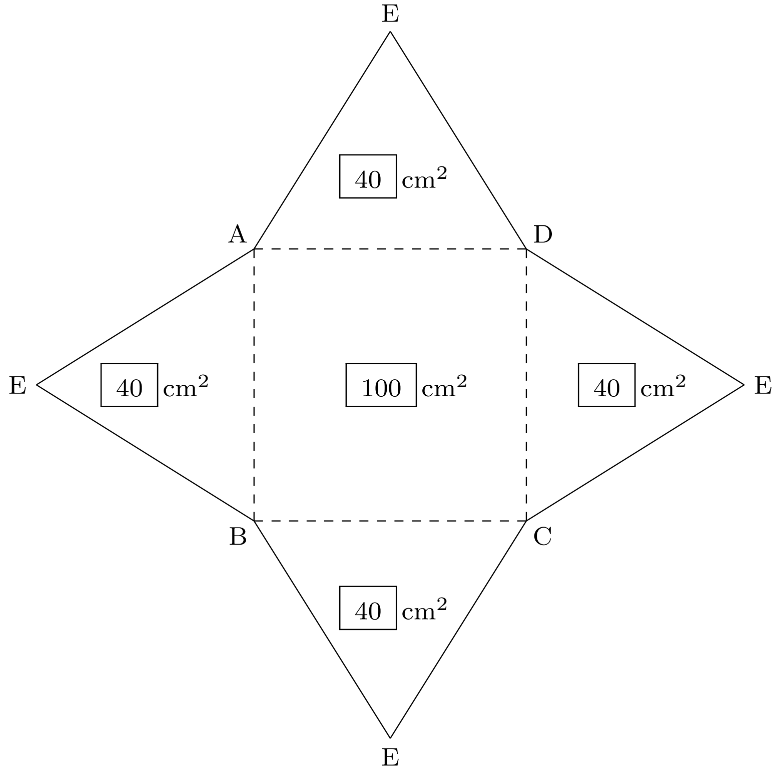
問 29. 右の図の四角錐についての問題でした。この四角錐は、底面が正方形で、頂点は「底面のど真ん中」の真上にあるのでした。(つまりこの四角錐は「正四角錐」なのでした。)



(1) この四角柱の表面の図の空欄に正しい長さを記入すると次のようになります。



(2) この四角柱の表面の図の空欄に正しい面積を記入すると次のようになります。



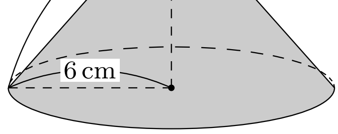
(3) (2) で求めた全ての面の面積を合計すると

$$\begin{aligned} \text{この四角錐の表面積} &= 100 + 40 + 40 + 40 + 40 \\ &= 220\,(\mathrm{cm}^2) \end{aligned}$$

となるわけです。

本文へ戻る

問 30. 右の図の円錐についての問題でしたね。



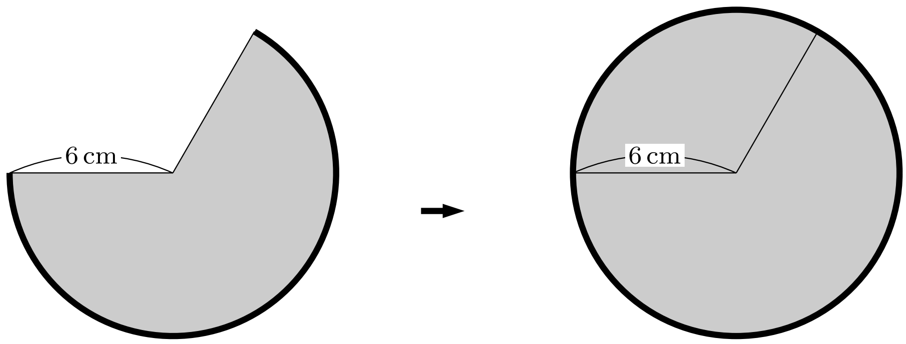
(1) この円錐の底面になっている円の半径は 6 cm ですから周りの長さは 12π cm で

すね。

(2) この円錐の側面になっているおうぎ型の半径は 9 cm ですね。

(3) 「この円錐の側面になっているおうぎ型」と同じ半径の円の周りの長さは 18π cm ですね。

(4) 「この円錐の側面になっているおうぎ型」と「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」を比べることにしたのでしたね。次の図を見てください。



太い部分の長さは 12π cm　　太い部分の長さは 18π cm

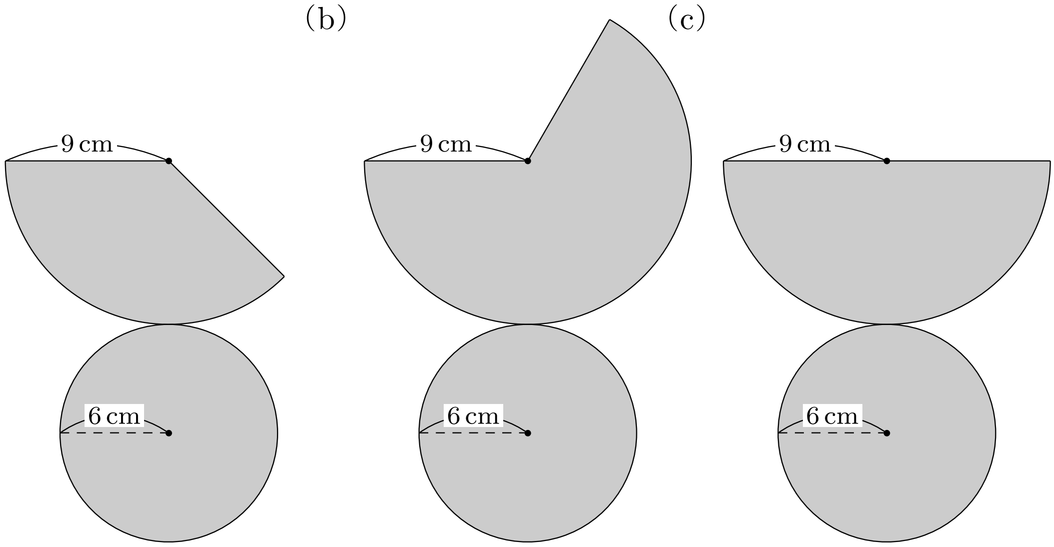
この図に描いてあるように、太い部分の長さは「円錐の側面になっているおうぎ型」では 12π cm、「円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」では 18π cm ということがわかっていますよね。

ということは、「円錐の側面になっているおうぎ型」は「円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」の $\dfrac{12\pi}{18\pi}$、つまり $\dfrac{2}{3}$ となっているわけです。

ですから、「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」を 3 等分してそのうちの 2 個分を集めると 「この円錐の側面になっているおうぎ型」になるということですね。

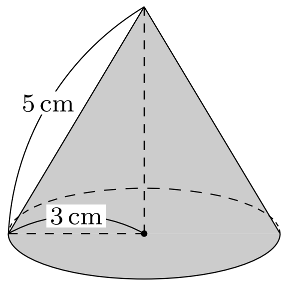
(5) 「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」を 3 等分してそのうちの 2 個分を集めると、 「この円錐の側面になっているおうぎ型」になるということがわかったのですよね。ということは、最も本当っぽいものは (b) ですね。

(a) (b) (c)



本文へ戻る

問 31. 右の図の円錐についての問題でしたね。



(1) この円錐の底面になっている円の半径は 3 cm です。ということは、直径は 6 cm です。ですから、

$$\text{底面になっている円の周りの長さ} = 6 \times \pi = 6\pi\ (\text{cm})$$

となります。

(2) 図を見るとわかるとおり、この円錐の側面になっているおうぎ型の半径は 5 cm です。

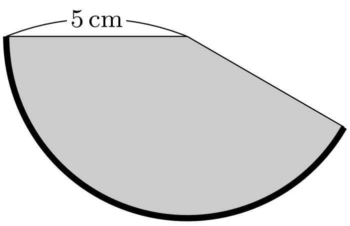
(3) 「この円錐の側面になっているおうぎ型」と同じ半径の円を思い浮かべ、その円の周りの長さを求めるのでしたね。

「この円錐の側面になっているおうぎ型」の半径は 5 cm ですから、半径が 5 cm の円を思い浮かべ、その円の円周の長さを求めればよいわけです。そうすると、直径は 10 cm ですから、

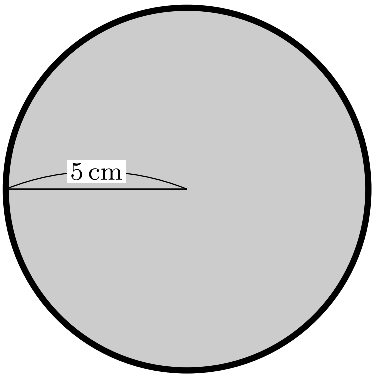
$$\text{「側面になっているおうぎ型」と同じ半径の円の周りの長さ} = 10 \times \pi$$
$$= 10\pi\,(\mathrm{cm})$$

となります。

(4) 「この円錐の側面になっているおうぎ型」と「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」を比べるのでしたね。次の図を見てください。



この円錐の側面になっているおうぎ型
太い部分の長さは 6π cm



この円錐の側面になっているおうぎ型
と同じ半径の円
太い部分の長さは 10π cm

この図にも書いておきましたが、これまでに、「この円錐の側面になっているおうぎ型の弧の長さ」は 6π cm で、「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円の周の長さ」は 10π cm ということがわかっています。ということは、「この円錐の側面になっているおうぎ型」は「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」の $\dfrac{6\pi}{10\pi}$、つまり $\dfrac{3}{5}$ になっているわけです。ですから、「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」を 5 等分してそのうちの 3 個分を集めると、「この円錐の側面になっているおうぎ型」になるということがわかります。

(5) 「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」の面積をまず求めます。

半径は 5 cm ですから

$$「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」の面積 = 5 \times 5 \times \pi$$
$$= 25\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

ということがわかります。

ところで、もう、「この円錐の側面になっているおうぎ型と同じ半径の円」を 5 等分してそのうちの 3 個分を集めると、「この円錐の側面になっているおうぎ型」になるということがわかっているのですから、

$$「この円錐の側面になっているおうぎ型」の面積 = 25\pi \times \frac{3}{5}$$
$$= 15\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

であることがわかります。

(6) 「この円錐の底面になっている円」の半径は 3 cm ですから、

$$「この円錐の底面になっているおうぎ型」の面積 = 3 \times 3 \times \pi$$
$$= 9\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

ということになります。

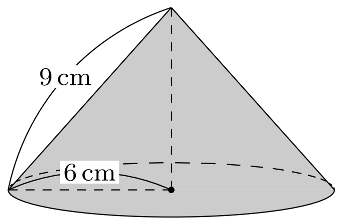
(7) この円錐の表面積を求めるには、「この円錐の側面になっているおうぎ型の面積」と「この円錐の底面になっている円の面積」を合計すればよいですね。よって、

$$この円錐の表面積 = 15\pi + 9\pi$$
$$= 24\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

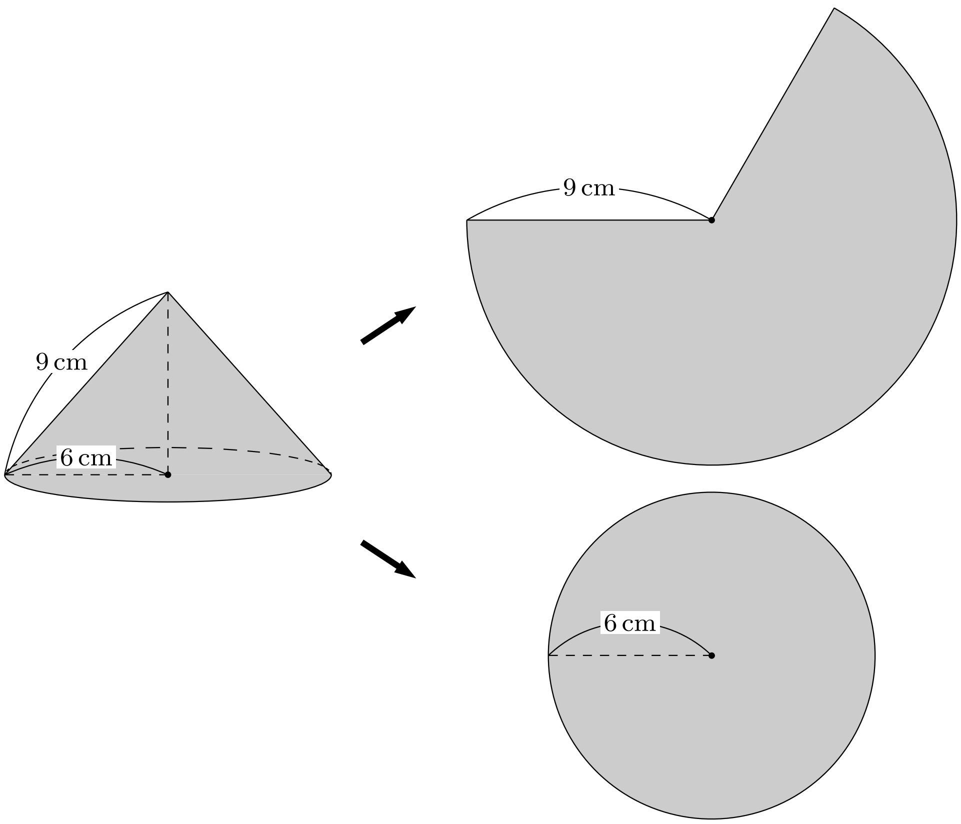
ということがわかります。

本文へ戻る

問 32.　右の図のような円錐の表面積を求める問題でしたね。



では次の図を見てください。これは円錐の皮をはいで、表面を取り出していることを表した図です。



この円錐の表面積を求めるには、この図の右側の「おうぎ型」の面積と「底面の円」の面積を合計すれば良いですね。

では、この図の右側を見ながら考えていきましょう。

「底面の円」の半径は 6 cm ですから、「底面の円」の周りの長さは 12π cm です。

「おうぎ型」の弧の長さと「底面の円」の周りの長さは同じですから、「おうぎ型」の弧の長さも $12\pi\,\mathrm{cm}$ です。

「おうぎ型と同じ半径を持つ円」の周の長さを求めます。半径は $9\,\mathrm{cm}$ ですから、「おうぎ型と同じ半径を持つ円」の周の長さは $18\pi\,\mathrm{cm}$ です。

「おうぎ型」と「おうぎ型と同じ半径を持つ円」を比べると、「おうぎ型」は「おうぎ型と同じ半径を持つ円」の $\dfrac{12\pi}{18\pi}$、つまり $\dfrac{2}{3}$ であることがわかります。

ところで「おうぎ型と同じ半径を持つ円」の半径は $9\,\mathrm{cm}$ ですから、面積は $81\pi\,\mathrm{cm}^2$ となりますよね。

ということは、「おうぎ型」の面積は

$$81\pi \times \frac{2}{3} = 54\pi\,\mathrm{cm}^2$$

ということになりますね。

一方、「底面の円」の半径は $6\,\mathrm{cm}$ ですから、「底面の円」の面積は $36\pi\,\mathrm{cm}^2$ ですね.

というわけで、この円錐の表面積は、

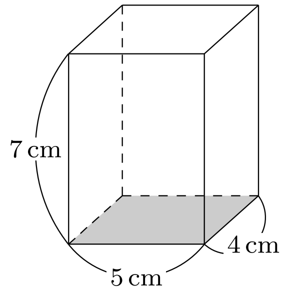
$$54\pi + 36\pi = 90\pi\,\mathrm{cm}^2$$

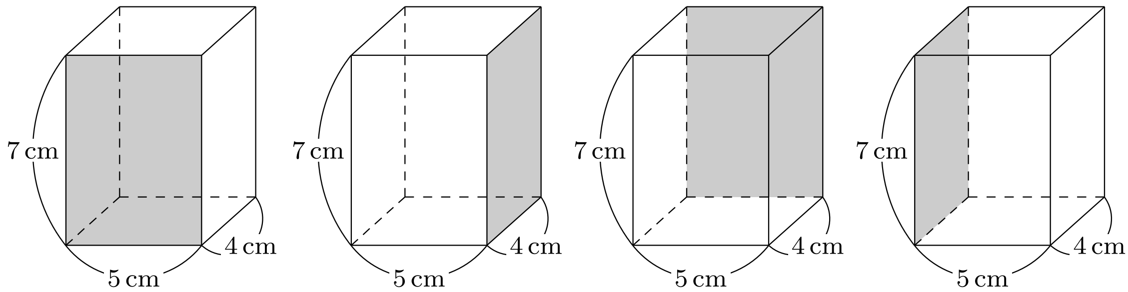
ということになりますね。

本文へ戻る

問 33. 立体の側面積を求める問題でしたね

(1) 問題をきちんと読むと、「縦の長さが 4 cm で横の長さは 5 cm の長方形が底面である」ということがわかりますね。つまり、この問題では右の図で灰色になっている面を底面と考えているわけです。ということは、この四角柱の側面は次の図で灰色になっている 4 つの面です。





これらの面積はそれぞれ、左から、

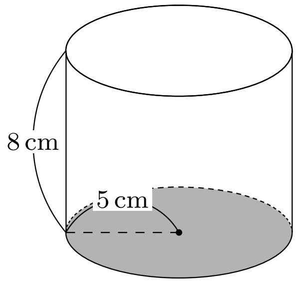
$$35\,(\mathrm{cm}^2)、28\,(\mathrm{cm}^2)、35\,(\mathrm{cm}^2)、28\,(\mathrm{cm}^2)$$

ですね。ですからこの四角柱の側面積は、

$$35 + 28 + 35 + 28 = 126\,(\mathrm{cm}^2)$$

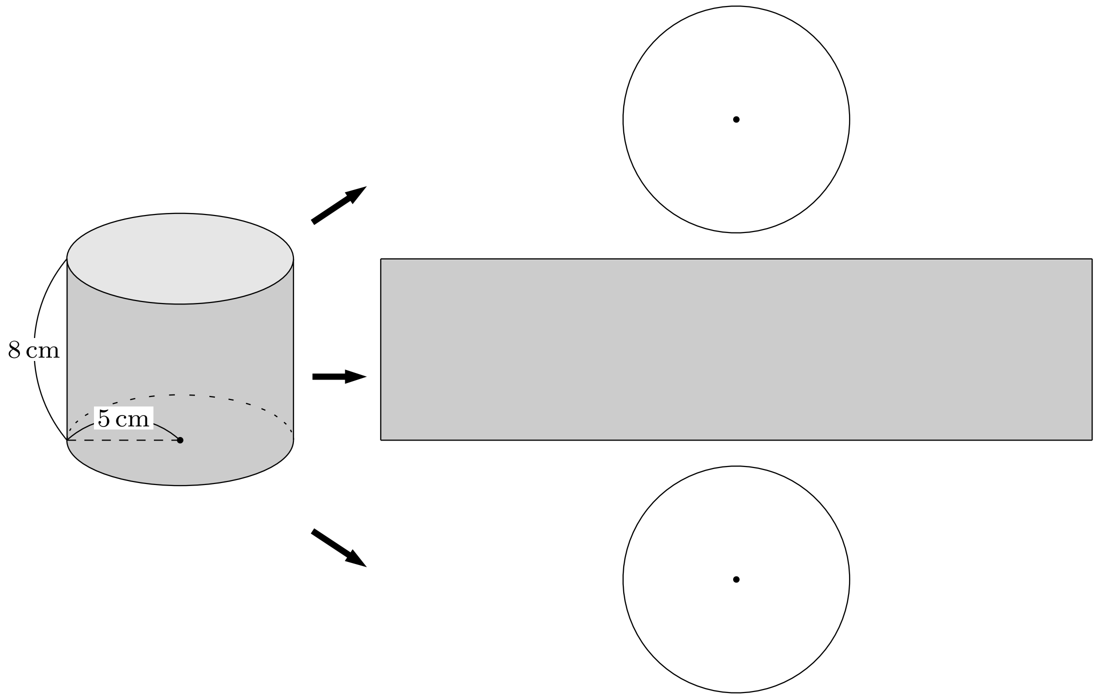
ということになります。

(2) この問題の立体は円柱ですから、右の図で灰色になっている面が底面ですね。



では次の図を見てください。これは円柱の皮をはいで、表面を取り出していること

を表した図です。



この図の右側の、灰色の長方形が円柱の側面ですね。ですからこの長方形の面積を求めればよいわけです。

縦の長さはもちろん 8 cm ですね。

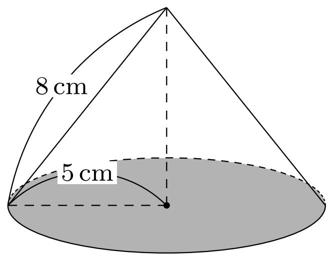
しかし、横の長さは何 cm なのでしょう。もうお分かりだと思いますが、底面になっている円の周の長さと同じですよね。ですから、長方形の横の長さは 10π cm ですね。

というわけで、

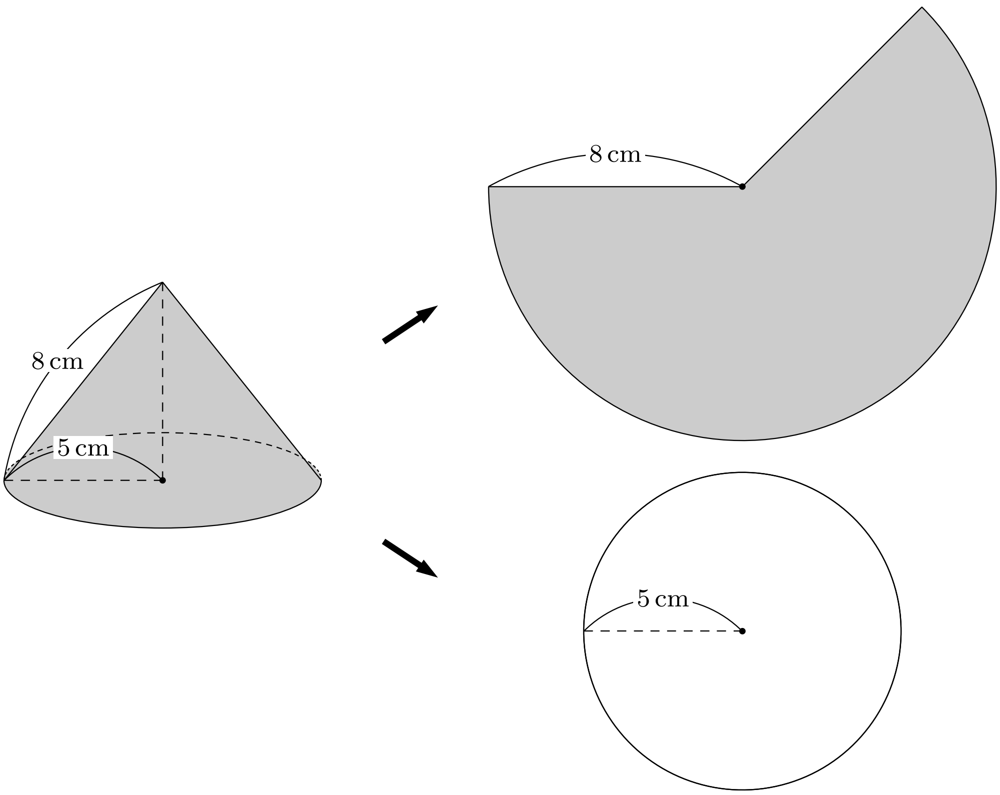
$$\text{この円柱の側面積} = 8 \times 10\pi = 80\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

であることがわかります。

(3) この問題の立体は円錐ですから、右の図で灰色になっている面が底面ですね。



では次の図を見てください。これは円錐の皮をはいで、表面を取り出していることを表した図です。



この図の右側の、灰色のおうぎ型が円錐の側面ですね。ですからこのおうぎ型の面積を求めればよいわけです。

では、この図の右側を見ながら考えていきましょう。

「底面の円」の半径は 5 cm ですから、「底面の円」の周りの長さは 10π cm です。

「おうぎ型」の弧の長さと「底面の円」の周りの長さは同じですから、「おうぎ型」の弧の長さも 10π cm です。

「おうぎ型と同じ半径を持つ円」の周の長さを求めます。半径は $8\,\mathrm{cm}$ ですから、「おうぎ型と同じ半径を持つ円」の周の長さは $16\pi\,\mathrm{cm}$ です。

「おうぎ型」と「おうぎ型と同じ半径を持つ円」を比べると、「おうぎ型」は「おうぎ型と同じ半径を持つ円」の $\dfrac{10\pi}{16\pi}$、つまり $\dfrac{5}{8}$ であることがわかります。

ところで「おうぎ型と同じ半径を持つ円」の半径は $8\,\mathrm{cm}$ ですから、面積は $64\pi\,\mathrm{cm}^2$ となりますよね。

ということは、「おうぎ型」の面積、つまりこの円錐の側面積は

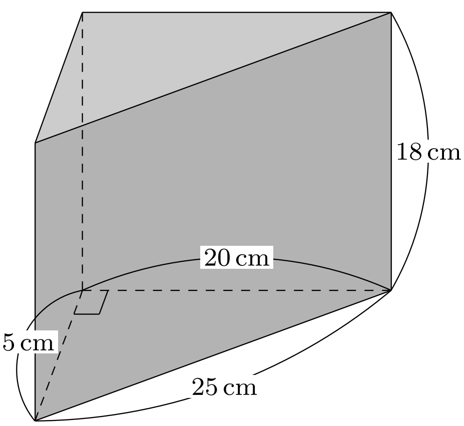
$$64\pi \times \frac{5}{8} = 40\pi\,\mathrm{cm}^2$$

ということになりますね。

本文へ戻る

問 34. ナントカ柱の体積を求める問題でしたね。

(1) 三角柱



底面は「底辺の長さが $15\,\mathrm{cm}$」、「高さが $20\,\mathrm{cm}$」の三角形と考えることができますから、

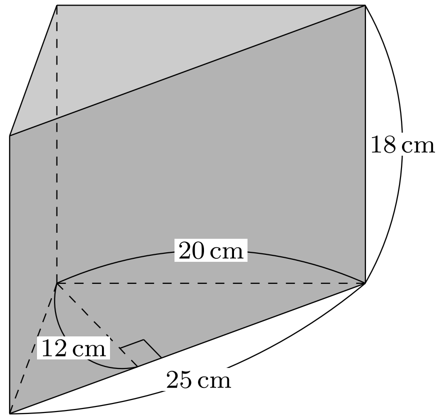
$$\text{底面積} = 15 \times 20 \times \frac{1}{2} = 150\,(\mathrm{cm}^2)$$

となります。また、「三角柱の高さは $18\,\mathrm{cm}$」です。ですから、

$$\begin{aligned}\text{この三角柱の体積} &= 150 \times 18 \\ &= 2700\,(\mathrm{cm}^3)\end{aligned}$$

となります。

(2) 三角柱



底面は「底辺の長さが 25 cm」、「高さが 12 cm」の三角形と考えることができますから、

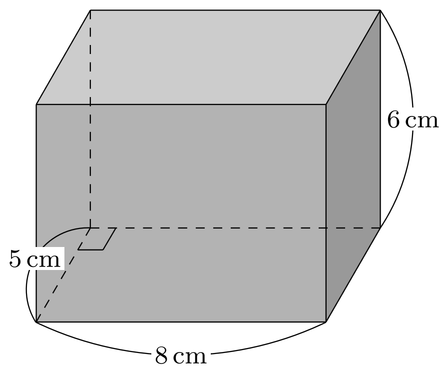
$$\text{底面積} = 25 \times 12 \times \frac{1}{2} = 150\,(\mathrm{cm}^2)$$

となります。また、「三角柱の高さは 18 cm」です。ですから、

$$\begin{aligned}\text{この三角柱の体積} &= 150 \times 18 \\ &= 2700\,(\mathrm{cm}^3)\end{aligned}$$

となります。

(3) 四角柱



底面は「たての長さが 5 cm」、「よこの長さが 8 cm」の長方形と考えることができますから、

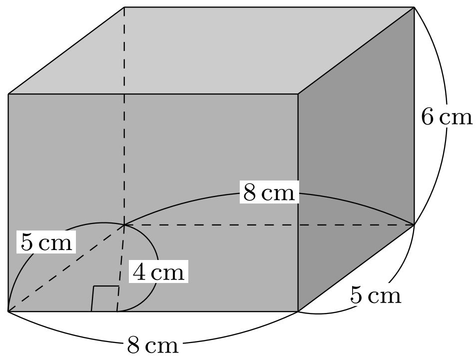
$$\text{底面積} = 5 \times 8 = 40\,(\mathrm{cm}^2)$$

となります。また、「四角柱の高さは 6 cm」です。ですから、

$$\begin{aligned}\text{この四角柱の体積} &= 40 \times 6 \\ &= 240\,(\mathrm{cm}^3)\end{aligned}$$

となります。

(4) 四角柱



底面は「底辺の長さが 8 cm」、「高さが 4 cm」の平行四辺形と考えることができますから、

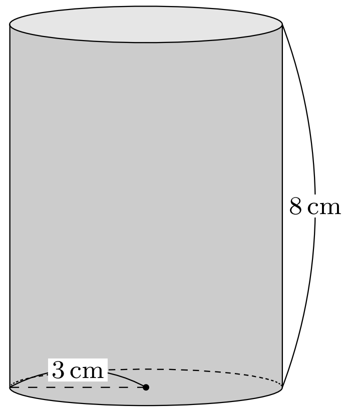
$$\text{底面積} = 8 \times 4 = 32\,(\mathrm{cm}^2)$$

となります。また、「四角柱の高さは 6 cm」です。ですから、

$$\begin{aligned}\text{この四角柱の体積} &= 32 \times 6\\ &= 192\,(\mathrm{cm}^3)\end{aligned}$$

となります。

(5) 円柱



底面は「半径が 3 cm」の円ですから、

$$\text{底面積} = 3 \times 3 \times \pi = 9\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

となります。また、「円柱の高さは 8 cm」です。ですから、

$$\begin{aligned}\text{この円柱の体積} &= 9\pi \times 8\\ &= 72\pi\,(\mathrm{cm}^3)\end{aligned}$$

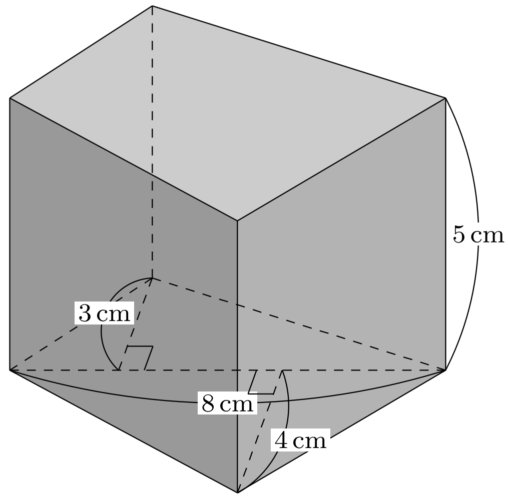
となります。

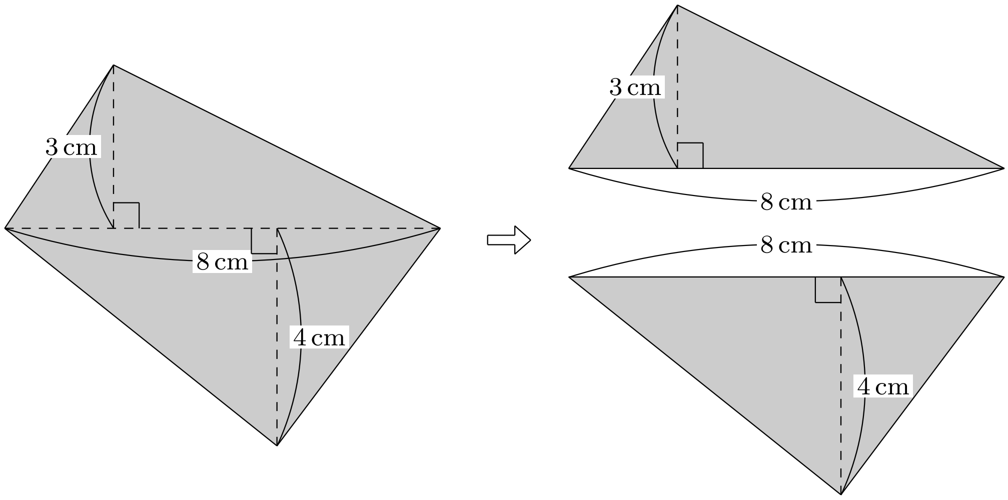
本文へ戻る

問 35. ナントカ柱の体積を求める問題でしたね。

(1) 四角柱

底面は四角形ですが、長方形や平行四辺形というわけではありません。ですから面の面積を求めるには工夫が必要です。この問題の場合には次のように 2 つの三角形にわけてみるのがよいでしょう。





この図の右側を見て、2 つの三角形の面積を計算してみます。すると、

$$\text{上の三角形の面積} = 8 \times 3 \times \frac{1}{2} = 12\,(\mathrm{cm}^2)$$

$$\text{下の三角形の面積} = 8 \times 4 \times \frac{1}{2} = 16\,(\mathrm{cm}^2)$$

となります。ですから、

$$\text{底面積} = 12 + 16 = 28\,(\mathrm{cm}^2)$$

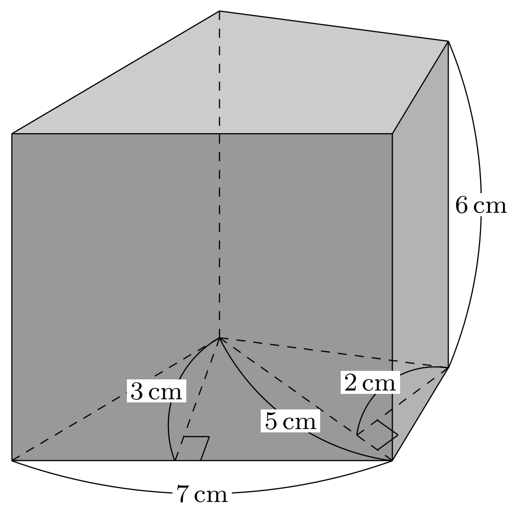
ということになります。底面積がわかったのですから、あとは高さをかければ体積を求めることができます。というわけで、

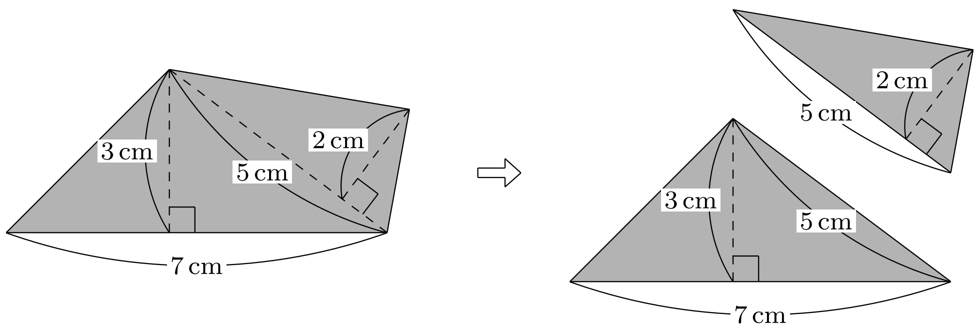
$$\text{この四角柱の体積} = 28 \times 5 = 140\,(\mathrm{cm}^3)$$

となりますね。

(2) 四角柱

底面は四角形ですが、長方形や平行四辺形というわけではありません。ですから面の面積を求めるには工夫が必要です。この問題の場合には次のように 2 つの三角形にわけてみるのがよいでしょう。





この図の右側を見て、2 つの三角形の面積を計算してみます。すると、

$$\text{上の三角形の面積} = 5 \times 2 \times \frac{1}{2} = 5\,(\mathrm{cm}^2)$$

$$下の三角形の面積 = 7 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{21}{2}\,(\mathrm{cm}^2)$$

となります。ですから、

$$底面積 = 5 + \frac{21}{2} = \frac{31}{2}\,(\mathrm{cm}^2)$$

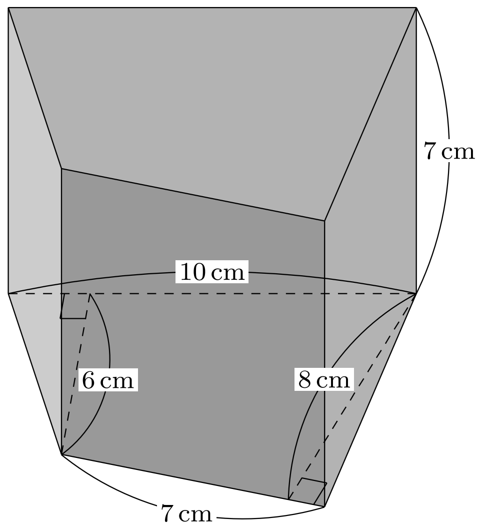
ということになります。底面積がわかったのですから、あとは高さをかければ体積を求めることができます。というわけで、

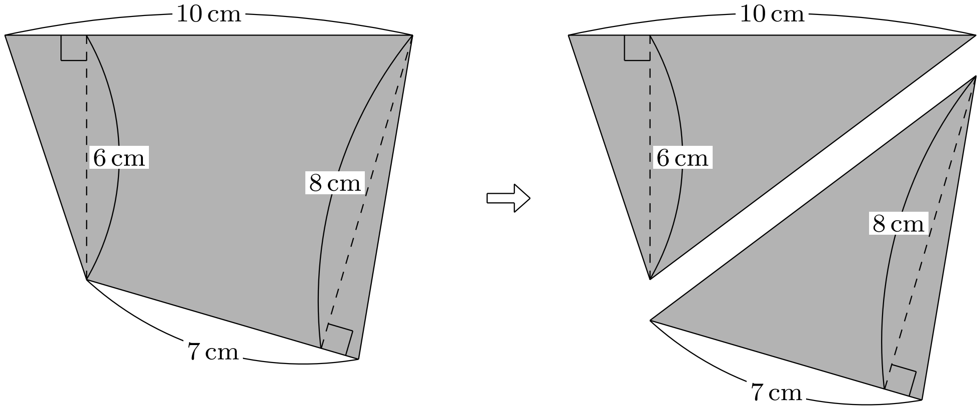
$$この四角柱の体積 = \frac{31}{2} \times 6 = 93\,(\mathrm{cm}^3)$$

となりますね。

(3) 四角柱

底面は四角形ですが、長方形や平行四辺形というわけではありません。ですから面の面積を求めるには工夫が必要です。この問題の場合には次のように 2 つの三角形にわけてみるのがよいでしょう。





この図の右側を見て、2 つの三角形の面積を計算してみます。すると、

$$\text{上の三角形の面積} = 10 \times 6 \times \frac{1}{2} = 30\,(\mathrm{cm}^2)$$

$$\text{下の三角形の面積} = 7 \times 8 \times \frac{1}{2} = 28\,(\mathrm{cm}^2)$$

となります。ですから、

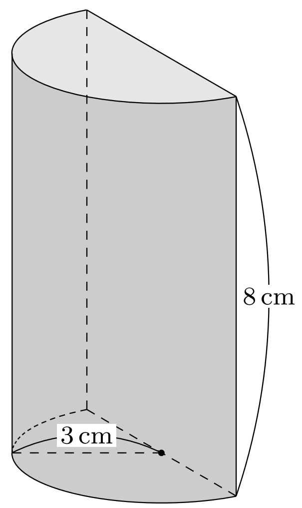
$$\text{底面積} = 30 + 28 = 58\,(\mathrm{cm}^2)$$

ということになります。底面積がわかったのですから、あとは高さをかければ体積を求めることができます。というわけで、

$$\text{この四角柱の体積} = 58 \times 7 = 406\,(\mathrm{cm}^3)$$

となりますね。

(4) 半円柱



底面は半円です。ですから、底面積を求めるには円の面積を半分にすればよいわけです。半径 3 cm の円の面積は $3 \times 3 \times \pi = 9\pi\,(\mathrm{cm}^3)$ ですから、

$$\text{底面積} = 9\pi \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}\pi\,(\mathrm{cm}^3)$$

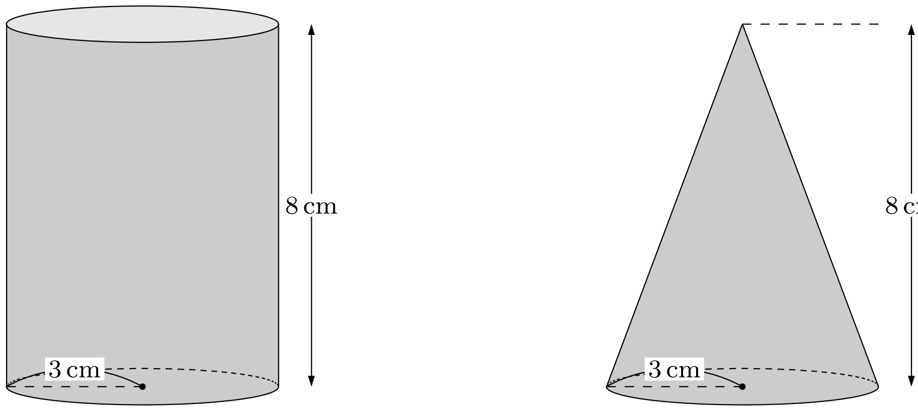
ということになります。底面積がわかったのですから、あとは高さをかければ体積を求めることができます。というわけで、

$$\text{この半円柱の体積} = 9\pi \times 8 = 72\pi\,(\mathrm{cm}^3)$$

となりますね。

本文へ戻る

問 36.



左の円柱と右の円錐を比べながら体積について考える問題でしたね。「柱」と「錐」という違いがありますが、「底面」と「高さ」は同じになっていることに注目しておきましょう。

(1) ナントカ柱の体積は、「底面積」かける「高さ」で求めることができるのでしたね。

ではまず、底面積を求めてみます。底面は「半径が 3 cm の円」ですから、

$$\text{底面積} = 3 \times 3 \times \pi = 9\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$

ですね。

あとは、この円柱の高さをかければよいですね。というわけで、

$$\text{この円柱の体積} = 9\pi \times 8 = 72\pi\,(\mathrm{cm}^3)$$

となりますね。

(2) 底面が同じで高さも同じ「ナントカ柱」と「ナントカ錐」の体積は $\dfrac{1}{3}$ の食い違いがあるのでしたね。詳しく言うと、「ナントカ錐の体積」は「ナントカ柱の体積」の $\dfrac{1}{3}$ なのでしたね。

(3) (2) がちゃんとわかった人はこの問題は大丈夫ですね。

$$この円錐の体積 = 72\pi \times \frac{1}{3} = 24\,(\mathrm{cm}^3)$$

ですね。

本文へ戻る

問 37. 次のナントカ錐の体積を求める問題でした。

ナントカ錐の体積は「底面積」かける「高さ」かける「$\frac{1}{3}$」で求めることができるのでしたね。

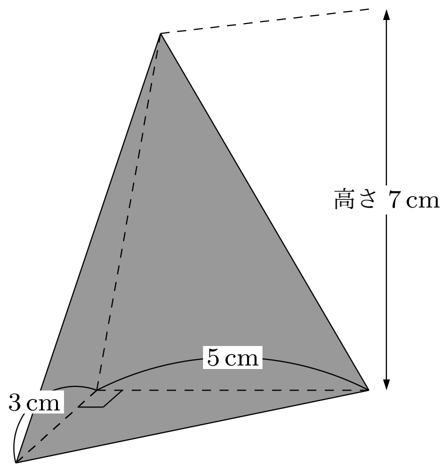
(1) この三角錐の底面は「底辺の長さが 5 cm」、「高さが 3 cm」の三角形と考えることができます。ですから

$$底面積 = 5 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{15}{2}\,(\mathrm{cm}^2)$$

となります。というわけで、

$$体積 = \frac{15}{2} \times 7 \times \frac{1}{3} = \frac{35}{2}\,(\mathrm{cm}^3)$$

となります。



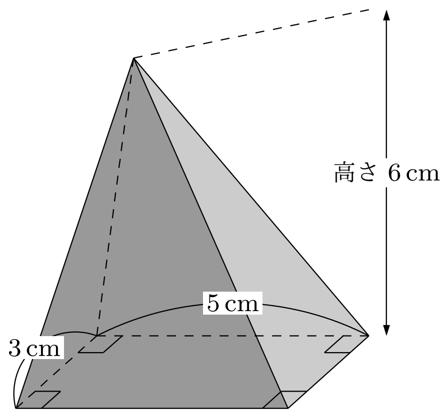
(2) この四角錐の底面は「横の長さが 5 cm」、「縦の長さが 3 cm」の長方形と考えることができます。ですから

$$底面積 = 5 \times 3 = 15\,(\mathrm{cm}^2)$$

となります。というわけで、

$$体積 = 15 \times 6 \times \frac{1}{3} = 30\,(\mathrm{cm}^3)$$

となります。



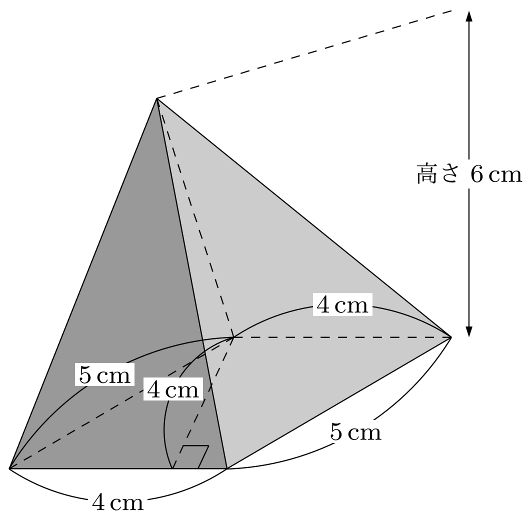
(3) この四角錐の底面は「底辺の長さが 4 cm」、「高さが 4 cm」の平行四辺形と考えることができます。ですから

$$\text{底面積} = 4 \times 4 = 16\,(\mathrm{cm}^2)$$

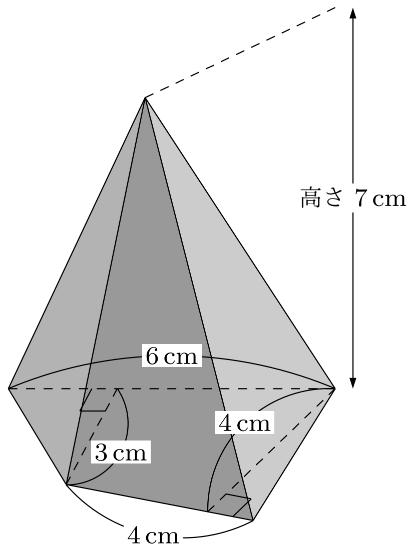
となります。というわけで、

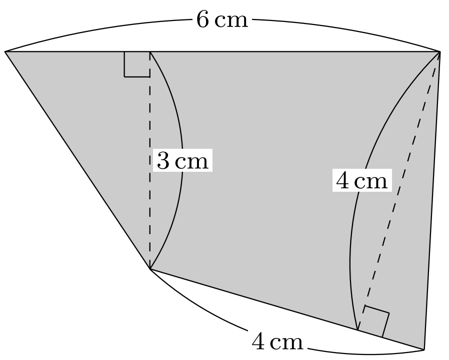
$$\text{体積} = 16 \times 6 \times \frac{1}{3} = 32\,(\mathrm{cm}^3)$$

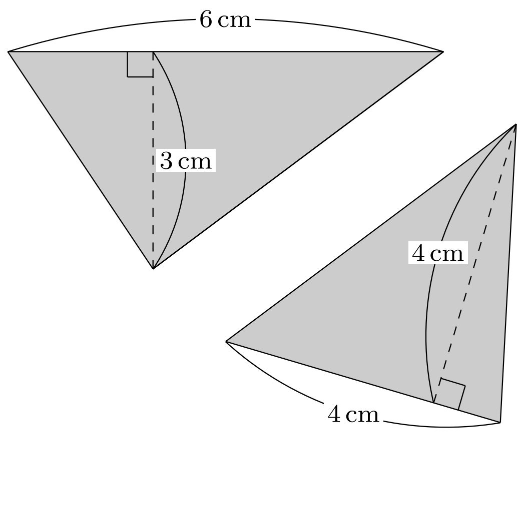
となります。



(4) この四角錐の底面は四角形ですが、長方形や平行四辺形というわけではありません。ですから底面積を求めるためには工夫が必要です。この場合は次のように 2 つの三角形にわけてみるのがよいでしょう。







この図の右側を見て、2 つの三角形の面積を計算してみます。すると、

$$\text{上の三角形の面積} = 6 \times 3 \times \frac{1}{2} = 9\,(\mathrm{cm}^2)$$

$$\text{下の三角形の面積} = 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8\,(\mathrm{cm}^2)$$

となります。ですから、

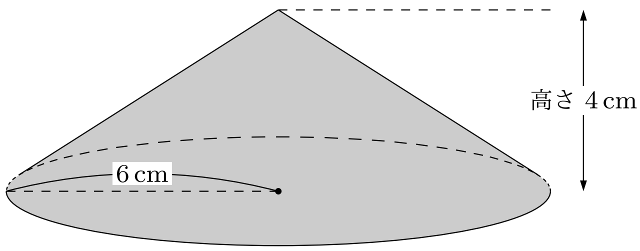
$$\text{底面積} = 9 + 8 = 17\,(\mathrm{cm}^2)$$

というわけで、

$$\text{体積} = 17 \times 7 \times \frac{1}{3} = \frac{119}{3}\,(\mathrm{cm}^3)$$

となります。

(5) この円錐の底面は「半径が 6 cm」の円です。ですから



$$\begin{aligned}\text{底面積} &= 6 \times 6 \times \pi \\ &= 36\pi\,(\mathrm{cm}^2)\end{aligned}$$

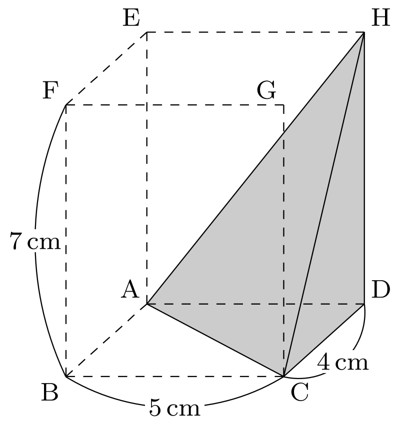
となります。というわけで、

$$\text{体積} = 36\pi \times 4 \times \frac{1}{3} = 48\pi\,(\mathrm{cm}^3)$$

となります。

本文へ戻る

問 38. 右の図の灰色の立体の体積を求める問題でしたね。



例えばこの立体は、△ACD が底面で、高さが HD の三角錐と考えることができます。すると、

$$\text{底面の面積} = 5 \times 4 \times \frac{1}{2} = 10\,(\mathrm{cm}^2)$$

となるので、

$$\text{この立体の体積} = 10 \times 7 \times \frac{1}{3} = \frac{70}{3}\,(\mathrm{cm}^3)$$

ということがわかりますね。

本文へ戻る