平面図形（平行と合同、図形の性質と証明）

2017 年 11 月 9 日

目次

このテキストの使いかた

日頃の学習では・・・

- テキストをていねいに読んでいきましょう。

  このテキストは、きちんと言葉を使っててていねいな説明が書かれています。記号や数式が並んでいるだけの、意味不明のものではありません。ひとことひとこと言葉を大切にして、解き方ではなく考え方を学び取るようにしてください。そして、書いてあることに対して、「あーそういうことか」とか「えーよくわからない」とか「これ、ちがうんじゃないの？」といった反応をしてください。数学は自分の頭を使って考えていく科目ですから立ち止まって考えることがとても大切なのです。

- テスト直前に勉強を始めるのではなく、テストで力を発揮できるように前もって準備をしておきましょう。

  数学のように、自分の頭を使って「あーでもない、こーでもない」と考えながら学んでいく科目では、学習を始めてからしばらくの間はなかなか成果が出ない事があります。しかし少し我慢をして学習を続けていくうちに、あるとき、驚くような力が付いていることに気づくことがあります。 つまり、実力は初めのうちはゆっくり伸びていき、あとからぐんと伸びることが多いのです。

- 例題を学ぶときには、解答を読む前に、できればまず自分の力で解くことができるかどうか試してみましょう。

  数学の学習では、誰かから教わっただけのことよりも自分で悩んで考えたことの

ほうがよく身につきます。紙と筆記用具を使って実際に答案を書いてみてください。それができたらテキストの解答をていねいに読んで自分の考えと比べてみましょう。

- 例題の学習ができたら、この問題がテストに出ても自分の力だけで解けるかどうか想像してみましょう。そして心配なものには印を付けておきましょう。

  日頃から自分の実力をつかんでおくとテスト対策がしやすくなります。

- 問はもちろん、まず自分の力で解くことができるかどうか試してみてください。

  紙と筆記用具を使って実際に答案を書いてみてください。それができたらテキストの解答をていねいに読んで自分の考えと比べてみましょう。そうすれば理解が深まるでしょう。

- 問を解き終わって答え合わせをしたら、間違ったものには印を付けておきましょう。

  日頃から自分の実力をつかんでおくとテスト対策がしやすくなります。

- ひとつのひとつの節を読み終わったら、どんなことをその節で学んだのか思い出して「あらすじ」を言えるようにしておきましょう。紙と筆記用具を用意して、誰かにあらすじを伝えるにはどんなふうに説明すればよいか考え、文章を書いてみるととても効果があります。

  中学生に「今日は学校の数学の授業でどんなことを勉強したの？」と聞いてみると、「えーと、何だっけ、そうだ、傾きとか習った。」と断片的なことを言えたりすることはあるのですが、改めて、「へぇ、ところで傾きってなんなの？」と聞いてみると「えー、何だっけ、そうだ、なんか計算したり直線を描いてた。」ぐらいの答えしか返ってこないことが多いのです。専門用語を正しく言えるようになることも必要なことかもしれませんが、そんなことより大切なのは「どんなお話を学んだのか」ということです。数学は意味の無い記号操作を学ぶ科目ではなく、ちゃんとしたストーリーがあるものを学んでいるのです。ですから「お話のあらすじ」を理

解しておくことが大切なのです。

定期テスト対策では・・・

「日頃の学習」のところにも書いてありますが、数学のような科目は力がつくまでに時間のかかる科目です。テストに備えて十分な日数を確保しておきましょう。そして、「日頃の学習」で心配な例題や間違った問にちゃんと印を付けているとテスト対策が楽になります。

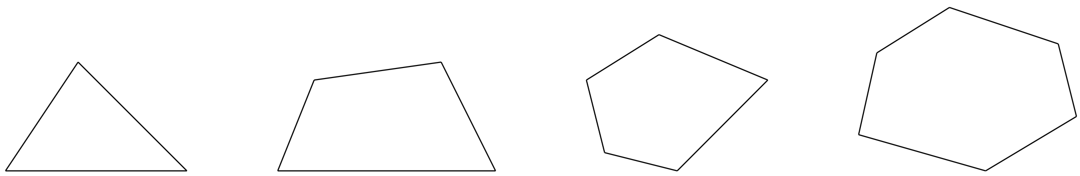
- テキストから試験範囲の例題や問を探して、印のついていないものがちゃんと解けるかどうか試してみましょう。
- 印を付けた例題や問を繰り返し復習して、テストに出ても大丈夫な問題を少しでも増やしておきましょう。

第1章

平行と合同

1.1　多角形の内角と外角

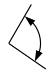
これから私たちは、「多角形」と呼ばれる図形について学びます。次の図を見てください。

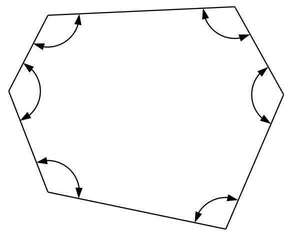


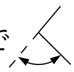
この図のような図形を「多角形」と呼んでいます。きちんと言うと、**いくつかのまっすぐな線（ここでは線分）で囲まれている図形を多角形と呼びます。**多角形を囲んでいるまっすぐな線は**辺**と呼ばれ、辺と辺が出会うところは**頂点**と呼ばれます。そして、辺の数が 3 本である多角形は 3 角形、辺の数が 4 本である多角形は 4 角形、辺の数が 5 本である多角形は 5 角形 $\cdots$ 辺の数が n 本である多角形は n 角形と呼ばれます。どの多角形でも辺の数と頂点の数は同じです。ですから、「n 角形とは、頂点が n ある多角形のこと」と考えても良いわけです。

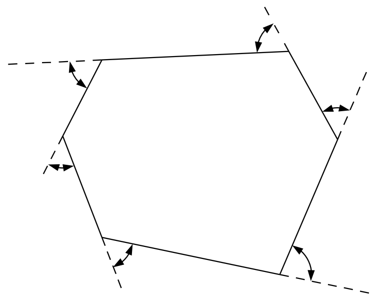
多角形では、辺と辺が出会うところに角ができています。これから、この角について学習します。

まず、言葉を 2 つ説明します。多角形には「内角」と呼ばれる角と、「外角」と呼ばれる角があるのです。

まず右の図を見てください。**内角**とは、この図で  であらわされているような角のことで、多角形の内側にできている角のことです。



今度は右の図を見てください。**外角**とは、この図で  であらわされているような角のことで、多角形の外側にできている角のことです。外角は、多角形の辺と、辺を伸ばしてできる直線の間にできるのです。

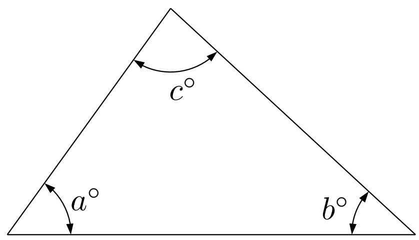


1.1.1　n 角形の内角を全部たすとどうなる？

まず思い出してほしいことがあります。三角形の内角を全部たすと何度になるのだったでしょうか。覚えていますよね。たしか、小学校でも「どんな三角形でも内角を全部たすと必ず 180° になる」ということを習いましたよね。

重要な事実：三角形の内角の和は何度？

どんな三角形でも、内角の和は 180° である。
つまり、右の図で、$a + b + c = 180$ が成り立っている。

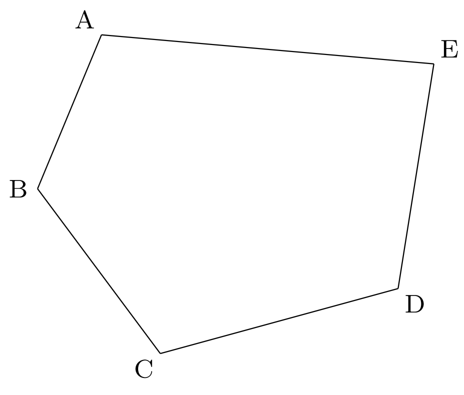


でも、どうして、どんな三角形でも内角を全部たすと必ず 180° になるのでしょうか。あなたはその理由を知っていますか？知っている人はほとんどいないかもしれませんね。

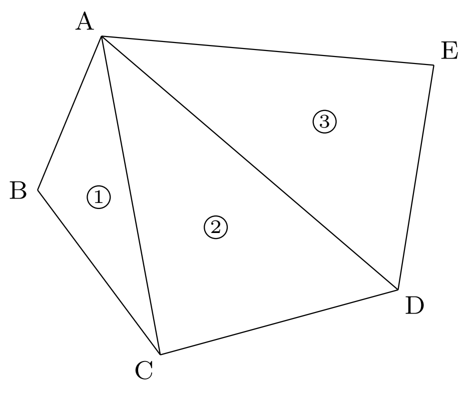
しかし、理由の分からないことを信じるわけには行きません。数学では証拠のない話は正しいとは認めてもらえないのです。ですから、本当は、ここであなたに証拠を見つけてほしいのですが、いろいろわけがあってここでは証拠探しは後回しにします。ここでは「どんな三角形でも内角を全部たすと必ず 180° になる」ということを信じることにします。というわけで、この先に出てくる話しは「どんな三角形でも内角を全部たすと必ず 180° になる」ということを「信じた上での話し」です。ですが、「どんな三角形でも内角を全部たすと必ず 180° になる」ということを信じると、素晴らしいことに、四角形、五角形、六角形・・・、もっと一般に n 角形の内角の和を計算できるようになるのです。どのように計算するのかこれから丁寧に学んでいくことにします。

　ではまず、ためしに五角形の内角の和について考えることにしましょう。

例 1　右の図の五角形を見てください。五角形にはもちろん 5 つの内角があります。この 5 つの内角がそれぞれ何度なのかはわかりません。ですが、5 つの内角を全部たすと何度になるのかこれから考えます。そこで、この五角形に対角線を何本か引いてみます。



　右の図を見てください。対角線を 2 本引いてみました。2 本の対角線は、どちらも頂点 A から出るように描いてあります。頂点 A から、どこかの頂点へ向かうように描いたのです。（このように対角線を描くと、対角線どうしが交わることはありませんね。）すると五角形は、3 枚の三角形に分かれました。この図では三枚の三角形を番号で、三角形①、三角形②、三角形③と名づけました。

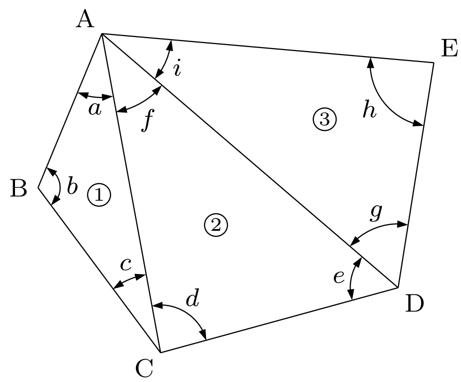


右の図を見てください。説明していく都合で、三枚の三角形の内角に小文字のアルファベットで名前をつけました。つまり、

三角形①の内角に a、b、c

三角形②の内角に d、e、f

三角形③の内角に g、h、i



という名前をつけました。ところで、例えば、角 a と角 f と角 i の大きさをたすと、五角形の内角 A の大きさになりますよね。また例えば、角 b の大きさは五角形の内角 B の大きさと同じですね。さらに例えば、角 c と角 d の大きさをたすと、五角形の内角 C の大きさになりますよね。さらにこのように考えていくと、角 a、角 b、角 c、角 d、角 e、角 f、角 g、角 h、角 i の大きさを全部たすと、五角形の内角 A、内角 B、内角 C、内角 D、内角 E の大きさを全部たしたことになるということがわかりますよね。

ところで私たちは、（今の所証拠はないんですけど）三角形の内角の和は必ず 180° なるということを信じることにしたのでした。ですから、

三角形①の内角の和は 180°、つまり、角 a、角 b、角 c をたすと 180° になることや、

三角形②の内角の和は 180°、つまり、角 d、角 e、角 f をたすと 180° になることや、

三角形③の内角の和は 180°、つまり、角 g、角 h、角 i をたすと 180° になること

がわかります。ということは、a から i までの角を全部たすと、三角形①、②、③の内角を全部たすことになるので、結局 180° が 3 つ分できることになります。つまり、角 a、角 b、角 c、角 d、角 e、角 f、角 g、角 h、角 i の大きさを全部たすと $180° \times 3 = 540°$ になるのです。

以上のように考えると、結局、五角形の内角全部の和は、五角形を対角線で分けてできた三角形 3 枚分の内角の和と同じになり、$180° \times 3 = 540°$ となることがわかるわけです。

問 1. 例 1 の五角形の内角の和についての話が理解できた人のための問題です。

六角形の内角の和が何度になるのか次の順で考えていってください。

(1) なるべく特徴のない六角形の図を描いてください。

(2) 六角形の頂点を 1 つ選び、選んだ頂点から出ていく対角線を何本か描いて、六角形をいくつかの三角形に分割してください。

(3) (2) では六角形に何本か対角線を描いていくつかの三角形に分割したはずです。六角形はいくつの三角形に分割されましたか。

(4) 六角形の内角の和は、何枚分の三角形の内角の和と同じですか。

(5) 六角形の内角の和は何度のはずですか。

答えを見る

問 2. 例 1 の五角形の内角の和についての話が理解できた人のための問題です。

七角形の内角の和が何度になるのか次の順で考えていってください。

(1) なるべく特徴のない七角形の図を描いてください。

(2) 七角形の頂点を 1 つ選び、選んだ頂点から出ていく対角線を何本か描いて、七角形をいくつかの三角形に分割してください。

(3) (2) では七角形に何本か対角線を描いていくつかの三角形に分割したはずです。七角形はいくつの三角形に分割されましたか。

(4) 七角形の内角の和は、何枚分の三角形の内角の和と同じですか。

(5) 七角形の内角の和は何度のはずですか。

答えを見る

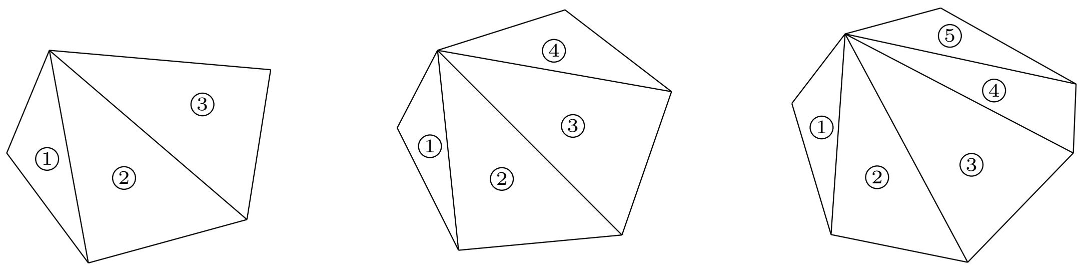
問 3. 例 1 の五角形の内角の和についての話が理解できた人のための問題です。

八角形の内角の和が何度になるのか、ここまで学んできた考えかたをまねして考えてください。

答えを見る

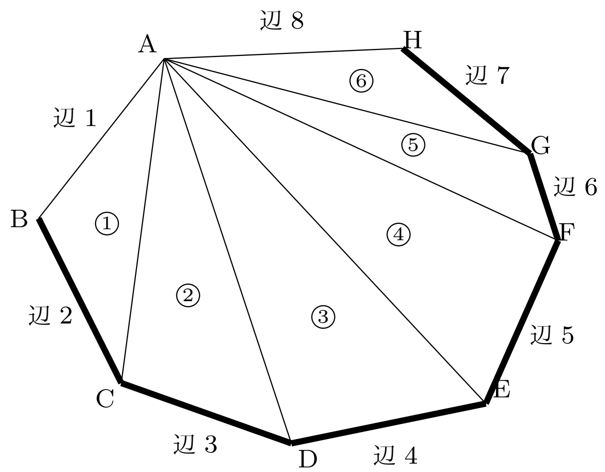
さて、これから五角形、六角形、七角形、八角形・・・なんてケチなことは言わずに、もっと一般に n 角形の和の話をしましょう。ここまで理解できている人は、「対角線を引いていくと何枚の三角形の分かれるのか」ということがとても重要になっていると気付い

たと思います。次の図を見てください。

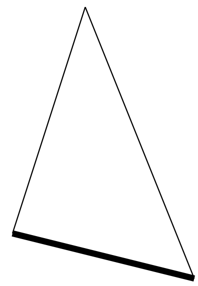


思い出してみると、たしか、五角形は 3 枚の三角形に分かれ、六角形は □ 枚の三角形に分かれ、七角形は □ 枚の三角形に分かれ、八角形は □ 枚の三角形に分かれましたね。(この文の空欄には正しい数を書いておいてください。) 何か、法則はあるのでしょうか。

注意深い人は、「ナントカ角形を分割してできる三角形の枚数は、ナントカより 2 少なくなっている」ということに気付いたと思います。でもどうして、いつも「ナントカより 2 少なくなっている」のでしょうか。例 1、問 1 から問 3 では、確かに、五角形や、六角形や七角形や八角形ではそうなっていました。では、九角形、十角形、十一角形、十二角形・・・でもそうなるのでしょうか。今の所、何の保証もないですよね。数学では証拠や理由を考えることが非常に重要です。これから理由を考えることにします。



理由を考えるため、まず手始めに八角形で探りを入れることにします。右の図を見てください。この図は、八角形が「頂点 A からでていく対角線」によって①から⑥までの 6 枚の三角形に分けられた所を描いたものです。またこの図では八角形の各辺に、辺 1、辺 2、辺 3・・・辺 8 と名前をつけました。(8 角形だから辺は 8 本あるんですよね。) また、ある理由があるので 8 本の辺のうち、辺 1 と辺 8 は細い線で描かれていて、辺 2 から辺 7 までは太い線で描れています。

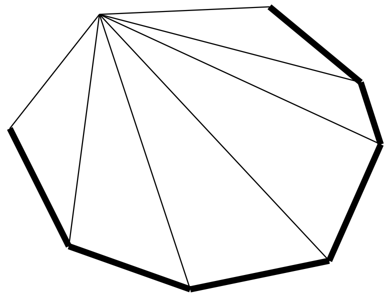


では、さっきの八角形の図と右の図をよく見てください。①から⑥までの 6 枚の三角形は、どれも右の図のように、太い辺 1 本と細い線 2 本（細い線はもとの八角形の辺のこともあれば、対角線のこともある）で囲まれてできていることがわかります。つまり、どの三角形にも必ず太い線で描かれた辺が 1 本あり、逆に太い線で描かれたどの辺もある三角形の辺になっているのです。どうしてこうなるのかというと、八角形の 8 本の辺のうち、2 本の辺（辺 1 と辺 8) を細い線で描いたからです。もし辺 1 と辺 8 も太く描いてしまっていたら、太い辺が 2 本ある三角形ができていたことでしょう。というわけで、太い線で描かれた辺の数と、三角形の数は同じということになります。ところで八角形では、太い線で描かれた辺は全部で何本あるのでしょうか。もちろんさっきの八角形の図を見て数えてしまえば、6 本であることがすぐわかるのですが、どうして 6 本なのか理屈で考えてみましょう。八角形には 8 本の辺があるわけですが、理由があって、そのうち 2 本の辺（辺 1 と辺 8) を細いくしないといけなかったのですよね。（そうしないと、太く描かれた辺と、三角形の数が同じにならないからですね。）ですから太い線で描かれた辺の本数は 8 ひく 2 を計算して、6 本であることがわかります。

ここまで八角形について考えてきたことは、八角形に限らず、すべてのナントカ角形について成り立つことが想像できると思います。念のため説明します。まず、ナントカ角形を、ある 1 つの頂点を決め、その頂点から出ていく対角線を描いて三角形に分割します。そして、ナントカ角形の辺を太く塗リます。ただし、ナントカ角形を分割してできたどの三角形も辺が 1 本だけ太くなるようにします。そうすると、対角線を出すために決めてた頂点とその頂点の両脇にある頂点を結んでいる辺だけは太く塗ることができません。つまり、ナントカ角形の辺のうち、必ず 2 本だけは太く塗ることができないのです。ところで、ナントカ角形を分割してできたそれぞれの三角形には必ず一本太く塗られた辺があり、逆に太く塗られたどの辺もある三角形の辺になっているのですするのですから、ナントカ角形を対角線で分割してできる三角形の数と太く塗られたナントカ角形の辺の数は同じです。ですから、ナントカ角形を対角線で分割してできる三角形の数は「ナントカひく 2」となるのです。

重要な事実：ナントカ角形を対角線で分けると

ナントカ角形を、ある 1 つの頂点から出る対角線で三角形に分けると、三角形の枚数は、ナントカひく 2 枚になる。



では、ナントカ角形の内角を全部たすと何度になるのでしょうか。

もうあなたは、ナントカ角形の内角を全部たすことと、分割してできた三角形の内角を全部たすことは結局同じだということを知っていますよね。ところでナントカ角形は対角線によって、ナントカひく 2 枚の三角形に分かれ、三角形 1 枚の内角の和は 180° なのですから、結局、ナントカ角形の内角の和は、

$$(\text{ナントカ} - 2) \times 180^\circ$$

ですよね。このことを一応次にまとめておきます。

やや重要な事実：ナントカ角形の内角の和

ナントカ角形の内角の和は、

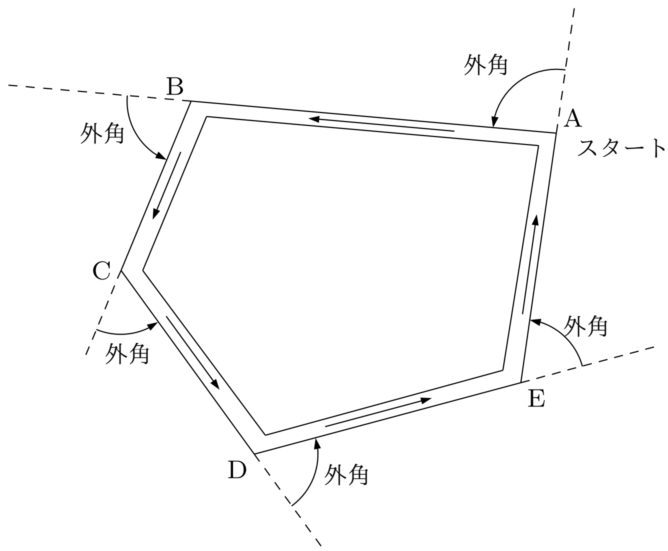
$$(\text{ナントカ} - 2) \times 180^\circ$$

である。

1.1.2　n 角形の外角を全部たすとどうなる？

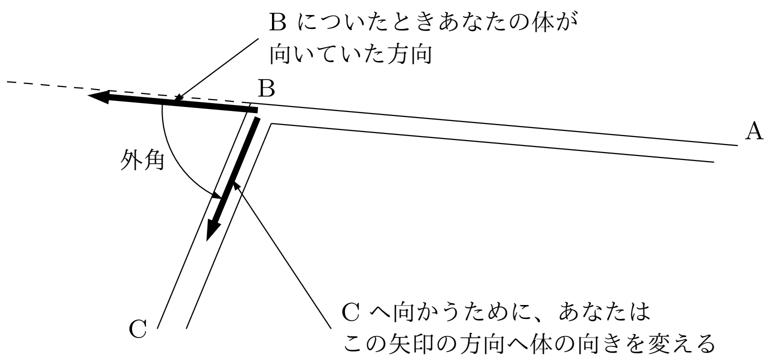
ためしに五角形で考えてみることにします。

右の図を見てください。これは五角形の形をしたランニングコースです。A からスタートして、B、C、D、E の順にまわり、最後に再び A へ戻ります。ではこのコースを走っていくのを想像してください。



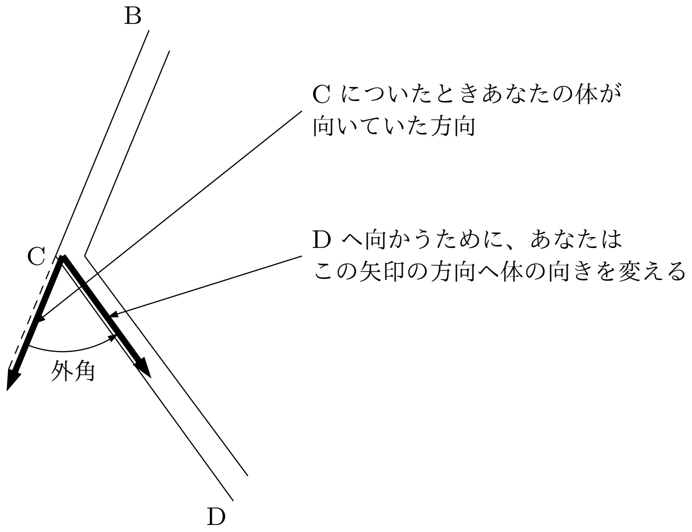
初めあなたは A にいて、体は B の方を向いています。そして B に向けて走りはじめます。するとそのうちに B へつきますが、あなたは B へつくと, 次に C へ向かうために体の向きを変えます。

右の図を見てください。この図を見ると、ランニングコースの頂点で、あなたはちょうど外角と同じ角度だけ、体の向きを変えることがわかります。



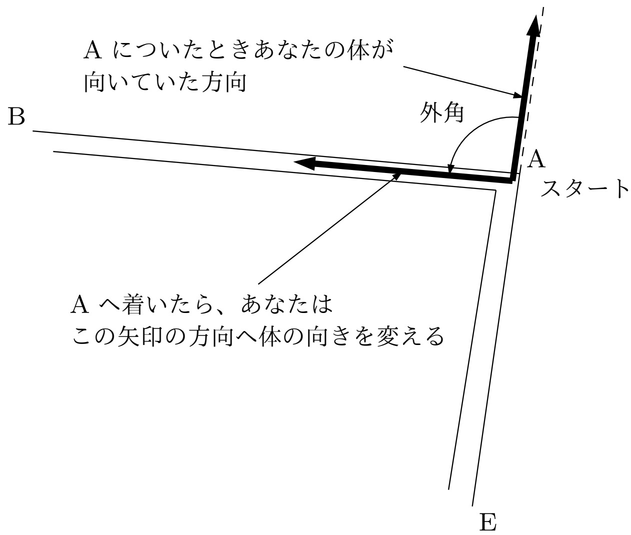
B で体の向きが変わったので、次は C へ向かって走ることにしましょう。するとそのうち C へ着きます。そして C では B で起きたことと同じようなことが起こります。

右の図を見てください。C に着くと、あなたはまた体の向きを変えるのです。やはりこのときも、ちょうど外角と同じ角度だけ体の向きを変えるのです。その結果あなたは D の方を向くことになります。



その後あなたは D に着くと、体の向きをちょうど外角と同じ角度だけ変え、E に着くと、体の向きをちょうど外角と同じ角度だけ変ます。そうすると、今あなたは A の方を向いていますね。そして A へ向かって走り出し、そのうち A へ着くのです。つまり、スタート地点に戻ってきたのです。ですが、これで終わりと思ってはいけません。

右の図を見てください。A に着いたら、A で体の向きを変えないと、A の所にある外角が無視されてしまうのです。ですから A でもちゃんと体の向きを変えてください。これで終わりです。そうすると、最後にあなたはどちらのほうを向いていることになるでしょうか。もちろん B の方を向いていますね。スタートしたとき、あなたの体は B の方を向いていました。そして、A に戻ってきて A の外角の分もちゃんと体の向きを変えると、あなたの体は B の方を向いているのです。ですから、ランニングコースを 1 周した結果、あなたの体は 1 回転したことになりますね。ということは、A、B、C、D、E の所にある外角をすべてたすと 360° になるわけです。どういうことかわかってもらえたでしょうか。



念のため、これまで説明してきたランニングコースの話について少し補足をしておきます。ランニングコースを走っていくと体は前に移動していきますが、この話では体の向きだけが大切なのですね。ですからこの話を考えるとき、あなたは部屋の中で、前に進まずに同じところで足ぶみをしながらランニングコースを走っているところを想像してもよいのです。そしてランニングコースのかどに来たと思ったとら、あなたは体の向きを次のかどの方向へ変えるのです。このときあなたは、そのかどにある外角と同じ角度だけ体の向きを変えているのです。このようなことを全てのかどについておこなえば（最後のかどである A でもちゃんと体の向きを変えるのを忘れないでくださいね)、最後にあなたは足ぶみをはじめたときと同じほうを向いているのです。ということは、ランニングコースのかどにある外角を全てたすと 360° ということになるのです。

問 4.　この問の前の五角形のランニングコースの説明が理解できた人のための問題です。

六角形の外角を全部たすと何度になるのか考えようと思います。

(1) なるべく特徴のない六角形の図を描いてください。

(2) (1) で描いた六角形のそれぞれの頂点にできている外角をわかりやすくするため、


外角
を図に付け加えてください。

(3) 頭の中で、(1) で描いた六角形の形をしたランニングコースを思い浮かべてください。

(4) ランニングコースを走っていくと、そのうち頂点に到着してあなたは体の向きを変えますね。そのとき、向きを変えた角度は何の角度と同じになりますか。

(5) ランニングコースを 1 周してスタート地点に戻った時も体の向きをちゃんと変えると、最後にあなたはどちらの方を向いていることになりますか。

(6) 結局あなたは何回転したことになりますか。

(7) 六角形の外角の和は何度になると思いますか。

答えを見る

ここまでの話が良く理解できた人は、もう何角形であろうが外角の和はどうなるのか見抜けたことでしょう。ランニングコースが何角形でも、結局最後にはスタートしたときと同じ方を向いているわけですよね。ですから、

> やや重要な事実：ナントカ角形の外角の和
>
> ナントカ角形の外角の和は必ず $360°$ である。

ということですね。

さて、ここまでは理屈だけで、ナントカ角形の外角の和が何度になるのか考えてきましたが、今度は計算と理屈をうまく使ってナントカ角形の外角の和を調べる練習をしたいと思います。

例題 1　計算と理屈をうまく使って、五角形の外角の和が何度になるのか調べてください。

解答

右の図を良く見てください。

A の所の内角 + A の所の外角 = $180°$

ですね。

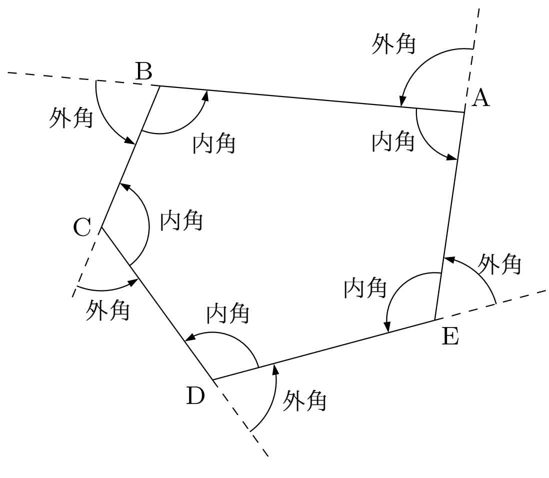
同じように

B の所の内角 + B の所の外角 = $180°$

C の所の内角 + C の所の外角 = $180°$

D の所の内角 + D の所の外角 = $180°$

E の所の内角 + E の所の外角 = $180°$



となっていますよね。

ということは、A、B、C、D、E の所にある内角と外角を全部たすと $180°$ が 5 個分なので $900°$ になるはずです。つまり、

$$(\text{五角形の内角の和}) + (\text{五角形の外角の和}) = 900 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

となっているわけです。

ところで以前、ナントカ角形の内角の和のことを学びましたね。たしか、ナントカ角形の内角の和は、「ナントカ」から「2」をひいてから 180 をかければよいのでしたね。この問題では五角形なので $3 \times 180 = 540$ ですから、

$$\text{五角形の内角の和} = 540 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

ですよね。

よって、①、②より、

$$540 + (\text{五角形の内角の和}) = 900$$

となっているはずです。ということは、

$$\text{五角形の内角の和} = 900 - 540 = 360^\circ$$

ということですね。

問 5. 例題 1 が理解できた人のための問題です。

六角形の外角の和を計算と理屈をうまく使って求めようと思います。次の文の空欄に正しい数や言葉を書きなさい。

六角形のそれぞれの頂点のところでは、内角と外角をたすと $\boxed{}^\circ$ です。六角形には頂点が 6 個あるので、六角形の内角と外角をすべてたすと 180° が $\boxed{}$ 個あることになり $\boxed{}^\circ$ となります。一方、ナントカ角形の内角の和について学んだことを思い出すと、六角形の内角の和は $\boxed{}^\circ$ です。念のため、ここまでの話を整理すると、

$$(\text{六角形の内角の和}) + (\text{六角形の外角の和}) = \boxed{}^\circ$$

$$\text{六角形の内角の和} = \boxed{}^\circ$$

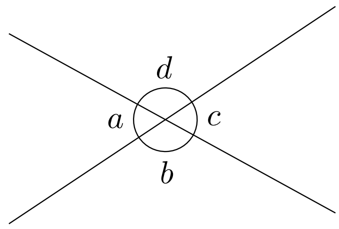
となっているわけです。この二つのことをよく考えれば、「六角形の外角の和」だけの分で $\boxed{}^\circ$ になっていることがわかります。

答えを見る

1.2　対頂角、同位角、錯角、平行線と角

まず初めに、いくつか専門用語を説明します。

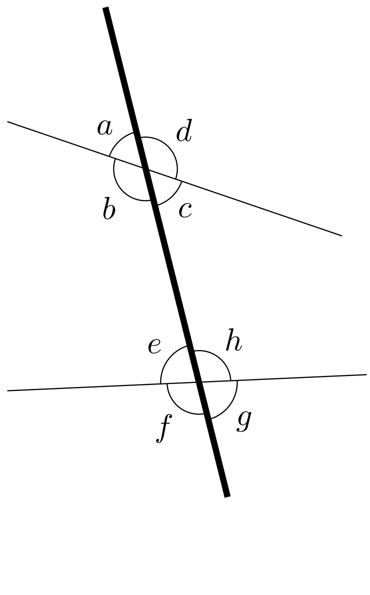
1.2.1　対頂角ってなに？



右の図を見てください。2 つの直線が交わっています。2 つの直線が交わると、2 つの直線の交点の所に角が必ず 4 つできます。この図では説明していく都合で、4 つの角に a、b、c、d という名前をつけました。

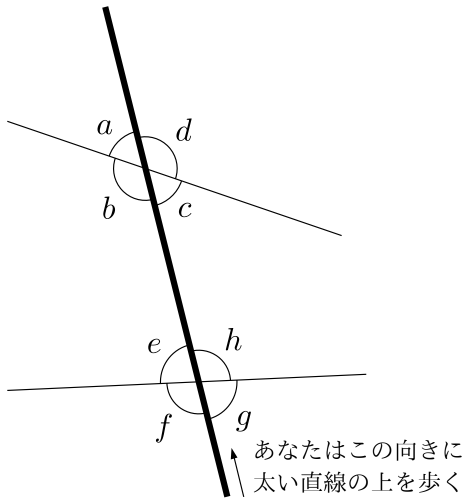
この図の a と c の角のように、向かい合っている角のことを**対頂角**と呼びます。b と c の角も向かい合っているので対頂角です。

1.2.2　同位角、錯角ってなに？



初めに直線が 2 本あり、そこにさらに別の直線が交わっているとします。つまり右の図のようになっているとします。初めにあった 2 本の直線と、その 2 本の直線に交わる別の直線をはっきり区別するため、この図では、初めにあった 2 本の直線は細い線で描かれ、その 2 本の直線に交わる別の直線は太い線で描かれています。この図を見ればわかりますが、このようなとき、角が必ず 8 個できます。説明のの都合で、この図では 8 個の角に a、b、c、d、e、f、g、h という名前をつけました。

右の図を見てください。さっきの図をもう 1 度描いておきました。この図の e と a のような位置関係にある角を**同位角**と呼びます。わかってもらえたでしょうか。たぶん、「e と a のような位置関係」なんていわれても「？？」と思った人もいますよね。ですから、このことについて少し説明しましょう。

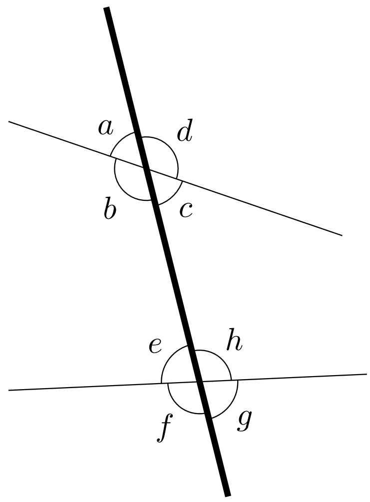


もう一度右の図を見てください。あなたは今、太い直線の上を、下から上へ向かって歩いて行くとします。そうすると、そのうち e、f、g、h という 4 つの角ができている十字路に着きます。このとき、角 e はあなたから見て左側前方にあるはずです。ではさらに、(体の向きは変えないですっと前を向いたまま) 太い直線の上を進むことにしましょう。するとそのうち、a、b、c、d という 4 つの角ができている十字路に着きます。このとき、角 a はあなたから見て左側前方にあるはずです。つまり、それぞれの十字路に着いたとき、e と a はあなたから見て同じ位置に見えるのです。ですから e と a は同位角と呼ばれるのです。

この説明がわかった人は、e と a のほかにも、この図には同位角があることがわかるでしょう。そうです、f と b も同位角、g と c も同位角、d と h も同位角ですね。

では次に、「錯角とは何か」という話をしましょう。

右の図を見てください。何度も出てきた図です。この図の c と e のような位置関係にある角を**錯角**と呼んでいます。わかってもらえたでしょうか。たぶん、「c と e のような位置関係」なんていわれても「？？」と思った人もいますよね。ですから、このことについて少し説明しましょう。



「錯」という漢字には「かわるがわる」とか「互いに」という意味があります。「交錯した」とか「互い違いになっている」といっても良いかもしれません。では、さっきの図を見てください。昔の人に

とって、この図の c の角と e の角の位置は「互い違いになっている」感じがしたのでしょう。きっと今の人も「ああ、こういうの、互い違いって言うことあるよな」って思うのではないでしょうか。ここまでは感覚的な説明ですが、これからもう少し、数学の立場からきちんとした説明をすることにします。もう一度、さっきの図の角 c と角 e に注目してください。初めにあった 2 つの直線（つまり細く描かれた 2 つの直線）だけを見ると、c と e はどちらもその 2 つの直線にはさまれている場所にあります。また、初めにあった 2 つの直線に交わっている別の直線（つまり太く描かれた直線) だけを見ると、c と e はその直線について反対側にあります。これが c と e の位置関係が持っている特徴です。こういう位置関係になっている 2 つの角を錯角と呼んでいるのです。ですから、c と e のほかにも錯角があります。どことどこの角か気付きましたか？

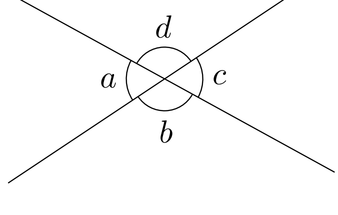
「初めにあった 2 つの直線（つまり細く描かれた 2 つの直線）だけを見ると、どちらもその 2 つの直線にはさまれている場所にあり」、「初めにあった 2 つの直線に交わっている別の直線（つまり太く描かれた直線) だけを見ると、その直線について反対側にある」ような 2 つの角を錯角というのですよ。この図をよく見ると、b と h もそうなっていますよね。ですから b と h は錯角なのです。

1.2.3　対頂角についての重要な事実

20 ページで、対頂角とは何なのか学びましたね。ここではこれから、対頂角が持っている重要な性質を学びます。

重要な事実：対頂角の持っている性質

対頂角は絶対に同じ大きさになっている。つまり右の図で a と c は同じ大きさになっていて、b と d も同じ大きさになっている。

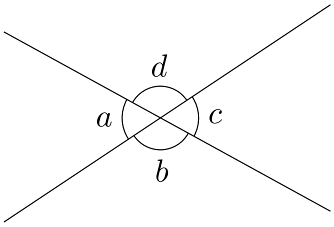


もしかして、「そんなの当たり前じゃん」なんていった人はいませんか。当たり前じゃないんですよ。これまでも何度か言ってきましたが、数学では証拠がないと、正しいこととは認めてもらえないのでしたね。当たり前と思えることでも、証拠を見つける必要があるのです。ですからこれから証拠を見つけることにします。

対頂角は絶対に同じ角度になってしまう証拠

右の図を見てください。ここであなたに質問したいことがあります。

質問：a と d をたすと何度になりますか？



答えはもちろん 180° ですね。だって、a と d をあわせるとまっすぐになるわけですから。というわけで、

$$a + d = 180 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

であることは疑いようがありません。

今度は c と d に注目してください。やはり c と d をあわせるとまっすぐになるのですから、

$$c + d = 180 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

であることは疑いようがありません。

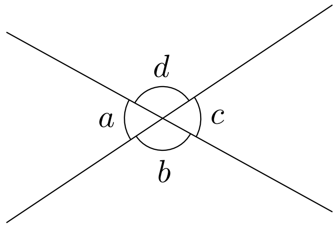
ところで①と②の話に出てくる d はもちろん同じものです。この d を、a にたしても c にたしても 180 になってしまうといっているわけです。だとしたら、a と c は等しいはずですよね。つまり、

$$a = c$$

であることが判明しました。b と d が等しいということも、同じようにして説明できます。

というわけで、対頂角は絶対に同じ角度になっているのです。

問 6. 右の図のように 2 つの直線が交わって、交点のところに 4 つの角 a、b、c、d ができているとします。このとき実は b と d は同じ角度になっているのですが、証拠を見せようと思います。次の文の空欄に正しい記号や言葉を書きなさい。



a と b をあわせると $\boxed{}$ ぐになるわけですから、

$$\boxed{} + \boxed{} = 180 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

であることは疑いようがありません。

今度は $\boxed{}$ と d に注目してください。やはり $\boxed{}$ と d をあわせるとまっすぐになるのですから、

$$\boxed{} + d = 180 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

であることは疑いようがありません。

ところで①と②の話に出てくる $\boxed{}$ はもちろん同じものです。この $\boxed{}$ を、b にたしても d にたしても 180 になってしまうといっているわけです。だとしたら、$\boxed{}$ と $\boxed{}$ は等しいはずですよね。つまり、

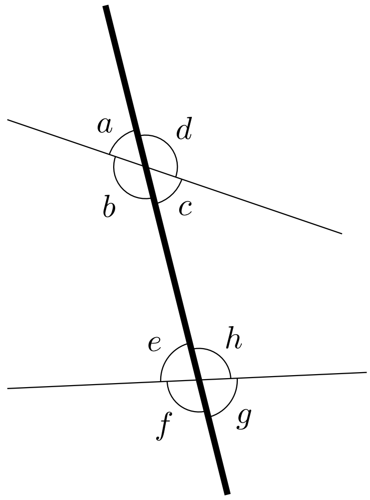
$$b = d$$

であることが判明しました。

答えを見る

同位角、錯角、平行線の関係

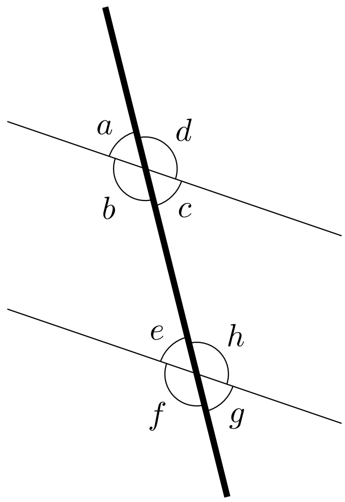
20 ページで、「同位角とは何か」ということと、「錯角とは何か」ということを学びました。実は、同位角や錯角は、2 つの直線が平行になるのかならないのかということと密接に関係しています。このことをこれから詳しく学習します。



右の図を見てください。初めに直線が 2 本あり、そこにさらに別の直線が交わっている図ですね。これまでと同じように、初めにあった 2 本の直線と、その 2 本の直線に交わる別の直線をはっきり区別するため、この図では、初めにあった 2 本の直線は細い線で描かれ、その 2 本の直線に交わる別の直線は太い線で描かれています。

この図では、角 b と角 f は同位角ですね。そして図を見る限り、b と f の大きさは違っていそうですよね。心配な人は分度器を持ってきて b と f の大きさを測ってみてください。違う大きさであることが確かめられるはずです。(同位角という言葉を聞いた瞬間に、「大きさは同じ」って信じ込んでいる人がいますが、そんなわけないですよね。)

今度は、この図の角 c と角 e に注目してください。角 c と e は錯角ですよね。そして図を見る限り、c と e の大きさは違っていそうですよね。心配な人は分度器を持ってきて c と e の大きさを測ってみてください。違う大きさであることが確かめられるはずです。(錯角という言葉を聞いた瞬間に、「大きさは同じって信じ込んでいる人がいますが、そんなわけないですよね。)

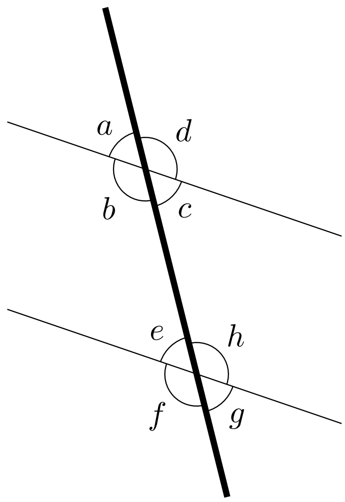


では次に右の図を見てください。この図も、初めに直線が 2 本あり、そこにさらに別の直線が交わっている図です。これまでと同じように、初めにあった 2 本の直線と、そのその 2 本の直線に交わる別の直線をはっきり区別するため、この図では、初めにあった 2 本の直線は細い線で描かれ、その 2 本の直線に交わる別の直線は太い線で描かれています。ところでこの図、さっきまで見ていた図と少し違いますね。実は気を使って、初めにあった 2 本の直線（つまり細い線で描かれた 2 本の直線）が平行になるように図を描いたのです。

ではまず、角 b と角 f に注目してください。角 b と角 f は同位角ですね。そして図を

見ると、どうも、b と f の大きさは同じっぽく見えませんか？心配な人は分度器を持ってきて b と f の大きさを測ってみてください。きっと、同じ大きさであることが確かめられるはずです。

今度は、この図の角 c と角 e に注目してください。角 c と e は錯角ですよね。そして図を見ると、どうも、c と e の大きさは同じっぽく見えませんか？心配な人は分度器を持ってきて c と e の大きさを測ってみてください。同じ大きさであることが確かめられるはずです。



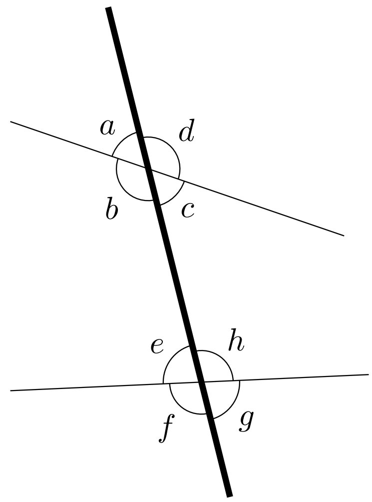
では最後に右の図を見てください。「あれっ、さっきの図と同じじゃん」と思った人も多いことでしょう。ですが、さっきの図とは違うのです。どういうことか説明していきます。この図も、初めに直線が 2 本あり、そこにさらに別の直線が交わっている図です。これまでと同じように、初めにあった 2 本の直線と、その 2 本の直線に交わる別の直線をはっきり区別するため、この図では、初めにあった 2 本の直線は細い線で描かれ、その 2 本の直線に交わる別の直線は太い線で描かれています。ここまではさっきの図と同じですが、実はこの図は気を使って、同位角である b と f が同じ大きさになるように描いたのです。

するとどうでしょう。なんとなく「初めにあった 2 本の直線（つまり細く描かれた 2 本の直線）」が平行になっているように見えませんか？平行かどうかを直接確かめる道具はないので少し困るのですが、細く描かれた 2 本の直線はちゃんと平行になっているのです。ここでは、同位角である b と f が同じ大きさになるように描いた場合の話をしましたが、例えば、錯角である c と e が同じ大きさになるように描いた場合も同じことがおこります。つまり、錯角である c と e が同じ大きさになるように描くと、「初めにあった 2 本の直線（つまり細く描かれた 2 本の直線）」は平行になるのです。

さてここまでの話、わかってもらえてでしょうか。今学んだ話は、これからとても大切になります。そこで、まとめを作っておきます。

驚くべき事実：同位角または錯角の大きさは同じ？ 2 直線は平行？

右の図のように、初めに直線が 2 本あり、そこにさらに別の直線が交わっているとします。（これまでと同じように、初めにあった 2 本の直線と、その 2 本の直線に交わる別の直線をはっきり区別するため、この図では、初めにあった 2 本の直線は細い線で描かれ、その 2 本の直線に交わる別の直線は太い線で描かれています。）



このとき、実は次のような驚くべき事実が成り立っています。

(1) もし初めにあった 2 直線が平行になっているとしたら、同位角は同じ大きさになっています。つまり、図で、細く描かれている 2 直線が平行になっているときは、a と e は等しく、b と f は等しく、d と h は等しく、c と g は等しくなっていると断定してよいのです。

(2) もし初めにあった 2 直線が平行になっているとしたら、錯角は同じ大きさになっています。つまり、図で、細く描かれている 2 直線が平行になっているときは、b と h は等しく、c と e は等しくなっていると断定してよいのです。

(3) もしどこかの同位角が同じ大きさになっているとしたら、初めにあった 2 直線は平行になっています。つまり、図で、例えば a と e が等しくなっているときは、細く描かれている 2 直線は平行になっていると断定してよいのです。

(4) もしどこかの錯角が同じ大きさになっているとしたら、初めにあった 2 直線は平行になっています。つまり、図で、例えば b と h が等しくなっているときは、細く描かれている 2 直線は平行になっていると断定してよいのです。

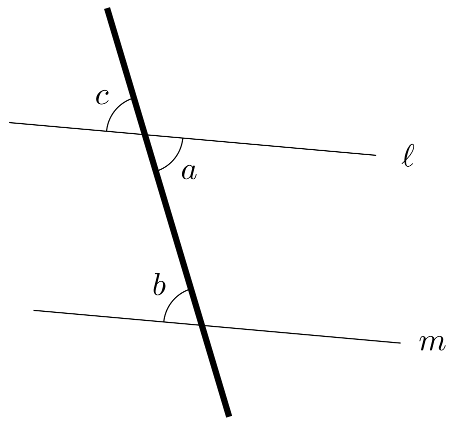
さて、これからこの驚くべき事実について証拠を見せなくてはいけないのですが、(1)

と (3) については証拠を見せるのはやめておきます。実は、その話をしていくと恐ろしいことになってしまうのです。ですから、ここでは (1) と (3) は信じることにします。というわけで、ここから先の話は、「(1) と (3) を信じた上での話」です。とはいえ、(1) と (3) を信じることにすると、(2) や (4) が正しいという証拠を見せることができるのです。

初めにあった 2 直線が平行ならば、錯角は等しいということの証拠

この話に入る前に念のため確認しておきます。さっき、私たちは、「初めにあった 2 直線が平行になっているとしたら、同位角は同じ角度になっている」ということを信じることにしたのでしたね。では本題に入ることにしましょう。

右の図を見てください。これまでと同じように、初めにあった 2 本の直線と、そのその 2 本の直線に交わる別の直線をはっきり区別するため、この図では、初めにあった 2 本の直線は細い線で描かれ、その 2 本の直線に交わる別の直線は太い線で描かれています。説明の都合で、初めにあった 2 本の直線にはそれぞれ ℓ、m という名前をつけました。a と b という名前がついている角が錯角になっています。ですから、これから、



ℓ と m が平行になっているとしたら、角 a と角 b の大きさは等しくなってしまう

という主張の証拠を探していくことにします。

この図にはなにげに c という角が出てきています。実は、この c という角を話の中に登場させるととても活躍してくれるのです。ではここで、あなたに質問です。

質問 1：角 a と角 c の大きさは何か関係があると思いますか？

わかりますよね。前に対頂角の話を学習したのですから。対頂角って必ず等しいんでしたよね。この図では、角 a と角 c は対頂角になってますね。ですから、

証拠 1：角 a と角 c は対頂角なので等しい

ということになります。

ではまたあなたに質問です。

質問 2：角 b と角 c の大きさは何か関係があると思いますか？

わかりますよね。たしか、この話に入る前に、あることを信じることにしてありましたね。そうです、「初めにあった 2 直線が平行になっているとしたら、同位角は同じ角度になっている」ということを信じることにしてありましたね。この図では、角 b と角 c は同位角になっています。そしてこの話では、初めにあった 2 直線 ℓ と m は平行になっているのでした。ですから、

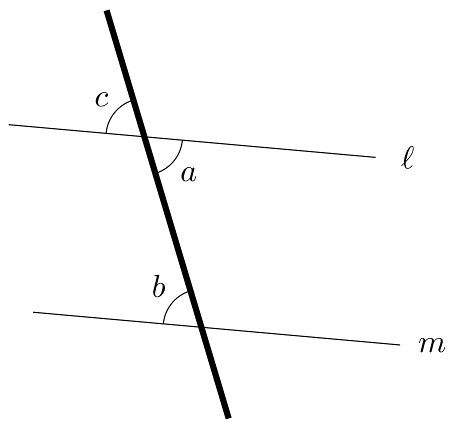
証拠 2：ℓ と m は平行なので、同位角である角 b と角 c は等しい

ということになるのです。

証拠 1 と証拠 2 にはどちらにも角 c が登場しています。このことに注意すると、証拠 1 と証拠 2 から、「結局角 a と角 b は同じ大きさ」ということが結論できますね。

錯角が等しくなっていたら、初めにあった 2 直線は平行になっているということの証拠

この話に入る前に念のため確認しておきます。さっき、私たちは、「同位角が同じ角度になっているとしたら、初めにあった 2 直線は平行になっている」ということを信じることにしたのでしたね。では本題に入ることにしましょう。



右の図を見てください。これまでと同じように、初めにあった 2 本の直線と、そのその 2 本の直線に交わる別の直線をはっきり区別するため、この図では、初めにあった 2 本の直線は細い線で描かれ、その 2 本の直線に交わる別の直線は太い線で描かれています。説明の都合で、初めにあった 2 本の直線にはそれぞれ ℓ、m という名前をつけました。a と b という名前がついている角が錯角になっています。ですから、これから、

角 a の大きさと 角 b の大きさが等しくなっているとしたら、ℓ と m が平行になってしまう

という主張の証拠を探していくことにします。

またまたなにげに c という角が出てきていることに注目しておきましょう。ここから先は、あなたに穴埋めをしてもらいます。

まず、

証拠 1：対頂角は必ず等しいので、この図の角 a と角 $\boxed{\quad}$ は等しい

ということがわかります。

もともとこの話では錯角である角 a と角 $\boxed{\quad}$ は等しいのでしたね。　ということは、このことを証拠 1 とあわせて考えると、

証拠 2：角 b と角 $\boxed{\quad}$ は等しい

ということがわかります。

ここでもう一度図をよく見てみましょう。証拠 2 で出てきた角 $\boxed{\quad}$ と角 c は同位角ですね。ですから、この話では同位角である b と c は $\boxed{\qquad\quad}$ ということになります。ところで、たしか、この話に入る前に、あることを信じることにしてありましたね。そうです、「同位角が同じ角度になっているとしたら、初めにあった 2 直線は平行になっている」ということを信じることにしたのでした。ですから、

同位角である b と c が等しいので、ℓ と m は $\boxed{\qquad\quad}$

と結論できます。

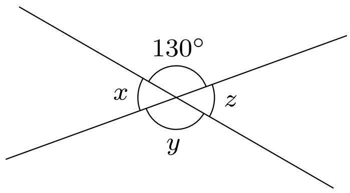
1.2.4　対頂角、同位角、錯角を利用して角度を求める練習をしよう

私たちは、「対頂角の持っている性質」と、「同位角、錯角の大きさと 2 直線が平行かどうかということには関係がある」ということを学びました。そこでこれから、このような

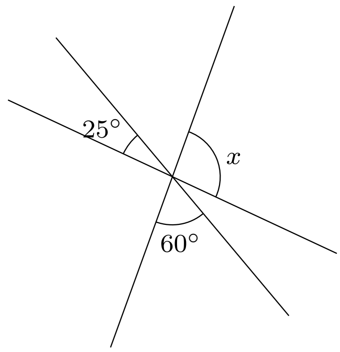
ことを利用して角度を求める練習をしようと思います。

問 7. 次の問に答えなさい。

(1) 次の図の $\angle x$、$\angle y$、$\angle z$ の大きさを求めなさい。

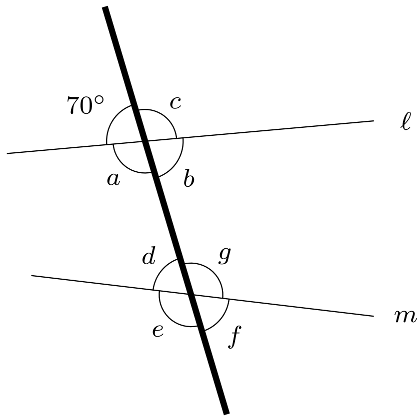


(2) 次の図の $\angle x$ の大きさを求めなさい。



答えを見る

問 8. 右の図を見てください。2 本の細い直線 ℓ、m に太い直線が交わり、交点の所に角ができています。以下の問に答えなさい。



(1) $\angle a$ の同位角はどれですか。

(2) $\angle c$ の同位角はどれですか。

(3) $\angle b$ の錯角はどれですか。

(4) もし ℓ と m が平行だったら、次の角の大きさはそれぞれ何度になりますか。

ア. $\angle b$　　イ. $\angle d$

ウ. $\angle g$　　エ. $\angle a + \angle d$

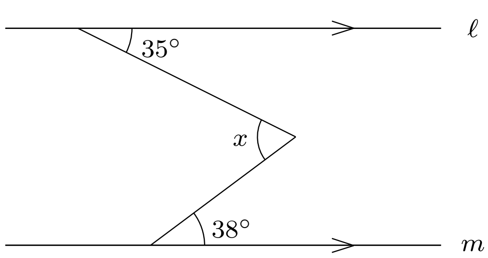
(5) もし $\angle b = \angle d$ だったら、ℓ と m は平行ですか。

(6) もし $\angle a = \angle d$ だったら、ℓ と m は平行ですか。

(7) もし $\angle a = \angle g$ だったら、ℓ と m は平行ですか。

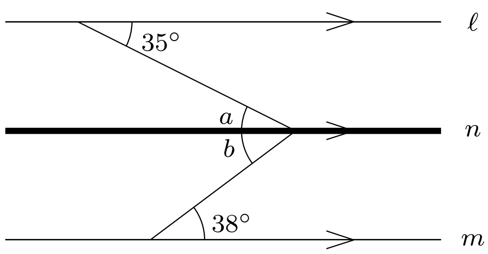
答えを見る

例題 2　右の図で、直線 ℓ と直線 m は平行になっているとします。このとき $\angle x$ の大きさを求めなさい。



解答

図形の問題では補助線を引いてみると解き方が思い浮かぶことがあります。この問題では、次の図のように、 $\angle x$ のとがっている所を通るような直線をひいてみます。ただし、ℓ や m に平行になるようにひきます。この図では、説明の都合で今



引いた直線に n という名前をつけました。また $\angle x$ は補助線で 2 つに分かれたので、この図のように $\angle a$、 $\angle b$ という名前をつけました。

さてここで、重要な事実を思い出してください。たしか、「ナントカとナントカが平行だったら、錯角は等しい」という話がありましたね。この図では、直線 ℓ と直線 n は平行です。また、35° の角と $\angle a$ は錯角の関係にあります。ということは、

$$a = 35^\circ$$

と判断してよいですね。同じように考えると、直線 m と直線 n は平行なのですから、錯角の関係にある 38° の角と $\angle b$ は等しいはずですね。つまり、

$$b = 38^\circ$$

と判断してよいですね。

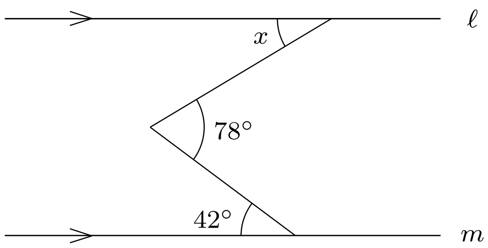
ところで、 $\angle x$ の大きさを知りたければ、 $\angle a$ と大きさ $\angle b$ の大きさを合計すればよいですよね。ですから、

$$\angle x = \angle a + \angle b = 35^\circ + 38^\circ = 73^\circ$$

となりこの問題は解決しました。

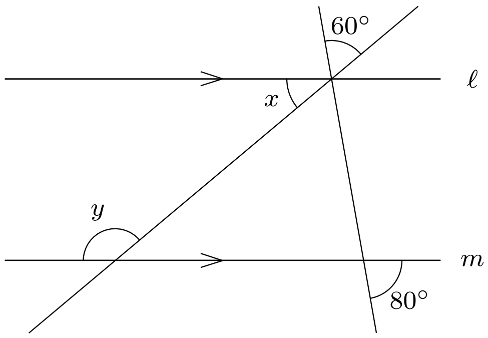
補足：この解答では、$\angle x$ のとがっている所を通り ℓ や m に平行になるような直線を補助線として描きましたが、これとは違う補助線を引いてこの問題を解決することもできます。あなた自身でいろいろと試してみてください。

問 9. 右の図で、直線 ℓ と直線 m は平行になっているとします。このとき $\angle x$ の大きさを求めなさい。



答えを見る

問 10. 右の図で、直線 ℓ と直線 m は平行になっているとします。このとき $\angle x$ と $\angle y$ の大きさを求めなさい。



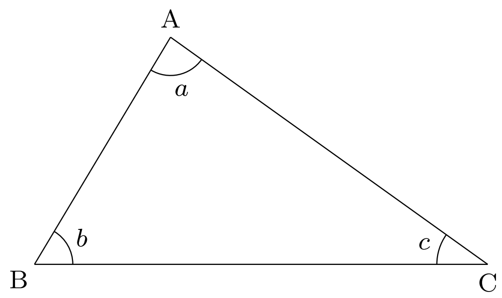
答えを見る

1.3　三角形の内角と外角

私たちはすでに 7 ページから始まる 1.1 節で、多角形の内角と外角の和について学んでいます。しかしそのとき、「三角形の内角の和は $180°$ である」ということの証拠は見つけませんでした。(「三角形の内角の和は $180°$ である」ということって、当たり前じゃぁないんですよ。証拠、必要なんですよ。)「三角形の内角の和は $180°$ である」ということをとりあえず信じることにすると、四角形、五角形、六角形・・・の内角の和や外角の和が求められるという話を学んだのでしたね。そこでいよいよ、「三角形の内角の和は $180°$ である」ということの証拠を見つけようと思います。平行線と角の関係を正しく学習した人

は、「三角形の内角の和は 180° である」ということを証明できるのです。

1.3.1　三角形の内角の和は 180° であるということを証明してみよう



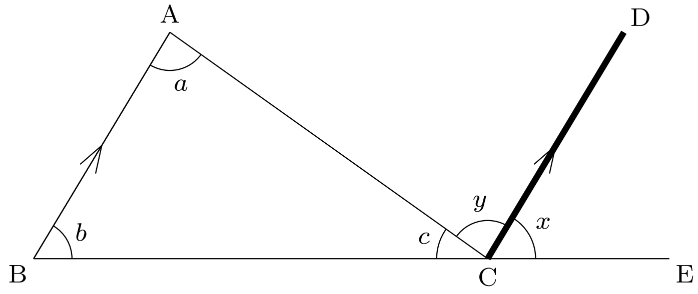
右の図を見てください。特に特徴のない、ありふれた三角形を描いておきました。ここではこの三角形の頂点に A,、B、C という名前をつけ、この三角形を三角形 ABC と呼ぶことにします。また頂点 A の所にできている角の大きさを a、頂点 B の所にできている角の大きさを b、頂点 C の所にできている角の大きさを c という記号であらわすことにします。

これから私たちは、「三角形の内角の和は 180° である」ということを証明していきます。ですから、さっきの三角形 ABC で、

$$a + b + c = 180$$

となっている証拠をこれから見つけるわけです。

そこで、補助線を引いてみようと思います。どんな補助線を引くのかこれから説明します。まず、辺 BC を C より向こう（つまり右のほう）へまっすぐ伸ばします。そして、点 C から伸びていくまっすぐな線を、辺 AB に平行になるように描くのです。図をわかりやすくするため、「辺 AB に平行になっている点 C から伸びていくまっすぐな線」を太く描いておきます。すると右の図のようになります。今描いた 2 本の補助線はこれから証拠を見つけていくとき、とても活躍してくれるのです。

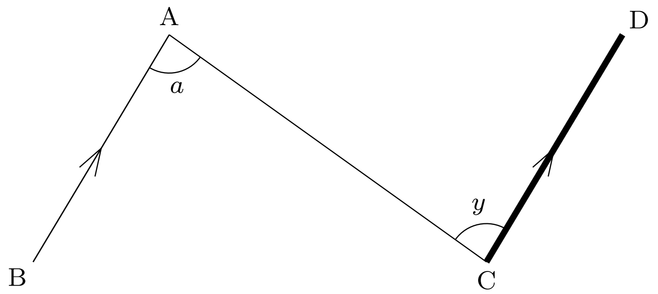


　ではまず、「辺 AB」と「頂点 C から伸びていく直線（つまり太い線）」にさらに「別の直線 BC」が交わっていることに注目しましょう。右の図を見てください。わかりやすくするため、さっきの図から注目してほしい所だけを書いておきました。いま、角 b と角 x は同位角の関係にありますよね。また、辺 AB と太い線は平行になっているのですよね。ということは、以前 27 ページで学んだ驚くべき事実のうち「2 つの直線が平行だったら、同位角は等しい」を思い出してみると、

$$b = x \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

であることがわかります。

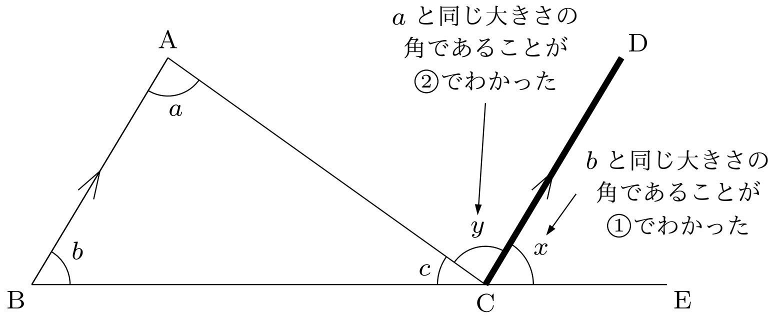
　今度は、「辺 AB」と「頂点 C から伸びていく直線（つまり太い線）」にさらに「別の直線 AC」が交わっていることに注目しましょう。右の図を見てください。わかりやすくするため、さっきの図から注目してほしい所だけを書いておきました。今、角 a と角 y は $\boxed{}$ 角の関係にありますよね。また、辺 AB と太い線は $\boxed{}$ になっているのですよね。（空欄に正しい言葉を書いておいてください。）ということは、以前 27 ページで学んだ驚くべき事実のうち「2 つの直線が平行だったら錯角は等しい」を思い出してみると、



$$a = y \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

であることがわかります。

ここまで判明したことを右の図にまとめておきます。



この図で点 C の所を見てください。「角 c」と「a と同じ大きさの角」と「b と同じ大きさの角」をあわせるとまっすぐになっていますよね。ということは、

$$a + b + c = 180$$

であるということですね。これで「三角形の内角の和は 180° である」ということの証拠が見つかりました。

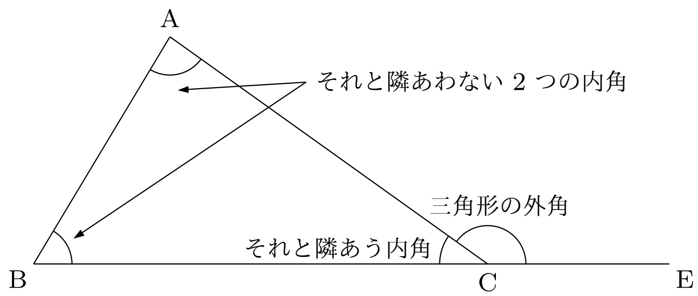
1.3.2　三角形の外角と内角の間にはある深い関係がある

昔の人が次のようなことを発見しました。それは・・・

三角形の外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しい

ということです。言っている意味わかりましたか？

この日本語、「よくわからなーい」っていう人多いんですよね。でも図をちゃんと描いて、よく意味を考えてくださいね。図を使って、どこの話をしているのか 1 つ 1 つ確認すればきっとわかりますよ。右の図を見てください。三角形 ABC がありますね。「三角形の外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しい」といっているわけですが、



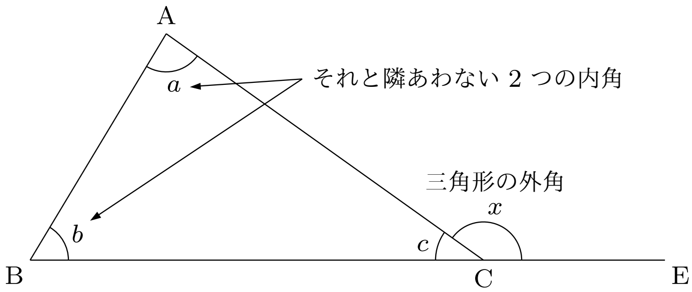
この図では頂点 C の所にできている外角に注目してみました。そうすると、「それ」というのは「頂点 C の所にできている外角」なのですから、「それに隣あわない2 つの内角」というのは「頂点 A の所にできている内角」と「頂点 B の所にできている内角」ということになりますね。これでどこの話をしているのかわかってもらえたと思います。そして、

昔の人の発見したことによると、「頂点 C の所にできている外角」は、「頂点 A の所にできている内角」と「頂点 B の所にできている内角」の和と同じになっているというのです。でもこれ、本当なんでしょうか？

何度も言っているとおり、数学では証拠のないことは正しいとは認めてもらえません。ですから証明できるかチャレンジしてみることにしましょう。

「三角形の外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しい」ということの証明

右の図を見てください。説明のために、角に a、b、c、x という名前をつけました。



これから、

$a+b$ を計算すると x と同じになる

ということの証拠を見つければよいのですよね。では、ここからあなたに穴埋め形式で考えてもらうことにしましょう。空欄に正しい言葉、文字、数を記入していってください。

まず、頂点 C のまわりに注目しましょう。角 c と角 x をあわせるとまっすぐになるのですから、

$$\boxed{\quad}+c=180 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

であることがわかりますね。

次に、「三角形の内角の和は必ず 180° になっている」ということを思い出すと、

$$\boxed{\quad}+\boxed{\quad}+c=180 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

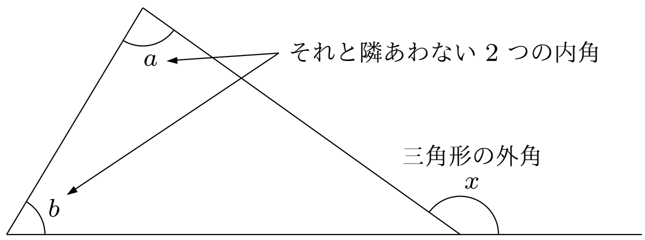
であることがわかりますね。

ところで、証拠①と②にはどちらも $\angle c$ が出てきます。証拠①では、「$\boxed{\quad}$ と角 c をあわせると 180° だよ」といっていて、。証拠②では、「$\boxed{\quad}+\boxed{\quad}$ と角 c をあわせると

180° だよ」といっているわけです。だとしたら、$\boxed{\quad}$ と $\boxed{\quad}+\boxed{\quad}$ は等しいはずですね。これで「$a+b$ を計算すると x と同じになる」ということの証拠が見つかりました。

重要な事実：三角形の外角と内角の間にある深い関係

どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっています。つまり、右の図では、例えば、



$$x = a + b$$

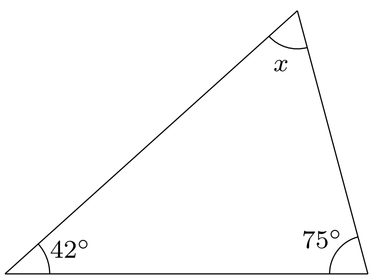
が成り立っているのです。

問 11. 今学んだばかりの重要な事実、つまり「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっているという主張」の証明を覚えて、何も見ないでも作文できるようにしなさい。

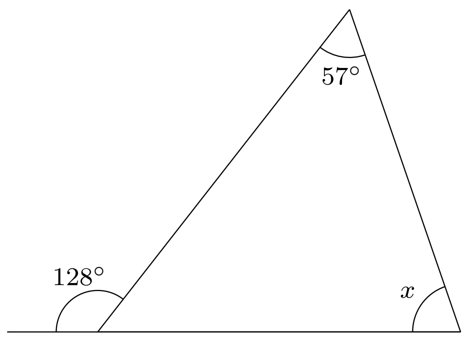
答えを見る

問 12. 次の図の $\angle x$、$\angle y$ の大きさを求めよ。

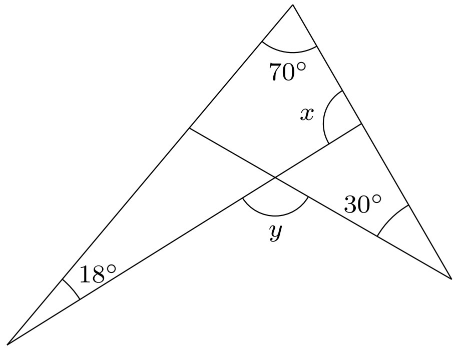
(1)



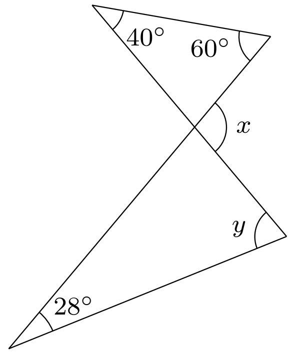
(2)



(3)



(4)

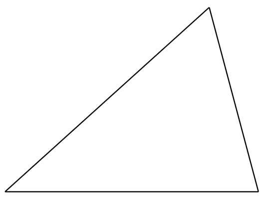


答えを見る

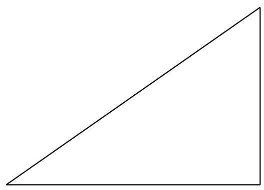
1.4　三角形の角に注目すると、三角形は 3 種類に分けられる

ひとくちに「三角形」といっても、いろいろな三角形があります。次の図を見てください。

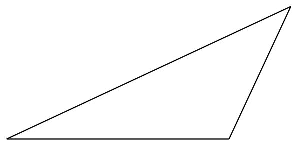
タイプ 1



タイプ 2



タイプ 3

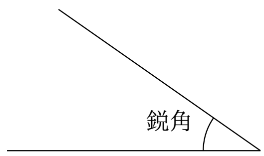


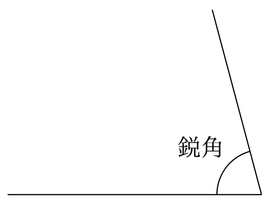
今見てもらった 3 つの三角形は、「ある基準」で 3 つのタイプに分けてあります。どんなことを基準にしたのかわかりますか？これから説明することにしましょう。

実は、さっき見てもらった 3 つの三角形は「角の大きさ」を基準にして分類してあるのです。そのことを説明するために、専門用語をまず紹介します。

鋭角・・・0° より大きいが、90° よりは小さい角のこと

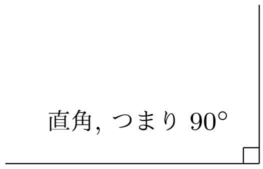
つまり右の図のような角です。





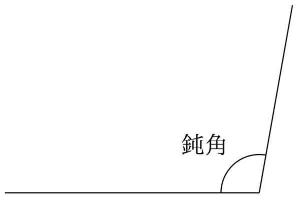
直角・・・ぴったり 90° の大きさの角のこと

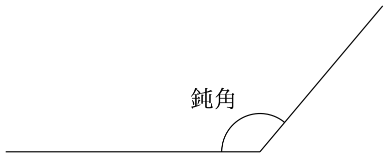
つまり右の図のような角です。



鈍角・・・90° より大きいが、180° よりは小さい角のこと

つまり右の図のような角です。

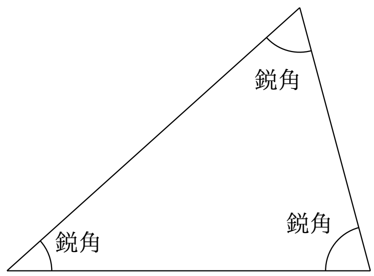




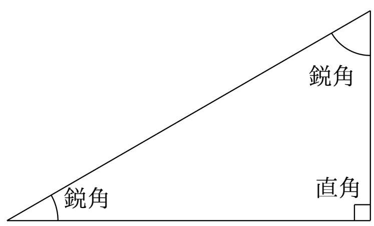
知っていましたか？

これらの言葉を使って、タイプ 1 からタイプ 3 までの三角形の分類について説明することにしましょう。

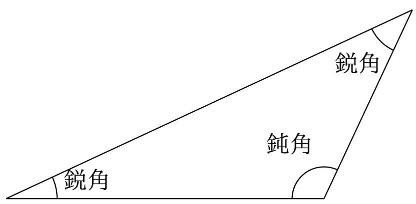
タイプ 1　右の図のように、三角形の 3 つの角が全て鋭角になっているとします。このような三角形を**鋭角三角形**と呼びます。



タイプ 2　右の図のように、三角形の 3 つの角のうち 1 つの角が直角になっているとします。このような三角形を**直角三角形**と呼びます。



タイプ 3　右の図のように、三角形の 3 つの角のうち 1 つの角が鈍角になっているとします。このような三角形を**鈍角三角形**と呼びます。



念のための注意　タイプ 2 は、「3 つの角のうち 1 つの角が直角になっている三角形」でしたね。ところで、「3 つの角のうち 2 つの角が直角になっている三角形」とか、「3 つの角のうち 3 つの角が直角になっている三角形」というものはあるのでしょうか。もちろんそんなものはありませんね。なぜなら、三角形の内角の和は 180° なのですから。同じように、「3 つの角のうち 2 つの角が鈍角になっている三角形」とか、「3 つの角のうち 3 つの角が鈍角になっている三角形」というものもありませんね。

問 13. 3 つの内角の大きさが次のようになっている三角形があるとします。

ア. 75°、50°、55°　　イ. 27°、90°、63°　　ウ. 30°、35°、115°

(1) 分度器や定規を使って、できるだけ正確にア、イ、ウの三角形を描きなさい。

(2) ア、イ、ウの三角形はそれぞれ何三角形の仲間ですか。

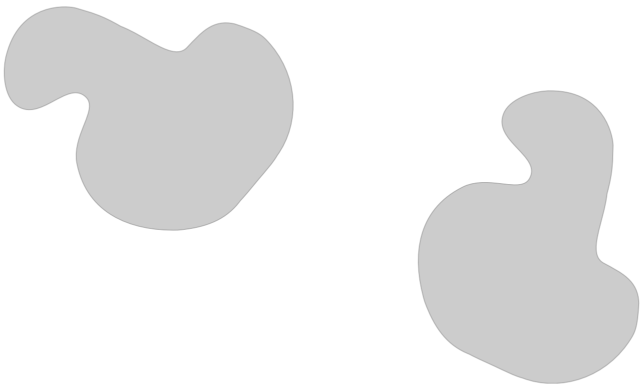
答えを見る

問 14. 3 つの角のうち、2 つの内角の大きさが次のようになっている三角形は何三角形の仲間ですか。

(1) 30°、70°　　(2) 55°、85°　　(3) 37°、53°　　(4) 22°、63°

答えを見る

1.5　合同な図形

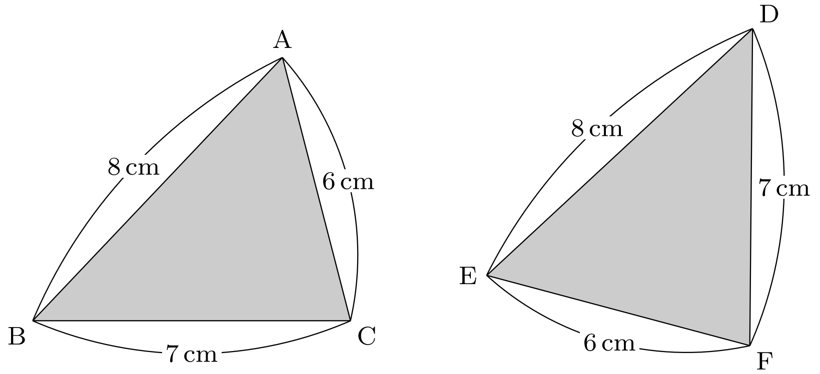


右の図のように 2 つの図形があるとします。この 2 つの図形は厚紙でできていて、テーブルの上に置いてあるとしましょう。そして、片方の図形を移動させていくことにします。移動させるとき、図形の向きを変えたり、図形を裏返してもかまいません。そして、片方の図形をうまく移動すればもう片方の図形にぴったりと重ねることができるとします。このとき、「2 つの図形は**合同**である」といいます。つまり、2 つの図

形が、ぴったり、はみ出ることなく重なれば 2 つの図形は「合同である」というのです。

この図では「ふち」が曲がっている図形が描かれていますが、これからは主に、「ふち」がまっすぐな図形を扱います。つまり、多角形の合同について学んでいきます。

右の図を見てください。2 つの三角形が描かれていて、辺の長さが記入されています。できればあなたにも、厚紙でこの図の 2 つの三角形を作って試してほしいのですが、実はこの 2 つの三角形はぴったりと重ねることができます。つまり、この 2 つの三角形は合同なのです。でも、どことどこが重なるかわかりますか？例えば、三角形 ABC の頂点 A は三角形 DEF のどの頂点と重なるのでしょう。



問 15. この問の前の説明に出てきた三角形 ABC と三角形 DEF はどうも合同なようです。つまり、この 2 つの三角形はぴったりと重ねることができるようです。以下の問に答えなさい。

(1) 頂点 A と重なるのはどの頂点ですか。

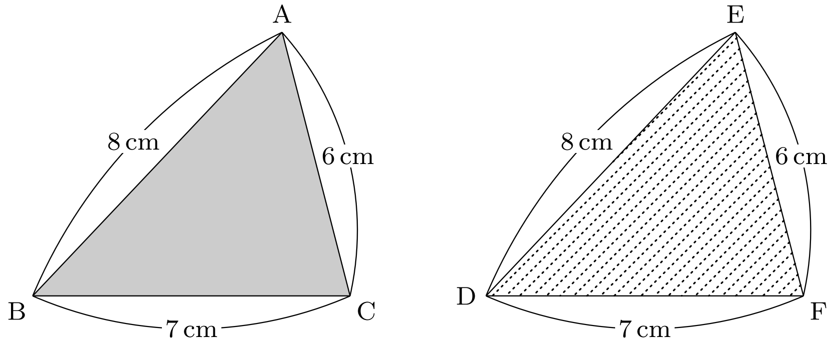
(2) 頂点 B と重なるのはどの頂点ですか。

(3) 頂点 C と重なるのはどの頂点ですか。

答えを見る

さて、どことどこが重なるのかわかりましたか？

では右の図を見てください。この図はさっきの図の 2 つの三角形で、どことどこが重なるのかわかりやすくしたものです。重なる所が想像できるように、2 つの三角形の向きをそろえました。実は、三角形 DEF は裏返してあるのですが、気付いて



いましたか？この図を見ると、A と E が重なり、B と D が重なり、C と F が重なるということがわかりますね。

それではここで、これから使う 2 つの記号について説明しておきます。

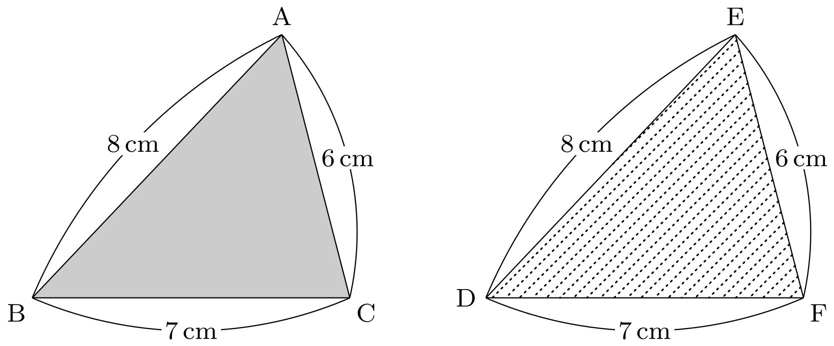
三角形マークと合同マーク

- 「三角形」といちいち書くのはめんどうなので、「△」というマークを使うことがあります。例えば、「三角形 ABC」と書く代わりに、「△ABC」と書くわけです。
- 「ホニャララとナントカは合同である」といちいち書くのはめんどうなので、「≡」というマークを使って、「ホニャララ ≡ ナントカ」と書くことがあります。例えば、「△PQR≡△STU」と書いてあったら、「三角形 PQR と三角形 STU は合同である（つまりぴったり重ねられる）」という意味です。

合同マークを使うときの注意

ここまで「合同とはそもそもどういう意味なのか」ということを説明してきましたが、「合同」という言葉を使うときは、「図形のどことどこがぴったり重なるのかということを気にしなければいけない」のですよね。

では右の図を見てください。この図は、さっきの 2 つの三角形の図と同じものです。この 2 つの三角形はぴったり重ねることができますが、A と E が重なり、



B と D が重なり、C と F が重なるのです。ですから、「この 2 つの三角形は合同になっている」ということを伝えたいときは、

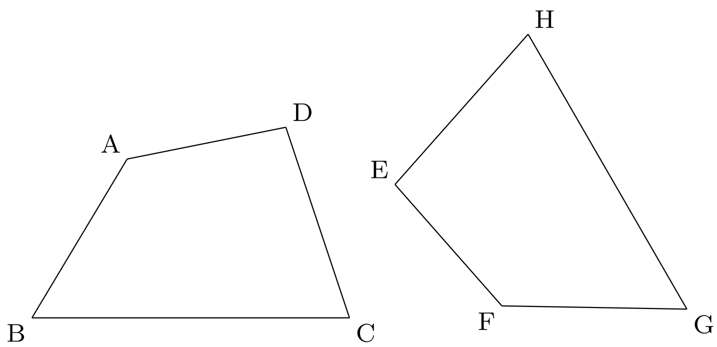
$$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{EDF}$$

と書かなければならないのです。$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{FED}$ と書いてはいけないのです。つまり、対応している頂点を順番に並べて書かないといけないのです。

それでは、話を進めることにしましょう。

2 つの図形が「ぴったり重なる」ということは、重なる角どうしは当然同じ大きさになっていて、重なる辺どうしは当然同じ長さのはずですよね。このことを一応注意しておいて、次の例題を学ぶことにしましょう。

例題 3　右の図の 2 つの四角形は合同になっているとします。次の問に答えなさい。



(1)　頂点 A に対応する頂点はどれですか。

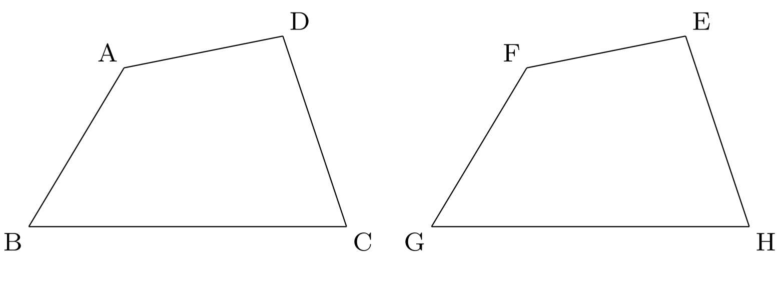
(2)　辺 BC と長さの等しい辺はどれですか。

(3)　$\angle$C と大きさが等しい角はどれですか。

(4)　「2 つの四角形は合同である」ということを記号「$\equiv$」をつかってあらわしなさい。

解答

右の図は、2 つの四角形のどことどこが対応するのかわかりやすくするために、2 つの四角形の向きをそろえて描いたものです。四角形 EFGH を回転して向きを変えました。**図形の合同のことを考えるときは、2 つの図形の向きをそろえた図を自分で描くとわかりやすくなります。頭の中で図形を回転させるのが難しいと感じる人は、テキストごと回転させ向きをそろえてから、別の紙に図を写すと良いでしょう。**

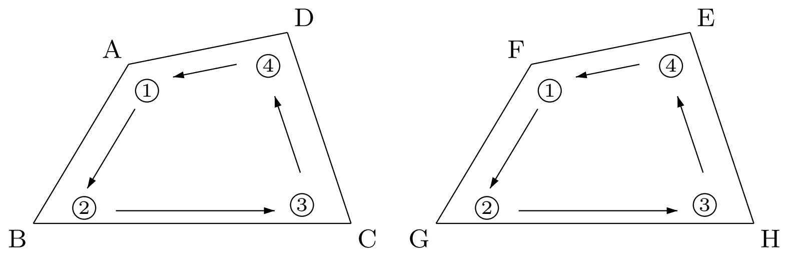


(1) 図を見るとわかるとおり、頂点 A と重なるのは頂点 F ですね。

(2) 図を見るとわかるとおり、辺 BC と重なるのは辺 GH ですね。

(3) 図を見るとわかるとおり、$\angle$C と重なるのは辺 $\angle$H ですね。

(4) 右の図を見てください。2 つの図形が合同であるといいたいとき、対応する頂点は、順番をそろえて書かなくてはいけません。また、図形のふちに沿ってぐるりと一周する順番に頂点を並べて書きます。



ですから、

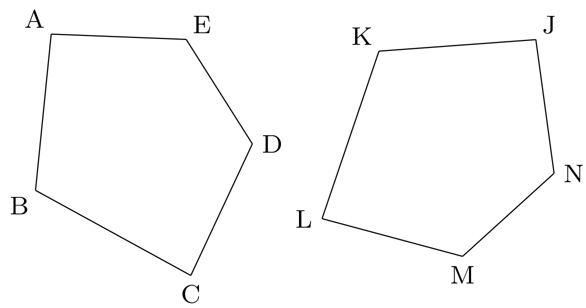
$$\text{四角形 ABCD} \equiv \text{四角形 FGHE}$$

と書けばよいですね。

問 16. 右の図で、

五角形 ABCDE ≡ 五角形 JKLMN

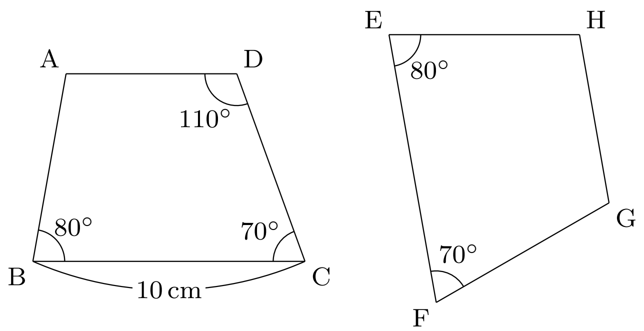
となっているとします。次の辺や角に対応しているものを答えなさい。



(1) 辺 AB　(2) 辺 CB　(3) ∠C　(4) ∠D

答えを見る

問 17. 右の図の 2 つの四角形は合同であるとします。次の問に答えなさい。



(1) 「2 つの四角形は合同である」ということを、記号「≡」を使ってあらわしなさい。

(2) 辺 EF の長さは何 cm ですか。

(3) ∠H の大きさは何度ですか。

答えを見る

1.6　三角形の合同条件

定規、分度器、コンパスを用意してください。これからあなたに、いくつかの文を読んでもらい、文に書いてあるとおりの三角形を定規、分度器、コンパスを使って書いてもらう実験をします。

実験

次の文のとおりになっている三角形を定規、分度器、コンパスを使ってできるだけ正確に、何通りも描いてください。それぞれの文に書いてある三角形で、違うものが何通りできるか考えましょう。

① 3 辺の長さが 6 cm、7 cm、8 cm である三角形

② 2 辺の長さが 5 cm と 8 cm で、1 つの角の大きさが 30° である三角形

③ 1 辺の長さが 7 cm で、2 つの角の大きさが 60° と 45° である三角形

④ 2 つの角の大きさが 45° と 60° である三角形

⑤ 3 つの角の大きさが 45°、60°、75° である三角形

⑥ 2 辺の長さが 6 cm と 8 cm で、その 2 つの辺の間にある角の大きさが 60° である三角形

⑦ 1 辺の長さが 7 cm で、その辺の両端にある 2 つの角の大きさが 60° と 45° である三角形

⑧ 2 辺の長さが 6 cm と 8 cm である三角形

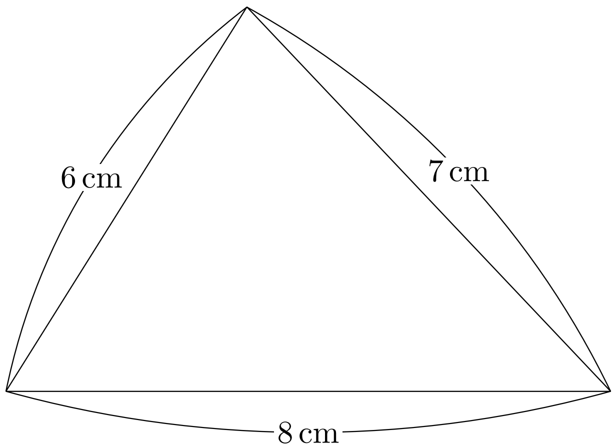
さて、ちゃんと描けましたか？ここから先は、①から⑧の三角形をきちんと自分で描いてみた人だけ読んでください。自分で何も描かなかった人は、この先を読んでも良くわからないかも知れません。

①から⑧の中に、「どうがんばっても、大きさも形も同じものしかできなかった」ということはありましたか？

実は、①、⑥、⑦は誰がどうがんばっても「大きさも形も同じ三角形」しか作れません。（①、⑥、⑦以外はいくつか違う三角形を描くことができます。）これはきわめて重大な発見です。誰がどうがんばっても「大きさも形も同じ三角形しか描けない」ということは、誰がどうがんばっても「合同な三角形しか描けない」ということだからです。つまり、この大発見をきちんと憶えておけば、合同かどうか怪しい 2 つの三角形があったとき、2 つの三角形を重ねてみなくても、合同かどうか判定できることになるからです。

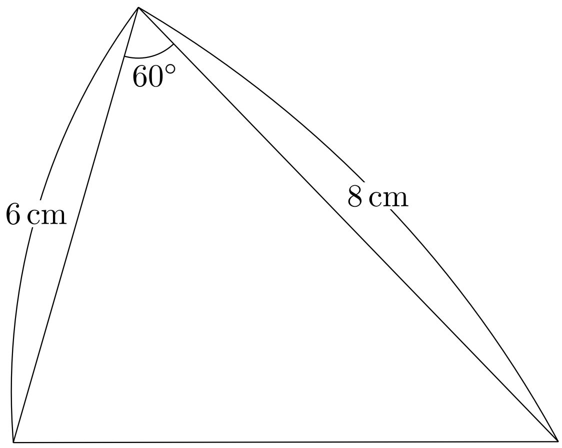
ではここで、話を整理してみるために、もう一度、「誰がどうがんばっても同じ大きさ、同じ形の三角形しか描けない」場合を思い出してみます。たしか、①、⑥、⑦ でしたね。

①では、3 辺の長さが与えられていました。（3 つの辺の長さは 6 cm、7 cm、8 cm と決められていました。）そうすると、だれがどうがんばっても、次の三角形しか作れないのです。



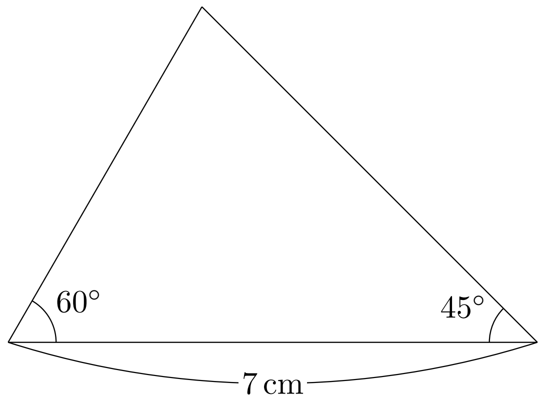
つまり、**3 辺の長さが決められてしまうと、誰がどうがんばっても、形も大きさも同じ三角形しか作れない**のです。

⑥では、2 辺の長さとその 2 辺の間にある角の大きさが与えられていました。（2 辺の長さが 6 cm と 8 cm で、その 2 つの辺の間にある角の大きさが 60° と決められていました。）そうすると、だれがどうがんばっても、次の三角形しか作れないのです。



つまり、**2 辺の長さとその 2 辺の間にある角の大きさが決められてしまうと、誰がどうがんばっても、形も大きさも同じ三角形しか作れないのです。**

⑦では、1 辺の長さとその辺の両端にある 2 つの角の大きさが与えられていました。（1 辺の長さが 7 cm で、その辺の両端にある 2 つの角の大きさは 60° と 45° と決められていました。）そうすると、だれがどうがんばっても、次の三角形しか作れないのです。



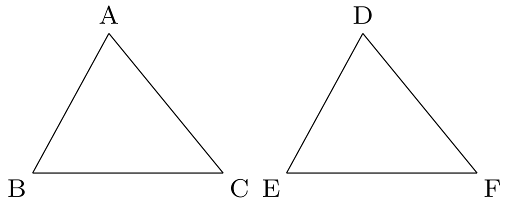
つまり、**1 辺の長さとその両端にある 2 つの角の大きさが決められてしまうと、誰がどうがんばっても、形も大きさも同じ三角形しか作れないのです。**

以上の大発見をあらためてまとめておこうと思います。次のまとめの中の空欄に正しい記号を書いておいてください。

三角形の合同条件

(1) 2 つの三角形があるとします。このとき、**もし、対応する 3 組の辺の長さがそれぞれ等しくなっていれば**、2 つの三角形は合同であると断言できます。

つまり、右の図で、



$\mathrm{AB} = \mathrm{DE}\,,\ \mathrm{BC} = \mathrm{EF}\,,\ \mathrm{CA} = \boxed{\quad\quad}$

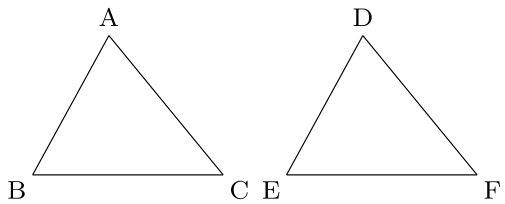
という証拠が見つかれば、

$$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \boxed{\quad\quad\quad\quad}$$

と断言できるのです。

(2) 2 つの三角形があるとします。このとき、**もし、対応する 2 組の辺の長さがそれぞれ等しくなっていて、その間の角の大きさが等しくなっていれば**、2 つの三角形は合同であると断言できます。

つまり、右の図で、



$\mathrm{AB} = \mathrm{DE},\ \mathrm{AC} = \mathrm{DF}$

$\angle\boxed{\quad\ } = \angle\boxed{\quad\ }$

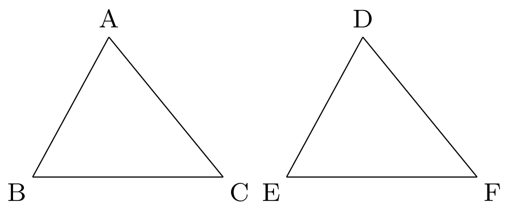
という証拠が見つかれば、

$$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \boxed{\quad\quad\quad\quad}$$

と断言できるのです。

(3) 2 つの三角形があるとします。このとき、**もし、対応する 1 組の辺の長さが等しくなっていて、その両端にある 2 組の角の大きさが等しくなっていれば**、2 つの三角形は合同であると断言できます。

つまり、右の図で、



$\mathrm{BC} = \mathrm{EF}$

$$\angle\boxed{} = \angle\boxed{},\ \angle\boxed{} = \angle\boxed{}$$

という証拠が見つかれば、

$$\triangle ABC \equiv \boxed{}$$

と断言できるのです。

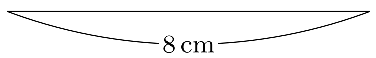
さて、ここでこの節の初めに行った実験、つまり 46 ページで行った実験を思い出してください。（ちゃんと 46 ページを開いて、どんな実験をしたか思い出してくださいね。）たしか、①、⑥、⑦は誰がどうがんばっても「大きさも形も同じ三角形」しか作れないのですが、②、③、④、⑤、⑧ ではいくつか違う三角形を描くことができるということでしたね。でもこれ、本当でしょうか。あなたがこの実験をしたときはどうでしたか？違う三角形を描くことができましたか。もし、どうがんばっても、同じ形、同じ大きさの三角形しか描けないとしたら大変なことになります。さっき学んだ合同条件のほかにも、合同条件があることになってしまうからです。そこで②、③、④、⑤、⑧の場合に、本当に違う三角形が描けるのか調べてみることにします。ここではこれから、②と④についてまず調べます。③、⑤、⑧については、あとであなたに問として考えてもらうことにします。（本当はもう、実験のときに調べてあるはずなんですけどね。）

②の場合

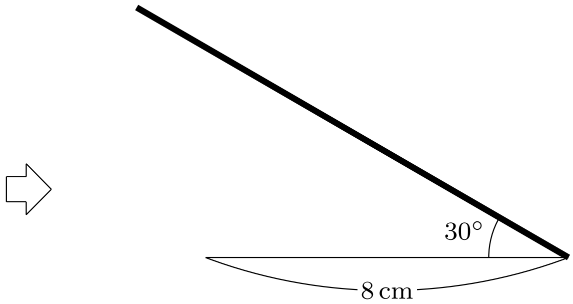
2 辺の長さが 5 cm と 8 cm で、1 つの角の大きさが 30° である三角形でしたね。この話では、「1 つの角」が出てきますが、「2 つの辺の間にある角」とは書いてありませんね。つまり、この角は 2 つの辺の間になくてもよいわけです。

そうすると、次に説明するようにすれば、違う三角形を作ることができます。

まず、次の図のようにします。

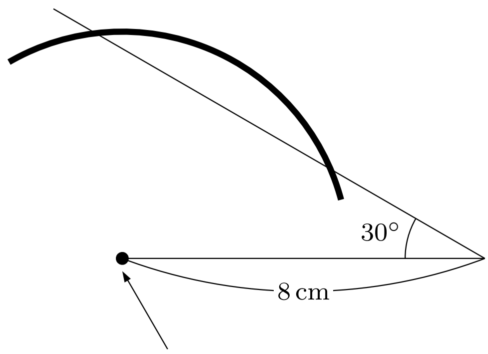


まず 8 cm の辺を描く。

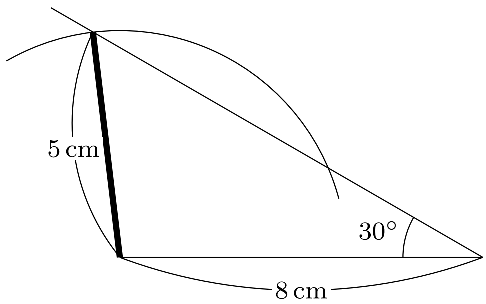


分度器で 30° をはかり、長めに線を描いておく。
（この図の太い線を見てください。）

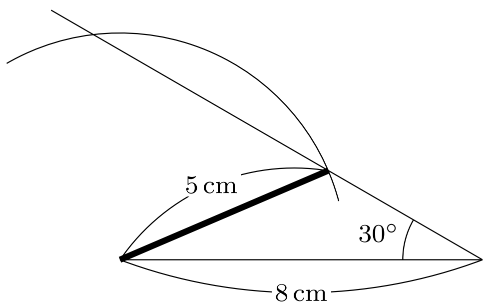
そしてさらに次の図のようにします。（2 通りのやり方があることに注意してください。）



ここにコンパスの針をさし、
半径 5 cm の円の一部をある
程度描くと、さっき描いた線
と 2 ヵ所で交わる。
（この図の太い曲線を見て
ください。）



さっき描いた円の一部と線が交わってできた
2 つの点のうちの片方の点と、コンパスの針
をさした点を結ぶと 5 cm の辺ができる。
（この図の太い線を見てください。）



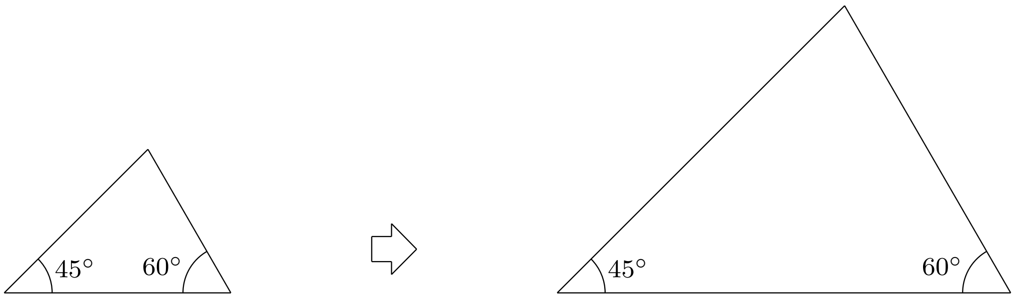
さっき描いた円の一部と線が交わってできた
2 つの点のうちのもう片方の点と、コンパス
の針をさした点を結ぶと 5 cm の辺ができる。
（この図の太い線を見てください。）

どうですか、最後にできた 2 つの三角形は、どちらも、「2 辺の長さが 5 cm と 8 cm で、1 つの角の大きさが 30° である三角形」です。しかしこの 2 つの三角形は合同ではありま

せんね。ですから、2 辺の長さと、1 つの角の大きさを決めても合同ではない三角形を作れるわけです。

④の場合

2 つの角の大きさが 45° と 60° である三角形でしたね。この話では、次の図のようにすれば、違う三角形を作ることができます。



コピー機で拡大

初めに定規と分度器を使って、この図の左のような三角形を描きます。そしてコピー機を使って、自分の好きな倍率で拡大すればよいのです。どちらの三角形も「2 つの角の大きさが 45° と 60° である三角形」ですが、大きさが違うので合同ではありませんね。（左の三角形をコピー機で拡大するとき、自由に倍率を設定できますから、倍率を変えれば、いくらでもたくさん、「2 つの角の大きさが 45° と 60° である三角形」をつくることができますね。）

問 18. 46 ページで行った実験の③は「1 辺の長さが 7 cm で、2 つの角の大きさが 60° と 45° である三角形」を描く話でしたね。この話では「2 つの角」が出てきますが、2 つの角は「長さの決められている辺（つまり 7 cm の辺）の両端にある」とは書いてありませんね。ですから、この 2 つの角（つまり 60° の角と 45° の角）は、長さの決められている辺（つまり 7 cm の辺）の両端になくてもよいわけです。それでは、「1 辺の長さが 7 cm で、2 つの角の大きさが 60° と 45° である三角形」で、合同にはならないものを 2 つ以上

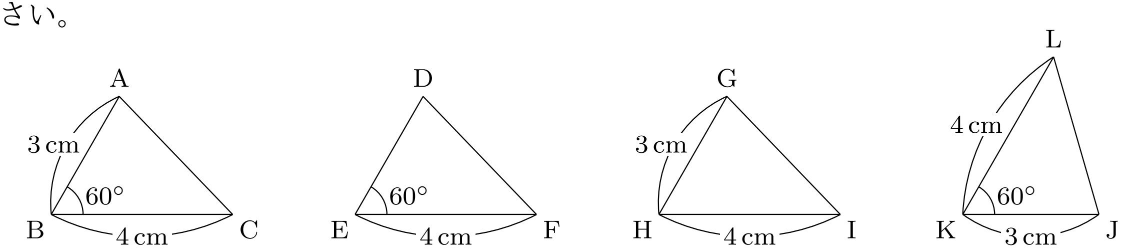
描いてください。 答えを見る

問 19.　46 ページで行った実験の⑤は「3 つの角の大きさが 45°、60°、75° である三角形」を描く話でしたね。「3 つの角の大きさが 45°、60°、75° である三角形」で、合同にはならないものを 2 つ以上描いてください。 答えを見る

問 20.　46 ページで行った実験の⑧は「2 辺の長さが 6 cm と 8 cm である三角形」を描く話でしたね。「2 辺の長さが 6 cm と 8 cm である三角形」で、合同にはならないものを 2 つ以上描いてください。 答えを見る

それではこれから、三角形の合同条件を使う練習をしましょう。

例題 4　次の 4 つの三角形を見てください。この 4 つの三角形の中に合同になっているものはあるでしょうか。もしあれば、合同の記号 ≡」を使って、どの三角形とどの三角形が合同なのか答えてください。またそのとき、どうして合同だと判断したのか説明してください。

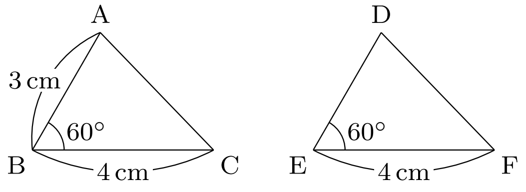


解答

見落としがあるといけないので、どれとどれが合同になるのか 1 つずつ順番に慎重に全て調べていきます。

- △ABC と △DEF は合同？

右の図をよく見てください。あなたのためにもう一度 △ABC と △DEF を描いておきました。



△ABC の辺 BC とぴったり重なる辺があるとしたら、それは △DEF のどの辺でしょうか。辺 BC は 4 cm で辺 EF も 4 cm ですから辺 BC は辺 EF と重なること

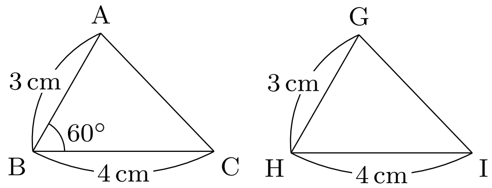
は確かです。それでは、辺 BC が辺 EF と違う辺と重なることはあるのでしょうか。辺 DE や辺 DF の長さはわかっていません。ですから辺 DE や辺 DF が辺 BC と重なる保証はないですね。

$\triangle$ABC の $\angle$B とぴったり重なる角があるとしたら、それは $\triangle$DEF のどの角でしょうか。$\angle$B は 60° で $\angle$E も 60° ですから $\angle$B は $\angle$E 重なることは確かです。それでは、$\angle$B が $\angle$E と違う辺と重なることはあるのでしょうか。$\angle$D や $\angle$E の大きさはわかっていません。ですから $\angle$D や $\angle$E が $\angle$B と重なる保証はないですね。

ここまで考えた結果、辺 BC と辺辺 EF が重なり、$\angle$B と $\angle$E が重なるしかないということがわかりました。そうすると、自動的に、辺 AB と重なる可能性があるのは辺 DE だけになってしまいます。ところで、辺 AB の長さは 3 cm とわかっていますが、残念なことに辺 DE の長さはわかっていません。ですから、辺 AB と辺 DE が重なる保証はないのです。というわけで、2 つの三角形は合同であるとは断言できません。

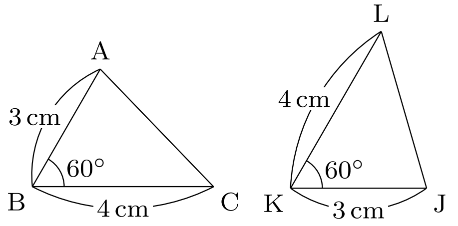
- $\triangle$ABC と $\triangle$GHI は合同？

右の図をよく見てください。あなたのためにもう一度 $\triangle$ABC と $\triangle$GHI を描いておきました。



もうくどい説明はやめておきましょう。図に書いてある情報をよく考えに入れると、$\triangle$ABC の辺 AB は $\triangle$GHI の辺 GH と重なるしかなく、$\triangle$ABC の辺 BC は $\triangle$GHI の辺 HI と重なるしかありません。そうすると、自動的に、$\angle$B と重なる可能性のあるのは $\angle$H だけになります。ところで、$\angle$B の大きさは 60° とわかっていますが、$\angle$H の大きさはわかっていません。ですから $\angle$B と $\angle$H が重なる保証はないのです。というわけで、2 つの三角形は合同であるとは断言できません。

- $\triangle$ABC と $\triangle$KLJ は合同？



右の図をよく見てください。あなたのためにもう一度 △ABC と △KLJ を描いておきました。

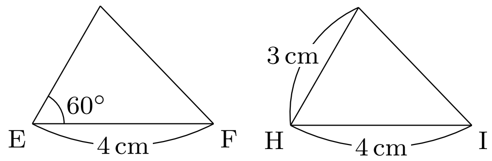
もうくどい説明はやめておきましょう。図に書いてある情報をよく考えに入れると、△ABC の辺 AB は △KLJ の辺 KJ と重なるしかなく、△ABC の辺 BC は △KLJ の辺 KLI と重なるしかありません。そうすると、自動的に、∠B と重なる可能性のあるのは ∠K だけになります。ところで、∠B の大きさは 60° ですし、∠H の大きさも 60° です。ですから ∠B と ∠H はちゃんと重なるのです。というわけで、2 つの三角形は合同であると断言できます。では「≡」マークを使って答えを書くことにします。対応している頂点の順番をちゃんと気にして答えを書くと、

$$\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{JKL}$$

となりますね。もちろんこのときつかった三角形の合同条件は「対応する 2 組の辺とその間の角が等しい」ですね。

念のために注意をしておきますが、△KLJ は裏返さないと △ABC に重ねることはできません。

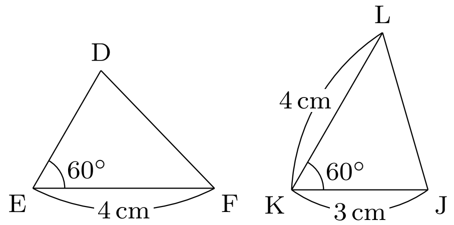
- △DEF と △GHI は合同？



右の図をよく見てください。あなたのためにもう一度 △DEF と △GHI を描いておきました。

もうくどい説明はやめておきましょう。図に書いてある情報をよく考えに入れると、△DEF の辺 EF は △GHI の辺 FI と重なるしかありません。これ以外のことは何も言えません。というわけで、2 つの三角形は合同であるとは断言できません。

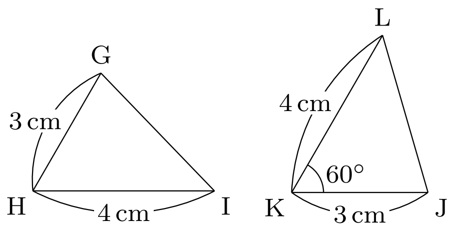
- △DEF と △KLJ は合同？



右の図をよく見てください。あなたのためにもう一度 △DEF と △KLJ を描いておきました。

もうくどい説明はやめておきましょう。図に書いてある情報をよく考えに入れると、△DEF の辺 EF は △KLJ の辺 KL と重なるしかなく、△DEF の ∠E は △KLJ の ∠K と重なるしかありません。そうすると、自動的に、辺 ED と重なる可能性のあるのは辺 KJ だけになります。ところで、辺 KJ の長さは 4 cm とわかっていますが、辺 ED の長さはわかっていません。ですから辺 ED と辺 KJ が重なる保証はないのです。というわけで、2 つの三角形は合同であると断言できません。

- △GHI と △KLJ は合同？



右の図をよく見てください。あなたのためにもう一度 △GHI と △KLJ を描いておきました。

もうくどい説明はやめておきましょう。図に書いてある情報をよく考えに入れると、△GHI の辺 GH は △KLJ の辺 KJ と重なるしかなく、△GHI の辺 HI は △KLJ の辺 KL と重なるしかありません。そうすると、自動的に、∠H と重なる可能性のあるのは ∠K だけになります。ところで、∠K の大きさは 60° ですが、∠H の大きさはわかっていません。ですから ∠H と ∠K はちゃんと重なる保証はないのです。というわけで、2 つの三角形は合同であると断言できません。

以上の調査で、合同なのは 1 組だけ、つまり、

$$\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{JKL}$$

であり、使った合同条件は

対応する 2 組の辺とその間の角が等しい

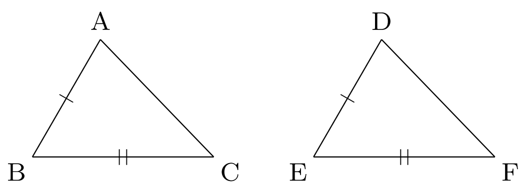
であることが判明しました。

例題 5　2 つの三角形 △ABC △DEF があり、

$$AB = DE, BC = EF$$

であることが判明しています。さらに i つどんな証拠が見つかれば、△ABC △DEF は合同だと断言できますか。

解答



右の図を見てください。この図には、「|」や「||」というマークが付いている辺がありますが、同じマークが付いている辺は同じ長さであるということを意味しています。この問題では、辺 AB と辺 DE は同じ長さで、辺 BC と辺 EF は同じ長さであることがわかっているのでしたね。さて、この図をよく見ながら、三角形の合同条件を思い出すことにしましょう。

もし、さらに AC = DF であるという証拠が見つかれば「対応する 3 組の辺の長さがそれぞれ等しい」ということになって、2 つの三角形は合同であると断言できますね。

また、そうでなくても、もし、$\angle B = \angle E$ であるという証拠が見つかれば「対応する 2 組の $\boxed{}$ の長さとその間にある $\boxed{}$ の大きさが等しい」ということになって、2 つの三角形は合同であると断言できますね。（この文の空欄に正しい言葉を記入しておいてください。）

これ以外にうまくいく手はありません。ですから、この問題の答えは、

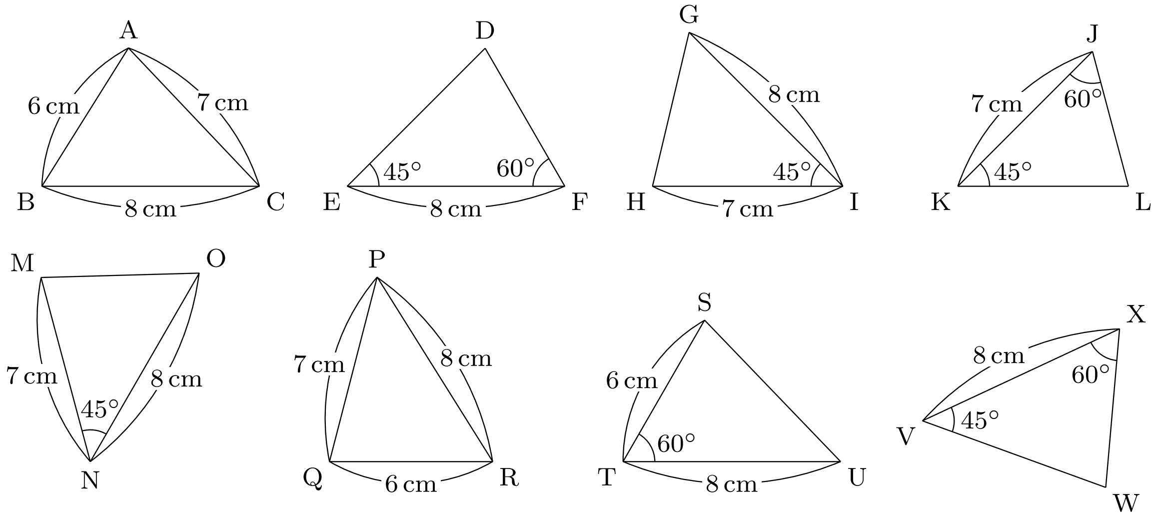
AC = DF であるという証拠

または

$$\angle B = \angle E \text{ であるという証拠}$$

が見つかれば、2 つの三角形は合同であると断言できるということです。

問 21. 次の図から合同な三角形を見つけ、合同の記号「≡」を使って答えなさい。また、合同であるということを判断するときに使った合同条件も答えなさい。



答えを見る

問 22. △ABC と △DEF があるとします。以下の文の空欄に正しい記号を書きなさい。

(1) △ABC と △DEF は、AB = DE, AC = DF であることが判明しているとします。あとさらに、角の大きさについて、$\angle\boxed{} = \angle\boxed{}$ であることが判明すれば、この 2 つの三角形は合同であると断言できます。

(2) △ABC と △DEF は、BC = EF, ∠C = ∠F であることが判明しているとします。あとさらに、辺の長さについて、$\boxed{} = \boxed{}$ であることが判明すれば、この 2 つの三角形は合同であると断言できます。

(3) △ABC と △DEF は、BC = EF, ∠B = ∠E であることが判明しているとします。あとさらに、角の大きさについて、$\angle\boxed{} = \angle\boxed{}$ であることが判明すれば、この 2 つの三角形は合同であると断言できます。

答えを見る

問 23. $\triangle$ABC と $\triangle$DEF があるとします。以下の問に答えなさい。

(1) $\triangle$ABC と $\triangle$DEF は、$\mathrm{CA} = \mathrm{FD}$, $\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{D}$, $\angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{F}$ であることが判明しているとします。この 2 つの三角形は合同であると断言してよいですか。

(2) $\triangle$ABC と $\triangle$DEF は、$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{D}$, $\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{E}$, $\angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{F}$ であることが判明しているとします。この 2 つの三角形は合同であると断言してよいですか。

(3) $\triangle$ABC と $\triangle$DEF は、$\mathrm{AB} = \mathrm{DE}$, $\mathrm{AC} = \mathrm{DF}$, $\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{E}$ であることが判明しているとします。この 2 つの三角形は合同であると断言してよいですか。

(4) $\triangle$ABC と $\triangle$DEF は、$\mathrm{CA} = \mathrm{FD}$, $\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{E}$, $\angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{F}$ であることが判明しているとします。この 2 つの三角形は合同であると断言してよいですか。

答えを見る

1.7　証明の進め方

あなたは「主張」という言葉を知っていますか？またあなたは、何かを「主張」したことがありますか？ここではまず、「主張」とはどんなことのものなのか考えることにします。また、それに関連して「仮定」と「結論」という用語も学びます。

1.7.1　主張、仮定、結論ってなに？

次の文を読んでみてください。

「火星には生命が存在する。」

「東京都に住んでいれば、日本に住んでいる。」

「あの人がこの事件の犯人のはずである。」

「A さんは悪人である。」

「3 で割り切れる数は 6 で割り切れる。」

「A さんと B さんが兄弟で、B さんと C さんが兄弟ならば、A さんと C さんも兄弟である。」

「どんな五角形も内角の和は 540° である。」

「正三角形の 3 つの内角の大きさは全て等しい。」

「初めに 2 つの直線があり、その 2 つの直線に別の直線が交わっているとする。もし初めの 2 つの直線が平行ならば、同位角は等しい。」

これらの文はどれも何かを「主張」している文ですね。

ここでまず注意してほしいのは、「主張」には「正しい主張」と「正しくない主張」があるということです。例えば、さっき読んでもらった主張の中に、「どんな五角形も内角の和は 540° である。」という主張がありましたが、これは正しい主張ですよね。（以前詳しく学びましたよね。）また、さっき読んでもらった主張の中に、「3 で割り切れる数は 6 で割り切れる。」という主張がありましたが、これは正しくない主張ですよね。（どうして正しくないのかわかりますよね。例えば 9 という数のことを考えてみてください。9 って 3 で割り切れますよね。でも、9 って 6 では割り切れないですよね。）

さらに注意してほしいのは、「主張」には正しいのか正しくないのかどちらともいえない「あいまいな主張」があるということです。例えば、上の主張の中に、「A さんは悪人である。」というものがありましたが、悪人であるのか悪人でないのかをはっきりと判断する基準はありません。人によって、「悪人」と「悪人でない人」を区別する基準が違っているのです。このような「あいまいな主張」は数学では扱いません。

それでは、「火星には生命が存在する。」という主張はどうでしょう。現時点では、火星に生命が存在するのかしないのかわかっていません。（アメリカ航空宇宙局（NASA）は今までに探査機を何機か火星に送って調査をしましたが、生命が存在するという証拠はまだ見つかっていないようです。）つまりこの主張が正しいのか正しくないのかまだはっきり判断できません。ですが、この主張は「あいまいな主張」ではありませんね。火星には生命が「存在する」か「存在しない」のどちらかしかありません。つまり、この主張は「正しい」か「正しくない」のかのどちらかに決まっているのです。ですからこの主張は「あいまいな主張」とは違うのです。

もう 1 つ注意してほしいことがあります。それは、どんなに正しそうに思える主張でも、証拠がなければ正しいとは認めないということです。ですから、これまでいろいろと

「重要な事実」を学んだとき、できるだけ「証明」をしてきたのです。

前置きはこのぐらいにしておいて、本題に入ることにしましょう。

数学で扱う主張の多くは「○○○ ならば □□□ である。」という形の文で表されます。先に読んでもらったいくつかの主張の中では、例えば、「A さんと B さんが兄弟で、B さんと C さんが兄弟ならば、A さんと C さんも兄弟である。」や「初めに 2 つの直線があり、その 2 つの直線に別の直線が交わっているとする。もし初めの 2 つの直線が平行ならば、同位角は等しい。」という主張はまさに「○○○ ならば □□□ である。」という形をしています。また、このような形をしていない主張も、意味をよく考えればこの形に言い直すことができます。例えば、「正三角形の 3 つの内角の大きさは全て等しい。」という主張がありましたが、よく意味を考えれば「ある三角形が正三角形であるならば、その三角形の 3 つの内角の大きさは全て等しい。」というように言い直すことができます。

ここまでの注意をよく頭に入れてもらった上で、2 つの用語を説明することにします。

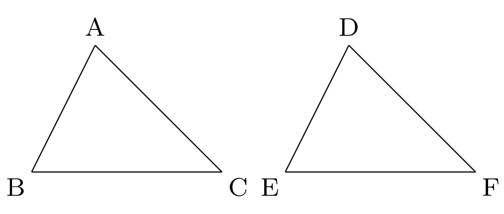
「○○○ ならば □□□ である。」という主張の ○○○ の部分を**仮定**、□□□ の部分を**結論**といいます。つまり「仮に ○○○ だとしたら」という部分が仮定といい、「結局 □□□ となってしまう。」という部分を結論というわけです。

例題 6　以下の主張をよく読んで、その主張の仮定と結論はどんなことなのか答えなさい。またその主張は正しいのか正しくないのか考えなさい。ただし、証明はしなくてもよいです。

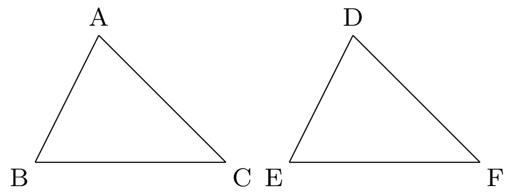
(1)　4 つの数 a、b、c、d があるとする。もし $a+c$ と $b+d$ が等しいとしたら a と b は等しい数である。

(2)　4 つの数 a、b、c、d があるとする。もし a と c が等しく b と d も等しいとしたら、$a+b$ と $c+d$ は等しい。

(3)　右の図のような 2 つの三角形 △ABC と △DEF があるとする。もし、△ABC≡△DEF ならば、辺 AC と辺 DF は長さが等しい。



(4) 右の図のような 2 つの三角形 △ABC と △DEF があるとする。もし、辺 AC と辺 DF は長さが等しいならば、△ABC≡△DEF である。



解答

「もし・・・だとしたら」という意味のところを仮定といい、「結局・・・となっている」という意味のところを結論というのでしたね。

(1) 仮定は「$a+c$ と $b+d$ が等しい」という部分です。もっと数学っぽく、仮定は「$a+c=b+d$」と答えてもかまいません。

結論は「a と b は等しい数である」という部分です。もっと数学っぽく、結論は「$a=b$」と答えてもかまいません。

また、この主張は正しくありません。$a+c$ と $b+d$ が等しくなっているからといって、a と b は等しいとはいえないのです。だって例えば、a が 3、b が 2、c が 1、d が 4 のとき、$a+c$ と $b+d$ は等しくなっていますが、a と b は等しくないですね。

(2) 数学っぽく答えを書いておきます。

仮定は「$a=b$、$c=d$」

結論は「$a+b=c+d$」

ですね。

また、この主張は正しい主張です。

(3) 数学っぽく答えを書いておきます。

仮定は「$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{DEF}$」

結論は「$\mathrm{AC} = \mathrm{DF}$」

ですね。

また、この主張は正しい主張です。

(4) 数学っぽく答えを書いておきます。

仮定は「AC $=$ DF」「$\triangle$ABC $\equiv$ $\triangle$DEF」

結論は「$\triangle$ABC $\equiv$ $\triangle$DEF」

ですね。

また、この主張は正しくない主張です。だって、一組の辺の長さが等しいぐらいでは、合同とまではいえませんよね。

問 24. 次の主張の仮定と結論を言いなさい。またその主張は正しいのか正しくないのか考えて答えなさい。ただし、証明はしなくてかまいません。

(1) $a = 3$ ならば $a^2 = 9$ である。

(2) x が 9 の倍数ならば x は 3 の倍数である。

(3) $a = b$ ならば $-4a = -4b$ である。

(4) 合同な 2 つの三角形の面積は等しい。

(5) 日本に住んでいれば東京に住んでいる。

(6) 東京に住んでいれば日本に住んでいる。

答えを見る

1.7.2 証明の進め方

どんな主張も証拠がなければ正しいとは認められません。つまり、証明が必要なわけです。これから例題を通じて、証明の進め方について学びます。

例題 7 まず線分 AB があり、次に線分 AB のちょうど真ん中の点 M を通る直線 ℓ を勝手な向きに引きます。さらに、それぞれ点 A、B から直線 ℓ へ向けて半直線を引きますが、それらの半直線は平行になるように引きます。また、それらの半直線と直線 ℓ との交点をそれぞれ P、Q と呼ぶことにします。このとき、絶対に、AP $=$ BQ となっていることを以下の問に答えることにより証明していくことにします。

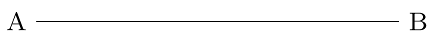
(1) 問題文をよく読んで、図を正しく描きなさい。

(2) この主張の仮定と結論はどんなことなのか確認しておきなさい。

(3) この主張は本当に正しいのかどうかまず悩みなさい。そして、正しいと思った人は証明しなさい。正しくないと思った人はどうして正しくないのか根拠を言いなさい。

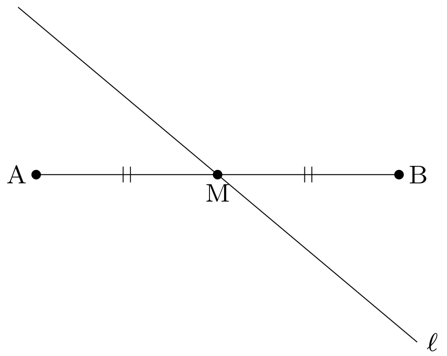
解答

(1) 問題文を読むと、まず「線分 AB があり」と書いてあるのでまず線分 AB を描きます。次の図のようになります。



念のため補足をしておきますが、「線分」というのは「直線」や「半直線」とは違い、両端のあるまっすぐな線のことでしたね。

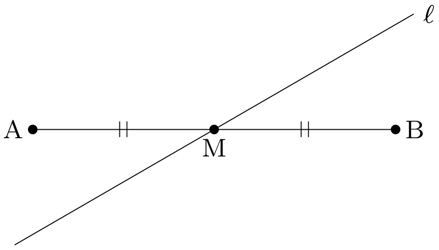
問題の続きを読むと、「線分 AB のちょうど真ん中の点 M を通る直線 ℓ を勝手な向きに引く」とあるので例えば次の図のようになります。



この図で M は AB のちょうど真ん中である。
よって線分 AB と線分 BM の長さは等しい。
そのことを示すために、線分 AM と線分 BM に
|| のマークを付けた。

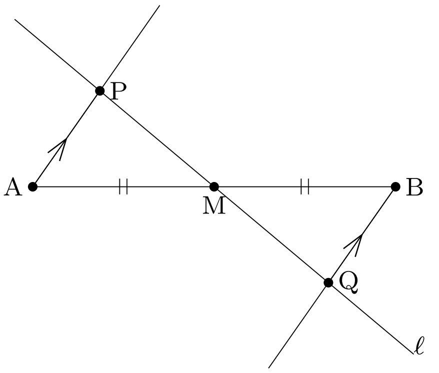
念のための注意をしておきます。「線分 AB のちょうど真ん中の点 M を通る直線 ℓ を勝手な向きに引く」わけですから、人によって直線 ℓ の向きは違っていてもよい

わけです。ですから例えば次の図のようになることもあります。



この解答では初めの図で続きを作ることにします。

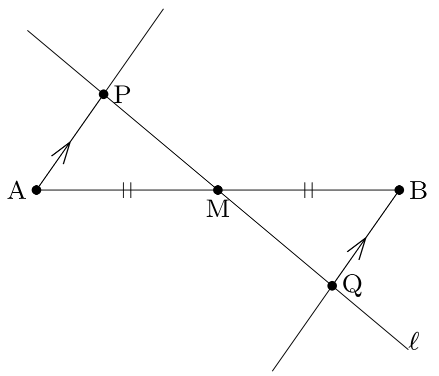
さらに問題を読むと、「それぞれ点 A、B から直線 ℓ へ向けて半直線を引きますが、それらの半直線は平行になるように引きます。また、それらの半直線と直線 ℓ との交点をそれぞれ P、Q と呼ぶことにします。」とあります。ですから次の図のようになります。



A から ℓ へ向けて引いた半直線と B から ℓ へ向けて引いた半直線は平行になるように描いてあります。
平行であることを示すために、矢印がつけられています。

これで図ができました。

(2) (1) で作られた図をもう一度右に描いておきます。



この問題は、「もし右の図のように AM と BM が同じ長さになっていて、さらに AP と BQ が平行になっていたら、AP と BQ は長さが同じになる」ということを証明しようとしているのでしたよね。ですから、

仮定（もし・・・となっていたらという部分）は、

$$\mathrm{AM} = \mathrm{BM}、\mathrm{AP} /\!/ \mathrm{BM}$$

となり、

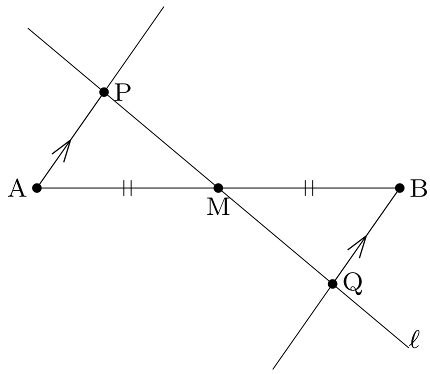
結論（結局・・・となってしまうという部分）は、

$$\mathrm{AP} = \mathrm{BQ}$$

となるわけです。

(3) それではこの例題の主張が証明できるかどうか考えることにしましょう。「証明をする」というのは、1 つ 1 つ証拠を積み上げていって「ほらね、絶対にこうなっちゃうでしょ。」と相手に説明をするということです。証明の仕方に決まりはありません。ただ、1 つ 1 つの証拠がいい加減なものではまずいわけです。すでに正しいと判明している事柄を証拠として使わなければいけないのです。

では、右の図を見てください。(1) で作られた図と同じものです。



この問題では初めから、すでに正しいとわかっていることがいくつかあります。それは、

$$\mathrm{AM} = \mathrm{BM}$$

であるということと、

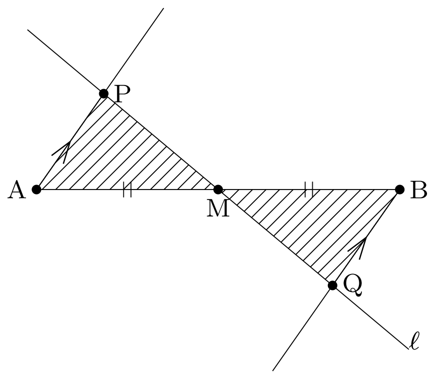
$$\mathrm{AP} /\!/ \mathrm{BQ}$$

であるということです。（問題文にちゃんと書いてありましたよね。つまり、これらのことは「仮定」なのですよね。）ですからこれらのことは、これから話を進めていくときに証拠として使ってもよいわけです。

また、最後には「ほらね、AP と BQ は同じ長さということになっちゃうよね。」というところへ話を持っていかなくてはいけないですよね。これが目指すべきゴールですね。これだけのことを確認した上で、どのように証明を進めていけばよいのか、大まかな方針をあなたに教えることにします。

証明の大まかな方針

右の図を見てください。まず、△AMP と △BMQ に注目します。（わかりやすいように注目する三角形に影をつけておきました。）もし、この 2 つの三角形が合同になっている（つまりぴったり重ねることができる）という証拠が見つかれば、辺 AP と辺 BQ だってぴったり重なることになるので長さは等しいと断言できることになります。



どうですか？この方針は「なかなかいい線いっている」と思いませんか？では、本当にこの方針でうまくいくのかチャレンジしてみることにしましょう。

（証明）

まず、△ABC と △BMQ に注目するのでしたね。そして、この 2 つの三角形が合同であるという証拠を見つけるのでしたね。ところで、2 つの三角形が合同であると断言するには、三角形の合同条件を使えばいいんですよね。三角形の合同条件って、たしか 3 種類ありましたよね。覚えていますか？忘れてしまった人は、この先を読んでもちんぷんかんぷんになりますよ。今すぐ思い出してください。このテキストの 49 ページにまとめてあります。（まとめを読むだけではなく、問も解いて練習しないとなかなか使いこなせるようにはなりません。）というわけで、三角形の合同条件は 3 種類あるわけですが、そのうちのどれを使えばこの例題の主張を証明できるのでしょうか。3 種類の合同条件では、1 つは「3 組の辺が出てくる話」で、1 つは「2 組の辺とその間にある 1 組の角が出てくる話」で、1 つは「1 組の辺とその両端にある 2 組の角が出てくる話でしたね。さて、どれを使うとうまくいくか、この問題の図をよく見て悩むことにしましょう。では 10 分待ちます。悩んでください。

・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

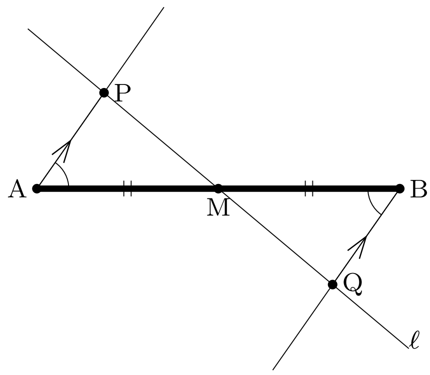
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

はい、10 分たちました。どうすればうまくいきそうかわかってきましたか？自分の頭を使って、あーでもない、こーでもないって悩まないとダメですよ。「いつでも、こうすればうまくいく」なんて方法はないのです。それでは、、△ABC と △BMQ が合同になるという証拠探しに入ります。あなたの考えと同じかどうか、楽しみにしていてください。

まず、仮定より、

$$\mathrm{AM} = \mathrm{BM} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

が成り立っています。（きっとこれは証拠として使えそうです。）

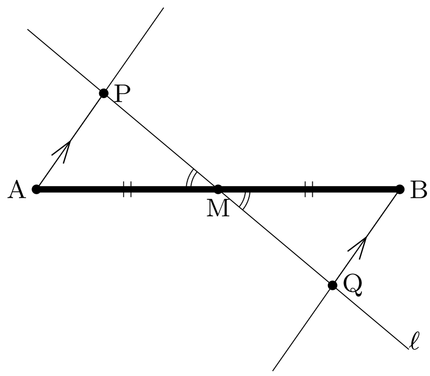


次に、2 つのまっすぐな線 AP と BQ に、別のまっすぐな線 AB が交わっているということに注目します。右の図を見てください。あなたのために、注目してほしい所を太い線で描いておきました。どうしてこに注目したのかというと、この問題では AP と BQ は平行なので、同位角が等しくなるとか、錯角が等しくなるという話が使えそうな気がしたからです。では、右の図をもう一度よく見ましょう。すると、∠PAM と ∠QBM は錯角の関係にありますね。今 AP // BQ なのですから、27 ページで学んだ「驚くべき事実」の (2)「もし初めにあった 2 直線が平行になっているとしたら、錯角は同じ大きさになっている。」ということから、

$$\angle\mathrm{PAM} = \angle\mathrm{QBM} \qquad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

が成り立っているということになります。（きっとこれも証拠として使えそうです。）

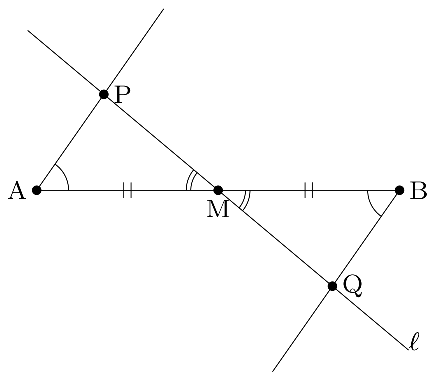
今度は点 M のまわりに注目してください。右の図を見てください。あなたのために、注目してほしい所を太い線で描いておきました。どうしてここに注目したのかというと、2 つのまっすぐな線が点 M で交わってているので、対頂角が等しいという話が使えると思ったからです。ではもう一度右の図を見ましょう。22 ページで学んだ「重要な事実」によると、対頂角は絶対に同じ大きさになっているのですから、



$$\angle \mathrm{PMA} = \angle \mathrm{QMB} \qquad \cdots\cdots\cdot \ ③$$

が成り立っているということになります。（きっとこれも証拠として使えそうです。）

これまでにつきとめた事を右の図に記号で記入しておきました。ここで三角形の合同条件を思い出してみましょう。3 種類ありましたが、その中に、「1 組の辺の長さと、その両端にある 2 組の角の大きさがそれぞれ等しければ 2 つの三角形は合同であると断言できる」というものがありましたね。今、まさに、これ、使えるではありませんか。つまり、これまでに見つけてきた証拠①、②、③によると、△ABC と △BMQ では、「1 組の辺の長さと、その両端にある 2 組の角の大きさがそれぞれ等しい」ということが判明したことになります。ということは、三角形の合同条件により、



$$\triangle \mathrm{AMP} \equiv \triangle \mathrm{BMQ}$$

であると断言できるわけです。

これで、「大まかな方針」のとおりうまくいくことがわかりましたね。勝ったも同然です。合同な三角形では対応する辺の長さは等しいはずですから、

$$\mathrm{AP} = \mathrm{BQ}$$

であるということが断言できるわけです。

（証明終わり）

問 25. 2 つの線分 AB と CD がある。線分 AB と線分 CD は交わっているが、それぞれお互いの中点で交わっている。線分 AB と線分 CD の交点を O と呼ぶことにする。

実は、このとき必ず $\angle\mathrm{OAC}$ と $\angle\mathrm{OBD}$ の大きさは等しくなっているということを、以下の問に答えることによって証明していくことにする。以下の問に答えなさい。

(1) まず、問題文をよく読み、図を描け。

(2) この主張の仮定と結論はどんなことですか？きちんと確認しなさい。

(3) この主張を証明しなさい。

答えを見る

第2章

三角形と四角形

　これから、三角形と四角形について詳しく学びます。

　三角形とひと言で言ってもいろいろな形、いろいろな大きさのものがありますね。特徴がある形の三角形もあれば、特に特徴のない形の三角形もあります。

　四角形にもいろいろと特徴を持ったものもあれば、そうでないものもあります。ここではこれから、いろいろと特徴を持っている三角形や四角形のことを学びます。

2.1　二等辺三角形

2.1.1　そもそも二等辺三角形ってなに？

　あなたはきっと、「二等辺三角形」という言葉を聞いたことがありますよね。でもそもそも、「二等辺三角形」ってどんな三角形のことでしたっけ？

　今ここに、二等辺三角形のことを何も知らない人がいるとします。この人は「二等辺三角形」という言葉も聞いたことがありません。もしあなたが、この人に「二等辺三角形」ってどんな三角形のことなのか、正確に、無駄なことは言わないで教えてあげるとしたらどんなふうに教えてあげますか？少し考えてみてください。3 分待ちます。

・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・

はい、3 分たちました。では、何人かの人にも考えを聞いてみることにしましょう。

A さんの考え　どんな三角形も必ず辺が 3 つありますよね。とにかく、どれでもよいから、3 つの辺のうち 2 つの辺の長さが同じになっている三角形を「二等辺三角形」と呼ぶんですよ。

B さんの考え　どんな三角形も必ず角が 3 つありますよね。とにかく、どれでもよいから、3 つの角のうち 2 つの角の大きさが同じになっている三角形を「二等辺三角形」と呼ぶんですよ。

A さん、B さん共に、しっかりとした日本語できちんと説明してくれました。これくらいしっかりとした説明ならば、相手に正確に伝わりますね。でも、この 2 人の説明、正しいのでしょうか。あなたの考えはどうでしたか？ 2 人のうちのどちらかと同じでしたか？

この 2 人の説明は内容が違いますよね。もし、正しい説明の人がいるとしても、どっちの人の説明が正しいのでしょうか。まさか、2 人とも正しいのでしょうか。あなたはどう思いますか？

では、答えを教えることにしましょう。正しい説明をしたのは A さんなのです。（「えーっ、B さんの答えも正しいと思ったのに。」という人もいるかもしれませんね。実は、少し立場を変えれば、B さんの答えでも正しいのですが、ここではそもそも二等辺三角形って何？という話をしたいので、A さんの考えが正しいということになるのです。）

というわけで、

そもそも二等辺三角形って何？

> 二等辺三角形とは、3 つの辺のうちどれでもよいからとにかく 2 つの辺の長さが等しい三角形である。

ということなのです。

この、枠に囲まれて書かれた文は、「二等辺三角形」という言葉の意味を正確に説明している文ですね。この文のように、言葉の意味を正確に述べた文のことを**定義**といいます。

ですから

「二等辺三角形とは、3 つの辺のうちどれでもよいからとにかく 2 つの辺の長さが等しい三角形である。」

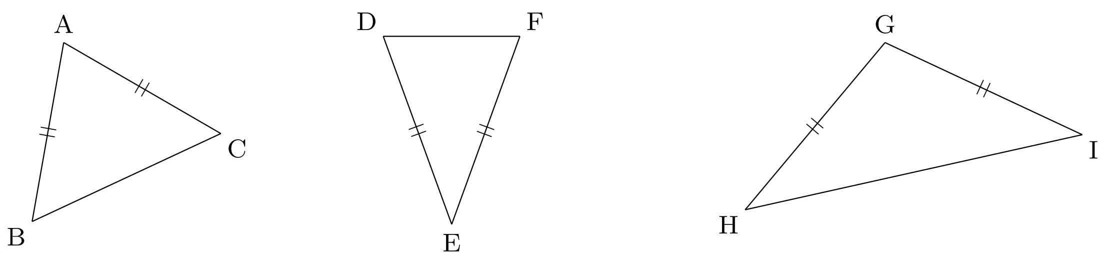
という文は、「二等辺三角形の定義」ということになります。

さて、これまでの話、わかってもらえたでしょうか。とにかく、2 つの「辺」の長さが等しくなっている三角形のことを二等辺三角形と呼ぶのです。「角」の大きさがどうなっていようが、そんなことは「今の所」気にしていないのです。

それではこれから二等辺三角形のことを詳しく調べていくことにしましょう。

2.1.2　二等辺三角形の角の性質

次の図を見てください。二等辺三角形をいくつか描いておきました。

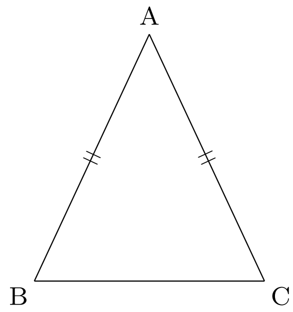


どの三角形も「とにかく 2 つの辺の長さが等しくなっている三角形」です。どの辺とどの辺が等しくなっているのかわかるように図には辺に || のマークをつけました。△ABC では辺 AB と辺 AC の長さが等しいのです。また、△DEF では辺 ED と辺 DF の長さが等しく、△GHI では辺 GH と辺 GI の長さが等しいのです。

さて、今の所角の話は何も出てきていません。でも図を見ているうちに、「△ABC では ∠B と ∠C の大きさって同じじゃないの？」と思った人もいるかも知れませんね。また、「△DEF では ∠D と ∠F の大きさって同じじゃないの？」と思った人や「△GHI では ∠H と ∠I の大きさって同じじゃないの？」と思った人もいるかも知れません。実はその通りなのです。しかし、これは当たり前のことではないのです。だってそうでしょ。二等辺三

角形ってそもそもなんなのか思い出してくださいね。2 つの「辺」の長さが等しい三角形のことですよね。「辺の長さが等しい」っていっているだけですよね。角がどうなっているなんて話は出てきませんね。だとしたら、「今の所」どこか 2 つの角の大きさが等しくなっている保証はありませんね。たとえ、「どこか 2 つの角の大きさが等しくなっている」のが本当だとしても、そのことを認めてもらうためには証拠が必要なのです。そこでこれから証拠を見つけることにしましょう。つまり、「二等辺三角形では 2 つの角の大きさは等しくなる」ということを証明しようと思います。そのために次の例題を考えることにしましょう。

例題 8　右の図は辺 AB と辺 AC の長さが等しい二等辺三角形です。∠B と ∠C の大きさは等しいことを証明しなさい。



解答

　さて、どんな議論をしていけば証明できるのでしょう。どんな方針をたてればうまくいくでしょうか。悩んでください。10 分待ちます。

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

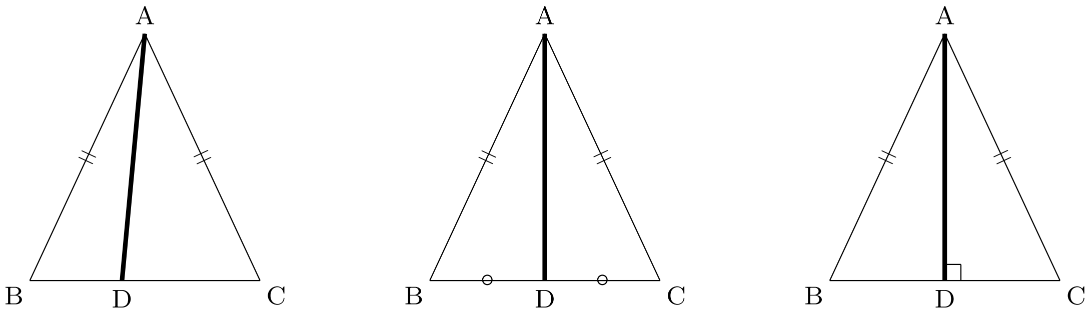
. . . .

はい、10 分たちました。何か良い考え浮かびましたか？えっ、何も考え浮かばなかったですって？それは残念です。では、そんな人のためにアイデアを出してあげましょう。

△ABC のどこかに補助線を引いて、三角形が 2 つ出てくるようにします。ただし、片方の三角形には ∠B が入っていて、もう片方の三角形には ∠C が入っているようにします。そして、もしこの 2 つの三角形が合同である（つまりぴったり重なる）という証拠が見つかれば、∠B と ∠C もぴったり重なるということになります。つまり、∠B と ∠C の大きさは等しいと断言できますね。

どうですか。このアイデア。結構いい線いってますよね。それではこのアイデアを実行することにしましょう。

まず、△ABC のどこかに補助線を引いて、三角形が 2 つ出てくるようにするのでしたね。さて、どこに線を引くとよいのでしょうか。次の図を見てください。



補助線その 1　　補助線その 2　　補助線その 3

3 通りの補助線を考えてみました。どの補助線も、頂点 A から辺 BC へ向けて引いたものです。そして補助線が辺 BC とぶつかる点を D と呼ぶことにしました。このように、頂点 A から辺 BC へ向けて補助線を引くと三角形が 2 つ現れます。そしてちゃんと、片方の三角形には ∠B が入っていて、もう片方の三角形には ∠C が入っていますよね。でもこの 3 種類の補助線ですが、引き方違っていますよね。

補助線 1 は、頂点 A から辺 BC へ向けてなんとなく引いたものです。

補助線 2 は頂点 A から辺 BC の中点（つまり辺 BC のちょうど真ん中の点）へ向けて引いたものです。ですから点 D は辺 BC のちょうど真ん中にあります。また、そのことを示すために図では BD と CD に ∘ のマークを付け、長さが同じであるということを示してあります。

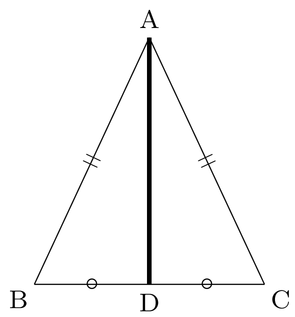
補助線 3 は、頂点 A から辺 BC へ補助線が垂直にぶつかるように引いたものです。ですから ∠CDA は直角です。そのことを示すために、図では ∠CDA の所に直角記号をつけてあります。念のために注意しておきますが、補助線 3 は「点 A から辺 BC の中点（つまり辺 BC のちょうど真ん中の点）へ向けて引いた」わけではありません。ですから、点 D は辺 BC の真ん中にあるという保証は今の所ありません。

3 つの補助線の違いわかってもらえましたか？では、この 3 つの補助線のうち、この例題の主張を証明するのに役立つのはどれなのでしょうか？

補助線 1 はダメですよね。なんとなく引いた補助線なんて役に立ちませんよね。

補助線 2 はどうでしょう。これは頂点 A から辺 BC の中点へ向けて引いた補助線でしたね。この補助線でうまくいくかどうか少し悩んでみることにしましょう。

右の図を見てください。あなたのためにもう一度補助線 2 の図を描いておきました。三角形が 2 つ出てきています。△ABD と △ACD です。△ABD には ∠B が入っていて、△ACD には ∠C が入っています。ですからここまではアイデアのとおり、順調に話が進んでいます。さて、次にどこへ話を進めるのかというと、この 2 つの三角形が合同であるという証拠を見つけるのでしたね。では見つけてみることにしましょう。（三角形の合同条件のこと、覚えていますよね。忘れてしまった人はすぐ復習してください。そうしないと、この先ちんぷんかんぷんになるかもしれません。）



補助線その 2

△ABD と △ACD に注目しているのですよね。

もともとこの例題では、△ABC は辺 AB と辺 AC の長さが等しい二等辺三角形なのですよね。つまり、

$$AB = AC \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

ですね。（これは証拠として使えそうです。）

補助線その 2 は、頂点 A から辺 BC の中点 D へ向けて引いたのですから、当然、

$$\mathrm{BD} = \mathrm{CD} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

ですよね。（これも証拠として使えそうです。）

あと一息の所まできました。三角形の合同条件って 3 パターンありましたよね。「3 組の辺の話が出てくるもの」と「2 組の辺とその間にある 1 組の辺が出てくるもの」と 1 組の辺とその両端にある 2 組の角が出てくるもの」があるんですよね。どの手でいきましょうか？もう一度、図をよく見てみて考えましょう。今の所、2 組の辺がそれぞれ等しいということまで突き止められていますね。だとしたら、きっと「3 組の辺の話が出てくるもの」か「2 組の辺とその間にある 1 組の辺が出てくるもの」のどちらかでケリがつきそうですね。図を見ても。角の大きさに関する手がかりはなさそうです。ということは・・・、「あっ、辺 AD って両方の三角形の辺になっているわけだけど、もとからぴったり重なっているんだから同じ長さに決まってるじゃん。」ということに気付きました。つまり、どちらの三角形から見ても共通になっている辺なので、当然、

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AD} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

となっているのです。

これで証拠が全部そろいましたね。①、②、③から対応している 3 組の辺の長さがそれぞれ等しくなっていることが判明したのです。ですから、

$$\triangle\mathrm{ABD} \equiv \triangle\mathrm{ACD}$$

であると断言できるわけです。

ということは、$\angle\mathrm{B}$ と $\angle\mathrm{C}$ はぴったり重なるはずです。ですから大きさは同じです。これで、

$$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}$$

であることが証明できました。

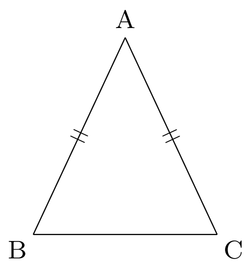
問 26. 例題 8 がきちんと理解できた人のための問題です。例題 8 の解答では、補助線 2 を使って証明をすることができました。では、補助線 3 を使って証明ができるかどうか考えてください。 答えを見る

ここまでの話を整理しておきましょう。

二等辺三角形とは「2 つの辺の長さが等しい三角形」のことでした（定義ですね、これは）。角がどのようにいるのかという話はこの定義の中には出てきません。ですから、たとえ、どんなに 2 つの角の大きさが等しくなっているような気がしたとしても、証拠がなければ認めてもらえないのです。そこで例題 8 で、いっしょうけんめい考えてその証拠を見つけたのでしたね。つまり証明ができたのです。というわけで、次のような重要な事実が証明できたことになります。

重要な事実：実は、二等辺三角形の 2 つの角の大きさは・・・

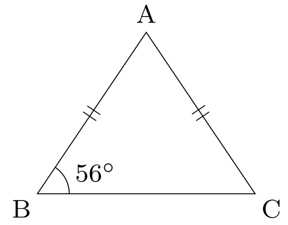
右の図のような、辺 AB の長さと辺 AC の長さが等しい二等辺三角形 △ABC では、必ず ∠B と ∠C の大きさは等しくなっている。



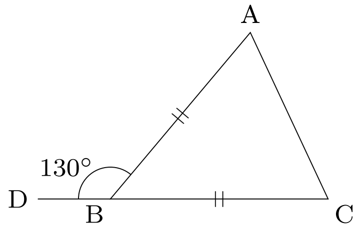
ここであなたに専門用語を 1 つ教えておくことにします。証明された事実のうち、役に立ちそうなものを**定理**と呼びます。さっき学んだ、「重要な事実：実は、二等辺三角形の 2 つの角の大きさは・・・」はきっと役に立つので「定理」の仲間に入れることにしましょう。証明された事実は、いろいろな問題を解くときに自由に利用することができます。

例題 9 次の問に答えなさい。

(1) 右の図は AB ＝ AC となっている二等辺三角形です。$\angle B = 56^\circ$ のとき、$\angle A$ の大きさを求めなさい。

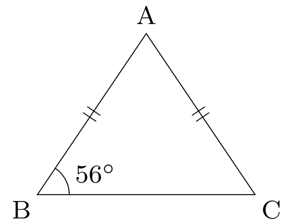


(2) 右の図は AB ＝ CB となっている二等辺三角形です。$\angle B$ の外角の大きさが 130° のとき、$\angle A$ の大きさを求めなさい。



解答

(1) あなたのためにもう一度この問題の図を右に描いておきました。この三角形は二等辺三角形ですね。この例題の前に学んだ重要な事実を思い出すと、$\angle B$ と $\angle C$ が等しいことがわかりますね。ですから、まず、



$$\angle C = 56^\circ$$

ということになります。

ところで、「三角形の 3 つの角の大きさを全てたすと 180° になる」という重要な事実がありますね（これもこのテキストでとっくに証明済みですね）。というわけで、

$$\angle A + 56^\circ + 56^\circ = 180^\circ$$

となるわけですから、

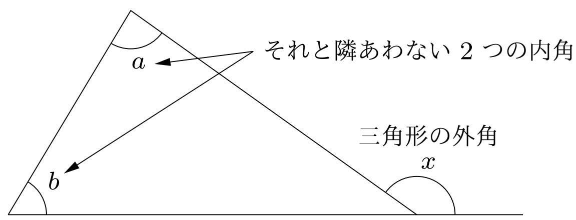
$$\angle A = 180^\circ - 56^\circ - 56^\circ = 68^\circ$$

ということがわかりますね。

(2) この問題は、2 通りの考え方で解くことができます。ここではその 2 つの考え方のうち、やや上級者向けの考え方を紹介します。そのために、まずあなたに思い出してもらいたいことがあります。38 ページで、次のようなことを学びました。

重要な事実：三角形の外角と内角の間にある深い関係

どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっています。つまり、右の図では、例えば、

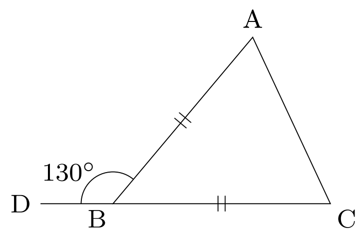


$$x = a + b$$

が成り立っているのです。

覚えていましたか？この事実、このテキストでちゃんと証明もしましたね。

それでは本題に入りましょう。あなたのためにもう一度この問題の図を右に描いておきました。



今思い出してもらった重要な事実を利用すると、この問題では、

$\angle$A の大きさと $\angle$C の大きさをたすと 130° になる

ということがわかりますね。

次に、この例題の前で学んだ二等辺三角形に関する重要な事実を利用すると

$\angle$A と $\angle$C の大きさは等しい

ということもわかりますね。

今見つけた 2 つのことをあわせて考えると、

$$\angle\mathrm{A}\text{ が 2 個分で }130^\circ\text{ になる}$$

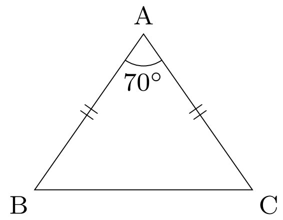
ということになりますよね。ですから、

$$\angle\mathrm{A} = 130^\circ \div 2 = 65^\circ$$

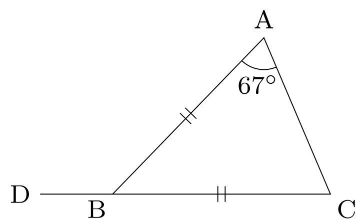
ということですね。

問 27. 次の問に答えなさい。

(1) 右の図は AB ＝ AC となっている二等辺三角形です。
$\angle\mathrm{A} = 70^\circ$ のとき、$\angle\mathrm{C}$ の大きさを求めなさい。



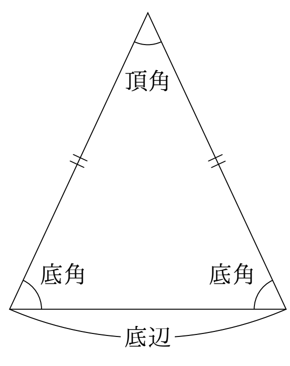
(2) 右の図は AB ＝ CB となっている二等辺三角形です。
$\angle\mathrm{A}$ の大きさが 67° のとき、$\angle\mathrm{B}$ の外角大きさ、つまり
$\angle\mathrm{DBA}$ の大きさを求めなさい。



答えを見る

次の話に進む前に、ここであなたに専門用語を 3 つ教えておきます。

右の図を見てください。二等辺三角形では、等しい長さの 2 つの辺にはさまれている角のことを**頂角**と呼びます。また、頂角以外の 2 つの角のことを**底角**と呼びます。そして、等しい長さの 2 つの辺以外の辺を**底辺**と呼びます。



2.1.3　二等辺三角形の頂角の 2 等分線を伸ばしていくと・・・

さて、これまでに「二等辺三角形では必ず 2 つの角の大きさが等しくなっている」という話を学び、証明もしました。それではこれから、このほかにも二等辺三角形には何か重要な性質があるのか考えることにしましょう。では、1 週間待つことにします。あなた自身でいっしょうけんめい悩んで、何か興味深い性質を見つけてください。

・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

はい、1 週間たちました。何か面白い性質見つかりましたか？ここではこれから、ある昔の人が見つけた重要な性質をあなたに紹介することにします。

重要な事実：二等辺三角形の頂角の二等分線を伸ばしていくと・・・

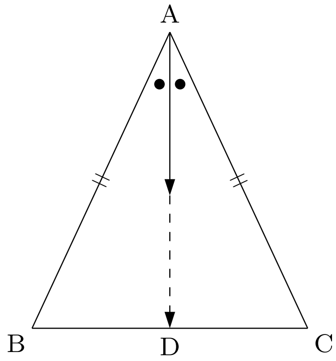
二等辺三角形では、頂角の二等分線を底辺のほうへ伸ばしていくと、必ず底辺の真ん中にぶつかってしまう。つまり、右の図で、

$$AB = AC, \angle BAD = \angle CAD$$

ならば、

$$BD = CD$$

となってしまう。

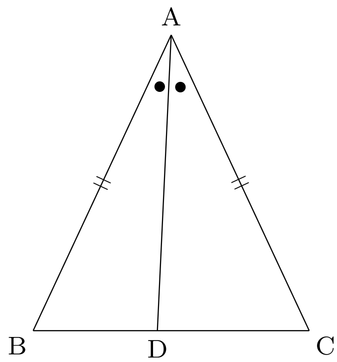


どうですか？昔の人のいっている意味わかりましたか？まさか、「こんなの当たり前のことじゃん」なんていってませんよね。今の所、この、昔の人のいっていること、証拠ないんですよ。ですから、これからこのことを、次の例題で証明することにしましょう。

例題 10　右の図の $\triangle ABC$ は $AB = AC$ となっている二等辺三角形です。$\angle A$ の二等分線が辺 BC とぶつかる点の名前を D とします。このとき、

$$BD = CD$$

となってしまうことを証明しなさい。



（証明）

いつもの作戦で証明することにしましょう。

辺 BD が含まれている三角形と辺 CD が含まれている三角形をそれぞれ 1 つ見つけます。そして、もし、その 2 つの三角形が合同であるという証拠が見つかれば、きっと辺 BD と辺 CD はぴったり重なることになり、長さは同じであると断言できるという作戦

です。

　ではチャレンジしてみます。

　まず、辺 BD が含まれている三角形と辺 CD が含まれている三角形をそれぞれ 1 つ見つけまるのですが、図を見ると、$\triangle$ABD と $\triangle$ACD を使うのが一番自然ですね。というわけで、これから $\triangle$ABD と $\triangle$ACD が合同になるといえるかどうか、証拠探しをしましょう。そのためには三角形の合同条件を頼りにすればよいですね。三角形の合同条件って 3 パターンありましたよね。「3 組の辺の話が出てくるもの」と「2 組の辺とその間にある 1 組の辺が出てくるもの」と 1 組の辺とその両端にある 2 組の角が出てくるもの」があるんですよね。どの手でいきましょうか？もう一度、図をよく見てみて考えましょう。もともとこの問題では、

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

となっているのでしたね。さらにもとから、

$$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{CAD} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

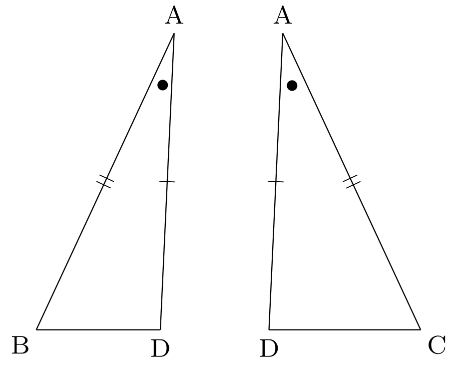
となっているんですよね。（だって、$\angle$BAD と $\angle$CAD はどちらも $\angle$A を二等分してできた角ですから。）

　ここまでで、「辺に関する証拠」が 1 つと「角に関する証拠」が 1 つ見つかりました。ということは、あとはきっと、「辺に関する証拠」をもう 1 つ見つけるか、「角に関する証拠」をもう 1 つ見つけるかすれば良さそうですね。そこでもう一度図をよく見てみましょう。すると・・・、あまりにも当たり前なのがありましたね。そうです、

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AD} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

ですよね。（辺 AD はどちらの三角形の辺にもなっているわけですが、もとからぴったり重なっています。ですから、当然長さは等しいのです。）

これで必要な証拠は全て見つかりましたね。念のため、これまでに見つかった証拠を右の図にまとめておきます。



この図では、わかりやすいように、今注目している △ABD と △ACD を離して描きました。そして、今までに判明した事実をあらわすために、同じ長さの辺に同じマークを付け、同じ大きさの角には同じマークをつけてあります。

というわけで、①、②、③から今注目している △ABD と △ACD では、対応する 2 組の辺の長さとその間にある 1 組の角の大きさが等しいので、

$$\triangle \mathrm{ABD} \equiv \triangle \mathrm{ACD}$$

であることが判明しました。ですから、辺 BD と辺 CD はぴったり重なるということになり、

$$\mathrm{BC} = \mathrm{CD}$$

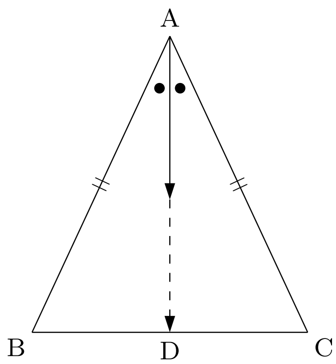
であると断言できます。

（証明おわり）

これで昔の人の見つけた重要な事実は証明されました。ここで少し補足をしておきましょう。実は昔の人は次のようなことも発見していたのです。

重要な事実：二等辺三角形の頂角の二等分線を伸ばしていくと・・・その 2

二等辺三角形では、頂角の二等分線を底辺のほうへ伸ばしていくと、必ず底辺と垂直にぶつかってしまう。つまり、右の図で、



$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC},\ \angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{CAD}$$

ならば、

$$\mathrm{AD} \perp \mathrm{BC}$$

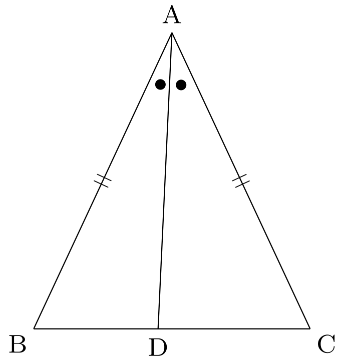
となってしまう。

この事実は次の問であなたに証明してもらうことにします。

問 28. 右の図の $\triangle ABC$ は $AB = AC$ となっている二等辺三角形です。$\angle A$ の二等分線が辺 BC とぶつかる点の名前を D とします。このとき、

$$AD \perp BC$$

となってしまうことを証明しなさい。

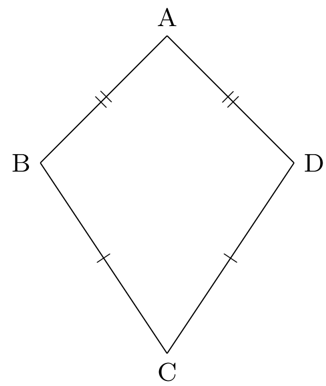


答えを見る

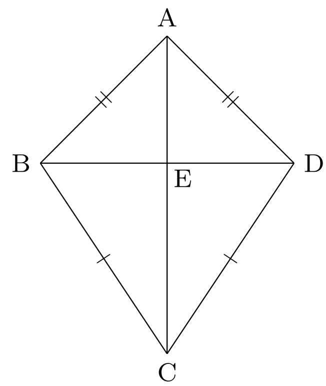
では話を先に進めましょう。

前に、「証明された事実はいろいろな問題を解くときに自由に利用できる」ということを言いましたが覚えていますか？今、例題 10 で、83 ページの重要な事実が証明されました。そこで、この重要な事実を利用すると解くことができる問題にチャレンジします。

例題 11　右の図の四角形 ABCD では、辺 AB と AD の長さが等しく、辺 BC と辺 DC の長さも等しくなっているとします。このとき、対角線 BD と対角線 AC を引くと、必ず AC は BD の真ん中で交わってしまうということを証明しなさい。



（証明）



右の図を見てください。あなたのために、対角線 BD と対角線 AC を引いた図を描いておきました。そして対角線 BD と対角線 AC の交点を E と呼ぶことにしました。では、この図をよく見ながら、証明のための作戦を考えることにしましょう。

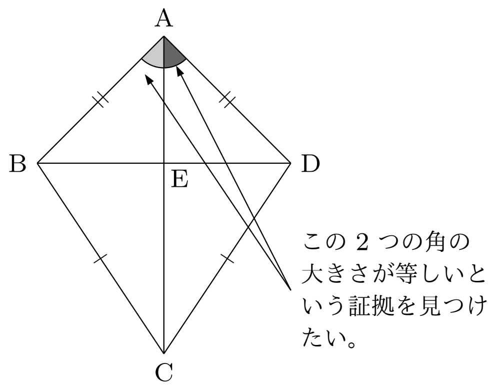
この問題は、「必ず AC は BD の真ん中で交わってしまう

ということを証明しなさい」という問題ですから、BE と DE の長さが等しいという証拠を見つければいいんですよね。ところで、例題 10 で証明した 83 ページの重要な事実によると、「二等辺三角形では、頂角の二等分線を底辺のほうへ伸ばしていくと、必ず底辺の真ん中でぶつかる」ということでしたよね。なんかこの話、使えそうな気がしませんか？だって、この問題の図をよく見ると、△ABD は二等辺三角形だし、対角線 AC って、二等辺三角形 ABD の頂角 A から底辺 BD のほうへ伸びている線ですよね。あー、でも 1 つ困ったことがありますね。AC が頂角 A を二等分しているという保証は今の所ないですね。でも、もし、これからいろいろと調査をしていって、AC が頂角 A を二等分しているという証拠が見つかればこっちの勝ちですよね。なんとかならないでしょうか。悩んでみることにしましょう。というわけで、うまくいくのかまだわかりませんが、次のような作戦でいくことになるわけです。

作戦 : 対角線 AC が頂角 A を二等分しているという証拠を何とかして見つけます。△ABC は二等辺三角形なので、すでに証明されている「二等辺三角形では、頂角の二等分線を底辺のほうへ伸ばしていくと、必ず底辺の真ん中でぶつかる」という事実を利用すると、BD = DE であると断言できることになります。

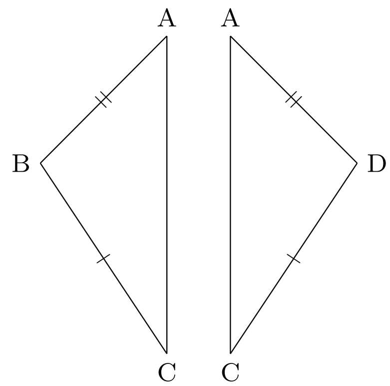
　それではこの作戦を実行することにしましょう。

　まず、対角線 AC が頂角 A を二等分しているという証拠を見つけるのですよね。図をよく見ることしましょう。あなたのためにもう一度、右に図を描いておきました。この図の ∠BAC と ∠DAC の大きさは等しいという証拠を見つければいいんですよね。そうですねぇー、いつもの手で行くことにしましょうか。いつもの手というのは「役に立ちそうな三角形を 2 つ見つけ、その 2 つの三角形が合同であるという証拠を見つけ、だから角の大きさも同じはずだ」という説明をしていく方法です。



では役に立ちそうな三角形を探しましょう。∠BAC が含まれている三角形と ∠DAC が含まれている三角形を探すのですよね。図を見ると、あー、△ABC と △ADC が良さそうではありませんか。もしかすると、△ABE と △ADE が良さそうと思った人もいるかも知れませんね。でも △ABC や △ADC のほうが、△ABE や △ADE よりわかっていることが多いのです。ですから、たぶん、△ABC と △ADC に注目したほうがうまくいくと思われます。

それでは、△ABC と △ADC が合同になる証拠を探していくことにしましょう。



右にまた図を描いておきますが、今度はわかりやすいように △ABC と △ADC を少し離して描きました。この問題ではもともと、

辺 AB と辺 AD の長さは等しい　……… ①

のでしたね。また、この問題ではもともと、

辺 BC と辺 CD の長さは等しい　……… ②

のでしたね。

さらにちょっと考えてみると、もともと辺 AC はぴったり重なっているのですから、

辺 AC と辺 AC の長さは等しい　…………………… ③

に決まってますよね。

これで証拠が見つかりました。①、②、③から、△ABC と △ADC では対応する 3 組の辺の長さが等しいということになり、

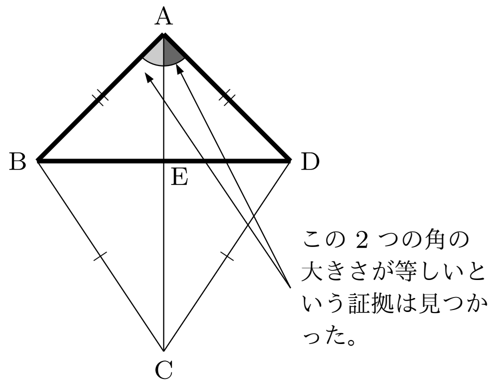
$$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{ADC}$$

であると断言できます。ということは、∠BAC と ∠DAC はぴったり重なるということに

なるので、

$$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{DAC}$$

であると断言できますね。これでめでたく、「AC が $\angle$BAC を二等分している」ということが判明しました。いつもの手はうまくいったのです。



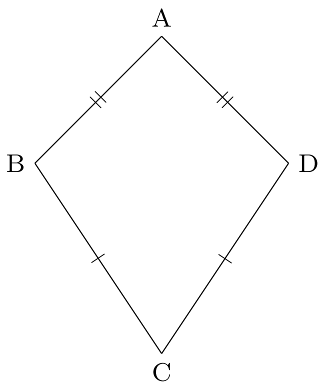
　では右の図を見てください。注目してほしいのは △ABD です。（太い線で描いておきました。）この三角形はは辺 AB と辺 AD の長さが等しい二等辺三角形です。そして、さっき、「AC が $\angle$BAC を二等分している」ということが判明しました。ということは、この例題の前で証明されてた「二等辺三角形では、頂角の二等分線を底辺のほうへ伸ばしていくと、必ず底辺の真ん中でぶつかる」という重要な事実により、

$$\mathrm{BE} = \mathrm{DE}$$

であると断言できます。これで作戦はうまくいきました。AC は BD の中点で交わることが証明されたのです。

（証明おわり）

問 29. 例題 11 の解答が理解出来た人のための問題です。例題 11 を自分一人でも証明できるようにしておきなさい。つまり



『右の図の四角形 ABCD では、辺 AB と AD の長さが等しく、辺 BC と辺 DC の長さも等しくなっているとします。このとき、対角線 BD と対角線 AC を引くと、必ず AC は BD の真ん中で交わってしまうということを証明しなさい。』という問題の証明を自分一人で書いてください。

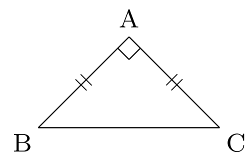
答えを見る

2.1.4　二等辺三角形についてこれまで学んだことを使って問題を解こう

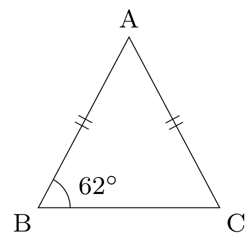
これまで、「そもそも二等辺三角形とはなにか」という話（つまり二等辺三角形の定義）と、「二等辺三角形が持っている性質」を 2 つ学びました。2 つの性質はきちんと証明もされています。（ですから、この 2 つの性質は定理の仲間に入れることができます。）そこでこれからあなたに、これまでに学んだことを使うと解くことのできる問題を解いてもらうことにします。

問 30. 次の問に答えなさい。

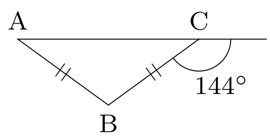
(1) 右の図の三角形は、$AB = AC$ となっている二等辺三角形です。また $\angle A = 90°$ です。$\angle B$ の大きさを求めなさい。



(2) 右の図の三角形は、$AB = AC$ となっている二等辺三角形です。また $\angle B = 62°$ です。$\angle A$ の大きさを求めなさい。



(3) 右の図の三角形は、$AB = BC$ となっている二等辺三角形です。また $\angle C$ の外角の大きさは $144°$ です。$\angle B$ の大きさを求めなさい。



答えを見る

問 31. 次の文はどれも二等辺三角形について述べられている文です。それぞれの文をよく読んで、述べられていることが正しいのか正しくないのか判断し、理由をつけて答えなさい。

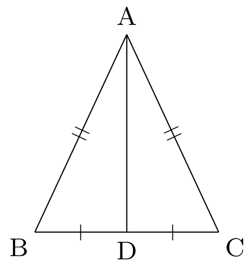
(1) 二等辺三角形の底角の大きさは $90°$ より大きいことがある。

(2) 二等辺三角形の底角の大きさは $90°$ になることがある。

(3) 二等辺三角形の底角の大きさは必ず $90°$ より小さい。

答えを見る

問 32.　右の図の △ABC は AB = AC となっている二等辺三角形です。また、点 D は辺 BC の中点（つまり辺 BC の真ん中の点）です。このとき、実は「AD と BC は垂直になっている」ということを証明しなさい。



答えを見る

2.2　正三角形は二等辺三角形の仲間なのである

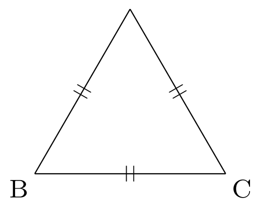
「正三角形」という言葉を聞いたことはありますよね。でも、そもそも「正三角形」ってどんな三角形のことなのでしょう。（二等辺三角形の学習をしたときも、最初にこういうことをきちんと考えましたよね。つまり、ちゃんと「定義」を学んでから色々なことを考えていったわけです。）

それでは、正三角形とはそもそも何なのかということ、つまり正三角形の定義をあなたに教えることにしましょう。

そもそも正三角形ってなに？

3 つの辺の長さが全て等しい三角形を**正三角形**と呼びます。

これが「正三角形の定義」です。とにかく、3 つの「辺」の長さが等しくなっている三角形のことを正三角形と呼ぶのです。「角」の大きさがこれこれこうなっているなどということは「今の所」気にしていないのです。



右の図を見てください。この三角形 ABC では辺 AB、辺 BC、辺 CD の長さが全て等しくなっています。つまり、△ABC は正三角形です。では、この三角形の 3 つの辺のうち、あえてどれか 2 つの辺だけに注目することにしましょう。例えば、辺 AB と辺 AC に注目してみます。もちろん辺 AB と AC の長さは同じですよね。ということは、この三角形 ABC は二等辺三角形であるということにもなりますね。だって、とにかく 2 つ

の辺の長さが等しい三角形を二等辺三角形と呼ぶのでしたよね。

というわけで、この三角形 ABC は正三角形ですが、辺 AB と辺 AC の長さだけを気にすると、この 2 つの辺の長さは同じなので、三角形 ABC は二等辺三角形であるともいえるわけです。このように考えると、**正三角形は二等辺三角形の仲間である**ということがわかりますね。これは大事なことなので、しっかり理解してください。

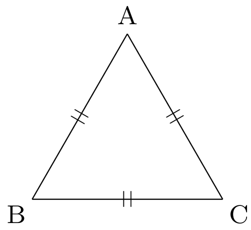
それではこれから、正三角形の性質を調べていくことにしましょう。正三角形には、もちろん角が 3 つあります。ところで、この 3 つの角の大きさには何か関係があるのでしょうか。「なーんだ、そんなのかんたんじゃん。3 つの角は全部同じ大きさだよ。」なんて思った人はいませんか。実はそのとおりなのです。でも、これ、当たり前のことではないんですよ。だって、正三角形って、3 つの「辺」の長さが等しい三角形のことですよね。3 つの「角」の大きさが同じになっている保証は今の所何もありませんね。ですから、たとえ、3 つの角の大きさが等しくなっているということが本当だとしても、証明しないといけないのです。次の例題で証明を考えることにしましょう。

例題 12　正三角形では、3 つの角の大きさは全て等しいということを証明しなさい。

（証明）

まず、思い出してほしいことがあります。それは「正三角形は二等辺三角形の仲間だ」ということです。ですから、正三角形は、二等辺三角形の性質を全て持っています。というわけで、きっとこの例題の主張も、二等辺三角形の性質を使うと証明できるのかも知れませんね。では二等辺三角形の持っているどんな性質を頼りにすると良いのでしょうか。

この例題では、「3 つの角の大きさがどうのこうの」という話をしたいわけです。ですから、二等辺三角形の性質を頼りにするとしても、角の大きさの話が出てくるものを頼ると良さそうです。たしか、二等辺三角形では、2 つの底角の大きさは必ず等しくなっているという性質がありましたね。（このことは、このテキストで証明済みですね。）ということは、正三角形でも、どっかの角とどっかの角の大きさは同じであることになりますね。図を見て少し詳しく考えて見ましょう。

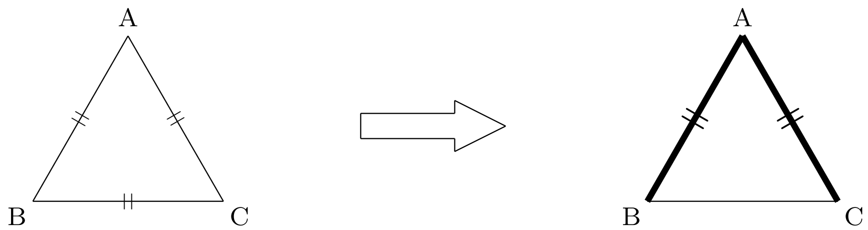


右の図を見てください。この三角形は正三角形です。つまり、辺 AB と辺 BC と辺 AC の長さは全て同じです。

ではここで、辺 AB と辺 AC だけに注目してみましょう。もちろん AB と辺 AC の長さは等しいですよね。ということは、この正三角形は、「AB = AC である二等辺三角形」と考えることができますね。このように考えたとき、底角は ∠B と ∠C ですね。そして、二等辺三角形には底角の大きさが等しいという性質があるのですから、

∠B と ∠C の大きさは等しい　　　　……　①

と断言できますね。今考えたことを念のため次の図にまとめておきます。



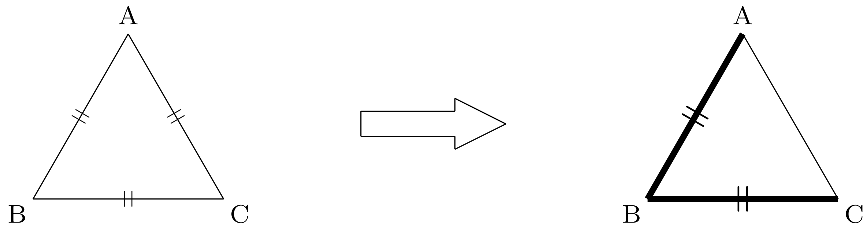
正三角形なので全ての辺の長さは等しい

辺 AB と辺 AC の長さが等しい二等辺三角形と考えると、∠B と ∠C の大きさは等しいと断言できる

今度は辺 BA と辺 BC だけに注目してみましょう。もちろん BA と辺 BC の長さは等しいですよね。ということは、この正三角形は、「BA = BC である二等辺三角形」と考えることができますね。このように考えたとき、底角は ∠A と ∠C ですね。そして、二等辺三角形には底角の大きさが等しいという性質があるのですから、

∠A と ∠C の大きさは等しい　　　　……　②

と断言できますね。今考えたことを念のため次の図にまとめておきます。



正三角形なので全ての辺の長さは等しい

辺 BA と辺 BC の長さが等しい二等辺三角形と考えると、∠A と ∠C の大きさは等しいと断言できる

よって、①と②から、

$$\angle A、\angle B、\angle C \text{ の大きさは全て等しい}$$

と断言できます。

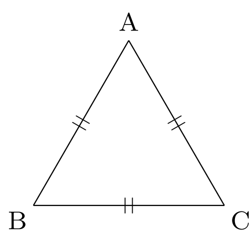
（証明おわり）

例題 12 がきちんと理解できた人は、次の事実が証明できたことになります。

重要な事実：正三角形の 3 つの角の大きさは・・・

正三角形の 3 つの角の大きさは全て等しい。

問 33. 右の図の △ABC は正三角形です。∠A、∠B、∠C の大きさが何度なのか、きちんと説明をつけて求めることにします。以下の文の空欄に正しい言葉、記号、数を書きなさい。



この問の前に学んだ重要な事実によると、正三角形の 3 つの角の大きさは全て $\boxed{\quad\quad}$ いので、∠A と ∠$\boxed{\quad}$ と ∠$\boxed{\quad}$ の大きさは全て等しい。一方、どんな三角形でも、3 つの角の大きさをたすと $\boxed{\quad\quad}$ になる。ということは、∠A 、∠B、∠C の大きさは $\boxed{\quad\quad}$ ÷ $\boxed{\quad}$ を計算すると求めることができる。この計算をすると、

$$\angle A = \angle B = \angle C = \boxed{\quad\quad}$$

であることがわかる。

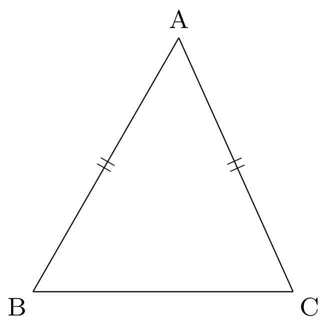
答えを見る

2.3　どんな証拠が見つかれば二等辺三角形だと断言できるの？

おさらい

私たちは以前、「ある三角形が二等辺三角形だとしたら、どっかとどっかの角の大きさは等しくなっていると断言できる」ということを学びました。正確に言うと「二等辺三角形の 2 つの底角の大きさは等しいと断言できる」という話でしたね。

念のためにもう少し詳しく言っておきます。右の図を見てください。この三角形 ABC で、

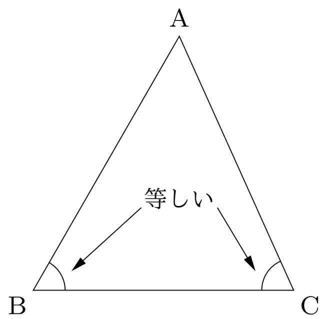


「もし、辺 AB と辺 AC の長さが等しくなっているならば、実は ∠B と ∠C の大きさは等しくなっていると断言できる」という事実を学んだのです。しかも、この事実はきちんと証明済みですね。

おさらいおわり

それでは本題に入りましょう。

右の図を見てください。この △ABC は、今の所、二等辺三角形なのか、二等辺三角形ではないのか判明していない三角形だとしましょう。でもただ 1 つ、判明している事実があるとします。実は、∠B と ∠C の大きさが等しいということだけは判明しているのです。辺の長さについては今の所何もわかっていません。でも「だったら辺 AB と辺 AC の長さは等しいんじゃないの？」って思って人もいるかも知れませんね。あなた、どう思います？「辺 AB と辺 AC の長さは等しい」って断言しちゃっていいんでしょうか。そこで、次の 3 人の人に意見を聞いてみることにしましょう。



P さんの考え　辺 AB と辺 AC の長さは等しいと断言してよいと思います。ちゃんと証

拠もあります。二等辺三角形では底角は等しいといえました。今、まさに底角である ∠B と ∠C の大きさは等しくなっています。だとしたら、この三角形は二等辺三角形のはずなので、辺 AB と辺 AC は長さが等しいと断言できると思います。

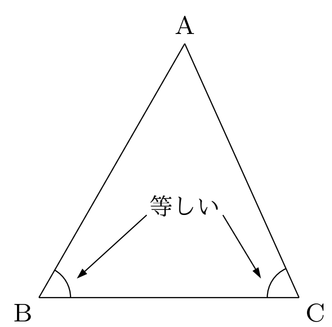
Q さんの考え　私も P さんと同じで、辺 AB と辺 AC の長さは等しいと思います。でも P さんの説明では全然証拠にはなりません。P さんは仮定と結論を取り違えていると思います。だから、たとえ、辺 AB と辺 AC の長さは等しいということが本当だとしても、ちゃんとした証拠が必要です。でも、今の所、私にも証拠はないんです。

R さんの考え　「もし、辺 AB と辺 AC の長さが同じ」ならば「∠B と ∠C の大きさは等しい」と断言できました。でも、この話はそれとは逆の話で、「もし ∠B と ∠C の大きさが等しい」ならば「辺 AB と辺 AC の長さが同じ」という話です。だから、辺 AB と辺 AC の長さが絶対に同じになるなんて、今の所断言できません。もしかすると、辺 AB と辺 AC の長さが違っていることもあるのかも知れません。

さて、3 人の中に、あなたの考えに近い人はいましたか？もちろん、この 3 人とは違う考えもあるかもしれませんね。

それでは、誰の考えが正しいのか、あなたに教えることにしましょう。実は Q さんの考えが正しいのです。Q さんの考えをまとめてみると、「∠B と ∠C の大きさが等しいならば、辺 AB と辺 AC の長さは等しくなっているという主張は正しい。しかし、ちゃんと証明をしないと、正しいとは認めてもらえない。」ということでした。そこで、次の例題で証明を考えることにしましょう。

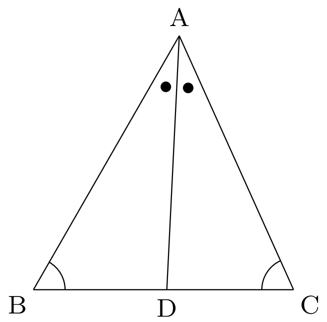
例題 13　右の図の △ABC では ∠B と ∠C の大きさは等しくなっているとします。そうすると、実は、辺 AB と辺 AC の長さは等しくなっているということを証明しなさい。



（証明）

辺 AB と辺 AC の長さが等しくなっている証拠を探すのですよね。そこで、いつもの手を使うことにしましょう。つまり、「辺 AB が含まれている三角形と辺 AC が含まれている三角形を見つけ、その 2 つの三角形が合同になっている証拠を見つけ、だから対応する辺の長さも等しいんだよ」という説明をする方法です。ところで、この問題の図には、三角形が 1 つしかありません。ですから、どこかにうまい補助線を引いて、三角形が 2 つ出てくるようにしないといけませんね。もちろんこのとき、片方の三角形には辺 AB が含まれていて、もう片方の三角形には辺 AC が含まれているようにしなければなりません。では、どこにどんな補助線を引けばよいのでしょう。

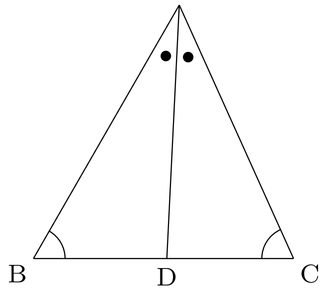
そうですねぇ、ここではためしに、「∠A の二等分線」を補助線として引いてみることにしましょうか。右の図を見てください。∠A を二等分する線を点 A から伸ばしていき、辺 BC とぶつかる点の名前を D としました。これで、三角形が 2 つ現れましたね。△ABD と △ACD です。そして、ちゃんと、△ABD には辺 AB が含まれ、△ACD には辺 AC が含まれていますね。ですから、この 2 つの三角形を使えば話を進めることができそうです。



使えそうな 2 つの三角形を見つけたので、次はこの 2 つの三角形が合同であるという証拠を探せばよいのですよね。そこで、この例題の前にも出てもらった P さんにもう一度登場してもらい、△ABD と △ACD が合同になるという証拠を探してもらうことにします。

では P さん、証明してみてください。

P さんの証明　△ABD と △ACD を見てください。



まず、この問題ではもともと、

∠B と ∠C の大きさが等しい　……　①

といえます。

また、∠A の二等分線を補助線として引いたのですから、

∠BAD と ∠CAD の大きさは等しい　……… ②

といえます。

さらに、

辺 AB と辺 AC の長さは等しい　……… ③

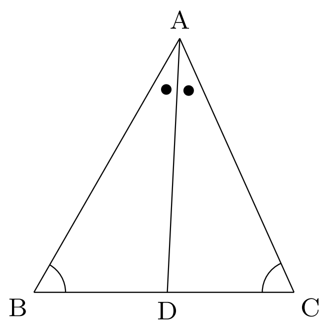
といえます。というわけで、①、②、③から、対応する 1 組の辺の長さと、その両端にある 2 組の角の大きさが等しいということになるので、△ABD と △ACD は合同であると断言できます。

（P さんの証明おわり）

さて、P さんのこの証明、どう思いますか？実は、この証明ではダメなのです。どこがダメなのかわかりますか？どこがダメなのかというと、③の所です。この問題では今の所、辺 AB と辺 AC の長さは同じかどうかわかっていないのですよね。しかし P さんは、何も証拠がないのに辺 AB と辺 AC の長さは同じと決め付けてしまいました。

では P さん、もう一度チャンスをあげます。証明してみてください。

P さん 2 回目の証明　△ABD と △ACD を見てください。



まず、辺 AD と辺 AD は共通なので、

辺 AD と辺 AD の長さはもちろん等しい　……… ①

といえます。

また、BD は ∠A の二等分線なので、以前学んだ重要な事実「二等辺三角形では、頂角の二等分線を底辺のほうへ伸ばしていくと、必ず底辺の真ん中にぶつかっても

らう」ということを使うと、

辺 BD と辺 CD の長さは等しい　　　……. ②

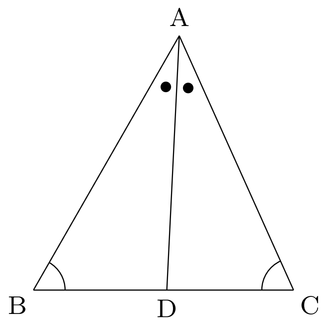
といえます。

さらに・・・

と続けようとした所、「ストップ」といわれてしまいました。この証明、またダメなのです。どこがダメなのかわかりますか？どこがダメなのかというと、②の所です。以前、確かに「二等辺三角形では、頂角の二等分線を底辺のほうへ伸ばしていくと、必ず底辺の真ん中にぶつかってもらう」ということを学んだのですが、この話は、「すでに、二等辺三角形であるということが判明している三角形」だけに使える話ですよね。今、この問題で考えている △ABC は二等辺三角形なのかそうでないのか判明していないのですよね。ですから、この事実を使うわけにはいかないのです。

一度や二度、うまくいかなかったからといってあきらめることはありません。では P さん、何度でもチャンスをあげます。証明してみてください。

P さん 3 回目の証明　△ABD と △ACD を見てください。



まず、辺 AD と辺 AD は共通なので、

辺 AD と辺 AD の長さはもちろん等しい　……. ①

といえます。

また、∠A の二等分線を補助線として引いたのですから、

∠BAD と ∠CAD の大きさは等しい　　　……. ②

といえます。

さらに、この問題ではもともと、

$\angle$B と $\angle$C の大きさが等しい　　　　　　　　…… ③

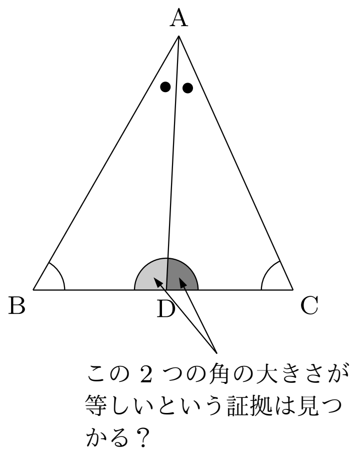
といえます。

これで、「1 組の辺の話」と「2 組の角の話」ができました。一瞬 P さんは「やったー。これで 2 つの三角形が合同であるという証拠が見つかった。」と思いましたがすぐに、「いや、だめだぁ、両端の角になってないじゃん。」と気付きました。そうですね、三角形の合同条件の中に、「1 組の辺の話と 2 組の角の話」がでてくるものがありますが、正確に言うと、「1 組の辺とその両端にある 2 組の辺がそれぞれ等しい」という条件でしたね。今見つかっている証拠では、「1 組の辺」というのはもちろん辺 AD ですが、証拠として見つけた「2 組の角」は辺 AD の両端にはないですよね。ですから、この P さんの証明は、まだうまく行っていないのです。

P さんは思いました。「困った。もう証拠が見つからない。どうすればいいんだろう。もう一度図をよく見て考えるんだ。絶対何か証拠を見つけられるはずだ。えーと・・・あと $\angle$ADB と $\angle$ADC の大きさが等しいという証拠が見つかればいいのになぁ。そうすれば、今度こそ、1 組の辺とその両端の角の話になるのに。」

さて P さん、何とかうまくいくのでしょうか。

右の図を見ることにしましょう。灰色になっている 2 つの角の大きさが等しいという証拠を見つければよいのですね。そこで P さんは悩みました。「あっ、灰色になっていない角のことは全部わかってるんじゃん。$\angle$B と $\angle$C は等しいし、$\angle$BAD と $\angle$CAD は等しいよな。だったら、灰色の 2 つの角の大きさだって等しくなるしかないじゃん。だって、どんな三角形でも、3 つの角をたすと必ず 180° になるんだから。やったー。」



というわけで P さんは次のように証明を続けていきました。

すでに、②で

$$\angle \mathrm{BAD} \text{ と } \angle \mathrm{CAD} \text{ の大きさは等しい}$$

であることが判明しています。

また、③では

$$\angle \mathrm{B} \text{ と } \angle \mathrm{C} \text{ の大きさが等しい}$$

であることが判明しています。

ところで、どんな三角形でも 3 つの角をたすと必ず 180° になります。ですから、2 つの三角形で 2 組の角の大きさが等しくなっていたら、残りの 1 組の角の大きさも等しいはずです。というわけで、②、③より、

$$\angle \mathrm{ADB} \text{ と } \angle \mathrm{ADC} \text{ の大きさが等しい} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ④$$

といえます。

これで証拠がそろいました。①、②、④により、1 組の辺の長さとその両端にある 2 組の角の大きさがそれぞれ等しいということになるので、

$$\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{ACD}$$

と断言できます。

（P さんの 3 回目の証明おわり）

P さんお見事です。完璧な証明です。P さんのすばらしい努力のおかげで、注目していた 2 つの三角形は合同であるということが判明しました。合同であるということは、ぴったり重ねることができるということですから、辺 AB と辺 AD だってもちろんぴったり重なるということになり、長さは等しいと断言できます。これでこの問題は全て証明が終わりましたね。

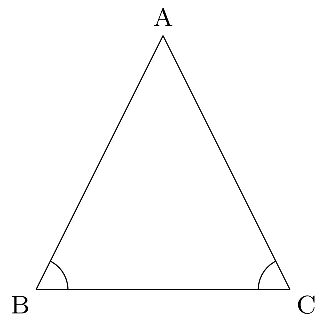
（この例題の証明おわり）

例題 13 の証明ができたので、次のような重要な事実が判明しました。

重要な事実：どんな証拠が見つかれば二等辺三角形だと断言できる？

三角形の 2 つの角が等しくなっているということがわかったら、その三角形は二等辺三角形であると断言できます。

詳しく言うと、もし右の図の △ABC で ∠B = ∠C であるということがわかっているならば、AB = AC であると断言できるのです。



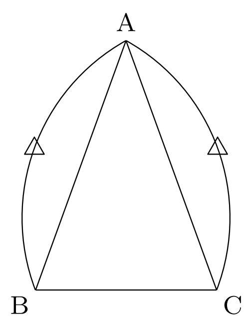
前にも言いましたが、証明された事実はいろいろな問題を解くときに自由に利用することができます。そこで、今証明されたばかりの「重要な事実」を利用すると証明ができるような問題を練習することにしましょう。

例題 14　辺 AB と辺 AC の長さが等しい二等辺三角形 ABC があります。辺 AB と辺 AC 上にそれぞれ点 D、点 E をとるのですが、DB の長さと EC の長さが等しくなるようにしておきます。B と E を結んで線分 BC を作り、C と D を結んで線分 CD を作り、BE と CD の交点を P とします。このとき、△PBC は二等辺三角形であることを証明しなさい。

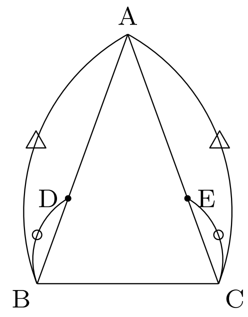
（証明）

問題文を丁寧に読んで、図を描いてみることにしましょう。

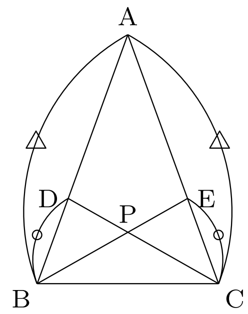
まず、辺 AB と辺 AC の長さが等しい二等辺三角形 ABC があるのですから、右の図のようになります。辺 AB と辺 AC の長さが等しいということをあらわすために △ をつけておきました。



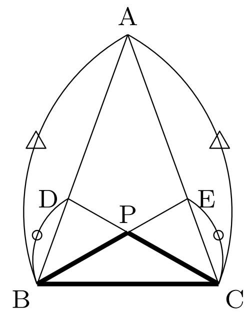
そして、次は、辺 AB と辺 AC 上にそれぞれ点 D、点 E をとるのですが、DB の長さと EC の長さが等しくなるようするので右の図のようになります。DE と CE が同じ長さであることをあらわすために ∘ をつけておきました。



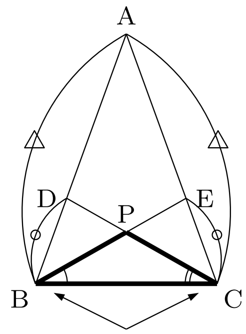
さらに B と E を結んで線分 BC を作り、C と D を結んで線分 CD を作り、BE と CD の交点を P とするのですから、右の図のようになります。これで図は完成ですね。



図の中に現れた △PBC に注目してください。あなたのために右にあらためて図を描いておきます。わかりやすいように △PBC は太い線で描いてあります。この問題は「この △PBC は二等辺三角形のはずだから、証拠を探してくれ」という問題ですね。でも、これ本当に二等辺三角形なのでしょうか？なんとなくそう見えないこともありませんが、これからきちんと証拠を探しましょう。でも、どんな証拠が見つかればよいのでしょうか。そこで、この例題の前に学んだ重要な事実を思い出してみることにしましょう。たしか、「2 つの角の大きさが等しいという証拠が見つかれば、その三角形は二等辺三角形であると断言できる」のでしたね。ですから、もし、∠PBC と ∠PCB の大きさが等しいという証拠が見つかれば、PB と PC の長さは等しいと断言できるということになりますね。



念のため、右の図を見てください。つまり、この図で と のマークがついている 2 つの角の大きさが等しいという証拠が見つかればよいわけです。では、この方針で考えていくことにしましょう。



この 2 つの角の大きさが等しいという証拠は見つかる？

ところで、今の所、どんな手がかりがあるでしょうか。問題文と、問題を読んで作った図を思い出してみると、たしか、

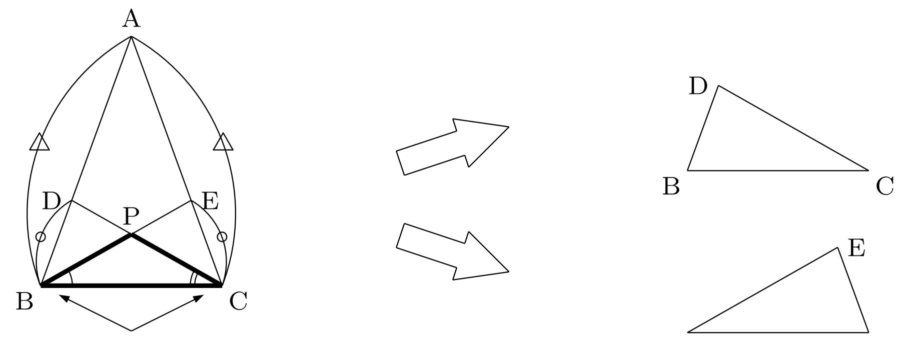
$$\mathrm{AB} = \mathrm{CD}$$

であることと、

$$\mathrm{DB} = \mathrm{EC}$$

であることが初めからわかっているのですよね。今の所わかっているのは辺の長さの話だけで、角の大きさの話は何もありません。ですから、この 2 つの辺の話を、何とか角の話に結び付けていかないといけませんね。そこで、いつもの手で考えることにしましょう。つまり、「$\angle$PBC の入っている三角形と $\angle$PCB の入っている三角形を見つけ、その 2 つの三角形が豪壮であるという証拠をつかみ、そうすると $\angle$PBC と $\angle$PCB はピッタリ重なるから大きさも等しいのだ」というように話を進めるのです。それではどの三角形を使えばよいのでしょうか。$\angle$PBC の入っている三角形と $\angle$PCB の入っている三角形ですよね。だったら、$\triangle$DBC と $\triangle$ECB がよいのではないでしょうか。

次の図を見てください。



この 2 つの角の大きさが等しいという証拠は見つかる？

考えやすくするために、注目することにした 2 つの三角形を、もとの図から取り出してみました。 ではこれから、この 2 つの三角形が合同になっているという証拠を探していきます。

△DBC と △ECB では、

問題文をよく読むと、もとから、

$$\mathrm{DB} = \mathrm{EC} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

となっているのでしたね。

また、△DBC の辺 BC と △ECB の辺 CB はもともとぴったり重なっているのですから、

$$\mathrm{BC} = \mathrm{CB} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

ですよね。

ここまでは簡単にわかります。あとどんなことがわかればよいでしょう。今の所「2 組の辺の話」ですよね。三角形の合同条件を思い出してみると、あと「さらに辺の話」をするか、「さっき見つけた 2 組の辺の間にある角の話」をすればよいですよね。さて、どっちがよいのでしょう。「さらに辺の話」をするのは無理ですよね。だって、残っている辺、つまり辺 DC と辺 EB には特に手がかりはないですよね。ということは、「さっき見つけた 2 組の辺の間にある角」、つまり ∠CBD と ∠BCE を頼りにするしかなさそうですね。でも、もとの問題文や作ってみた図を見ても、この 2 つの角の話は何もありません。うーん、困りました。でも、何か見落としていることはないでしょうか。もう一度問題文をよく読んでみると、あー、この問題では、辺 AB と辺 AC の長さは等しいことになってるんですよね。つまり、△ABC は辺 AB と辺 AC の長さが等しい二等辺三角形なんですよね。このこと、まだ何も活用してないですね。きっと、このことをうまく使えば切り抜けれれるんじゃぁないでしょうか。あー。そうか、そりゃぁそうですね。だって、結構前に学んだ重要な事実によると、「二等辺三角形では 2 つの底角の大きさは必ず同じになっている」のでしたね。ですから、

$$\angle\mathrm{CBD} = \angle\mathrm{BCE} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

といえますね。

これで証拠はそろいました。①、②、③より、△DBC と △ECB では、2 組の辺の長さと、その間にある 1 組の辺の長さがそれぞれ等しいということになります。ですから、

$$\triangle\mathrm{DBC} \equiv \triangle\mathrm{ECB}$$

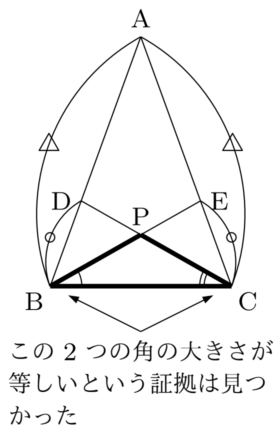
であると断言できるわけです。

というわけで、いつもの手でうまく話が進んでいきそうです。△DBC と △ECB はぴったり重ねることができるということがわかったのですから、

$$\angle\mathrm{PBC} = \angle\mathrm{PCB}$$

であることがいえます。

ではここであらためて △PBC を見てましょう。右の図を見てください。この例題の前で学んだ重要な事実「2 つの角の大きさが等しいという証拠が見つかれば、その三角形は二等辺三角形であると断言できる」を思い出すと、△PBC は辺 PB と辺 PC の長さが等しい二等辺三角形である」と断言できますね。



（証明おわり）

問 34. △ABC があるとします。この △ABC は、AB = AC となっている二等辺三角形です。∠B と ∠C の二等分線をひき、交点の名前を P とします。このとき、△PBC は二等辺三角形であることを証明しなさい。

答えを見る

2.4　主張とその逆

59 ページから始まる「証明の進め方」のところでは、主張には仮定」と結論」と呼ばれるものがあるということを学びました。それではおさらいの問題をあなたに出します。

おさらいの問題

以下の主張の仮定と結論を言いなさい。

(1) 東京に住んでいるならば日本に住んでいる。

(2) a と b は同じ数であるならば $a+3$ と $b+3$ は同じ数である。

答え

大丈夫ですよね。

(1) 仮定・・・東京に住んでいる

結論・・・日本に住んでいる

(2) 仮定・・・a と b は同じ数である

結論・・・$a+3$ と $b+3$ は同じ数である

ですよね。

おさらいの問題と答えおわり

では話を進めます。

ある主張があると、その主張の仮定と結論を入れかえて新しい主張を作ることができます。例えば、

東京に住んでいるならば日本に住んでいる。

という主張の仮定と結論を入れかえると、

日本に住んでいるならば東京に住んでいる。

という主張ができます。

問 35. 次の主張の仮定と結論を入れかえて、新しい主張を作りなさい。

(1) a と b は同じ数であるならば $a+3$ と $b+3$ は同じ数である。

(2) $\triangle$ABC と $\triangle$EFG は合同であるならば $\triangle$ABC と $\triangle$EFG の面積は等しい。

答えを見る

先に進む前に、ここであなたに専門用語を 1 つ教えておくことにしましょう。

もとの主張の仮定と結論を入れかえてできる新しい主張を、**（もとの）主張の逆**といいます。

例題 15　次の主張の逆を作ってください。また、もとの主張は正しい主張なのか間違っている主張なのか判断してください。さらにもとの主張の逆は正しい主張なのか間違っている主張なのか判断してください。

(1)　a と b は同じ数であるならば $2a$ と $2b$ は同じ数である。

(2)　北海道に住んでいるならば日本に住んでいる。

解答

(1) もとの主張の仮定は「a と b は同じ数である」で、結論は「$2a$ と $2b$ は同じ数である」ですよね。これらを入れかえれば、もとの主張の逆ができるわけです。ですから、もとの主張の逆は、

$2a$ と $2b$ は同じ数であるならば a と b は同じ数である

という主張ですね。

それでは次に、もとの主張は正しいのかどうか、考えて見ましょう。

もとの主張は、

a と b は同じ数であるならば $2a$ と $2b$ は同じ数である

という主張ですね。これ、いっていること正しいですよね。もともと 2 つの数が同じ数なら、それらを 2 倍してできる数だって同じになりますよね。つまり、もとの主張は正しい主張ですね。

今度は、もとの主張の逆が正しいのかどうか考えて見ましょう。

もとの主張の逆は、

$2a$ と $2b$ は同じ数であるならば a と b は同じ数である

という主張ですね。これも、いっていること、正しいですよね。だって、$2a$ と $2b$ が同じ数だったら、それぞれを $\dfrac{1}{2}$ 倍した数、つまり a と b だって等しいですよね。ですから、もとの主張の逆は正しい主張ですね。

(2) もとの主張の仮定は「北海道に住んでいる」で、結論は「日本に住んでいる」ですよね。これらを入れかえれば、もとの主張の逆ができるわけです。ですから、もとの主張の逆は、

日本に住んでいるならば北海道に住んでいる

という主張ですね。

それでは次に、もとの主張は正しいのかどうか、考えて見ましょう。

もとの主張は、

北海道に住んでいるならば日本に住んでいる

という主張ですね。これ、いっていること正しいですよね。北海道って日本の一部なのですから、北海道に住んでいれば当然日本に住んでいることになりますね。つまり、もとの主張は正しい主張ですね。

今度は、もとの主張の逆が正しいのかどうか考えて見ましょう。

もとの主張の逆は、

日本に住んでいるならば北海道に住んでいる

という主張ですね。これ、いっていること、おかしいですよね。日本に住んでいるからといって、北海道に住んでいるとまではいえないですよね。だって、神奈川県に住んでいることもあれば、福岡県に住んでいることありますよね。ですから、もとの主張の逆は正しい主張ではありませんね。

例題 15 がちゃんと理解できた人は次のことがわかったと思います。

重要な事実：主張とその逆の主張の関係について

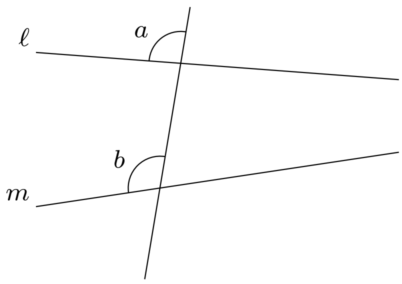
もとの主張が正しい主張だとしても、もとの主張の逆は正しくない主張になることがあります。

問 36. 次の主張の逆を作ってください。また、もとの主張は正しい主張なのか間違っている主張なのか判断してください。さらにもとの主張の逆は正しい主張なのか間違っている主張なのか判断してください。

(1) △ABC と △EFG の面積は等しいならば △ABC と △EFG は合同である。

(2) a と b は偶数であるならば $a+b$ は偶数である。

(3) 右の図で、
直線 ℓ と直線 m は平行ならば $\angle a$ と $\angle b$ の大きさは等しい。



(4) △ABC と △EFG は合同であるならば辺 BC と辺 FG の長さは等しい。

答えを見る

2.5　直角三角形だけに使うことができる合同条件

おさらい

2 つの三角形があるとします。どんな証拠が見つかれば、2 つの三角形は合同であると断言してよいのかということを思い出しておきましょう。たしか次のような 3 つの方法があるのでしたね。

その 1　2 つの三角形で、対応する 3 組の辺の長さがそれぞれ等しく なっているという証拠が見つかれば、2 つの三角形は合同であると断言してよい。

その 2　2 つの三角形で、対応する 2 組の辺の長さと、その間にある 1 組の角の大きさが

それぞれ等しく なっているという証拠が見つかれば、2 つの三角形は合同であると断言してよい。

その 3　2 つの三角形で、対応する 1 組の辺の長さと、その両端にある 2 組の角の大きさがそれぞれ等しく なっているという証拠が見つかれば、2 つの三角形は合同であると断言してよい。

おさらいおわり

では本題に入ることにしましょう。実は、直角三角形に限った話なのですが、2 つの三角形が合同であるということを証明するとき、少しだけ手抜きができるという話があるのです。そのことをこれから順に説明していきます。

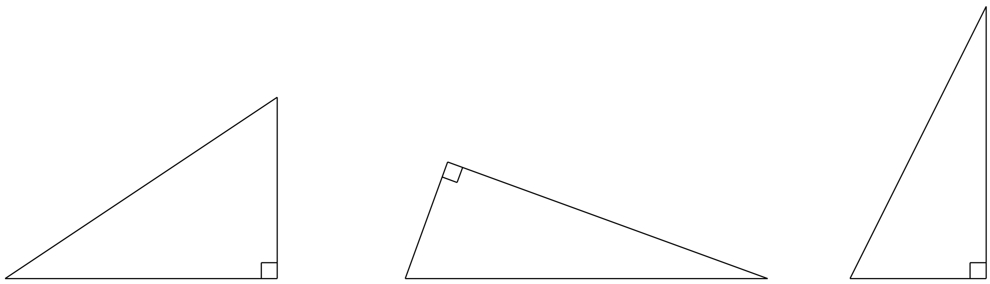
まず、専門用語をあなたに教えておきます。あなたは、直角三角形とはどんな三角形のことなのか知っていますよね。このテキストの 39 ページで学んでいますね。念のために復習しておくと、

直角三角形ってなに？

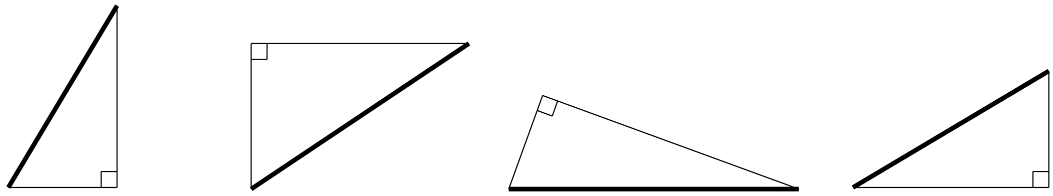
三角形には 3 つの角があります。3 つの角のうち、どれか 1 つの角の大きさが直角（つまり 90°）である三角形を直角三角形と呼びます。

ということでしたね。

例えば、次の図の三角形はどれも直角三角形ですね。

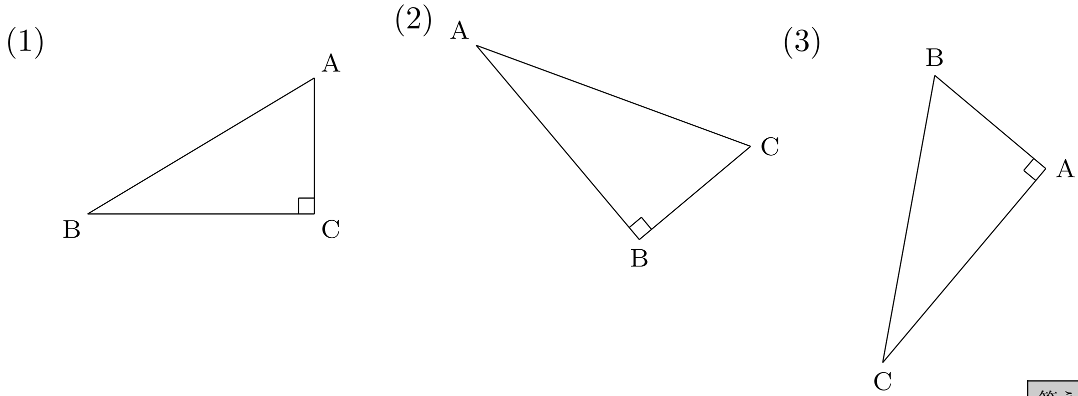


次に、「直角三角形の斜辺」という言葉を説明します。次の図を見てください。



この図に描かれている三角形は全て直角三角形です。どの三角形にも、1 つだけ太く描かれている辺がありますね。この辺のことを**直角三角形の斜辺**と呼んでいます。この図を見ればわかってもらえると思いますが、直角三角形の斜辺とは、直角と向かい合っている辺のことです。

問 37. 次の図の直角三角形で、斜辺はどれですか。



答えを見る

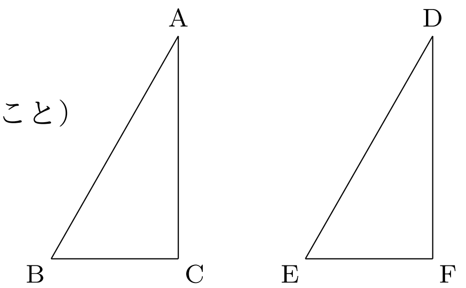
では本題に戻りましょう。

2 つの三角形があるとき、その 2 つの三角形が合同なのか合同でないのかどうやって判定するのかという話ですね。もちろん、このテキストでこれまでに学んだ「三角形の合同条件」を使って調べていくことがでできるわけですが、2 つの三角形が直角三角形だったら少し手抜きができるという話をしようとしているところでした。どんな風に手抜きができるのか、次の例題で考えることにしましょう。

例題 16　2 つの直角三角形があるとします。実は、この 2 つの直角三角形では、「斜辺の長さは等しく、1 つの鋭角の大きさも等しくなっている」とします。このとき、2 つの直角三角形は合同であるということを、これまでに学んだ三角形の合同条件を使って証明し

なさい。

　つまり、右の図の $\triangle$ABC と $\triangle$DEF で、もし、



$\angle$C $=$ $\angle$F $=$ 90°（どちらの三角形も直角三角形ということ）

　AB $=$ DE（斜辺の長さが等しいということ）

$\angle$A $=$ $\angle$D（1 つの鋭角の大きさが等しいということ）

が成り立っていたら、

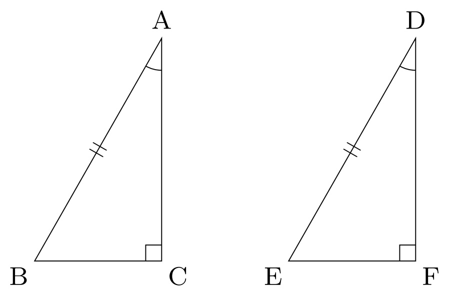
$$\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{DEF}$$

であるということを証明しなさい。

（証明）

　三角形の合同条件については、この節の初めでおさらいしています。つまり、2 つの三角形があるとき、「どんな証拠が見つかれば 2 つの三角形は合同であると断言できるのか」ということは、この節の初めでおさらいしましたね。たしか、3 つの方法がありのでしたね。心配な人は、もう一度よく見直してください。では、この問題では 3 つの方法のうちどの方法がよいのでしょうか。この問題の文をもう一度よく読んで、すでにわかっていいることを整理してみましょう。

　右の図のように $\triangle$ABC と $\triangle$DEF があるわけですが、



　　$\angle$C と $\angle$F は両方とも直角になっていて、

　　辺 AB と辺 DE の長さは等しくなっていて、

　　$\angle$A と $\angle$D の大きさも同じになっている

のでしたね。つまり、今の所「1 組の辺の話」と「2 組の角の話」が判明しているわけでです。3 つある三角形の合同条件の中には、「1 組の辺の話と 2 組の角の話」が出てくるもの

があるのですが、1 組の辺の話と 2 組の角の話が出てくるといっても、2 組の角は、1 組の辺の両端になければならないのでした。ですから今の場合、これをすぐに使うわけにはいきません。それでは、あと、どんなことが判明すれば、この 2 つの三角形は合同であると断言できるでしょうか。

もし、どうしても、「1 組の辺の話と 2 組の角の話」で切り抜けたいならば、例えば、あと $\angle B$ と $\angle E$ の大きさが等しいという証拠が見つかればよいですね。そうすると、辺 AB や辺 DE の両端にある 2 組の角の大きさが等しいということになり、三角形の合同条件のとおりになるからです。というわけで、$\angle B$ と $\angle E$ の大きさが等しいという証拠をなんとかして見つけてみようと思います。でもちょっと考えてみると、これ、すぐわかりますよね。だって、すでにこの 2 つの三角形では、対応する 2 組の角の大きさが等しいことがわかっているんですよね。そしてどんな三角形も 3 つの角の大きさをたすと必ず $180°$ になっているんですよね。このことに気付けば勝ったも同然ですね。つまり、

$\angle C$ と $\angle F$ は両方とも直角なのでもちろん大きさは同じ

$\angle A$ と $\angle D$ の大きさも同じ

どんな三角形でも内角の和は $180°$

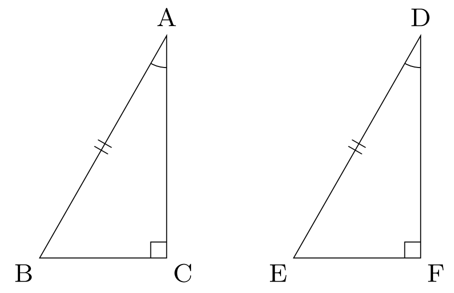
なので、残りの 1 組の角の大きさも同じになっているはず、つまり、

$\angle B$ と $\angle E$ の大きさは同じ

であることが判明するわけです。

ここまで悩んできたことを整理して、数学の答案っぽい証明を次に書いておくことにします。

右の図を見てください。△ABC と △DEF では、仮定より、



$$\angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{F} \qquad \cdots\cdots\ ①$$

が成り立っています。

また仮定より、

$$\mathrm{AB} = \mathrm{DE} \qquad \cdots\cdots\ ②$$

が成り立っています。

また、仮定より、

$$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{D} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\ ③$$

が成り立っています。

三角形の内角の和は必ず 180° なのですから、3 組の角のうち、2 組の角の大きさが等しければ残りの 1 組の角の大きさも同じです。ですから、②、③より、

$$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{E} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\ ④$$

が成り立っているといえます。

よって、②、③、④より、2 つの三角形では 1 組の辺の長さとその両端にある 2 組の角の大きさが等しいということになり、

$$\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{DEF}$$

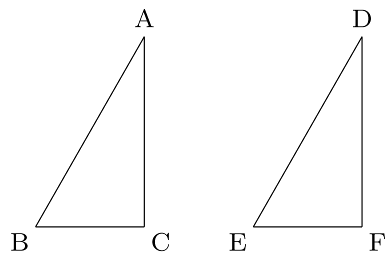
であることになります。

（証明おわり）

問 38. 2 つの直角三角形があるとします。実は、この 2 つの直角三角形では、「斜辺の長さは等しく、斜辺とは違う 1 組の辺の長さも等しくなっている」とします。このとき、2

つの直角三角形は合同であるということを、これまでに学んだ三角形の合同条件を使って証明しなさい。

つまり、右の図の $\triangle$ABC と $\triangle$DEF で、もし、



$\angle C = \angle F = 90°$（どちらの三角形も直角三角形ということ）

$AB = DE$（斜辺の長さが等しいということ）

$AC = DF$（斜辺とは違う 1 組の辺の長さが等しいということ）

が成り立っていたら、

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

であるということを証明しなさい。

ヒント：$\triangle$DEF を裏返してから 2 つの三角形を辺 AC と辺 DF を張り合わて合体させます。そうすれば、きっと $\angle$B と $\angle$E の大きさは等しいという証拠が見つかるでしょう。

答えを見る

例題 16 と問 38 をきちんと学んだ人は、次のことを証明したことになります。

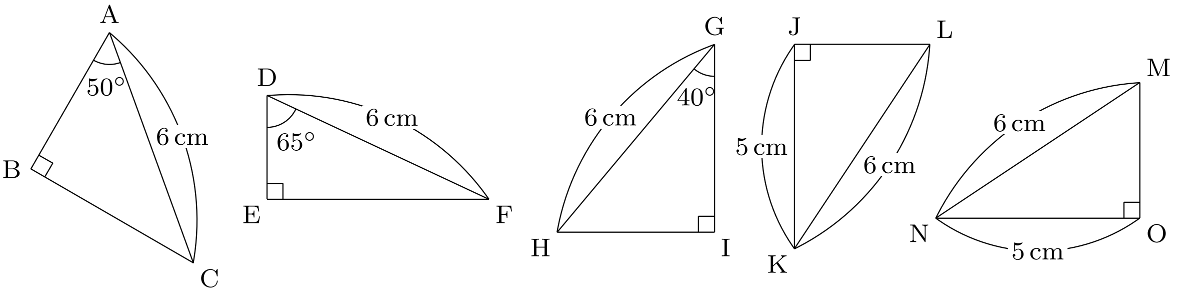
重要な事実：2 つの直角三角形はどんなことが判明すれば合同だと断言できるの？

2 つの直角三角形があるとします。

(1) 斜辺の長さが等しくなってるということと、1 組の鋭角の大きさも等しくなっているということが判明すれば、2 つの直角三角形は合同であると断言できます。

(2) 斜辺の長さが等しくなってるということと、斜辺とは他の 1 組の辺の長さも等しくなっているということが判明すれば、2 つの直角三角形は合同であると断言できます。

問 39. 次の図の三角形ではどの三角形とどの三角形が合同になっていると断言できますか。合同であると判断するときに使った合同条件も一緒に答えなさい。

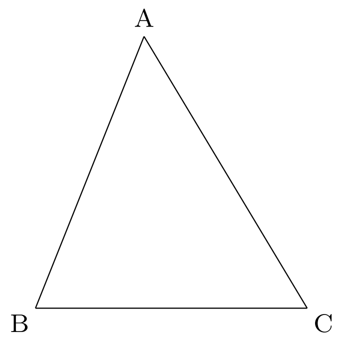


答えを見る

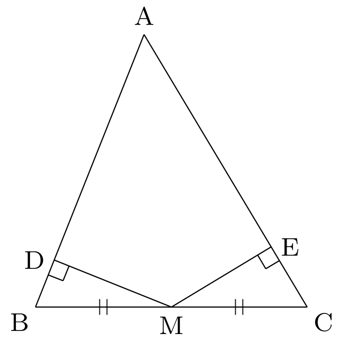
例題 17　△ABC があるとします。辺 BC の中点を M とします。中点 M から辺 AB と辺 AC へ向けて垂線を引き、それぞれぶつかった点の名前を D、E とします。もし MD と ME の長さが等しくなっていたら、実は △ABC は二等辺三角形であるということを証明しなさい。

（証明）

まず。問題文をよく読んで図を描きましょう。



初めに、「△ABC がある」といっているのですから、△ABC を適当に描いておきます。例えば右の図のようになります。



次は、「辺 BC の中点を M とし、中点 M から辺 AB と辺 AC へ向けて垂線を引き、それぞれぶつかった点の名前を D、E とする」とありますから、右の図のようになります。

M は辺 BC の中点ですから、BM と CM の長さは同じです。M から AB や AC へ垂線を引いたのですから、∠BDM や ∠CEM の大きさは 90° です。

これで図は完成しました。そして, この問題は、「もし、MD と ME の長さが等しくなっていたら、実は △ABC は二等辺三角形であるということを証明しなさい」というものでしたね。では、証明を考えてみることにしましょう。

ところで、ある三角形が二等辺三角形であるということを断言するためには、どんな証拠が見つかればよいでしょうか。それは、前に学んだように、

2 つの辺の長さが等しいという証拠を見つける

か、

2 つの角の大きささが等しいという証拠を見つける

のどちらかのことをすればよいのでしたね。

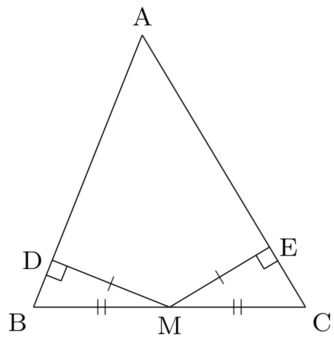
ですからこの問題では、

辺 AB と辺 AC の長さが等しくなっているという証拠を見つける

か、

∠MBD と ∠MCE の大きさが等しくなっているという証拠を見つける

のどちらかのことをすれば、△ABC は二等辺三角形だと断言できますね。さて、どちらの作戦がよいのでしょう。それを決めるためにいつもの手を振り返ってみましょう。いつもの手というのは、「まず証明のために都合のよい 2 つの三角形を決め、次にその 2 つの三角形が合同であるという証拠を何とかして探し、合同なんだから対応している所だってぴったり重なるんだよ。」と話を進めていく方法です。この方法にうまく乗るのはどちらの作戦でしょうか。図をもう一度見て悩むことにします。

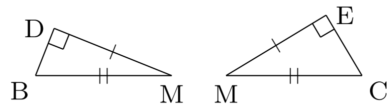


右の図を見てください。この問題は「もし MD と ME の長さが等しくなっていたら・・・」という問題なので、この図では辺 MD と辺 ME のどちらにも | のマークをつけて、同じ長さであるということをわかるようにしておきました。図を見てもわかるように、「辺 AB と辺 AC の長さが等しくなっ

ているという証拠を見つける」より、「$\angle$MBD と $\angle$MCE の

大きさが等しくなっているという証拠を見つける」ほうがうまくいきそうですね。だって、$\angle$MBD が含まれている三角形と $\angle$MCE が含まれている三角形はこの図の中にもうありますし（$\triangle$MDB と $\triangle$MEC のことですよ）、その 2 つの三角形については色々なことがわかっているからです。というわけで、$\triangle$MDB と $\triangle$MEC が合同であるという証拠を探していくことにします。

右の図を見てください。これはさっきの図から、注目することにした $\triangle$MDB と $\triangle$MEC を取り出して描いた図です。



この 2 つの三角形ですでにわかっていることは、

$\angle$BDM と $\angle$MEC は 90° なので、

$$\triangle\text{MDB と }\triangle\text{MEC は直角三角形である} \qquad \cdots\cdots\ ①$$

ということと、

M は BC の中点なので、

$$\text{BM} = \text{CM} \qquad \cdots\cdots\ ②$$

ということと、

「もし・・・」という仮定により、

$$\text{MD} = \text{ME} \qquad \cdots\cdots\ ③$$

であるということですね。アレッ、これってもう、2 つの三角形は合同であるって断言できるではないですか。だって、これって、「2 つの直角三角形があって、斜辺の長さが同じで、斜辺とは他の 1 組の辺の長さも同じ」ってことですよね。つまり、①、②、③により、

$$\triangle\text{MDB} \equiv \triangle\text{MEC}$$

と断言できます。ということで、$\angle$MBD と $\angle$MCE もぴったり重なることになるので、大きさも同じ、つまり、

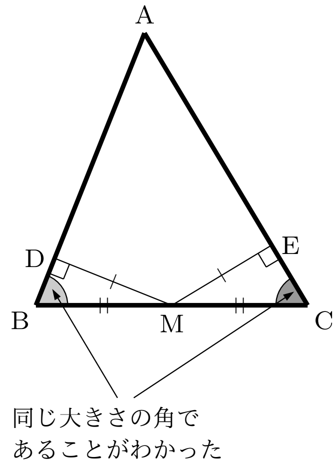
$$\angle\text{MBD} = \angle\text{MCE} \qquad \cdots\cdots\ ④$$

であることが判明しました。

　では右の図を見てください。④でわかったのは、△ABC では、∠B と ∠C の大きさは同じになっているということですね。ということは、

△ABC は辺 AB と辺 AC の長さが等しい二等辺三角形である

と断言できますね。



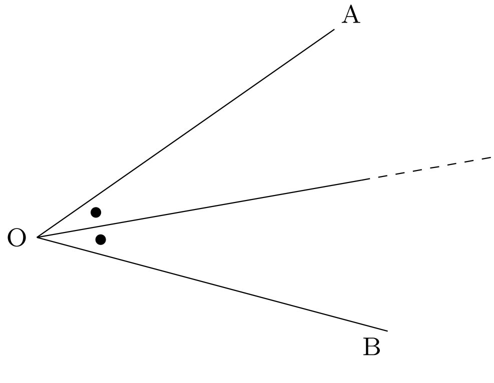
（証明おわり）

問 40.　△ABC があり、この三角形は辺 AB と辺 AC の長さが等しくなっている二等辺三角形であるとします。B、C から辺 AC、辺 AB へ向けそれぞれ垂線 BD と垂線 CE を引くことにします。BD と CE の交点を P と呼ぶことにします。このとき、実は △ PBC は二等辺三角形であることを証明しなさい。　答えを見る

問 41.　△ABC があるとします。辺 BC の中点を M とします。また、頂点 A から M をとおり、さらに果てしなく伸びていく直線を描きます。またさらに、頂点 B、C からこの直線へ向けてそれぞれ垂線 BD、垂線 CE を引きます。このとき、実は BD = CE となっていることを証明しなさい。　答えを見る

例題 18　角の二等分線の性質を証明する問題

　右の図は、∠AOB と ∠AOB の二等分線を描いたものです。∠AOB の二等分線の上に 1 つ点を決め、その点を P と呼ぶことにします。次に、点 P から OA、OB へ向け垂線を引き、OA、OB とぶつかる点をそれぞれ M、N と呼ぶことにします。点 P は ∠AOB の二等分線の上ならどこにとってもよいのですが、どこにとったと

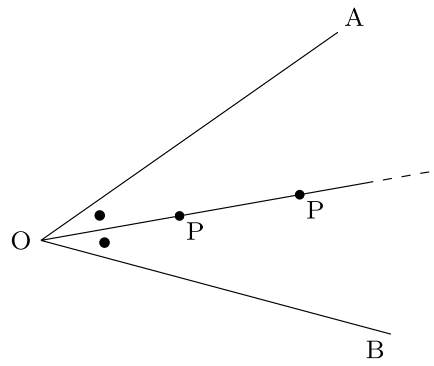


しても必ず PM = PN となることを証明しなさい。（つまり、この問題は「角の二等分線上のどこに点をとったとしても、その点から、角を作っている 2 つの半直線までの距離は等しい」ということを証明する問題です。）

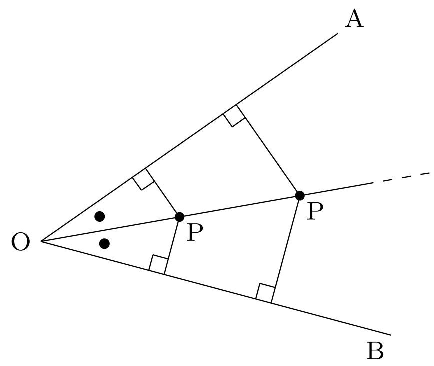
（証明）

問題文をよく読んで、自分で図を完成してみましょう。

まず ∠AOB の二等分線の上に 1 つ点を決め、その点を P とするのですから、右の図のようになります。点 P は ∠AOB の二等分線の上の上ならどこでもよいので、人によって点 P の場所は違っていることもありますね。ですから、右の図では点 P を 2 つ打ってみました。

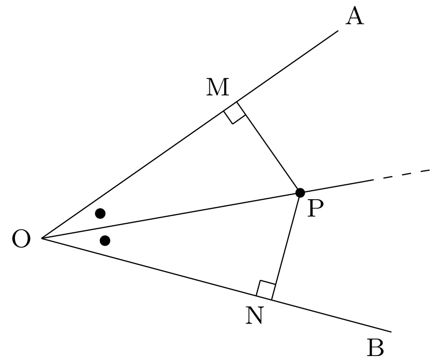


次は、点 P から OA、OB へ向け垂線を引き、OA、OB とぶつかる点をそれぞれ M、N と呼ぶのですから、右の図のようになります。（さっき点 P を 2 組描いてみたのでこの図でも線分 PM や線分 PN は 2 組描いてあります。）これで図は完成ですね。



この問題は、点 P が ∠AOB の二等分線の上のどこにあっても、線分 PM や線分 PN の長さは同じになるということを証明する問題ですね。では証明に取り掛かることにしましょう。

例によっていつもの手でいくことにします。いつもの手というのは、「まず、線分 PM が含まれている三角形と線分 PN が含まれている三角形を見つけ、次にその 2 つの三角形が合同であるという証拠を見つけ、だから対応している辺の長さだって等しいはずですよね。」というように話を進める方法です。



右の図を見てください。線分 PM が含まれている三角形と線分 PM が含まれている三角形として、△POM と △PON に注目すると良さそうですよね。それではこの 2 つの三角形が合同になっている証拠を探すことにします。

この問題では、PM は OA と垂直になるように引き、PN は OB と垂直になるようにひいたのですから、

$$\triangle\mathrm{POM} \text{ と } \triangle\mathrm{PON} \text{ は直角三角形} \qquad \cdots\cdots\text{①}$$

ですよね。というわけで、直角三角形の合同条件を使うことができるかもしれません。

OP はどちらの三角形にも含まれています。ぴったり重なっているのですからもちろん同じ長さです。つまり、

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OP} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

ですね。これでこの 2 つの直角三角形では斜辺の長さが等しいということが判明しました。

また、この問題では、∠AOB の二等分線を引いたのですから、

$$\angle\mathrm{POM} = \angle\mathrm{PON} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{③}$$

ですよね。これで 1 組の鋭角の大きさが等しいことも判明しました。

これで証拠がそろいました。①、②、③より、2 つの直角三角形では、斜辺の長さと、1 組の鋭角の大きさが等しいということがわかったので、

$$\triangle\mathrm{POM} \equiv \triangle\mathrm{PON}$$

であると断言できます。ということは、対応する辺の長さも等しいので、

$$\mathrm{PM} = \mathrm{PN}$$

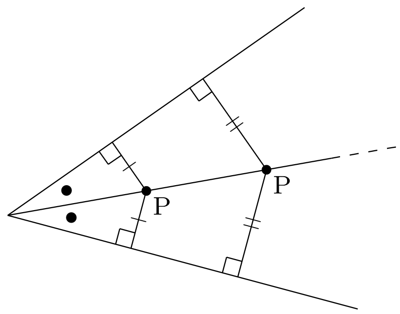
であることがわかりました。

（証明おわり）

今、例題 18 で証明されたことをまとめておきます。

重要な事実：角の二等分線の性質

角の二等分線上のどこに点をとったとしても、その点から、角を作っている 2 つの半直線までの距離は等しくなります。



問 42. 例題 18 の解答が理解出来た人のための問題です。

「角の二等分線上のどこに点をとったとしても、その点から、角を作っている 2 つの半直線までの距離は等しくなる。」という主張の証明を書きなさい。 答えを見る

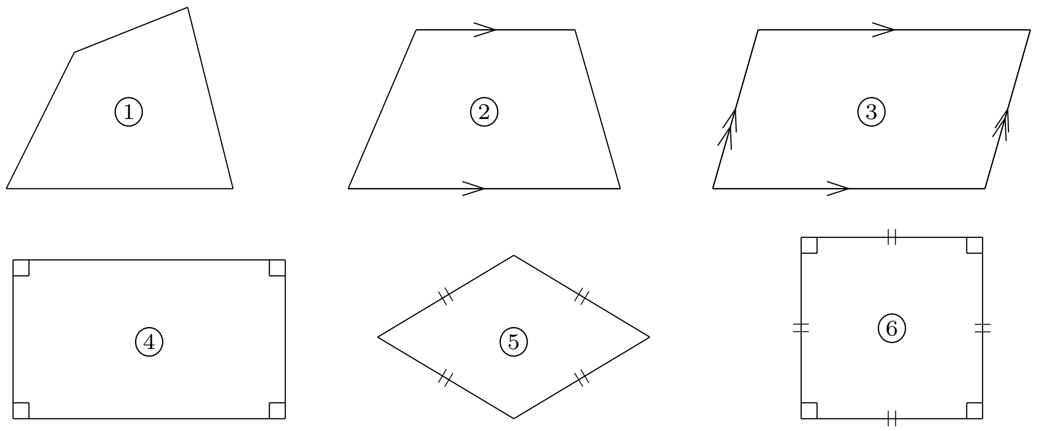
2.6　平行四辺形の性質

2.6.1　平行四辺形ってそもそもなに

これまで、三角形について学んできました。ここから先は、四角形について学びます。

ところであなたはきっと、「平行四辺形」という言葉を聞いたことがありますよね。でも、そもそも、「平行四辺形」ってどんな四角形のことなのか、きちんと言うことができますか？つまり、平行四辺形」の定義を言うことができますか？数学では、「定義」を正しく覚えることはとても大切です。だって、全ての話は定義から始まるのですから。

では、次の図を見てください。



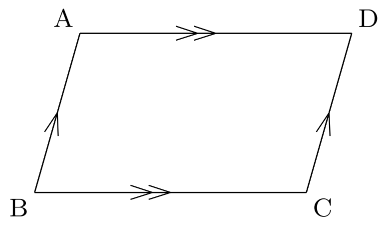
①から⑥までの 6 個の四角形が描かれています。では、この中で「平行四辺形」はどれなのでしょう。わかりますか？

では答えを教えることにしましょう。③、④、⑤、⑥が平行四辺形なのです。「えっ、うそでしょ。③は平行四辺形だけど、④と⑤と⑥は平行四辺形じゃないよ。④は長方形で、⑤はひし形で、⑥は正方形だよ。」と思った人はいませんか？

この意見、完全な間違いではないのですが、正しい意見ではありません。③だけではなく、④、⑤、⑥も立派な平行四辺形なのです。どういうことなのかこれから説明しましょう。そのために、「平行四辺形」という言葉の「そもそもの意味」を教えることにします。

平行四辺形ってそもそもなに

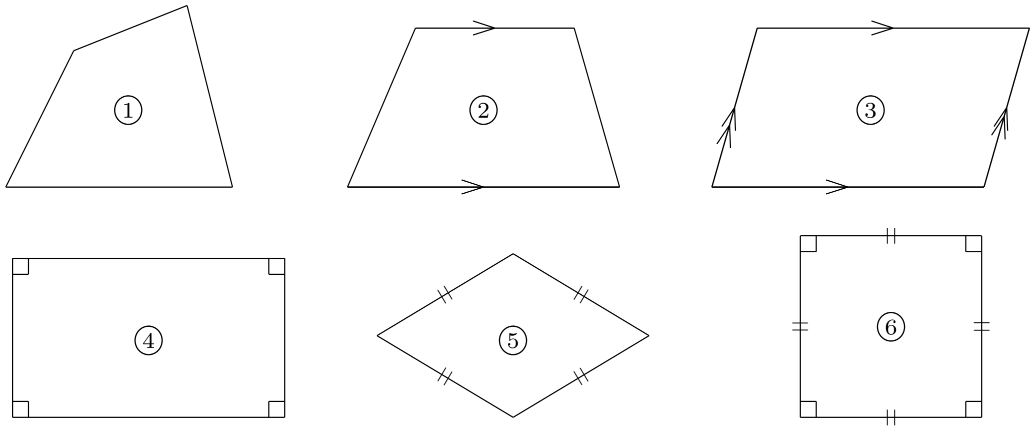
四角形には、向かい合っている辺の組が 2 組ありますが、向かい合っている辺の組が 2 組とも平行になっている四角形を**平行四辺形**と呼びます。



ですから、右の図のように、ある四角形 ABCD で、もし、AB // DC、AD // BC となっていたら、この四角形 ABCD は平行四辺形と呼ばれるのです。

これが「平行四辺形」の定義です。「角がどうのこうの」とか「辺の長さがどうのこうの」なんて話は今の所何も出てきません。とにかく、「向かい合っている辺の組が 2 組とも平行になっているような四角形」を「平行四辺形」と呼ぶわけです。

ではもう一度①から⑥までの 6 個の四角形を見てください。あなたのためにここにもう一度図を描いておきます。



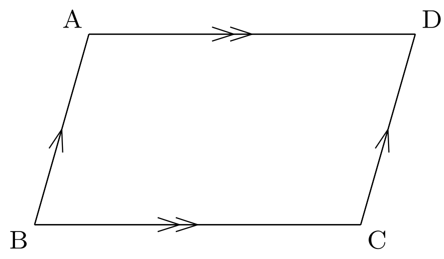
④はもちろん「長方形」なのですが、実は、どんな長方形でも、必ず向かい合っている辺の組が 2 組とも平行になっている」ということが昔から知られています。（このことはこのテキストで、あとで証明をします。）ですから、④は平行四辺形の仲間なのです。また、⑤や⑥の四角形についても同じようなことがいえます。ひし形にしても正方形にしても、「必ず向かい合っている辺の組が 2 組とも平行になっている」ということが昔証明されているのです。ですからひし形にや正方形も平行四辺形の仲間なのです。念のため、もう一度説明しておきます。「平行四辺形」とは、「向かい合っている辺の組が 2 組とも平行になっているような四角形」のことです。ですから、今の所、角の大きさがどうなっているとか辺の長さがどうなっているなどということは何もわかっていないのです。

2.6.2　平行四辺形の持っている性質

それではこれから、平行四辺形の持っている性質を調べていくことにしましょう。

そもそも、「向かい合っている辺の組が 2 組とも平行になっているような四角形」のことを「平行四辺形」と呼ぶのですから、平行四辺形には当然「「向かい合っている辺の組が 2 組とも平行である」という性質があります。では、このほかにどんな性質があるのでしょうか。

右に、平行四辺形を 1 つ描いておきました。この図をじっくり見ながら、平行四辺形の性質を考えてみましょう。



図形の性質を探すとき、よく行うのが、「辺の長さはどうなっているんだろう？」とか、「角の大きさはどうなっているんだろう」とか、「平行になっている辺はあるのだろうか？」などということを考えることです。この他にも「対角線を引いたら何か面白いことがみつからないかなぁ」と考えることもあります。あなたもそんなことを考えながら、この平行四辺形の図を見て、何か気がついたことを言ってみてください。「きっと・・・ってなっているんじゃないのかな。」とか、「もしかして・・・ってなっているのかな。」なんて思ったことはありませんか。では 30 分待ちます。よく考えて、面白いことを発見してください。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

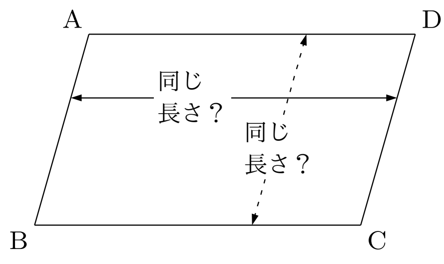
・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

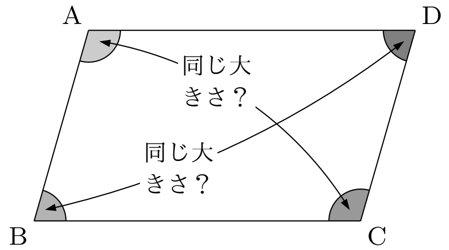
はい、30 分たちました。では、何人かの人に聞いてみることにしましょう。

A 君の意見　僕は辺の長さが気になりました。平行四辺形の図をじっと見ているうちに、きっと向かい合っている辺の長さは同じになっているんじゃないかなぁと思えてきました。つま

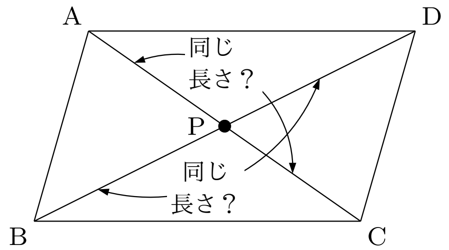


り、辺 AB と辺 DC の長さは同じで、辺 AD と辺 BC の長さは同じになっている気がしたのです。

B さんの意見　私は角の大きさが気になりました。平行四辺形の図をじっと見ているうちに、きっと向かい合っている角の大きさは同じになっているんじゃないかなぁと思えてきました。つまり、∠A と ∠ C の大きさは同じで、∠B と ∠D の大きさは同じになっている気がしたのです。



C さんの意見　私は対角線のことが気になりました。そこで、対角線を引いてみて、対角線の交点の名前を P にしておきました。右の図を見てください。図をじっと見ているうちに、きっと、2 つの対角線はどちらもそれぞれの真ん中で交わっているんじゃないかなぁと思えてきました。つまり、AP = CP、BP = DP となっている気がしたのです。

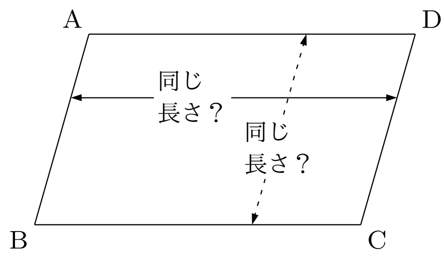


はい、皆さんありがとうございます。皆さんとてもよく観察していますね。図をよく見ていると、どの人の意見も本当のような気がします。でも、ちょっと待ってくださいね。私たちは、数学の学習をしています。数学では、証拠がなければ、どんなに本当っぽいことでも本当であるとは認めてもらえないのでしたね。ですから、3 人の人の意見が正しいのかどうか、これから証拠を探すことにします。

例題 19　（A 君の意見が正しいかどうか考える問題）

「どんな平行四辺形でも、2 組の向かい合っている辺の長さはそれぞれ等しい」ということが証明できるか考えなさい。

つまり、右の図の四角形 ABCD が平行四辺形だとしたら、AB = DC、AD = BC であるということを証明できるかどうか考えなさい。



解答

では、図をよく見て考えることにしましょう。この四角形が平行四辺形だとしたら・・・という話ですから、

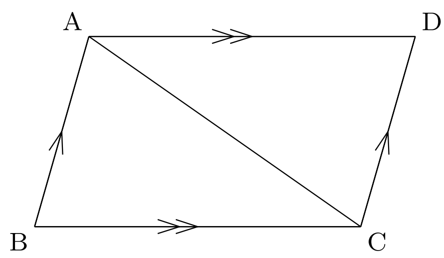
$$AB \mathbin{/\!/} DC, AD \mathbin{/\!/} BC$$

となっているわけです。（そもそもそういう四角形を平行四辺形と呼んでいるのですよね。）

しかし、これ以外のことは今の所何もわかっていません。この例題では、「辺 AB と辺 DC の長さが同じであるということの証拠や「辺 AD と辺 BC の長さが同じである」ということの証拠が見つかるのかどうか考えるのですよね。

まず、「辺 AB と辺 DC の長さが同じであるということの証拠が見つかるかどうか考えてみましょう。そこで、いつもの手を使うことにします。つまり、「辺 AB の含まれている三角形と、辺 DC の含まれている三角形を探し、その 2 つの三角形が合同であるという証拠を見つけ、ほらね、だから対応する辺の長さだって等しいんだよ。」と説明していく方法です。というわけで、2 つ三角形を探さないといけないわけですが、もとの図をいくら見ても三角形はありません。ということはどこかに補助線を引いたりして、三角形が出てくるようにしないといけませんね。

そこで、A と C を結んで補助線をひくことにします。そうすると、ちゃんと、辺 AB の含まれている三角形と、辺 DC の含まれている三角形が出てきますよね。△ABC と △CDA のことですよ。



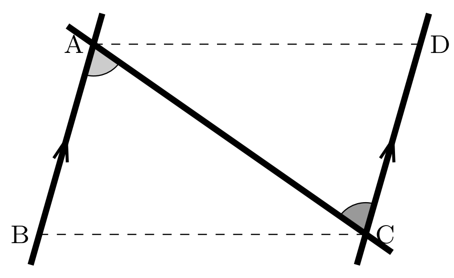
では、これから、△ABC と △CDA が合同である
という証拠が見つかるかどうか考えてみましょう。

この 2 つの三角形ではとりあえず辺の長さについてわかっていることは、

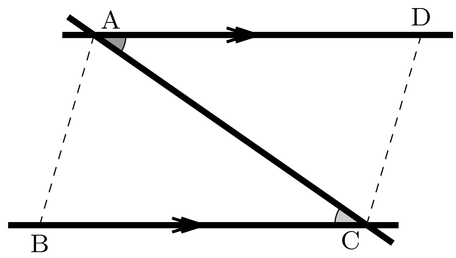
「辺 AC はどちらの三角形にも含まれていて、もともとぴったり重なっているわけなので、長さも当然等しい」

ということだけです。他の辺の長さの事は全く不明ですね。

では角の大きさについてなにかわかっていることはあるのでしょうか。この問題には、もともと角の大きさの話は何も出てきませんよね。でも、この四角形は平行四辺形なんですから、どっかとどっかの辺はもちろん平行になっているんですよね。そういえば、「平行」ってことと「角の大きさ」って何か関係ありましたよね。こういう話、覚えていますか？そうです、「2 つの直線にもう 1 つ別の直線が交わっているとき。もし 2 つの直線が平行だったら、同位角の大きさは等しいと断言できる」とか「錯角の大きさは等しいと断言できる」という話です。この話、何か役に立ちそうな気がしませんか？そこで、図をもう一度よく見てみましょう。2 つの直線にもう 1 つ別の直線が交わっている」所を探せばいいんですよね。そうすると、ありました、ありました。



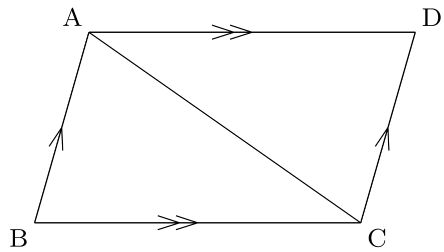
右の図を見てください。注目してほしいところを太い線で描いておきました。「A と B を通る直線」と「D と C を通る直線」にもう 1 つ別の、「A と C を通る直線」が交わっています。ところで、この問題では、四角形 ABCD は平行四辺形なのですから、AB と CD は平行なわけです。また、この図の ∠BAC と ∠DCA（図で灰色になっている角）は錯角の関係にあります。ということは、以前学んだ、2 つの直線にもう 1 つ別の直線が交わっているとき。もし 2 つの直線が平行だったら、錯角の大きさは等しいと断言できる」という話から、∠BAC と ∠DCA の大きさは等しいと断言できますね。



今度は右の図を見てください。また、注目してほしいところを太い線で描いておきました。これも、。2 つの直線にもう 1 つ別の直線が交わっている」所をです。角形 ABCD は平行四辺形なのですから、AD と BD は平行なわけです。また、この図の ∠BCA と ∠DAC（図で灰色になっている角）は錯角の関係にあります。ですから、さっきと同じように考えると、∠BCA と ∠DAC の大きさは等しいと断言できますね。

なーんだ、これで証拠そろってしまいましたね。ここまでの話をまとめて、数学の答案っぽい証明を書いておきます。

（証明）



A と C を結んで補助線をひくことにします。△ABC と △CDA に注目してください。

この 2 つの三角形では、

もともと辺 AC はぴったり重なっているので、長さは等しい、つまり、

$$AC = AC \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

となっています。

四角形 ABCD は平行四辺形であるから、AB // DC であり、平行線の錯角は等しいから、

$$\angle BAC = \angle DCA \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となっています。

四角形 ABCD は平行四辺形であるから、AD // BC であり、平行線の錯角は等しいから、

$$\angle BCA = \angle DAC \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となっています。

よって、①、②、③から、$\triangle$ABC と $\triangle$CDA では、1 組の辺の長さととその両端にある 2 組の角の大きさがそれぞれ等しいということになるので、

$$\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{CDA}$$

であると断言できます。

したがって、対応する辺の長さも等しいはずなので、

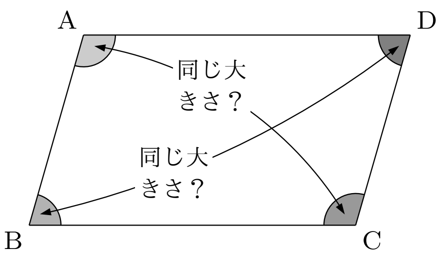
$$\mathrm{AB} = \mathrm{DC},\ \mathrm{AD} = \mathrm{BC}$$

であると断言できます。

（もともと AB = DC であるということだけ証明しようとしていたのですが、ついでに AD = BC であることも証明できてしまいましたね。）

（証明おわり）

問 43.　（B さんの意見が正しいかどうか考える問題）



「どんな平行四辺形でも、2 組の向かい合っている角の大きささはそれぞれ等しい」ということが証明できるか考えなさい。

つまり、右の図の四角形 ABCD が平行四辺形が平行四辺形だとしたら、$\angle$A = $\angle$C、$\angle$B = $\angle$D であるということを証明できるかどうか考えなさい。

答えを見る

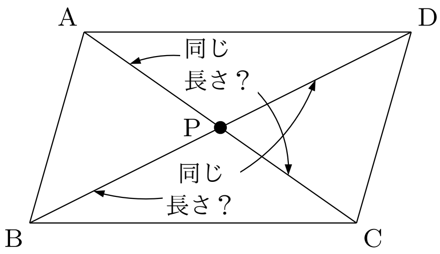
例題 19 と問 20 をきちんと学んだ人は、A 君の意見や B さんの意見が正しいということが証明できたことになります。では、次に C さんの意見が正しいのかどうか考えてみることにしましょう。

例題 20　（C さんの意見が正しいかどうか考える問題）

「どんな平行四辺形でも、2 つの対角線はどちらもそれぞれの真ん中で交わる」という

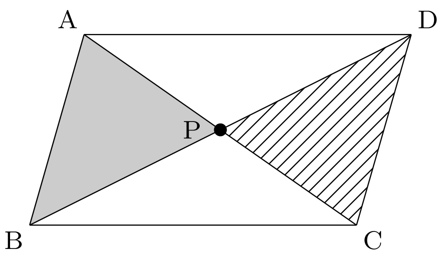
ことが証明できるか考えなさい。

つまり、右の図の四角形 ABCD が平行四辺形だとしたら、AP = CP,　BP = DP であるということを証明できるかどうか考えなさい。



解答

いつもの手で考えることにしましょう。AP とか CP とか BP とか DP が辺として含まれている三角形を 2 つ探します。もし、その 2 つの三角形が合同であるという証拠が見つかれば、対応する辺の長さは等しいので、きっと C さんの意見は正しいということが言えるでしょう。では、もう一度図を見てください。使えそうな三角形が見えていますね。△APB と △CPD なんていうのが使えそうですよね。（もしかすると、△APD と △CPD に注目した人もいるかもしれませんね。実は、その考えでも大丈夫です。どっちでも同じように証明を進めることができます。まぁ、どっちでも同じなので、ここでは △APB と △CPD を使うことにします。）

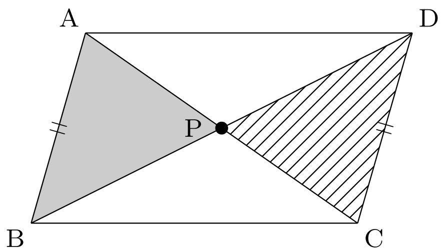


では右の図を見てください。注目してほしい 2 つの三角形を、灰色にしたり、斜線をつけてわかりやすくしておきました。この 2 つの三角形が合同であるという証拠をこれから見つけようとしているわけです。ところで、三角形の合同条件って 3 つありましたよね。「3 組の辺の長さが・・・」とか「2 組の辺の長さとその間にある 1 組の角の大きさが・・・」とか「1 組の辺の長さとその両端にある 2 組の角の大きさが・・・」というやつでしたね。ということは、この 3 つのどれを頼るとしても、必ず「辺の長さの話」をしないといけないですね。これは困りました。だって、この問題で、初めからわかっているのは、四角形 ABCD は平行四辺形であるということだけです。ですから、初めからわかっているのは、「AB と DC は平行である」とか「AD と BC は平行である」ということだけです。辺の長さの話なんて何もありません。うーん、困りました。どうしましょ

うか・・・・。あっ、でもよいことを思い出しました。A 君の意見って、例題 19 でもう証明されたんですよね。つまり、「平行四辺形では、向かい合っている辺の長さは等しい」ということは証明済みなのですね。一度証明されたことは、いろいろな問題を解くときに自由に使うことができるのでしたね。これはラッキーです。これで第一関門突破です。今四角形 ABCD は平行四辺形なのですから、向かい合っている辺である辺 AB と辺 DC の長さは同じと断言してよいのです。つまり、△APB と △CPD では、

$$\mathrm{AB} = \mathrm{CD} \qquad \cdots\cdots\ ①$$

となっているのです。

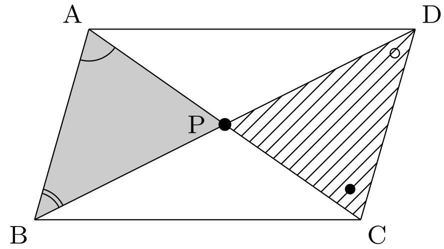


△APB と △CPD で辺 AB と辺 CD の長さが等しいということはわかった。しかし、他の辺の長さのことは何も言えない。

それではさらに、△APB と △CPD の辺の長さの話をしていくことはできるでしょうか。△APB と △CPD では、まだ話に出てきていない辺は AP、BP、CP、DP ですね。でも、この問題では、最後に「AP と CP の長さは等しくなっている」とか「BP と DP の長さは等しくなっている」ということが判明する予定なのですよね。だとしたら、今はもう、辺の長さの話をするわけにはいきませんね。というわけで、ここからは角の大きさ」に注目して話を進めることにしましょう。もう一度、図をよく見てください。そうすると、あっ、割とすぐ気がつくことがあります。それは、

$$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{CPD} \qquad \cdots\cdots\ ②$$

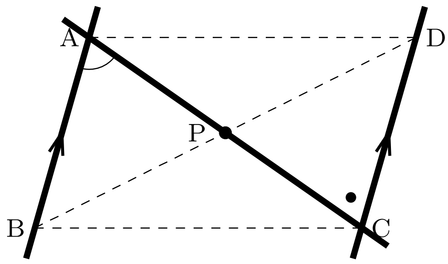
ということです。なぜこの 2 つの角の大きさが等しいのかというと、とにかく対頂角は等しいからです。しかし、よく考えるとこの証拠は役に立たないかもしれません。三角形の合同条件を思い出してください。3 つある三角形の合同条件のうち、私たちは「1 組の辺とその両端にある 2 組の角」が出てくる話を頼るしかないのですよね。そして、私たちはさっき、①で辺 AB と辺 CD の長さが等しいということを発見しています。しかし、今②で見つけた証拠に出てくる角は辺 AB や辺 CD の両端にはないのです。



印をつけた 4 つののうち、大きさが等しいといえる角はあるのかな？

というわけで、この問題を何とか証明するには、∠PAB とか ∠PBA とか ∠PCD とか ∠CDP の話をしなくてはならないのです。ではいったいどの角とどの角の大きさが等しいのでしょうか。

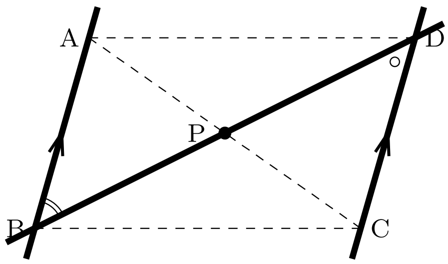
ところで、そもそも、この問題の四角形 ABCD って、平行四辺形でしたね。しかも、このこと以外、手がかりはないんですよね。あっ、でも、この手がかりがあれば何とかなるではありませんか。だって、四角形 ABCD が平行四辺形ということは、AB と CD は平行ってことになりますね。



では、右の図を見てください。注目してほしい所を太く描いておきました。今 AB と CD は平行なわけです。そして、この図で印のついている 2 つの角、つまり ∠BAP∠DCP は錯角の関係にあります。ですから、平行線の錯角は等しいという重要な事実を使えば、

$$\angle \mathrm{BAP} = \angle \mathrm{DCP} \qquad \cdots\cdots\ ③$$

と断言できるわけです。



今度は右の図を見てください。今度も注目してほしい所を太く描いておきました。今 AB と CD は平行なわけです。そして、この図で印のついている 2 つの角、つまり ∠ABP∠CDP は錯角の関係にあります。ですから、平行線の錯角は等しいという重要な事実を使えば、

$$\angle \mathrm{ABP} = \angle \mathrm{CDP} \qquad \cdots\cdots\ ④$$

と断言できるわけです。

これでめでたく証拠が全てそろいました。**??**、③、④より、△APB と △CPD では、1

組の辺の長さとその両端にある 2 組の角の大きさが等しいということになるので、

$$\triangle\mathrm{APB} \equiv \triangle\mathrm{CPD}$$

と断言できます。ですから、対応している辺の長さも等しいはずなので、

$$\mathrm{AP} = \mathrm{CP}, \quad \mathrm{BP} = \mathrm{DP}$$

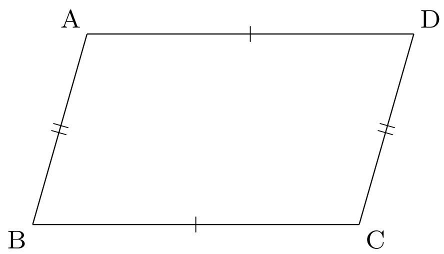
であることが証明されました。

（証明おわり）

ここまでの学習で、A 君、B さん、C さんの意見は全て正しいということが証明されました。これらの事実は大切なことなのでまとめておきます。

重要な事実：平行四辺形にはどんな性質があるのかな

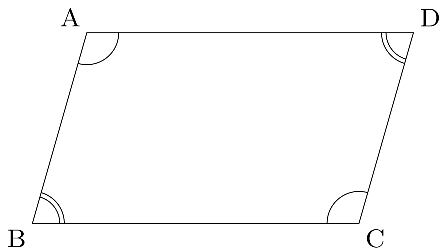
(1) どんな平行四辺形でも、向かい合っている辺の長さは必ず等しくなっています。つまり、右の図の四角形 ABCD が平行四辺形だとしたら、



$$\mathrm{AB} = \mathrm{DC}, \quad \mathrm{AD} = \mathrm{BC}$$

が成り立っています。

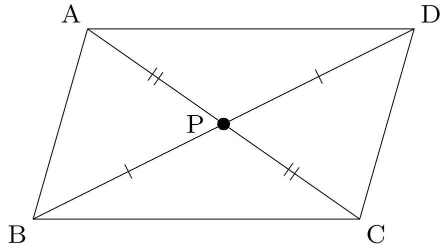
(2) どんな平行四辺形でも、向かい合っている角の大きさは必ず等しくなっています。つまり、右の図の四角形 ABCD が平行四辺形だとしたら、



$$\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{C}, \quad \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{D}$$

が成り立っています。

(3) どんな平行四辺形でも、2 つの対角線は必ずぞれぞれの中点で交わっています。つまり、右の図の四角形 ABCD が平行四辺形だとしたら、



$$\mathrm{AP} = \mathrm{CP}, \quad \mathrm{BP} = \mathrm{DP}$$

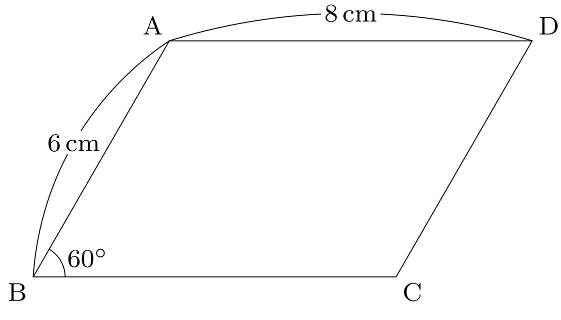
が成り立っています。

それでは、今学んだばかりの重要な事実を使うと解くことのできる問題をあなたに考えてもらうことにしましょう。

問 44. 右の図の四角形 ABCD は平行四辺形であるとします。以下の問に答えなさい。

(1) BC、CD の長さを求めなさい。

(2) ∠A、∠C、∠D の大きさを求めなさい。

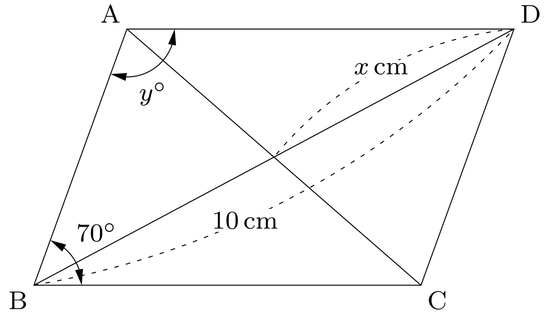


答えを見る

問 45. 右の図の四角形 ABCD は平行四辺形であるとします。以下の問に答えなさい。

(1) x の値を求めなさい。

(2) y の値を求めなさい。



答えを見る

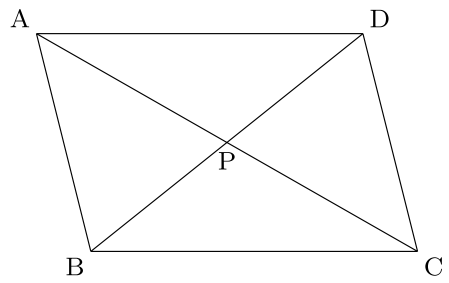
今度は、さっき学んだ重要な事実を利用して証明する問題を学習することにします。

例題 21　平行四辺形 ABCD があり、対角線 AC と対角線 BD が描かれているとします。そして、対角線 AC と対角線 BD の交点を P と呼ぶことにします。P を通る直線をあなたの好きな向きに 1 つ引いてみてください。そうすると、その直線は平行四辺形 ABCD の辺のうち、2 つの辺と交わるはずです。そのようにしてできた交点をそれぞれ E、F と呼ぶことにします。このとき、PE と PF の長さは等しくなっているということを証明しなさい。

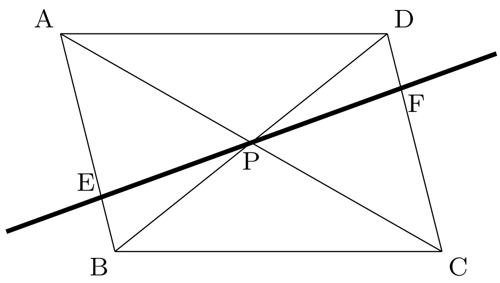
（証明）

問題の意味を正しく理解するために、問題の文を丁寧に読んで図を描いてみましょう。

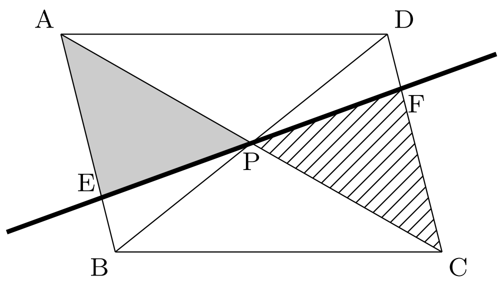
まず、平行四辺形 ABCD があり、対角線が 2 つ引かれているのでした。そして、2 つの対角線の交点の名前を P としたのでした。ですから右の図のようになります。



次は、P を通る直線を自分の好きな向きに引くのでしたね。ですから、例えば右の図のようになります。そして、今引いた直線と平行四辺形の 2 つの辺との交点をそれぞれ E、F とするのでしたね。これで図は完成しました。



この問題では、「PE と PF の長さは同じであるということを証明するのでしたね。そこで、いつもの手を使うことにしましょう。いつもの手というのは、「PE を含む三角形と PF を含む三角形を見つけ、それらが合同であるという証拠を探し、合同なんだから PE と PF もぴったり重なって長さも同じなんだよ」と説明していく方法です。



では、右の図を見てください。図をよく見ると、灰色にした △APE と影をつけた △CPF を使って話を進めていくのが良さそうですね。だって灰色にした △APE には PE が含まれていますし、影をつけた △CPF には PF が含まれているからです。（△BPE と △DPF に注目した人もいるかもしれません。実はそれでも大丈夫です。ですが、ここでは △APE と △CPF に注目することにしておきます。）

それではこれから、△APE と △CPF が合同であるという証拠を見つけることにしましょう。証拠探しって、大変なんですよね。「あーでもない、こーでもない」って考えて、何度も失敗して、やっとのことで証拠って見つかるんですよね。この問題では、さんざん悩むと、次のような証拠が見つかるのです。（あなたも自分でちゃんと悩んでからこの先を読んでください。5 分や 10 分ぐらい悩んわからなかったからといって、あきらめないでくださいね。30 分でも 1 時間でも悩んでください。）

△APE と △CPF を見てください。四角形 ABCD は平行四辺形なのですから、2 本の対角線はそれぞれの中点で交わるはずです。ですから、

$$\mathrm{AP} = \mathrm{CP} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

が成り立っています。

また、2 つのまっすぐな線 AB と DC に別の直線 EF が交わっている所に注目してみると、四角形 ABCD は平行四辺形ですから AB と DC は平行です。そして ∠EAP は ∠FCP 錯角の関係にあるのですから、

$$\angle\mathrm{EAP} = \angle\mathrm{FCP} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

が成り立っています。

さらに、対頂角は必ず等しいのですから、

$$\angle\mathrm{APE} = \angle\mathrm{CPF} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

が成り立っています。

よって、①、②、③から、△APE と △CPF では 1 組の辺の長さと、その両端にある 2 組の角の大きさが等しいということになるので、

$$\triangle \mathrm{APE} \equiv \triangle \mathrm{CPF}$$

であると断言できます。

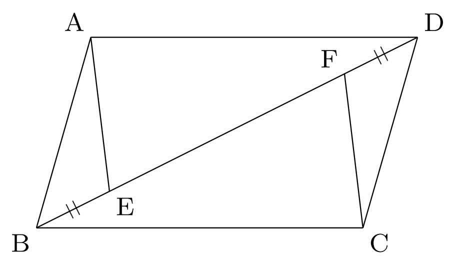
合同な三角形では対応している辺の長さも等しくなっていますから、

$$\mathrm{PE} = \mathrm{PF}$$

であることが証明されました。

（証明おわり）

問 46. 平行四辺形 ABCD の対角線 BD 上に 2 つの点 E と F を、BE = DF となるようにとります。このとき、AE の長さと CF の長さは等しいということを証明しなさい。



答えを見る

問 47. 平行四辺形 ABCD の辺 BC 上に点 E をとり、辺 AD 上に点 F をとるのですが、BE = DF となるように E と F をとります。そして A と E をむすび、C と F を結びます。このとき、AE = CF となっていることを証明しなさい。 答えを見る

2.7　どんな証拠が見つかれば、平行四辺形であると断言できるのかな

これまで、「平行四辺形とはそもそも何か」ということと「平行四辺形にはどんな性質があるか」ということを学んできました。ここからは、逆の話をします。逆の話とは次の

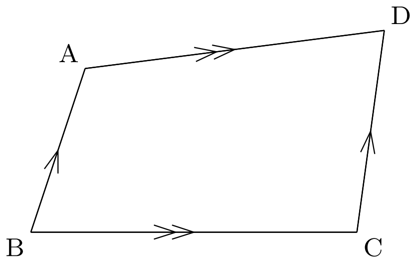
ような話です。

四角形 ABCD があるとします。この四角形は、平行四辺形なのかどうかは今のところわかっていないとします。では、どんな証拠が見つかれば、この四角形は平行四辺形であると断言できるのでしょうか。こういう話をこれから考えていくことにします。

この話を続けるために、まず、「平行四辺形とはそもそも何か」ということを思い出してみましょう。たしか、「2 組の向かいあっている辺の組がどちらも平行になっている四角形を平行四辺形と呼ぶ」のでしたね。ですから、当然、「2 組の向かいあっている辺の組がどちらも平行になっている」ということが判明すれば、その四角形は平行四辺形であると断言できます。つまり、

重要な事実：平行四辺形であると断言するために使える証拠その 1

ある四角形で、もし、向かい合っている辺の組が 2 組とも平行になっているということが判明したら、その四角形は平行四辺形であると断言できます。つまり、右の図の四角形 ABCD で、もし、



$$AD \mathbin{/\mkern-6mu/} BC \quad AB \mathbin{/\mkern-6mu/} DC$$

となっているということが判明したら、

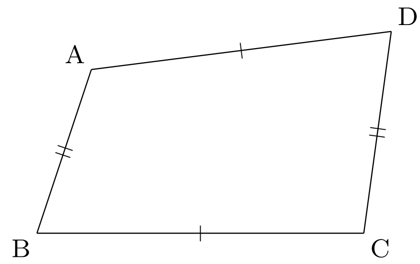
四角形 ABCD は平行四辺形である

と断言できます。

ということです。

このほかにはどんな方法があるでしょうか。そこで次に、前の節で学習した平行四辺形の性質を思い出してみましょう。例えば、「ある四角形が平行四辺形だとしたら、その四角形の向かい合っている辺の長さは必ず 2 組ともそれぞれ等しい」のでしたね。では逆のことは正しいのでしょうか。つまり、「ある四角形で、向かい合っている辺の長さが、2

組ともそれぞれ等しくなっていれば、その四角形は平行四辺形である」と断言できるのでしょうか。このことを次の例題で調べることにしましょう。



例題 22　ある四角形で、もし、向かい合っている辺の長さが 2 組ともそれぞれ等しくなっているというとしたら、その四角形は平行四辺形であると断言できるのかどうか調べなさい。つまり、右の図の四角形 ABCD で、もし、

$$\mathrm{AD} = \mathrm{BC} \quad \mathrm{AB} = \mathrm{DC}$$

となっているならば、

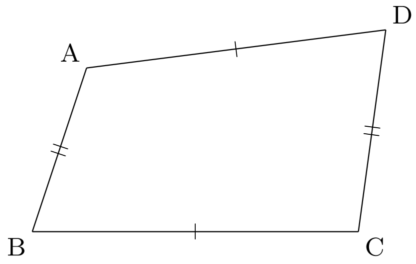
四角形 ABCD は平行四辺形である

ということが証明できるかどうか考えなさい。

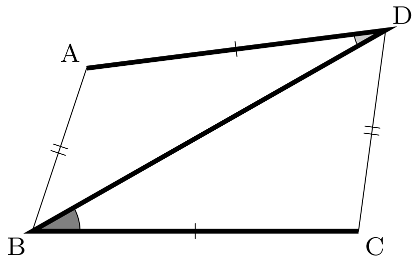
解答

そもそも平行四辺形とは何なのかということを思い出すと、「2 組の向かい合う辺がそれぞれ平行」になっている四角形のことですよね。ですから、いっしょうけんめい証拠を探して、最後に「ほらね、AD // BC,　AB // DC となってる証拠が見つかったよね。だから四角形 ABCD は平行四辺形だね。」となればよいですね。ではチャレンジしてみましょう。

AD と BC は平行になっているという証拠や、AB と DC は平行になっているという証拠を見つけたいのですよね。うーん、どうしましょうか。あー、きっと、こういうときは、同位角とか錯角とかを頼りにすればよいのでしょうね。だって、「同位角が等しければ、なんかとなんかは平行になっている」とか「錯角が等しければ、なんかとなんかは平行になっている」って断言できるのでしたね。

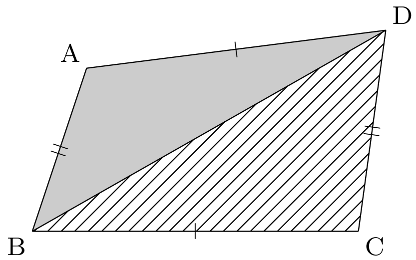


それでは、まず、AD と BC は平行になっているのか考えます。では図をみてみましょう。困ったことに、使えそうな角は今の所ありません。（あなたもそう思いますよね。）そこで、何か補助線を引いてみましょう。そうですねぇ、B と D を結んでみましょうか。



右の図を見てください。使えそうな角が現れましたね。∠ADB と ∠CBD のことです。わかりやすくするため、右の図では灰色にしてあります。また注目してほしい所を太い線で描いておきました。少し詳しく説明しておきましょう。この図では 2 つのまっすぐな線 AD と BC に別のまっすぐな線 BD が交わっています。そして、灰色の 2 つの角 ∠ADB と ∠CBD は錯角の関係にあります。ですから、もし、この 2 つの角の大きさが等しいということが判明すれば、AD と BC は平行であると断言できることになりますね。というわけで、これから、灰色の 2 つの角 ∠ADB と ∠CBD の大きさが等しいのかどうか調べることにします。

そこで、いつもの手を使うことにしましょう。いつもの手とは次のような手です。∠ADB が含まれている三角形と ∠CBD が含まれている三角形を見つけます。そしてその 2 つの三角形が合同なのかどうか調べます。もし合同であるということが判明すれば、対応している角の大きさも等しいということになりますね。



それではどの三角形とどの三角形に注目すればよいのでしょうか。図をみると、△ABD と △CDB が良さそうですよね。右の図をみてください。この 2 つの三角形を灰色にしたり、影をつけたりしておきました。

では、△ABD と △CDB が合同なのかどうか調べることにします。この問題では、初

めから、

$$\mathrm{AD} = \mathrm{BC} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad ①$$

$$\mathrm{AB} = \mathrm{DC} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad ②$$

となっているのでしたね。あれっ、あと一息で合同である証拠が見つかりそうですね。あっ、わかってしまいました。BD はどちらの三角形にも含まれていますが、もともとぴったり重なっているので長さは同じではありませんか。つまり、

$$\mathrm{BD} = \mathrm{DB} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad ③$$

が成り立っているわけです。

よって、①、②、③より、$\triangle\mathrm{ABD}$ と $\triangle\mathrm{CDB}$ では、3 組の辺の長さがそれぞれ等しいということになって、

$$\triangle\mathrm{ABD} \equiv \triangle\mathrm{CDB}$$

であると断言できます。対応している角の大きさは等しいので、

$$\angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{CDB}$$

であることも判明しました。これで、めでたく、錯角は等しいということが判明したので、

$$\mathrm{AD} /\!/ \mathrm{BC}$$

であると断言できます。これで第一の目標が達成できました。

あと、まだ、「AB と DC も平行なのかなぁ？」ということを考えないといけませんね。でもこれはすぐに話が済みます。だって、$\triangle\mathrm{ABD}$ と $\triangle\mathrm{CDB}$ は合同であることが判明しているんですよね。だったら、$\angle\mathrm{ABD}$ と $\angle\mathrm{CDB}$ の大きさは同じですよね。ということは、錯角が等しいということになるので、

$$\mathrm{AB} /\!/ \mathrm{DC}$$

であると断言できますね。以上でこの四角形 ABCD では、

$$\mathrm{AD} \parallel \mathrm{BC}$$

であることと、

$$\mathrm{AB} \parallel \mathrm{DC}$$

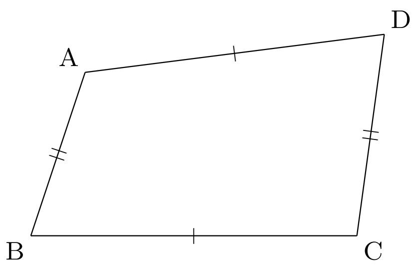
がわかりました。つまり向かい合っている辺は、2 組とも、それぞれ平行になっているのです。ですから、四角形 ABCD は平行四辺形ですね。

（おわり）

この例題 22 をきちんと学んだ人は、次の事実が証明できたことになります。

重要な事実：平行四辺形であると断言するために使える証拠その 2

ある四角形で、もし、向かい合っている辺の組が 2 組とも等しい長さになっているということが判明したら、その四角形は平行四辺形であると断言できます。つまり、右の図の四角形 ABCD で、もし、



$$\mathrm{AD} = \mathrm{BC}, \quad \mathrm{AB} = \mathrm{DC}$$

となっているということが判明したら、

四角形 ABCD は平行四辺形である

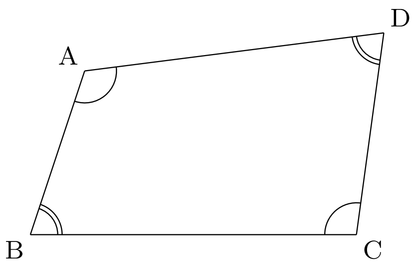
と断言できます。

　いま、私たちはまず 1 つ「平行四辺形の性質」を思い出し、その逆のことが成り立つのかどうかを調べました。詳しく言うと、まず「ある四角形が平行四辺形ならば、その四角形の向かい合っている辺の長さは、2 組ともそれぞれ等しい」という平行四辺形の性質を

思い出して、「じゃあ逆に、ある四角形で向かい合っている辺の長さが 2 組ともそれぞれ等しいなら、その四角形は平行四辺形といえるのかなぁ？」ということを調べたのです。そして本当にそうなっていることを証明しました。ところで平行四辺形の性質って、まだいくつかありましたよね。ですから、それらについても逆のことが成り立つのかどうか調べると、「ある四角形でこれこれこうなっていたら、その四角形は平行四辺形だと断言できる」という話が発見できるかもしれません。実はそうなのです。以下のようなことが発見できるのです。それらを重要な事実としてまとめていきます。そしてそれらの証明はあなたにやってもらうことにしましょう。

重要な事実：平行四辺形であると断言するために使える証拠その 3

ある四角形で、もし、向かい合っている角の組が 2 組とも等しい大きさになっているということが判明したら、その四角形は平行四辺形であると断言できます。つまり、右の図の四角形 ABCD で、もし、



$$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{C}, \quad \angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{D}$$

となっているということが判明したら、

四角形 ABCD は平行四辺形である

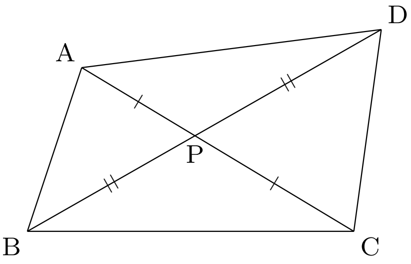
と断言できます。

問 48.　「重要な事実：平行四辺形であると断言するために使える証拠その 3」を証明しなさい。

答えを見る

重要な事実：平行四辺形であると断言するために使える証拠その 4

ある四角形で、もし、2 つの対角線がそれぞれの中点で交わっているということが判明したら、その四角形は平行四辺形であると断言できます。つまり、右の図の四角形 ABCD で、もし、



$$\mathrm{AP} = \mathrm{CP}, \quad \mathrm{BP} = \mathrm{DP}$$

となっているということが判明したら、

四角形 ABCD は平行四辺形である

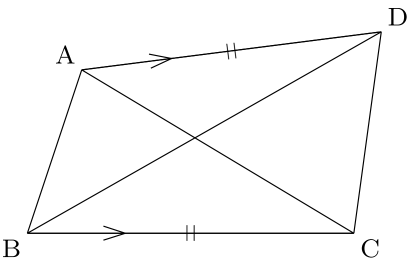
と断言できます。

問 49. 「重要な事実：平行四辺形であると断言するために使える証拠その 4」を証明しなさい。

答えを見る

重要な事実：平行四辺形であると断言するために使える証拠その 5

ある四角形で、もし、1 組の向かい合う辺が平行になっていて、さらにその 1 組の向かい合う辺の長さも等しくなっているということが判明したら、その四角形は平行四辺形であると断言できます。つまり、右の図の四角形 ABCD で、もし、



$$\mathrm{AD} \mathbin{/\!/} \mathrm{BC}, \quad \mathrm{AD} = \mathrm{BC}$$

となっているということが判明したら、

四角形 ABCD は平行四辺形である

と断言できます。

問 50.　「重要な事実：平行四辺形であると断言するために使える証拠その 5」を証明しなさい。

答えを見る

ここまで、「平行四辺形であると断言するために使える証拠」の話をしてきました。つまり、「平行四辺形なのかどうかイマイチわからない四角形があるときに、どんな証拠が見つかれば、その四角形が平行四辺形であると断言できるのか」という話をしてきたわけです。そして、使える証拠を 5 種類見つけました。例題 22 や問 48、問 49、問 50 をきちんと学んだ人は、この 5 種類の話を全て証明したことになります。ですから、これからは、平行四辺形なのかどうかイマイチわからない四角形があるときにこの 5 種類のうちどれでもよいから 1 つでも証拠が見つかれば、その四角形は平行四辺形であると断言できるわけです。というわけで、これから、この 5 種類の証拠を使いこなす練習をしましょう。

問 51.　四角形 ABCD があるとします。次の問に答えなさい。

(1) $\mathrm{AB} = \mathrm{BC}$,　$\mathrm{AD} = \mathrm{DC}$ となっていたら、四角形 ABCD は平行四辺形であると断言してよいですか？

(2) $\mathrm{AB} = \mathrm{DC}$,　$\mathrm{AD} \parallel \mathrm{BC}$ となっていたら、四角形 ABCD は平行四辺形であると断言してよいですか？

(3) $\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{C}$,　$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{D}$ となっていたら、四角形 ABCD は平行四辺形であると断言してよいですか？

答えを見る

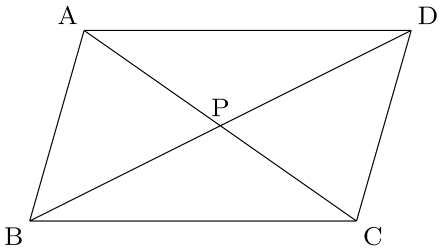
例題 23　平行四辺形 ABCD があるとします。対角線 AC と対角線 BD を引き、交点を P とします。対角線 BD の上に 2 つの点 E と F をとるのですが、PE の長さと PF の長さが等しくなるようにとります。そして最後に、A と E を結び、A と F を結び、C と E を結び、C と F を結びます。すると、実は、四角形 AECF は平行四辺形は平行四辺形になってしまうことを証明しなさい。

（証明）

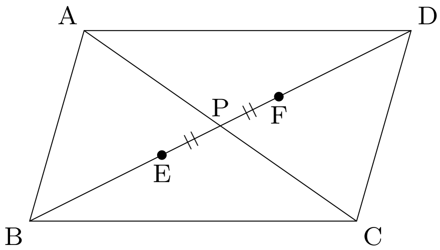
まず、問題文をよく読んで図を作りましょう。

「平行四辺形 ABCD がある」ので、とりあえず右の図ようになります。

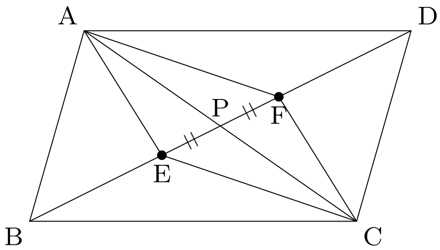
次は、「対角線 AC と対角線 BD を引き、交点を P とする」ので、右の図のようになります。



次は、「対角線 BD の上に 2 つの点 E と F をとるのですが、PE の長さと PF の長さが等しくなるようにとる」ので、右の図のようになります。

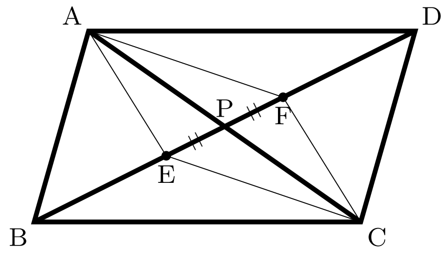


最後に「A と E を結び、A と F を結び、C と E を結び、C と F を結ぶ」ので、右の図のようになります。これで図は完成です。



この問題は、「このようにして図を作ると、四角形 AECF は必ず平行四辺形になるということを証明をしなさい」という問題ですね。それではチャレンジすることにしましょう。ある四角形が平行四辺形であると断言するための証拠を 5 つ学びましたね。どの証拠を使うとよいのでしょうか。四角形 AECF ではすでに PE = PF であることがわかっています。だとしたら、あとは、「AP の長さと CP の長さが等しい」という証拠が見つか

ればよいのではないでしょうか。もしこの証拠が見つかれば、四角形 AECF の 2 本の対角線 AC と EF は中点で交わっていることになります。そうすると、146 ページで学んだ「重要な事実：平行四辺形であると断言するために使える証拠その 4」によって、四角形 AECF は平行四辺形であると断言できます。



四角形 ABCD は平行四辺形なので、2 つの対角線は必ずそれぞれの中点で交わっている.。だから AP と CP の長さは等しい。

　というわけで、AP と CP の長さは等しいのかどうか考えることにします。もう一度図をよく見ましょう。あなたのために、もう一度右に図を描いておきました。注目してほしい所を太く描いておきました。AC って、もともと最初からある平行四角形 ABCD の対角線ですよね。ところで、平行四辺形って、必ず対角線どうしは中点で交わるんですよね。だったら、AP の長さと CP の長さは等しいということですね。これで証拠が見つかりました。

それではここまで考えてきたことを整理して、数学の答案のようにしておきます。

　四角形 ABCD は平行四辺形なので、2 つの対角線は必ずそれぞれの中点で交わっています。ですから、

$$\mathrm{AP} = \mathrm{CP} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ①$$

が成り立っています。

　また、この問題ではもとから、

$$\mathrm{PE} = \mathrm{PF} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ②$$

となっています。

　①、②から、四角形 AECF では、2 つの対角線がそれぞれの中点で交わるということになるので、

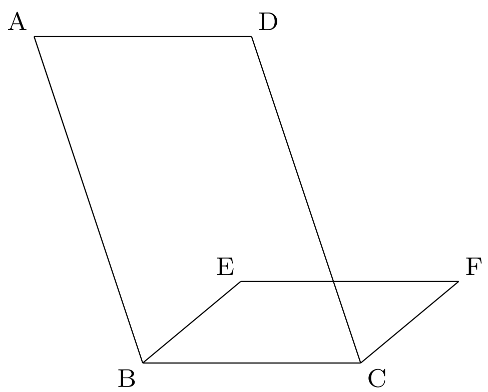
四角形 AECF は平行四辺形である

と断言できます。

（証明おわり）

問 52. 平行四辺形 ABCD があるとします。辺 AD と辺 BC の中点を、それぞれ M、N と呼ぶことにします。M と B を結び、D と N を結ぶと四角形 MBND ができます。このとき実は、四角形 MBND は平行四辺形になってしまうことを証明しなさい。 答えを見る

問 53. 右の図は 1 つの平面の上に 2 つの平行四辺形 ABCD と平行四辺形 EBCF を描いたものです。以下の問に答えなさい。



(1) AD と EF の長さは同じであるということを証明しなさい。

(2) A と E を結び、D と F を結ぶと四角形 AEFD ができます。四角形 AEFD は平行四辺形であるということを証明しなさい。

答えを見る

2.8　特殊な平行四辺形の話

おさらい

あなたに質問です。そもそも「平行四辺形」って何でしたっけ？平行四辺形の定義を言ってみてください。

まさか、「忘れた」なんて言わないですよね。どうしても思い出せない人は、このテキストの 124 ページを開いて復習してください。

思い出せましたか？そうです、平行四辺形とは「向かい合っている辺の組が 2 組とも平行になっている四角形」のことですね。

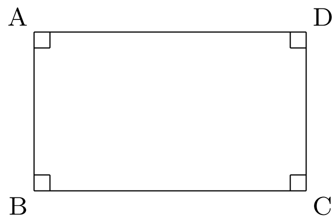
おさらい終わり

ここではこれから、「長方形」、「ひし形」、「正方形」と呼ばれている図形について学びます。そのために、まず、「長方形の定義」、「ひし形の定義」、「正方形の定義」を学びます。数学では、言葉の定義を正確に理解して、正確に覚えることがとても大切なのでしたね。だって、全ての話は定義から始まるのですから。

長方形ってそもそもなに

四角形には、4 つの角がありますが、4 つの角が全て直角（つまり 90°）になっている四角形を**長方形**と呼びます。

ですから、右の図のように、ある四角形 ABCD で、もし、$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$ となっていたら、この四角形 ABCD は長方形と呼ばれるのです。



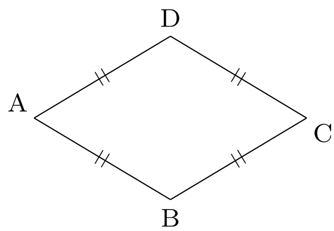
知ってましたか？「4 つの角が全て直角（つまり 90°）になっている四角形を長方形と呼ぶ」と言っているだけですから、「辺の長さがどうのこうの・・・」とか、「どっかの辺とどっかの辺が平行になっている」なんてことは今の所何もわからないのです。

次は、

ひし形ってそもそもなに

四角形には、4 つの辺がありますが、4 つの辺の長さが全て等しくなっている四角形を**ひし形**と呼びます。

ですから、右の図のように、ある四角形 ABCD で、もし、$AB = BC = CD = DA$ となっていたら、この四角形 ABCD はひし形と呼ばれるのです。

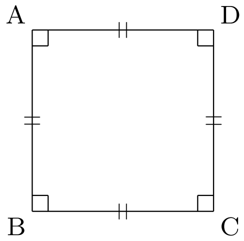


知ってましたか？「4 つの辺の長さが全て等しくなっている四角形をひし形と呼ぶ」と言っているだけですから、「角の大きさがどうのこうの・・・」とか、「どっかの辺とどっかの辺が平行になっている」なんてことは今の所何もわからないのです。

最後に、

正方形ってそもそもなに

四角形には、4 つの角と 4 つの辺がありますが、4 つの角が全て直角（つまり 90°）になっていて、4 つの辺の長さが全て等しくなっている四角形を**正方形**と呼びます。



ですから、右の図のように、ある四角形 ABCD で、もし、$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$ となっていて、さらに、$AB = BC = CD = DA$ となっていたら、この四角形 ABCD は正方形と呼ばれるのです。

知ってましたか？「4 つの角が全て直角（つまり 90°）になっていて、4 つの辺の長さが全て等しくなっている四角形を正方形と呼ぶ」と言っているだけですから、「どっかの辺とどっかの辺が平行になっている」なんてことは今の所何もわからないのです。

以上、「長方形の定義」、「ひし形の定義」、「正方形の定義」を学びました。

問 54. 四角形 ABCD があるとします。次の問に答えなさい。

(1) もし、$AB = BC = CD = DA$ となっていたら、この四角形は何と呼ばれますか。

(2) もし、$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$ となっていたら、この四角形は何と呼ばれますか。

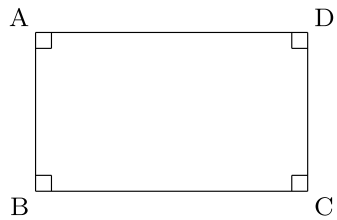
(3) もし、$AB = BC = CD = DA$ となっていて、さらに、$AB = BC = CD = DA = 90°$ となっていたら、この四角形は何と呼ばれますか。

(4) もし、$AD \mathbin{/\!/} BC$ となっていて、さらに $AB \mathbin{/\!/} DC$ となっていたら、この四角形は何と呼ばれますか。

答えを見る

例題 24　実は長方形は平行四辺形の仲間であるということを証明しなさい。

（証明）



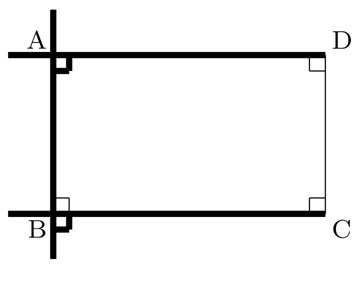
右の図を見てください。長方形 ABCD を描いてみました。ところで、そもそも長方形とは、「4 つの角の大きさが全て $90°$ である四角形」のことでしたね。ですから、この長方形 ABCD でも、

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$$

となっているわけです。

この問題は、「実は長方形は平行四辺形の仲間である」ということを証明したいのでしたね。ところで、そもそも平行四辺形って何でしたっけ。たしか、「向かい合っている辺の組が 2 組とも平行になっている四角形」のことですね。ということは、もし、この長方形 ABCD で、「「向かい合っている辺の組が 2 組とも平行になっている」という証拠が見つかれば、この長方形 ABCD は平行四辺形でもあると断言できますね。

では、そういう証拠を見つけることができるのかどうか、考えることにしましょう。ナンカとナンカが平行になっているという証拠をつかみたいのですよね。どうすればよいでしょう。そうでした、たしか「同位角が等しかったらナンカとナンカが平行だと断言できる」とか、「錯角が等しかったらナンカとナンカが平行だと断言できる」という話がありましたね。詳しく言うと、「2 つのまっすぐな線に別のまっすぐな線が交わっているとき、もし、同位角が等しければもとの 2 つのまっすぐな線は平行である」とか、「2 つのまっすぐな線に別のまっすぐな線が交わっているとき、もし、錯角が等しければもとの 2 つのまっすぐな線は平行である」ということでしたね。こういう話を頼りにすることはできるでしょうか。



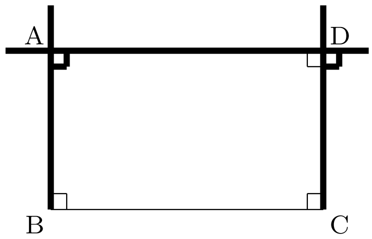
右の図を見てください。注目してほしい所を太い線にしました。2 つのまっすぐな線 AD と BC に別のまっすぐな線 AB が交わっています。また、$\angle A$ と $\angle B$ の外角は同位角の関係にあります。そして、$\angle A$ と $\angle B$ の外角はどちらも $90°$ ですから大きさは等しいわけです。つまり、同

位角が等しいので、

$$AD \mathbin{/\!/} BC \qquad \cdots\cdots ①$$

と断言してよいですね。

次は右の図を見てください。注目してほしい所を太い線にしました。今度は、2 つのまっすぐな線 AB と DC に別のまっすぐな線 AD が交わっています。また、$\angle$A と $\angle$D の外角は同位角の関係にあります。そして、$\angle$A と $\angle$D の外角はどちらも 90° ですから大きさは等しいわけです。つまり、同位角が等しいので、



$$AB \mathbin{/\!/} DC \qquad \cdots\cdots ①$$

と断言してよいですね。

よって、①、①より、長方形 ABCD では、向かい合っている辺の組は 2 組とも平行であるという証拠が見つかりました。ですから、この長方形は、平行四辺形の仲間なのです。

（証明おわり）

問 55. 実は、ひし形は平行四辺形の仲間であるということを証明しなさい。 答えを見る

問 56. 次の問に答えなさい。

(1) 長方形の定義を正確に言いなさい。

(2) ひし形の定義を正確に言いなさい。

(3) この世の中には、「長方形である」とも言えるし、「ひし形である」とも言える四角形があります。そのような四角形は何と呼ばれるのですか。

答えを見る

例題 24、問 55、問 56 をしっかり理解できた人は、次のことが証明できたことになります。

重要な事実：これって、平行四辺形の仲間？

(1) 長方形は、平行四辺形の仲間です。

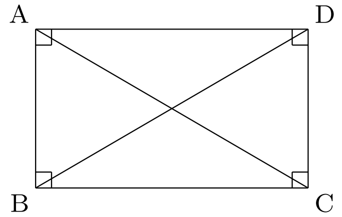
(2) ひし形は、平行四辺形の仲間です。

(3) 正方形は、平行四辺形の仲間です。

ところで、平行四辺形にはいろいろな性質があるということを前に学びましたね。長方形、ひし形、正方形はみんな平行四辺形の仲間なのですから、これらの四角形は平行四辺形の性質を全て持っていることになります。ですが、長方形、ひし形、正方形は平行四辺形のうち特別なものなのですから、一般の平行四辺形には無い性質がきっとあるのでしょう。このことをこれから調べることにします。

例題 25　一般に、平行四辺形では、2 つある対角線の長さは必ずしも等しくないですよね。ですが、平行四辺形の特別なものである長方形では、対角線の長さは必ず等しいのです。証明しなさい。

（証明）



右の図を見てください。長方形 ABCD と、その対角線 AC、DB を描いておきました。この四角形 ABCD は長方形なのですから、

$$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{D} = 90^\circ$$

ですね。（そもそも、4 つの角の大きさが全て 90° である四角形を長方形と呼ぶのでしたよね。）

ところで、長方形は平行四辺形の仲間です。ということは、四角形 ABCD は平行四辺形でもあるわけですから平行四辺形の性質をいろいろ持っていることになります。例えば、

AD と BC は平行で、AB と DC も平行

とか、

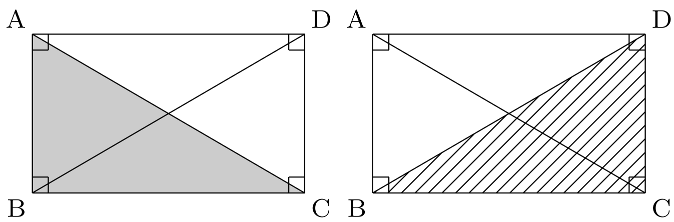
AD と BC の長さは同じで、AB と DC の長さも同じ

とか、

対角線 AC と対角線 BD は両方ともそれぞれの中点で交わる

という性質を持っているわけです。このようなことを頭に入れて考えていくことにします。

この問題では、「長方形の 2 つの対角線の長さは同じである」ということを証明したいのですよね。つまり、AC と BD の長さが同じであるという証拠を見つけたいのですよね。そこで、いつもの手を使うことにしましょう。つまり、「AC の含まれている三角形と BD の含まれている三角形を見つけ、その 2 つの三角形が合同であるという証拠を見つけ、合同だから対応する辺の長さも等しいんだよ」と説明していく手です。



ではどの三角形に注目するのがよいでしょうか。図をよく見て悩んでみると、△ABC と △DCB が良さそうですね。△ABC には AC が含まれていて、△DCB には DB が含まれていますから。念のため、注目することにした 2 つの三角形がどれなのかわかるように、右の図では △ABC を灰色にして、△DCB に影をつけておきました。

では、△ABC と △DCB が合同であるという証拠を探すことにします。

四角形 ABCD は平行四辺形でもあるので、さっきも確認したように、向かい合う辺の長さは等しいはずです。つまり、

$$\mathrm{AB} = \mathrm{DC} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立っています。

また、△ABC の辺 BC と △DCB の辺 CB はもともとぴったり重なっているので長さは同じです。つまり、

$$\mathrm{BC} = \mathrm{CB} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立っています。

ところで、この四角形 ABCD は長方形なのですから、そもそも長方形とは何なのかと

いうことを思い出すと、4 つの角は全て $90°$ ということになります。ですから、もちろん、

$$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{DCB} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ③$$

が成り立っています。

これで証拠はそろいましたよね。①、②、③ によると、△ABC と △DCB では、2 組の辺の長さとその間にある 1 組の角の大きさが等しいということになるので、

$$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{DCB}$$

であると断言できますね。

ですから、対応している辺の長さも等しいはずなので、

$$\mathrm{AC} = \mathrm{DB}$$

であることが判明しました。つまり、長方形の 2 つ対角線の長さは等しいということが証明できたのです。

（証明おわり）

問 57. 一般に、平行四辺形では、2 つある対角線の長さは必ずしも垂直には交わりませんよね。ですが、平行四辺形の仲間であるひし形は、2 つの対角線は必ず垂直に交わるのです。証明しなさい。 答えを見る

例題 25 と問 57 をきちんと理解した人は、次のことを証明したことになります。

重要な事実：長方形性質とひし形の性質

(1) どんな長方形でも、2 つの対角線の長さは等しくなっています。

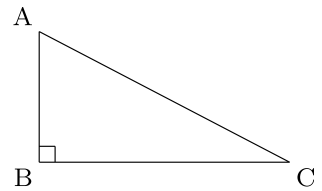
(2) どんなひし形でも、2 つの対角線は垂直に交わっています。

それでは次に、「長方形の性質を使うと、直角三角形の性質を証明ができる」という話をすることにします。

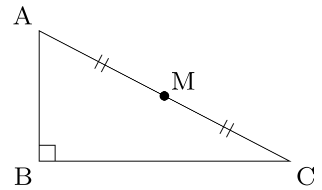
例題 26　直角三角形 ABC があり、$\angle B = 90°$ とします。斜辺 AC の中点を M と呼ぶことにします。M から $\triangle ABC$ の 3 つの頂点までの距離は全て等しいということを証明しなさい。つまり、MA、MB、MC の長さは全て等しいということを証明しなさい。

まず、問題をよく読んで図を作りましょう。

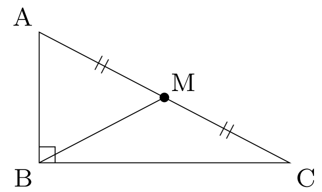
初めに、$\angle B$ が直角である直角三角形 ABC があるのですから、右の図のようになります。



次は、直角三角形 ABC の斜辺 AC の中点を M とするので、右の図のようになります。MA と MC の長さは等しくなるので、MA と MC に || をつけておきました。



M から $\triangle ABC$ の 3 つの頂点までの距離のことを考えるので、念のため、M と B を結んでおきます。すると、右の図のようになります。これで図は完成ですね。

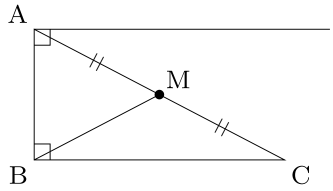


M は AC の中点なので、MA と MC の長さはもちろん同じなのですが、この問題では、「きっと MB も、MA や MC と同じ長さのはずなので証明してください。」と言っているわけですね。

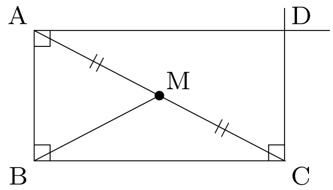
さて、ここで思い出してほしいことがあります。この例題に入る前に、「長方形の性質を使うと、直角三角形の性質を証明ができる」と書いてありましたね。これ、大ヒントなのですが、この図を見る限り、どこにも長方形なんてありませんね。ということは、きっとこの図のどこかに線を付け加えたりして、長方形を作るんですよね。では、どこにどんな線を付け加えればよいのでしょうか。

実は、次のようにして線をつけ加えていきます。

まず、点 A から直線を引くのですが、辺 AB に垂直になるように引きます。すると右の図のようになりますね。

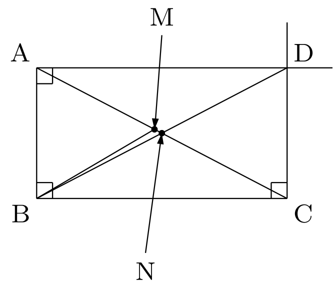


次は、点 C から直線を引くのですが、辺 BC に垂直になるように引きます。さっき引いた線と今引いた線は交わるので交点を D と呼ぶことにします。すると右の図のようになりますね。四角形 ABCD が現れました。ところで、この四角形 ABCD は長方形なのでしょうか。ぱっと見たところ、長方形のようにも見えますが、証拠、今の所無いですね。では、証拠を見つけることにしましょう。たしか、そもそも、長方形って、「4 つの角が全て直角になっている四角形」のことでしたね。この四角形の $\angle$B ですが、これはもともと直角三角形 ABC で直角になっている角ですから直角に決まっています。また四角形 ABCD の $\angle$A ですが、直線 AD は辺 AB に垂直に引いたのですから直角に決まっています。同じような理由で、四角形 ABCD の $\angle$C も直角に決まっています。ここまでで、四角形 ABCD の 4 つの角のうち、3 つまでは直角であるということがわかりました。では残りの角、つまり。$\angle$D は直角なのでしょうか？えーと、たしかどんな四角形も、4 つの角の大きさを合計すると $360°$ になるんでしたよね。今、四角形 ABCD では 3 つの角の大きさが $90°$ なので、この 3 つ分で $270°$ のなります。ということは残り 1 つの角の大きさは $360 - 270$ を計算して $90°$ ということがわかりますね。これで心配はなくなりました。四角形 ABCD の $\angle$D も直角であることがわかりました。ですから、四角形 ABCD は 4 つの角がすべて直角に成っているということなので、めでたく、四角形 ABCD は長方形であると断言できますね。

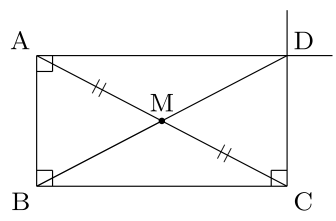


これでやっと、お話の中に長方形が出てきました。でも、だからなんだというのでしょうか。そもそもこの問題を思い出してみると、「$\angle$B の大きさが $90°$ になっている直角三角形 ABC の斜辺 BC 中点を M とすると、MA、MB、MC の長さはみんな同じになっちゃうということを証明してね。」ということでした。そして、「どうも長方形の性質使うと証明できるらしいよ。」ということでした。私たちは長方形についてどんな性質を知っ

ているか思い出してみると、たしか、この例題に入る前に、157 ページの「重要な事実」で、「どんな長方形でも、2 つの対角線の長さは等しくなっている」ということを学んだのでした。ですからきっと、この事実を使って証明することになるのでしょう。

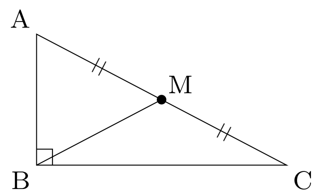


さっき作った図では四角形 ABCD にはすでに 1 つだけ対角線 AC が引いてあります。そこでさらに、B と D を結んでもう 1 つ対角線を描くことにしましょう。そして、四角形 ABCD の 2 つの対角線の交点を N と呼ぶことにします。すると、右の図のようになります。ここでよく注意してほしいことがあります。M と N は同じところにあるのかどうか、今の所わかっていないということです。ですから、この図でも M と N の場所はずらしてあります。そもそも、M は AC の中点なのでしたね。また、N は四角形 ABCD の 2 つの対角線 AC と BD の交点ですね。ですから、今の所 M と N が一致しているという保証はありませんね。でも、「そうは言っても、やっぱり M と N は同じところにあるんじゃないの？」って思う人もいるかもしれませんね。そこで、証拠を探すことにします。N って、長方形 ABCD の 2 つの対角線の交点ですよね。ところで、長方形って、平行四辺形の仲間なんですよね。そして、たしか、平行四辺形では、2 つの対角線は必ずそれぞれの中点で交わるんでしたよね。ということは、N って AC の中点じゃないですか。これでめでたく、N と M は同じ点であるということが突き止められました。



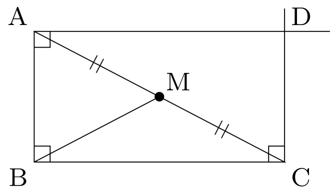
では右の図を見てください。N と M は同じ点であるということが判明したので、この先は M だけ図に描くことにします。念のために言っておくと、さっき、「AC の中点 M は四角形 ABCD の対角線 BD の上にある」ということが判明したのですよね。

先に進む前に、ここまでの話を整理しておきましょう。

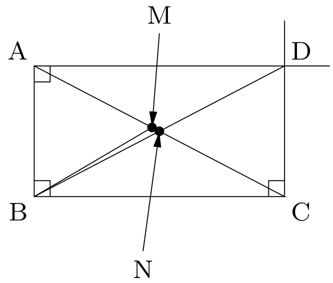


右の図を見てください。まず、$\angle B = 90^\circ$ である直角三角形 ABC があり、斜辺 AC の中点を M としました。また、M と B を結びました。そしてこの問題は、「このと

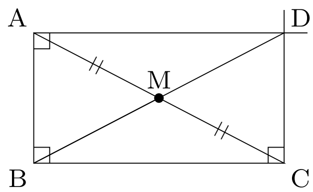
き MA、MB、MC はみんな同じ長さであるということを証明しなさい」というものでした。



どうも長方形の性質が役に立つらしいということで、長方形を登場させることにしました。そこで、まず、辺 AB に垂直になるような線を点 A から引く、次に辺 BC に垂直になるような線を点 C から引に引きました。そして 2 つの線の交点を D とすると。四角形 ABCD が現れました。また、この四角形 ABCD は長方形であるということの証拠も見つかりました。



長方形 ABCD に対角線 BD を追加しました。この対角線 BD は点 M を通るのかどうか初めはわかりませんでした。



しかし、長方形は平行四辺形の仲間であるということを使うと、並行四辺形が持っている対角線の性質から、この対角線 BD はちゃんと M を通過するということが判明しました。

これが今までにわかったことです。では先に進むことにしましょう。この問題は、MA、MB、MC の長さが全て等しいということを証明する問題でしたね。

まず、M は AC の中点なので、

MA や MC の長さは AC の長さの半分　…………………　①

ですよね。

また、四角形 ABCD は平行四辺形でもあるのですから、2 つの対角線はそれぞれの中点で交わるので、

MB の長さは BD の長さの半分　…………………　②

ですよね。

　ここで、私たちが知っている長方形の性質を思い出すことにしましょう。たしか、長方形の 2 つの対角線の長さは同じになるということでしたね。ということは、長方形 ABCD では、

AC と BD の長さは同じ　…………………　③

ですよね。

　ということは、①、②、③から、

MA、MB、MC の長さは全部同じ

と断言できますね。

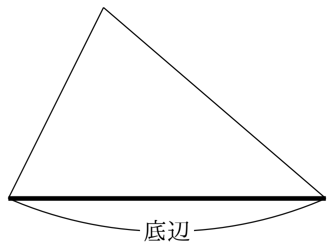
（証明おわり）

2.9　面積を変えないで図形の形を変える方法

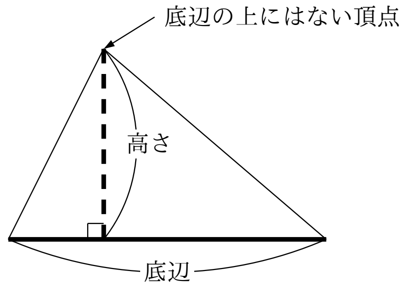
おさらい：三角形の面積の計算の仕方

　三角形の面積の計算の仕方を思い出しておくことにしましょう。

　右の図を見てください。まず、三角形の 3 つの辺の中から 1 つ辺を選び、その辺を底辺と考えることにします。この図では、底辺と考えることにした辺を太く描いておきました。



　右の図を見てください。次に底辺の上にはない頂点から底辺に向かって底辺にぶつかるまで垂直に線を引きます。その線の長さが三角形の高さになります。右の図では、高さを表す線を太い点線で描いておきました。

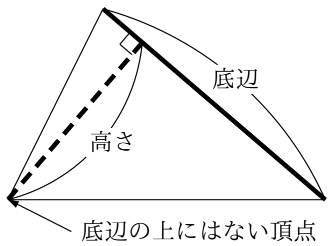


ここまで準備ができたら、

$$\text{底辺の長さ} \times \text{高さ} \times \frac{1}{2}$$

を計算すれば、この三角形の面積を求められるのでしたね。

念のための注意をしておきます。三角形には辺が3つあるのですから、底辺の選び方も3通りあります。ですから、右の図のように底辺を選ぶこともできます。このときは、高さを表す線はこの図の太い点線になります。高さを表す線は、もちろん底辺に垂直になっていなくてはいけません。

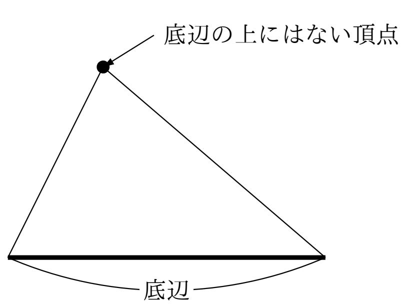


おさらいおわり

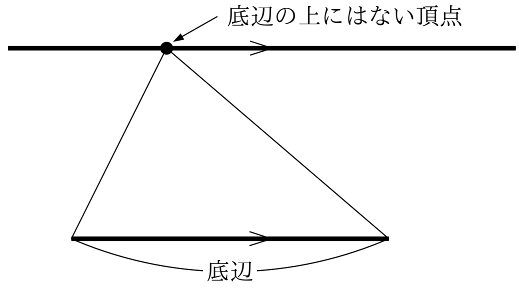
このおさらいでは、三角形の面積は底辺の長さと高さから計算されることを思い出してもらいました。このことからわかるのは、「2つの形の違う三角形があるとき、底辺の長さが同じになっていて高さも同じになっていたら、この2つの三角形の面積は等しい」ということです。このことに注意しておくと、次のような方法で、面積を変えずに三角形の形を変えることができるということがわかるでしょう。

面積を変えずに三角形の形を変える方法

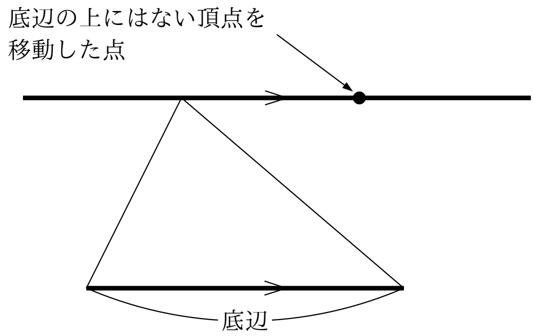
右の図を見てください。まず、3つある三角形の辺から、底辺として考えることにする辺を1つ選びます。そして、底辺の上にはない頂点に注目します。



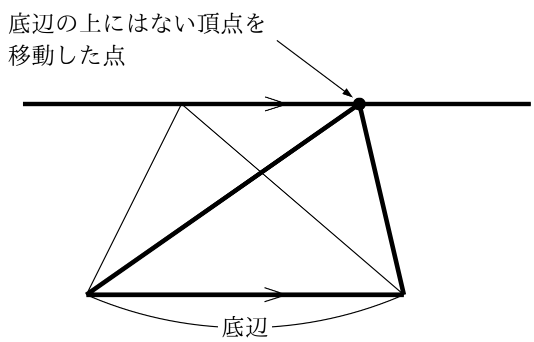
次は、底辺の上にはない頂点を通る直線を、底辺に平行に引きます。



次は、「底辺にはない頂点」を、今引いたばかりの「底辺に平行な線」の上の好きな所に移動します。例えば右の図のようになります。

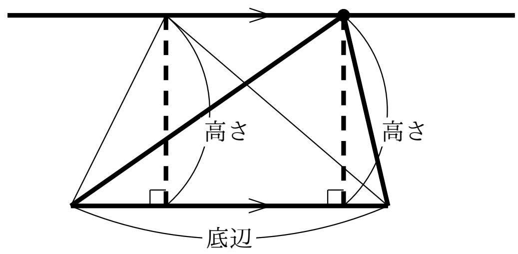


最後に、今移動したばかりの点と底辺の両端の点をそれぞれ結びます。すると、右の図のような三角形ができます。わかりやすくするため、出来上がった三角形を太い線で描いておきました。



それでは、もともとあった三角形と、今出来上がったばかりの三角形の面積を比べてみることにしましょう。まず、底辺の長さを比べると、2 つの三角形の底辺はぴったり重なっているのですから同じに決まっていますね。

では、高さはどうでしょうか。2 つの三角形の高さを比べるために、2 つの三角形に高さを表す線を描いてみることにします。高さを表す線は「底辺の上にはない頂点」から底辺へ向かって垂直な線を、底辺へぶつかるまで描くのですから右の図のようになります。「底辺」と、「底辺の上にはない頂点を通る直線」は平行になるように描いたのでしたね。平行な 2 つの直線の間の「幅」はどこでも同じです。ですから、2 つの三角形の高さは同じですよね。

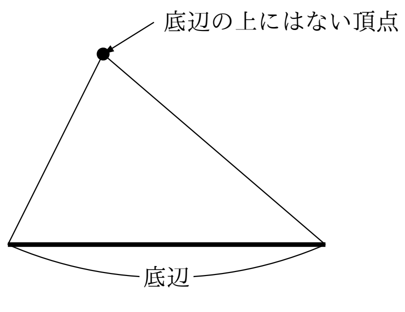


これで、2 つの三角形では、「底辺の長さ」と「高さ」は同じになっているのことが確認できました。ですから、2 つの三角形の面積は同じになっているのです。というわけで、さっき説明した方法で、面積を変えずに三角形の面積を変えることができます。

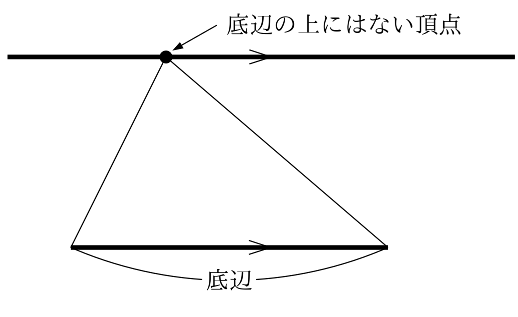
それではいくつか例をお見せすることにしましょう。

例 2　面積を変えずに三角形の面積を変える例（その 1）

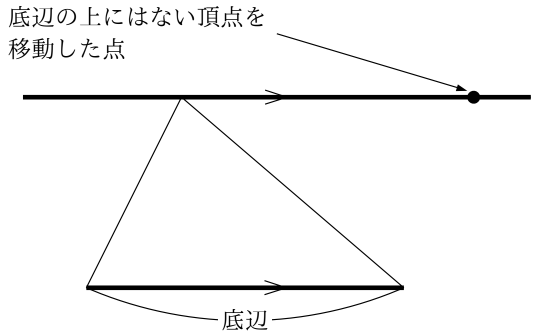
右の図を見てください。まず、3 つある三角形の辺から、底辺として考える考えることにする辺を 1 つ選びます。そして、底辺の上にはない頂点に注目します。



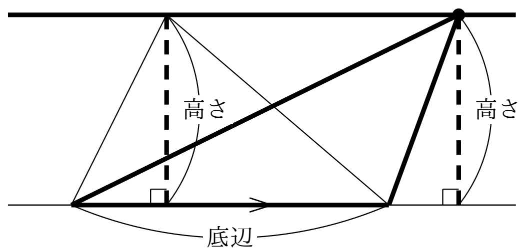
次は、底辺の上にはない頂点を通る直線を、底辺に平行に引きます。右の図のようになります。



次は、「底辺にはない頂点」を、今引いたばかりの「底辺に平行な線」の上の好きな所に移動します。例えば右の図のようになります。



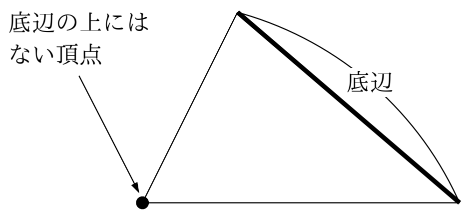
最後に、今移動したばかりの点と底辺の両端の点をそれぞれ結びます。すると、右の図のような三角形ができます。わかりやすくするため、出来上がった三角形を太い線で描いておきました。



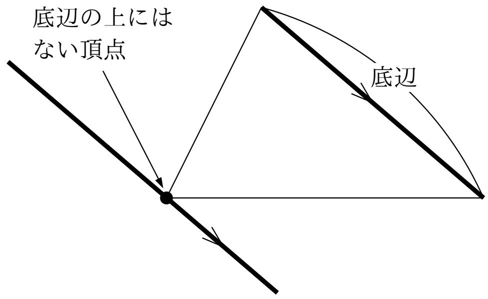
もとの三角形と今できたばかりの三角形は「底辺の長さ」と「高さ」は同じです。ですから、2 つの三角形は、形は違いますが面積は同じなのです。

例 3　面積を変えずに三角形の面積を変える例（その 2）

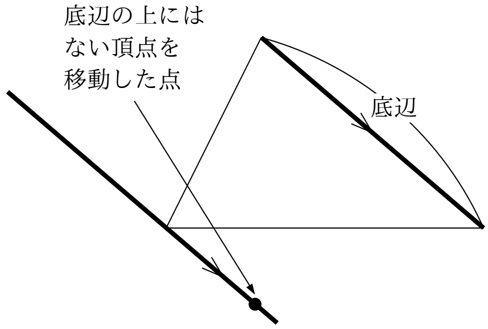
右の図を見てください。まず、3 つある三角形の辺から、底辺として考える考えることにする辺を 1 つ選びます。そして、底辺の上にはない頂点に注目します。



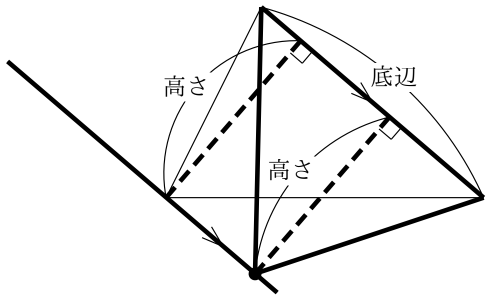
次は、底辺の上にはない頂点を通る直線を、底辺に平行に引きます。右の図のようになります。



次は、「底辺にはない頂点」を、今引いたばかりの「底辺に平行な線」の上の好きな所に移動します。例えば右の図のようになります。



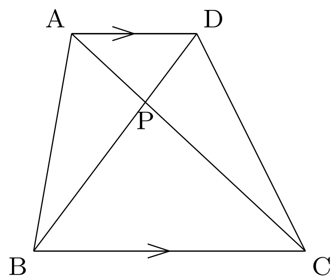
最後に、今移動したばかりの点と底辺の両端の点をそれぞれ結びます。すると、右の図のような三角形ができます。わかりやすくするため、出来上がった三角形を太い線で描いておきました。



もとの三角形と今できたばかりの三角形は「底辺の長さ」と「高さ」は同じです。ですから、2 つの三角形は、形は違いますが面積は同じなのです。

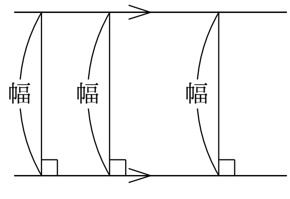
どうですか？このようにして、三角形の面積を変えずに三角形の形を変えることができるのです。

例題 27　右の図の四角形 ABCD では辺 AD と辺 BC は平行になっています。また、四角形 ABCD の 2 つの対角線の交点を P としました。この図の中に、面積の同じ三角形がいくつか隠れています。どの三角形とどの三角形の面積が同じになっているのか、あるだけ全部答えなさい。

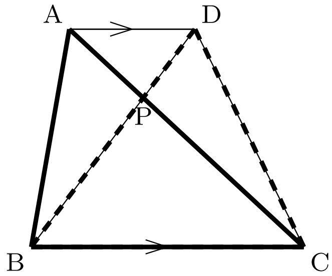


解答

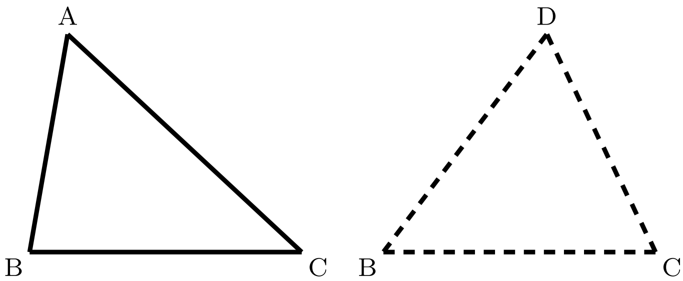
右の図を見てください。平行線の「幅」はどこでも同じであるということをしっかりと頭に入れて考えることにしましょう。



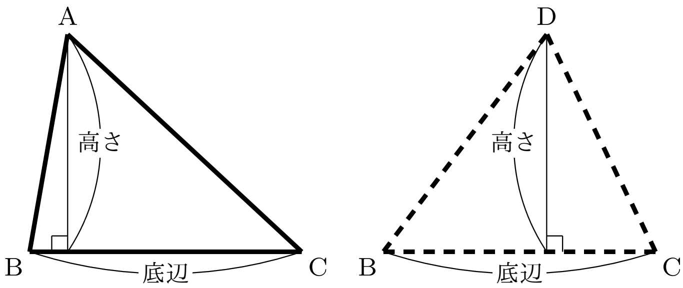
では右の図を見てください。あなたのために、もう一度この問題の図を描いておきました。それでは、例えば、△ABC と △DBC に注目してみましょう。わかりやすくするために、△ABC を太い線で、△DBC を点線で描きました。



右の図を見てください。念のため、もとの図から △ABC と △DBC を取り出して、別々に描いておきました。

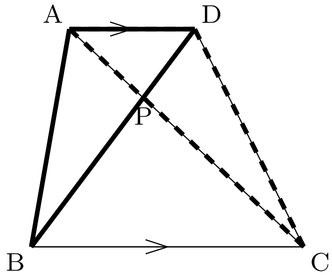


実はこの 2 つの三角形の面積は同じです。どうしてなのか説明することにしましょう。右の図を見てください。この図のように、どちらの三角形でも、辺 BC を底辺であると考えると、当然どちらの三角形でも底辺の長さは同じです。



また、それぞれの三角形で、高さを表す線の長さは、平行になっている 2 つの線（つまり、もとの図の AD と BC のことです）の幅なので同じです。というわけで、この 2 つの三角形では、底辺の長さも高さも同じです。ですから、この 2 つの三角形の面積は同じなのです。

では右の図を見てください。今度は △ADB と △ACB に注目してください。どの三角形のことなのかわかりやすくするため、この図では、△ADB を太い線で、△ACB を太い点線で描いておきました。さっきまでと同じように考えると、この 2 つの三角形では、底辺の長さも高さも同じと考えることができますね。ですから、このこの 2 つの三角形の面積は同じなのです。



以上で、

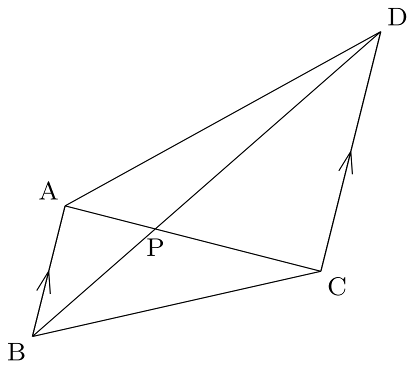
$$\triangle \mathrm{ABC} \text{ と } \triangle \mathrm{DBC} \text{ の面積は同じ}$$

であることと、

$$\triangle \mathrm{ADB} \text{ と } \triangle \mathrm{ACB} \text{ の面積は同じ}$$

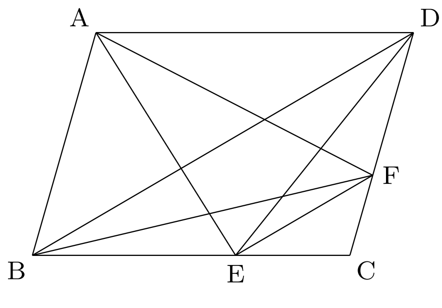
であることがわかりました。そして、これ以外に、面積が同じになっている三角形はありません。

問 58. 右の図の四角形 ABCD では辺 BA と辺 CD は平行になっています。また、四角形 ABCD の 2 つの対角線の交点を P としました。この図の中に、面積の同じ三角形がいくつか隠れています。どの三角形とどの三角形の面積が同じになっているのか、あるだけ全部答えなさい。



答えを見る

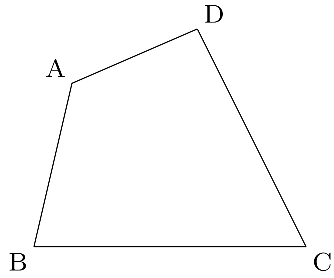
問 59. 右の図の四角形 ABCD は平行四辺形であるとします。また、この図の線分 EF は平行四辺形 ABCD の対角線 BD と平行になっているとします。では、この図の中にある △ABE に注目してください。この図の中には △ABE と面積の等しい三角形がいくつか隠れているのですが、あるだけ全部見つけてください。



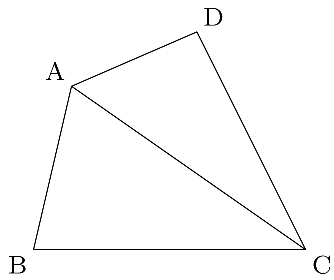
答えを見る

ここまで、面積を変えずに三角形の形を変える方法を学んできました。実はこの方法を使うと、四角形や五角形、六角形 $\cdots$ なども、面積を変えずに形を変えることができます。例を使って学ぶことにしましょう。

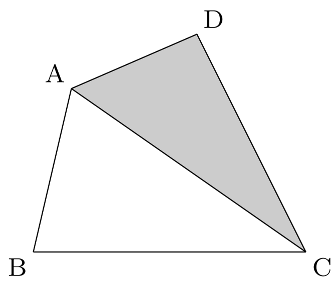
例 4　右の図の四角形 ABCD を面積を変えないで形を変えようと思います。



まず、この四角形の対角線を 1 つ描きます。対角線は 2 つありますが、どちらの対角線を描いてもかまいません。右の図を見てください。この図では A と C を結んで対角線を描きました。このようにすると、四角形は 2 つの三角形に分かれます。

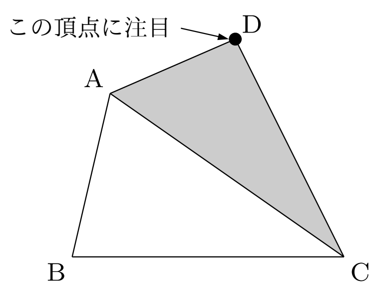


前の図で、四角形 ABCD は 2 つの三角形、△DAC と △BCA に分かれました。そこで、この 2 つの三角形のうちのどちらか 1 つに注目します。どちらの三角形に注目してもかまいませんが、ここでは △DAC に注目することにします。右の図では、注目することにした △DAC を灰色にしてわかりやすくしました。

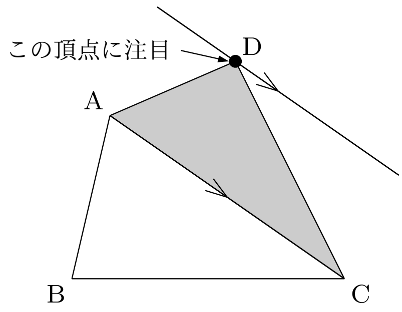


これから、注目することにした三角形を、面積を変えないで変形します。面積を変えずに三角形の形を変える方法はすでにこの節で詳しく学んでいますね。その方法を使っていくのですが、たしか、まず、3 つある三角形の辺の中から「底辺だと思うことにする辺」を決めてから、「底辺だと思うことにした辺の上にはない頂点」に注目するのでしたね。

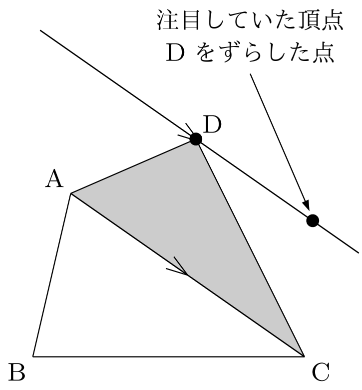
右の図を見てください。今注目している △DAC では、「底辺だと思うことにする辺」を AC にして、「底辺の上になはい頂点」である D に注目します。



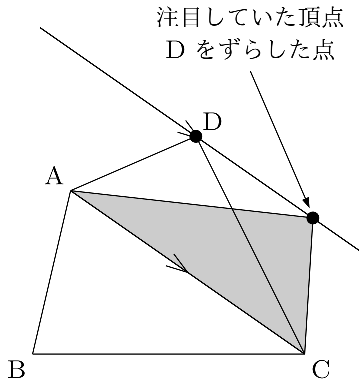
次は、注目した点 D を通っていて、底辺 AC に平行な線を描きます。すると右の図のようになります。



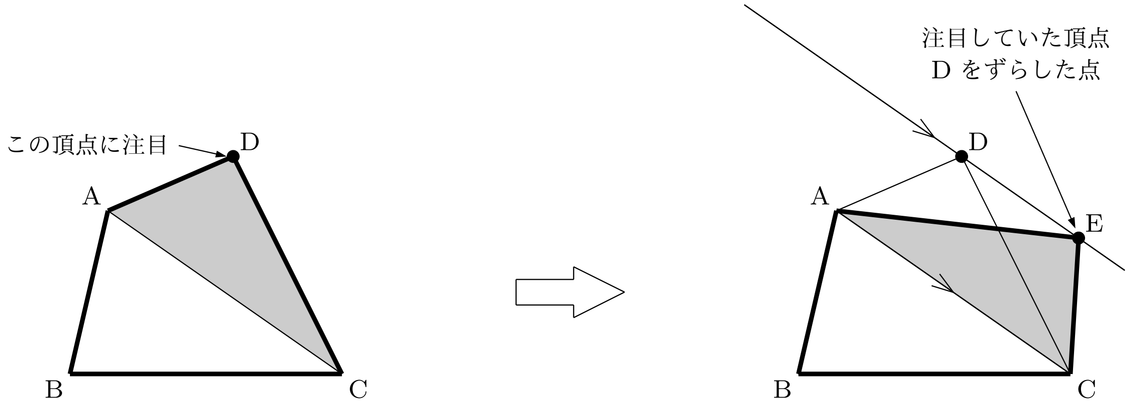
次は、注目した点 D を、「今描いたばかりの直線の上のあなたの好きな所」へずらします。すると例えば右の図のようになります。



最後に、ずらした点と、△DCA の底辺に選んだ辺 AC の両端の点をそれぞれ結びます。すると右の図のようになります。辺 AC が底辺になっていると考えてもよい三角形が現れました。この図で灰色になっている三角形のことです。この図で灰色にしてある三角形の面積は、もともと灰色にしてあった △DAC の面積と同じですよね。



ではここまで考えてきたことをもう一度頭の中に入れて、初めの状態の図と、最後にできた状態の図を比べることにしましょう。あなたのために、図を描いておきました。次の図を見てください。

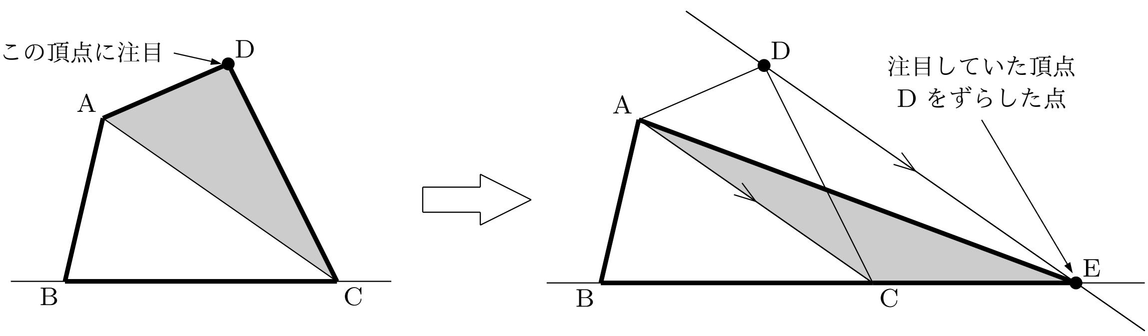


初めの状態　　　　最後の状態

「最後の状態」の図を見てください。「注目していた頂点 D をずらした点」の名前を E にしておきました。それでは、「初めの状態」の図の四角形 ABCD と「最後の状態の図」の四角形 EABC を比べることにしましょう。この図ではそれら 2 つの四角形を太い線描いておきました。

「初めの状態」の図の灰色の △DBC と、「最後の状態」の図の灰色の △EAC の面積は同じなのでしたね。そしてどちらの四角形でも △ABC は共通なのですから、四角形 ABCD と四角形 ABCE の面積は同じはずですよね。つまり、四角形 ABCD を、面積を変えないで、違う形の四角形 ABCE にすることができたのです。

ここまで、四角形の面積を変えずに形の違う四角形に変形する話をしてきました。実は、注目していた点 D をもっとうまい位置にずらすと、面積を変えずに、四角形を三角形にしてしまうこともできるのです。次の図を見てください。



初めの状態　　　　最後の状態

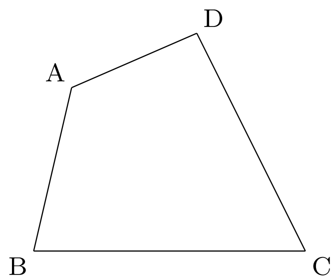
辺 BC をある程度外へ伸ばしておきましょう。すると、「注目した頂点 D を通って、△DAC の底辺に選んだ辺 AC に平行な直線」は辺 BC を伸ばした線とどこかでが交わるはずです。注目した頂点 D をそこまでずらすのです。ずらした点をここでも E と呼ぶことにしましょう。

それでは、「初めの状態」の図の四角形 ABCD と「最後の状態の図」の三角形ABE を比べることにしましょう。この図ではそれぞれの四角形と三角形を太い線で描いておきました。

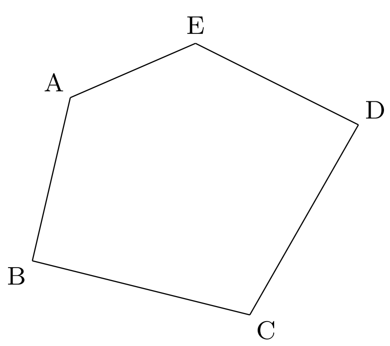
「初めの状態」の図の灰色の △DBC と、「最後の状態」の図の灰色の △EAC の面積は同じですよね。(だって、底辺 AC は共通ですよね。また、平行線を使って頂点 D をずらしたのですから高さも同じですよね。）そしてどちらの四角形 ABCD と △ABE では △ABC は共通なのですから、四角形 ABCD と △ABE の面積は同じはずですよね。つまり、四角形 ABCD を、面積を変えないで、三角形ABE にすることができたのです。

問 60. 例 4 がよく理解できた人のための問題です。

(1) 右の図の四角形 ABCD を面積を変えないで三角形に変えようと思います。ただし、四角形 ABCD の頂点 A を通る直線をうまい向きに描き、その直線の上のどこかに頂点 A をずらすことにより新しい頂点を見つけて三角形を作ってください。



(2) 右の図の五角形 ABCDE を面積を変えないで四角形に変えようと思います。ただし、五角形 ABCDE の頂点 C を通る直線をうまい向きに描き、その直線の上のどこかに頂点 A をずらすことにより新しい頂点を見つけて四角形を作ってください。



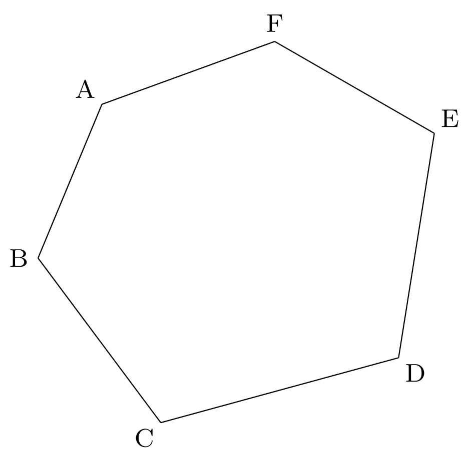
答えを見る

問の解答

問 1. 例 1 の五角形の内角の和についての話が理解できた人のための問題でしたね。

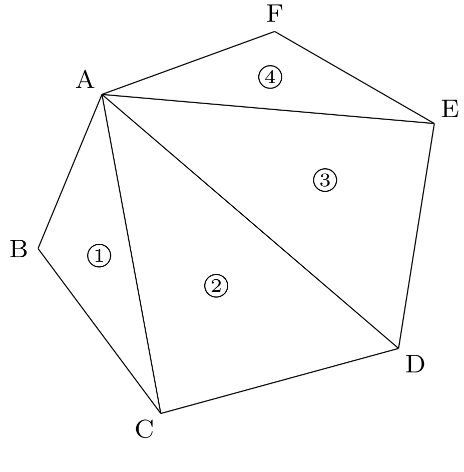
(1) 『なるべく特徴のない六角形の図を描いてください。』ということでした。

例えば右の図のようになります。



(2) 『六角形の頂点を 1 つ選び、選んだ頂点から出ていく対角線を何本か描いて、六角形をいくつかの三角形に分割してください。』ということでした。

例えば右の図のようになります。この図では頂点 A から出て行く対角線を描きましたが、どの頂点から対角線を引いても対角線は必ず 3 本引くことができます。



(3) 『(2) では六角形に何本か対角線を描いていくつかの三角形に分割したはずです。六角形はいくつの三角形に分割されましたか。』ということでしたね。

(2) で描いた図を見ればわかるように、六角形は、4 枚の三角形に分かれます。((2) で描いた図では、四枚の三角形を番号で、三角形①、三角形②、三角形③、三角形④と名づけてあります。)

(4) 『六角形の内角の和は、何枚分の三角形の内角の和と同じですか。』ということでした。

(2) で描いた図を見ればわかるように、六角形の内角の和は、四枚分の三角形の内角の和と同じです。

(5) 『六角形の内角の和は何度のはずですか。』ということでした。

六角形の内角の和は、四枚分の三角形の内角の和と同じであることがわかったのですから、

$$\text{六角形の内角の和} = 180 \times 4 = 720^\circ$$

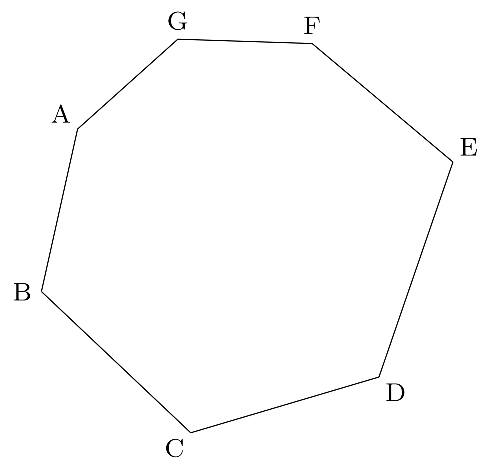
ということになりますね。

本文へ戻る

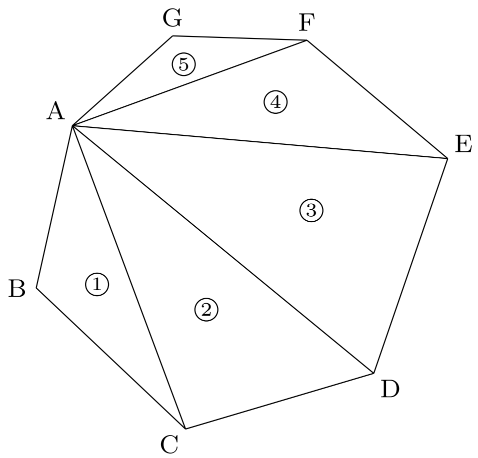
問 2. 例 1 の五角形の内角の和についての話が理解できた人のための問題でしたね。

(1) 『なるべく特徴のない七角形の図を描いてください。』ということでした。

例えば右の図のようになります。



(2) 『七角形の頂点を 1 つ選び、選んだ頂点から出ていく対角線を何本か描いて、七角形をいくつかの三角形に分割してください。』ということでした。



例えば右の図のようになります。この図では頂点 A から出て行く対角線を描きましたが、どの頂点から対角線を引いても対角線は必ず 4 本引くことができます。

(3) 『(2) では七角形はいくつの三角形に分割されましたか。』ということでしたね。

(2) で描いた図を見ればわかるように、七角形は、5 枚の三角形に分かれます。((2) で描いた図では、5 枚の三角形を番号で、三角形①、三角形②、三角形③、三角形④、三角形⑤と名づけてあります。)

(4) 『七角形の内角の和は、何枚分の三角形の内角の和と同じですか。』ということでした。

(2) で描いた図を見ればわかるように、七角形の内角の和は、5 枚分の三角形の内角の和と同じです。

(5) 『七角形の内角の和は何度のはずですか。』ということでした。

七角形の内角の和は、5 枚分の三角形の内角の和と同じであることがわかったのですから、

$$\text{七角形の内角の和} = 180 \times 5 = 900^\circ$$

ということになりますね。

本文へ戻る

問 3. 『八角形の内角の和が何度になるのか、ここまで学んできた考えかたをまねして考えてください。』という問題でしたね。

例 1、問 1、問 2 が理解できた人はもうくどい説明は必要ないでしょう。

八角形を描いてみてください。そして八角形の頂点を 1 つ選び、選んだ頂点から出ていく対角線を描くと、5 本の対角線をひくことができます。その結果、八角形は 6 個の三角形に分割されます。ですから、八角形の内角の和は、6 枚分の三角形の内角の和と同じです。

というわけで

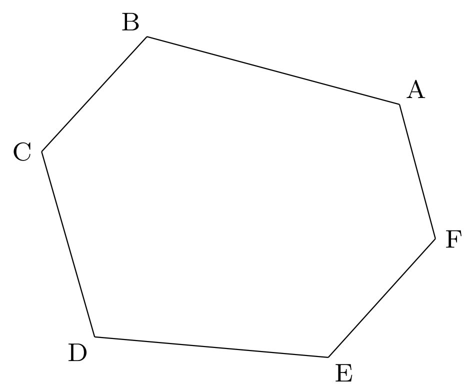
$$\text{八角形の内角の和} = 180 \times 6 = 1080^\circ$$

ということになりますね。

本文へ戻る

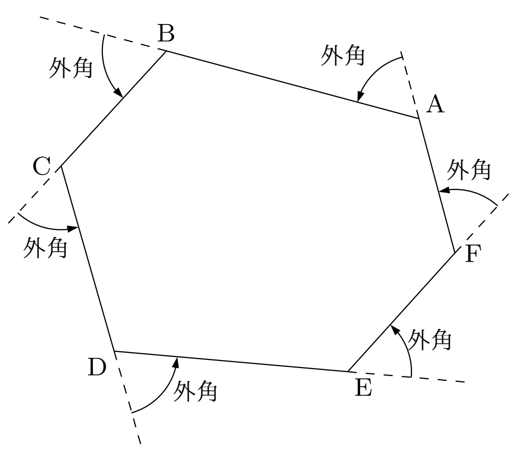
問 4. 六角形の外角を全部たすと何度になるのか、この問の前の五角形のランニングコースの説明のように考えるのでしたね。

(1) 『なるべく特徴のない六角形の図を描いてください。』という問題でしたね。
例えば右の図のようになります。



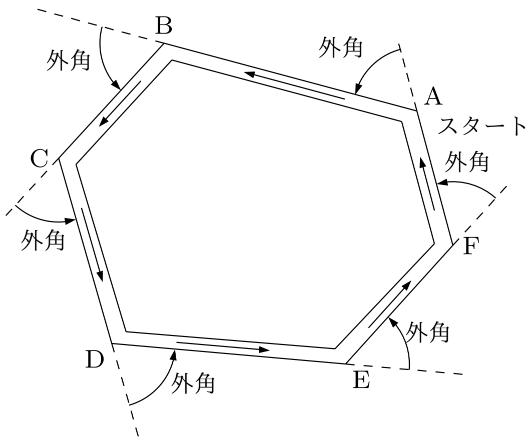
(2) 『(1) で描いた六角形のそれぞれの頂点にできている外角をわかりやすくするため、 を図に付け加えてください。』という問題でしたね。

例えば右の図のようになります。



(3) 『頭の中で、(1) で描いた六角形の形をしたランニングコースを思い浮かべてください。』という問題でしたね。

例えば右の図のようなものを思い浮かべれば良いわけです。



(4) 『ランニングコースを走っていくと、そのうち頂点に到着してあなたは体の向きを変えますね。そのとき、向きを変えた角度は何の角度と同じになりますか。』という問題でしたね。

ランニングコースの図を見るとわかると思いますが、あなたはランニングコースの各頂点で、「その頂点における外角の大きさ」と同じ角度だけ体の向きを変えます。

(5) 『ランニングコースを 1 周してスタート地点に戻った時も体の向きをちゃんと変えると、最後にあなたはどちらの方を向いていることになりますか。』という問題でしたね。

もちろんスタートしたときと同じ方向を向いています。

(6) 『結局あなたは何回転したことになりますか。』という問題でしたね。

もちろんあなたは 1 回転しています。

(7) 『六角形の外角の和は何度になると思いますか。』という問題でしたね。

外角の和は、あなたがそれぞれの頂点で体の向きを変えた角度を全て合計したものになるということがわかったと思います。そしてあなたは、1 回転したわけです。ですから、六角形の外角の和は 360° ということになります。

本文へ戻る

問 5. 『六角形の外角の和を計算と理屈をうまく使って求めようと思います。次の文の空欄に正しい数や言葉を書きなさい。』という問題でしたね。

六角形のそれぞれの頂点のところでは、内角と外角をたすと $\boxed{180}^\circ$ です。六角形には頂点が 6 個あるので、六角形の内角と外角をすべてたすと 180° が $\boxed{6}$ 個あることになり $\boxed{1080}^\circ$ となります。一方、ナントカ角形の内角の和について学んだことを思い出すと、六角形の内角の和は $\boxed{720}^\circ$ です。念のため、ここまでの話を整理すると、

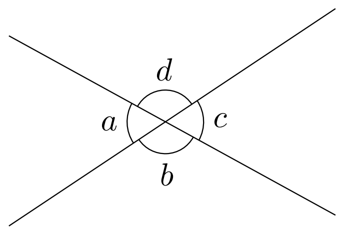
$$(\text{六角形の内角の和}) + (\text{六角形の外角の和}) = \boxed{1080}^\circ$$

$$\text{六角形の内角の和} = \boxed{720}^\circ$$

となっているわけです。この二つのことをよく考えれば、「六角形の外角の和」だけの分で $\boxed{360}^\circ$ になっていることがわかります。

本文へ戻る

問 6. 『右の図のように 2 つの直線が交わって、交点のところに 4 つの角 a、b、c、d ができているとします。このとき実は b と d は同じ角度になっているのですが、証拠を見せようと思います。次の文の空欄に正しい記号や言葉を書きなさい。』という問題でしたね。



a と b をあわせると $\boxed{\text{まっす}}$ ぐになるわけですから、

$$\boxed{a} + \boxed{b} = 180 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

であることは疑いようがありません。

今度は $\boxed{a}$ と d に注目してください。やはり $\boxed{a}$ と d をあわせるとまっすぐになるのですから、

$$\boxed{a} + d = 180 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

であることは疑いようがありません。

ところで①と②の話に出てくる $\boxed{a}$ はもちろん同じものです。この $\boxed{a}$ を、b にたしても d にたしても 180 になってしまうといっているわけです。だとしたら、 $\boxed{b}$ と $\boxed{d}$ は等しいはずですよね。つまり、

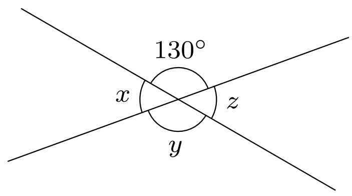
$$b = d$$

であることが判明しました。

本文へ戻る

問 7.

(1) 右の図の $\angle x$、 $\angle y$、 $\angle z$ の大きさを求めるのでしたね。



$\angle y$ と 130° の角は対頂角の関係になっています。ですから大きさは同じです。というわけで

$$\angle y = 130°$$

ということになります。

$\angle x$ と 130° の角を合わせるとまっすぐになります。ですから、

$$\angle x = 180° - 130° = 50°$$

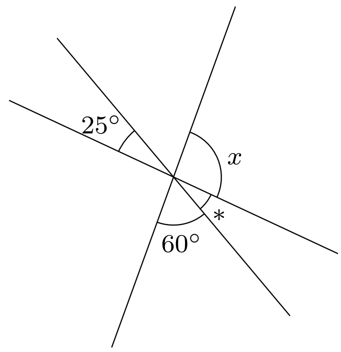
ということになります。

$\angle z$ と $\angle x$ は対頂角の関係になっています。ですから大きさは同じです。というわけで

$$\angle z = 50°$$

ということになります。

(2) 右の図の $\angle x$ の大きさを求めるのでしたね。



もともと問題の図にはなかったのですが、この図では ∗ という印のついた角があります。この角 ∗ は 25° の角とは対頂角の関係になっています。ですから大きさは等しいわけです。つまり

$$\angle * = 25^\circ$$

ということです。

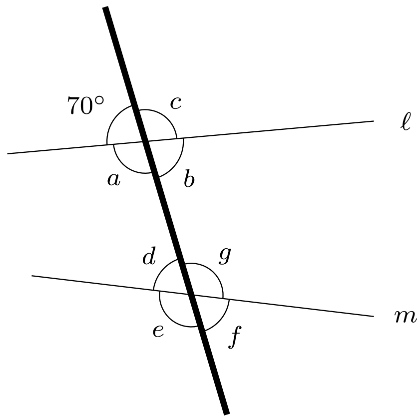
60° の角と角 ∗ と $\angle x$ を合わせるとまっすぐになっています。つまりこれらの角の大きさを合計すると 180° になるわけです。角 ∗ は 25° とわかったのですから、

$$\angle x = 180^\circ - 60^\circ - 25^\circ = 95^\circ$$

ということになります。

本文へ戻る

問 8. 『右の図を見てください。2 本の細い直線 ℓ、m に太い直線が交わり、交点の所に角ができています。以下の問に答えなさい。』ということでした。



(1) $\angle a$ の同位角は $\angle e$ です。

(2) $\angle c$ の同位角は $\angle g$ です。

(3) $\angle b$ の錯角は $\angle d$ です。

(4) 『もし ℓ と m が平行だったら、次の角の大きさはそれぞれ何度になりますか。』という問題でしたね。

ア. $\angle b$ と 70° の角は対頂角の関係になっています。ですから大きさは同じです。つまり、 $\angle b$ の大きさは 70° です。（念のために言っておくと、ℓ と m が平行でなくても $\angle b$ の大きさは 70° です。）

イ. $\angle d$ と 70° の角は同位角の関係になっています。いま ℓ と m が平行なので、同位角の大きさは同じであると断言できます。ですから $\angle d$ の大きさは 70° です。

ウ. $\angle g$ と $\angle d$ を合わせるとまっすぐになります。また $\angle d$ の大きさは 70° であることがわかっています。ですから

$$\angle g = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

ということになります。

エ. $\angle a$ と 70° の角を合わせるとまっすぐになります。ですから、

$$\angle a = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

ということになります。また、$\angle d$ の大きさは 70° であることがわかっています。ですから

$$\angle a + \angle d = 110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$$

ということになります。

(5) 『もし $\angle b = \angle d$ だったら、ℓ と m は平行ですか。』という問題でしたね。

$\angle b$ と $\angle d$ は錯角の関係にあります。$\angle b = \angle d$ だったら錯角が等しいということになるので、ℓ と m は平行であると断言できます。

(6) 『もし $\angle a = \angle d$ だったら、ℓ と m は平行ですか。』という問題でしたね。

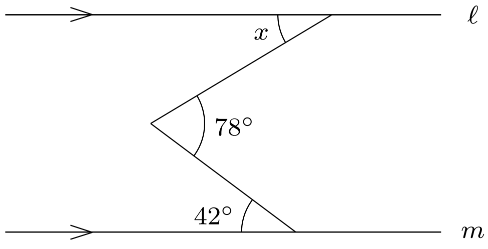
$\angle a$ と $\angle d$ は同位角の関係になっていませんし、錯角の関係にもなってません。ですから、たとえ $\angle a = \angle d$ だとしても、ℓ と m は平行であるとは断言できません。

(7) 『もし $\angle a = \angle g$ だったら、ℓ と m は平行ですか。』という問題でしたね。

$\angle a$ と $\angle g$ は錯角の関係にあります。$\angle a = \angle g$ だったら錯角が等しいということになるので、ℓ と m は平行であると断言できます。

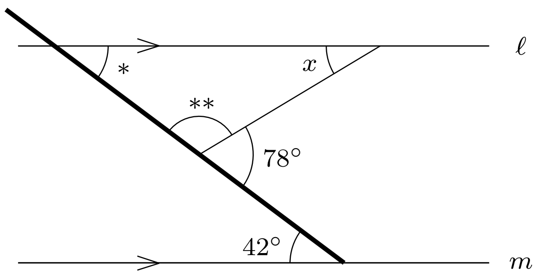
本文へ戻る

問 9. 『右の図で、直線 ℓ と直線 m は平行になっているとします。このとき $\angle x$ の大きさを求めなさい。』という問題でしたね。



この問題は例題 2 の解答で説明した方法で解くことができますが、ここでは違う解き方を説明することにします。

右の図はもとの図に補助線（太く描かれた線）を付け加えたものです。



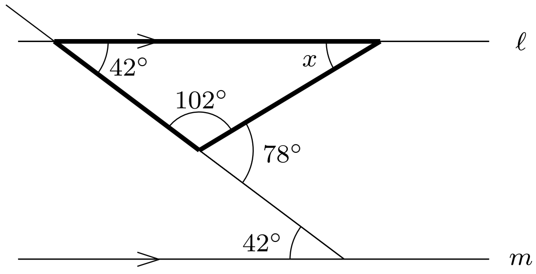
直線 ℓ と直線 m は平行になっているので錯角は等しいと断言できます。角 $*$ と 42° の角は錯角の関係にありますから角 $*$ の大きさは 42° ということになります。

また、角 $**$ と 78° の角を合わせるとまっすぐになっています。ですから

$$\text{角} ** \text{の大きさ} = 180^\circ - 78^\circ = 102^\circ$$

ということになります。

では右の図を見てください。これまでわかった角度を書き込んでおきました。

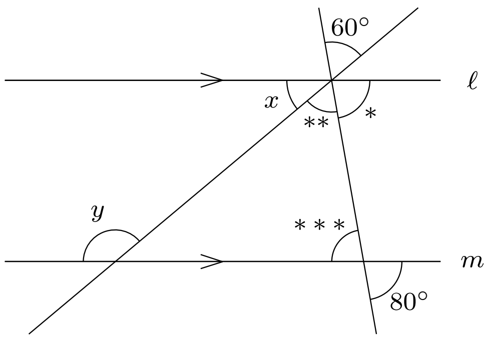


この図で太く描かれた三角形に注目してみましょう。三角形の内角の和は 180° なのですから

$$\angle x = 180^\circ - 42^\circ - 102^\circ = 36^\circ$$

ということになります。

本文へ戻る



問 10. 『右の図で、直線 ℓ と直線 m は平行になっているとします。このとき $\angle x$ と $\angle y$ の大きさを求めなさい。』という問題でしたね。（この図では説明の都合で 3 つの角に $*$ というマークと $**$ というマークと $***$ というマークを付けておきました。）

角 $*$ と 80° の角は同位角の関係にあります。直線 ℓ と直線 m は平行になっているので同位角の大きさは同じです。ですから

$$\text{角} * \text{の大きさ} = 80^\circ$$

ということになります。

角 $**$ と 60° の角は対頂角の関係にあります。対頂角の大きさはどんなときでも同じです。ですから

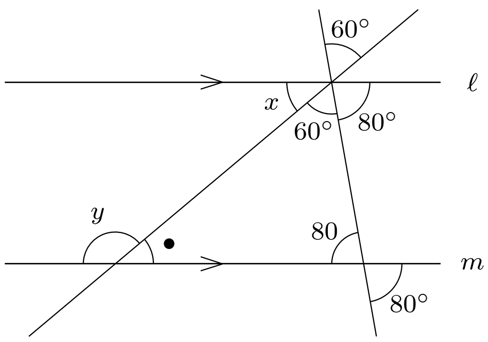
$$\text{角} ** \text{の大きさ} = 60^\circ$$

ということになります。

角 $**$ と 80° の角は対頂角の関係にあります。対頂角の大きさはどんなときでも同じです。ですから

$$\text{角} *** \text{の大きさ} = 80^\circ$$

ということになります。



では右の図を見てください。ここまでわかったことを図に書き込んでおきました。$\angle x$ と 60° の角と 80° の角を合わせるとまっすぐになります。ですから

$$\angle x = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ$$

ということになります。

この図には ● のマークを付けてある角があります。三角形の内角の和は 180° ですから、

$$角 \bullet の大きさ = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ$$

ということになります。

$\angle y$ と角 ● を合わせるとまっすぐになっているのですから

$$\angle y = 180^\circ - 4^\circ = 40^\circ$$

ということになります。

本文へ戻る

問 11. 『今学んだばかりの重要な事実、つまり「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっているという主張」の証明を覚えて、何も見ないでも作文できるようにしなさい。』という問題でしたね。

ちゃんと覚えてください。

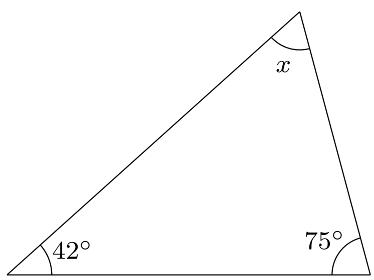
本文へ戻る

問 12. 『次の図の $\angle x$、 $\angle y$ の大きさを求めよ。』という問題でしたね。

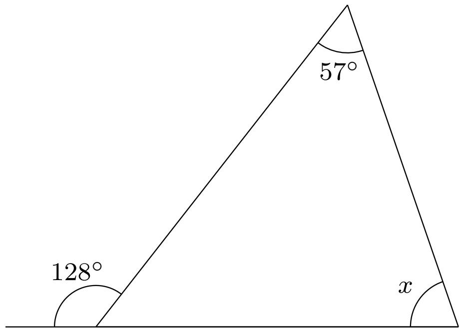
(1) どんな三角形でも内角の和は 180° です。ということは

$$\angle x = 180^\circ - 42^\circ - 75^\circ = 63^\circ$$

ということになります。



(2) 「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっている」のですから



$$x + 57 = 128$$

が成り立っています。この式から

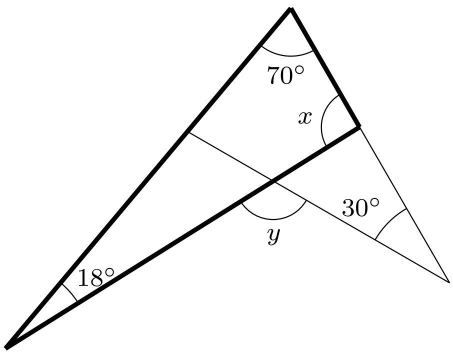
$$x = 128 - 57 = 71$$

ということがわかります。つまり、

$$\angle x = 71^\circ$$

ということになります。

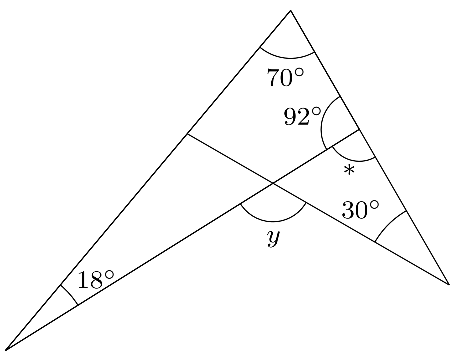
(3) まず、右の図の太く描かれた三角形に注目すると



$$\angle x = 180^\circ - 70^\circ - 18^\circ = 92^\circ$$

ということがわかります。

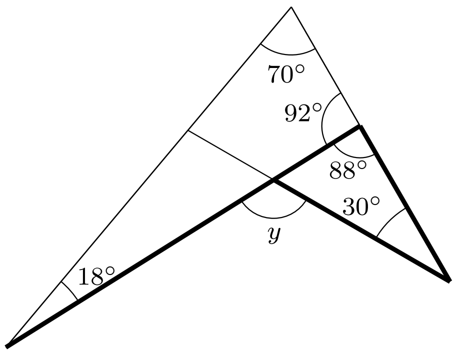
そうすると、右の図で $*$ マークをつけた角の大きさは



$$\text{角} * \text{の大きさ} = 180^\circ - 92^\circ = 88^\circ$$

ということがわかります。

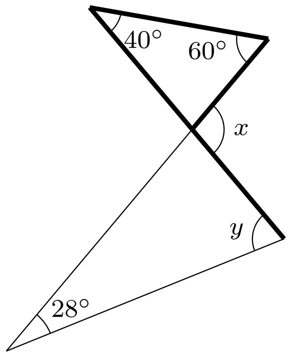
そうすると、右の図で太く描かれたところに注目して「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっている」ということを思い出してみると



$$\angle y = 88^\circ + 30^\circ = 118^\circ$$

ということがわかります。

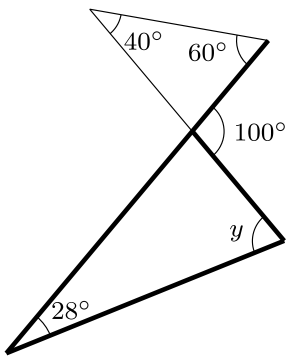
(4) 右の図で太く描かれたところに注目して「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっている」ということを思い出してみると



$$\angle x = 40^\circ + 60^\circ = 100^\circ$$

ということがわかります。

そうすると、右の図で太く描かれたところに注目して「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっている」ということを思い出してみると



$$y + 28 = 100$$

が成り立っていることがわかります。このことから

$$\angle y = 100^\circ - 28^\circ = 72^\circ$$

ということがわかります。

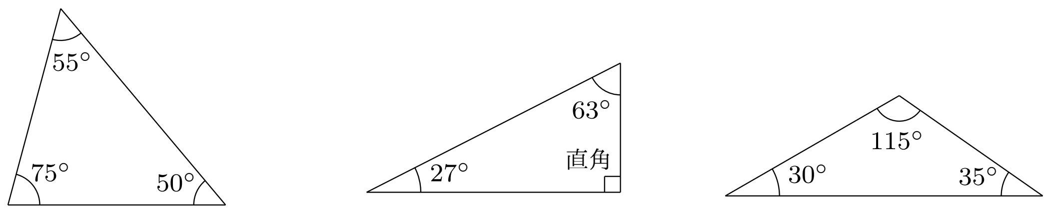
本文へ戻る

問 13. 3 つの内角の大きさがそれぞれ次のようになっている三角形についての問題でしたね。

ア．75°、50°、55°　　　イ．27°、90°、63°　　　ウ．30°、35°、115°

(1) 『分度器や定規を使って、できるだけ正確にア、イ、ウの三角形を描きなさい。』ということでした。大きさは人によっていろいろ違って良いのですが、それぞれの三角形は次のような形になりますね。

ア．75°、50°、55°　　　イ．27°、90°、63°　　　ウ．30°、35°、115°



(2) 『ア、イ、ウの三角形はそれぞれ何三角形の仲間ですか。』ということでした。

アの三角形は 3 つの角が全て鋭角です。ですから鋭角三角形の仲間です。

イの三角形は 1 つの角が直角です。ですから直角三角形の仲間です。

ウの三角形は 1 つの角が鈍角です。ですから鈍角三角形の仲間です。

本文へ戻る

問 14. 3 つの角のうち、2 つの内角の大きさが次のようになっている三角形についての問題でしたね。

(1) 30°、70°　　　(2) 55°、85°　　　(3) 37°、53°　　　(4) 22°、63°

三角形には内角が 3 つあります。この問題には、そのうちの 2 つの内角の大きさしか書いてありません。ですから、残りのもう 1 つの内角の大きさを調べないと何三角形なのか判断できないですよね。

(1) 2 つの内角の大きさが 30°、70° となっているわけですから残りのもう 1 つの内角の大きさは

$$180^\circ - 30^\circ - 70^\circ = 80^\circ$$

ということになります。というわけで、この三角形の 3 つの内角の大きさは

$$30°、70°、80°$$

であることがわかりました。3 つの内角は全て鋭角ですね。ですからこの三角形は鋭角三角形です。

(2) 2 つの内角の大きさが 55°、85° となっているわけですから残りのもう 1 つの内角の大きさは

$$180° - 55° - 85° = 40°$$

ということになります。というわけで、この三角形の 3 つの内角の大きさは

$$55°、85°、40°$$

であることがわかりました。3 つの内角は全て鋭角ですね。ですからこの三角形は鋭角三角形です。

(3) 2 つの内角の大きさが 37°、53° となっているわけですから残りのもう 1 つの内角の大きさは

$$180° - 37° - 55° = 90°$$

ということになります。というわけで、この三角形の 3 つの内角の大きさは

$$37°、53°、90°$$

であることがわかりました。1 つの内角が直角になっています。ですからこの三角形は直角三角形です。

(4) 2 つの内角の大きさが 22°、63° となっているわけですから残りのもう 1 つの内角の大きさは

$$180° - 22° - 63° = 95°$$

ということになります。というわけで、この三角形の 3 つの内角の大きさは

22°、63°、95°

であることがわかりました。1 つの内角が鈍角になっています。ですからこの三角形は鈍角三角形です。

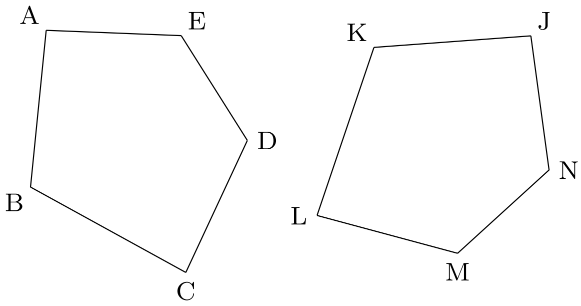
本文へ戻る

問 15. この問題の答えは本文に書いてあります。 本文へ戻る

問 16.

五角形 ABCDE ≡ 五角形 JKLMN

となっている 2 つの五角形についての問題でした。



五角形 ABCDE ≡ 五角形 JKLMN と書いてあるのですから、

頂点 A は頂点 J に対応し、

頂点 B は頂点 K に対応し、

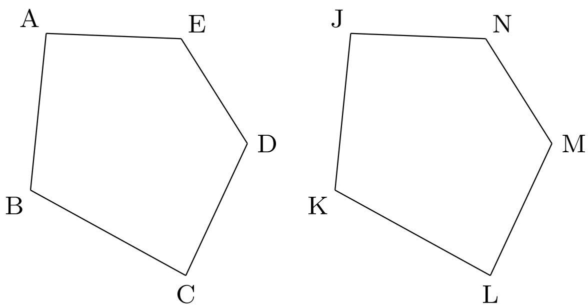
頂点 C は頂点 L に対応し、

頂点 D は頂点 M に対応し、

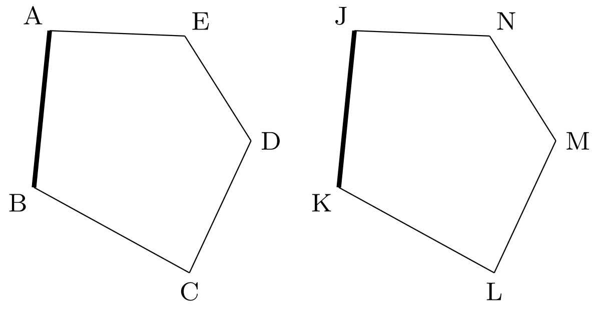
頂点 E は頂点 N に対応している

ということになります。

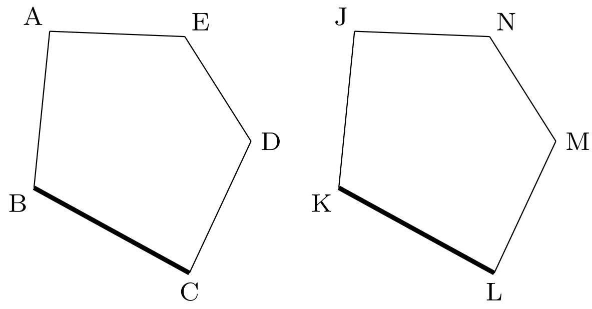
そこで、対応している頂点をわかりやすくするために、五角形 JKLMN を回転して五角形 ABCDE と向きをそろえた図を描いておきます。すると右の図のようになります。この図を見ながら考えることにしましょう。



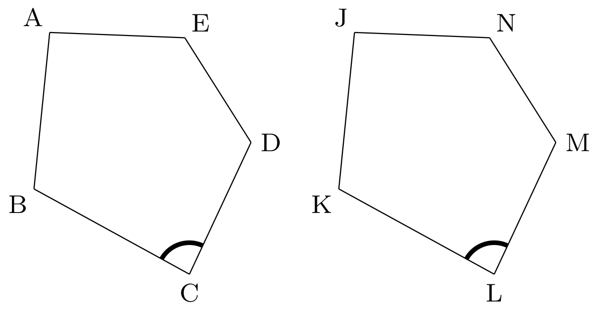
(1) 辺 AB に対応しているのは辺 JK です。



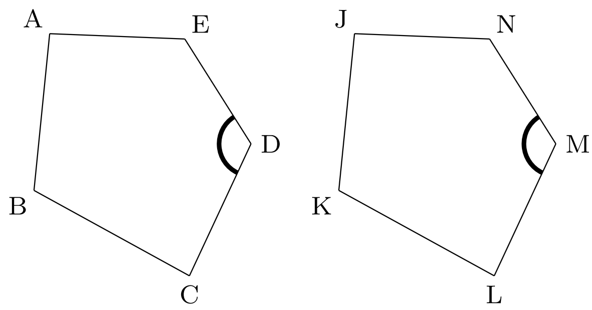
(2) 辺 CB に対応しているのは辺 LK です。（辺 KL ではありません。注意してください。）



(3) ∠C に対応しているのは ∠L です。

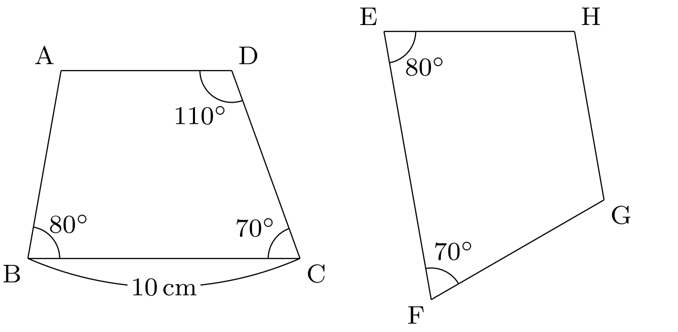


(4) ∠D に対応しているのは ∠M です。



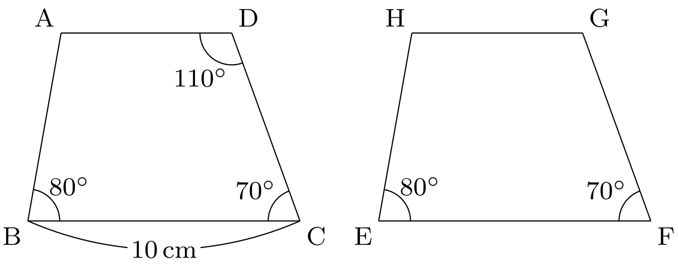
本文へ戻る

問 17. 右の図の合同な 2 つの四角形についての問題でした。



80° の角や 70° の角の頂点の名前を見れば、頂点 B は頂点 E に対応し、頂点 C は頂点 F に対応していることがわかります。ということは、頂点 A は頂点 H に対応し、頂点 D は頂点 G に対応していることになります。

つまり、2 つの四角形の向きをそろえた図を描くと右の図のようになります。この図を見ながら考えることにしましょう。



(1) 「2 つの四角形は合同である」ということを、記号「≡」を使ってあらわすと

$$\text{四角形 ABCD} \equiv \text{四角形 EFGH}$$

となります。

(2) 辺 EF は辺 BC に対応しています。辺 BC の長さは 10 cm なのですから、辺 EF の長さも 10 cm です。

(3) ∠H は ∠A に対応しています。ですから ∠H の大きさは ∠A の大きさと同じです。しかし、まだ ∠A の大きさはわかっていません。そこでまず、∠A の大きさを求めることにしましょう。たしか、四角形の 4 つの内角の和は 360° ですよね。ということは、

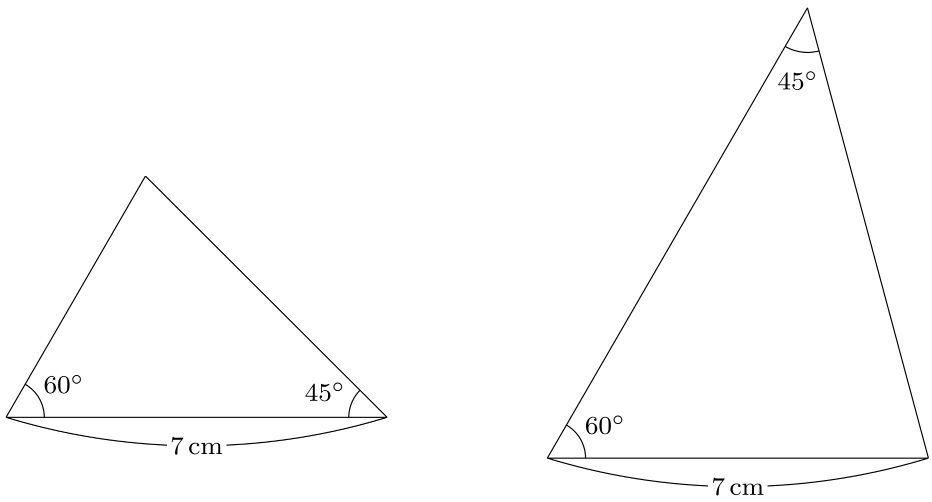
$$\begin{aligned}\angle A &= 360^\circ - \angle B - \angle C - \angle D \\ &= 360^\circ - 80^\circ - 70^\circ - 110^\circ \\ &= 100^\circ\end{aligned}$$

ということになります。

ですから、∠H の大きさも $100°$ です。

本文へ戻る

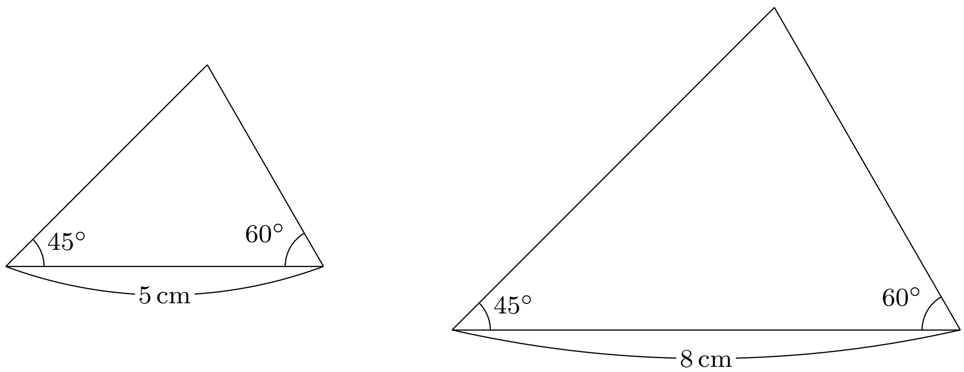
問 18. 「1 辺の長さが 7 cm で、2 つの角の大きさが $60°$ と $45°$ である三角形」で、合同にはならないものを 2 つ以上描くのでしたね。例えば次のようなものがあります。



大きさが決められている 2 つの角は、長さの決められている辺の両端になくても良いので、合同ではない三角形を作ることができるのです。

本文へ戻る

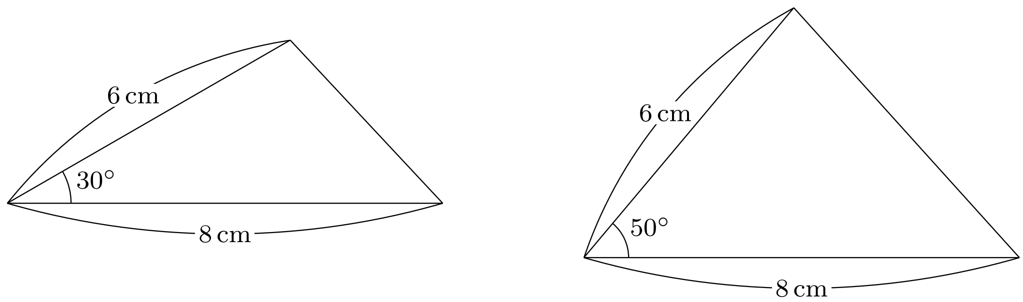
問 19. 「3 つの角の大きさが $45°$、$60°$、$75°$ である三角形」で、合同にはならないものを 2 つ以上描くのでしたね。例えば次のようなものがあります。



辺の長さが 1 つも決められていないので、形は同じでも大きさの違う三角形を作ることができるのです。

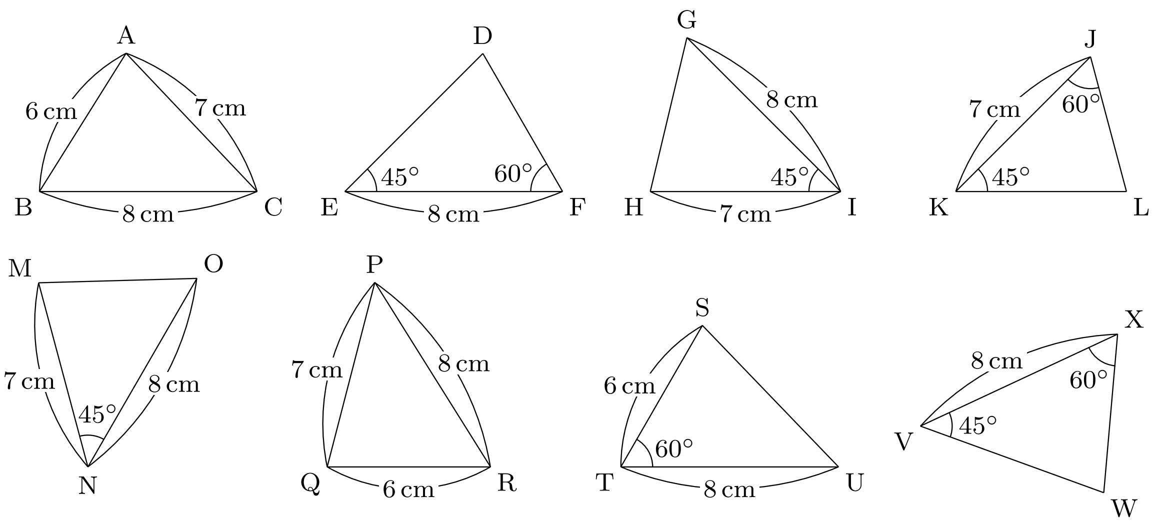
本文へ戻る

問 20. 「2 辺の長さが 6 cm と 8 cm である三角形」で、合同にはならないものを 2 つ以上描くのでしたね。例えば次のようなものがあります。



2 辺の長さは決められていますが、その間の角の大きさが決められていないので合同ではない三角形を描くことができるのです。 本文へ戻る

問 21. 次の図から合同な三角形を見つけ合同の記号「≡」を使って答え、さらに合同であるということを判断するときに使った合同条件も答える問題でしたね。



例題 4 の解答がきちんと理解できた人にはもうくどい説明は必要ないですね。答えだけ書いておきます。

- $\triangle$ABC $\equiv$ $\triangle$QRP

  対応する 3 組の辺の長さがそれぞれ等しくなっている。

- $\triangle$DEF $\equiv$ $\triangle$WVX

対応する 1 組の辺の長さが等しくなっていて、その両端にある 2 組の角の大きさが等しくなっている。

- $\triangle$GHI $\equiv$ $\triangle$OMN

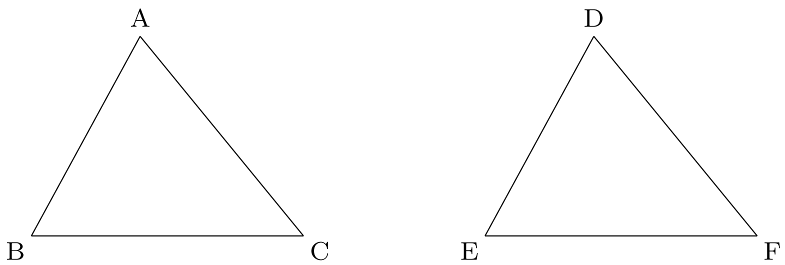
  対応する 2 組の辺の長さがそれぞれ等しくなっていて、その間の角の大きさが等しくなっている。

注意：$\equiv$ マークを使って答えるとき、どの頂点がどの頂点に対応しているのか注意してください。

補足：この問題では $\triangle$JKL に合同な三角形はありません。また。$\triangle$STU に合同な三角形もありません。

本文へ戻る

問 22. 『$\triangle$ABC と $\triangle$DEF があるとします。以下の文の空欄に正しい記号を書きなさい。』という問題でしたね。図を描いてから考えることにしましょう。



(1) $\triangle$ABC と $\triangle$DEF は、AB $=$ DE, AC $=$ DF であることが判明しているとします。あとさらに、角の大きさについて、$\angle\boxed{\text{A}} = \angle\boxed{\text{D}}$ であることが判明すれば、この 2 つの三角形は合同であると断言できます。

(2) $\triangle$ABC と $\triangle$DEF は、BC $=$ EF, $\angle$C $=$ $\angle$F であることが判明しているとします。あとさらに、辺の長さについて、$\boxed{\text{AC}} = \boxed{\text{DF}}$ であることが判明すれば、この 2 つの三角形は合同であると断言できます。

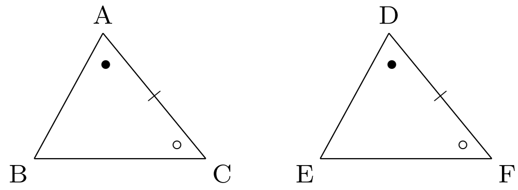
(3) $\triangle$ABC と $\triangle$DEF は、BC $=$ EF, $\angle$B $=$ $\angle$E であることが判明しているとします。あとさらに、角の大きさについて、$\angle\boxed{\text{A}} = \angle\boxed{\text{F}}$ であることが判明すれば、この 2 つの三角形は合同であると断言できます。

本文へ戻る

問 23.

(1) 『△ABC と △DEF は、CA = FD, ∠A = ∠D, ∠C = ∠F であることが判明しているとします。この 2 つの三角形は合同であると断言してよいですか。』という問題でしたね。図を描いて慎重に考えることにしましょう。

右の図を見てください。等しいところに同じマークを付けてみました。



この図を見ると、△ABC と △DEF では

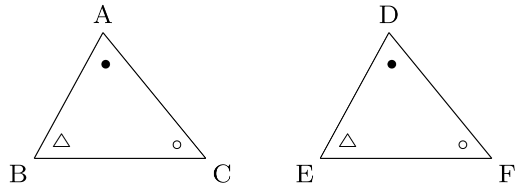
「対応する 1 組の辺の長さが等しくなっていて、その両端にある 2 組の角の大きさが等しくなっている」

ということがわかります。

ですからこの 2 つの三角形は合同であると断言できます。

(2) 『△ABC と △DEF は、∠A = ∠D, ∠B = ∠E, ∠C = ∠F であることが判明しているとします。この 2 つの三角形は合同であると断言してよいですか。』という問題でしたね。図を描いて慎重に考えることにしましょう。

右の図を見てください。等しいところに同じマークを付けてみました。



この図を見ると、△ABC と △DEF では

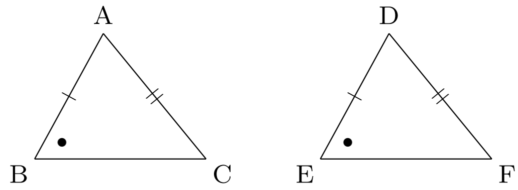
「長さの等しい辺がある保証は何もない」

ということがわかります。

ですからこの 2 つの三角形は合同であると断言できません。

(3) 『△ABC と △DEF は、AB = DE, AC = DF, ∠B = ∠E であることが判明しているとします。この 2 つの三角形は合同であると断言してよいですか。』という問題でしたね。図を描いて慎重に考えることにしましょう。

右の図を見てください。等しいところに同じマークを付けてみました。



この図を見ると、$\triangle$ABC と $\triangle$DEF では

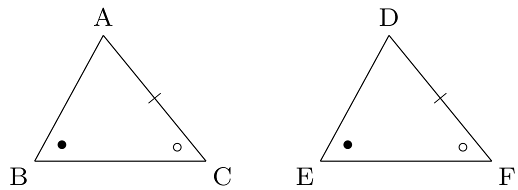
「対応する 2 組の辺の長さは等しくなっていますが、その間にある角の大きさが等しいという保証はない」

ということがわかります。

ですからこの 2 つの三角形は合同であると断言できません。

(4) 『$\triangle$ABC と $\triangle$DEF は、$CA = FD$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ であることが判明しているとします。この 2 つの三角形は合同であると断言してよいですか。』という問題でしたね。図を描いて慎重に考えることにしましょう。

右の図を見てください。等しいところに同じマークを付けてみました。



この図を見ると、$\triangle$ABC と $\triangle$DEF では

「対応する 2 組の角の大きさが等しくなってますが、その間にある辺の長さが等しいという保証はない」

ということがわかります。

ですからこの 2 つの三角形は合同であると断言できません。

本文へ戻る

問 24. 『次の主張の仮定と結論を言いなさい。またその主張は正しいのか正しくないのか考えて答えなさい。ただし、証明はしなくてかまいません。』という問題でした。

「○○○ならば □□□ である。」という主張の ○○○ の部分を**仮定**、□□□ の部分を**結論**と言うのでしたね。つまり「仮に ○○○ だとしたら」という部分が仮定といい、「結局 □□□ となってしまう。」という部分を結論というわけですよね。

(1) $a = 3$ ならば $a^2 = 9$ である。

仮定は「$a = 3$」

結論は「$a^2 = 9$」

です。

この主張は正しい主張です。

(2) x が 9 の倍数ならば x は 3 の倍数である。

仮定は「x が 9 の倍数」

結論は「x は 3 の倍数」

です。

この主張は正しい主張です。

(3) $a = b$ ならば $-4a = -4b$ である。

仮定は「$a = b$」

結論は「$-4a = -4b$」

です。

この主張は正しい主張です。

(4) 合同な 2 つの三角形の面積は等しい。

この主張は「ならば」という言葉を使って

2 つの三角形が合同ならば面積は等しい

と言い換えることができます。ですから

仮定は「2 つの三角形が合同」

結論は「面積は等しい」

です。

この主張は正しい主張です。

(5) 日本に住んでいれば東京に住んでいる。

この主張は「ならば」という言葉を使って

日本に住んでいるならば東京に住んでいる

と言い換えることができます。ですから

仮定は「日本に住んでいる」

結論は「東京に住んでいる」

です。

この主張は正しくない主張です。

(6) 東京に住んでいれば日本に住んでいる。

この主張は「ならば」という言葉を使って

東京に住んでいるならば日本に住んでいる

と言い換えることができます。ですから

仮定は「東京に住んでいる」

結論は「日本に住んでいる」

です。

この主張は正しい主張です。

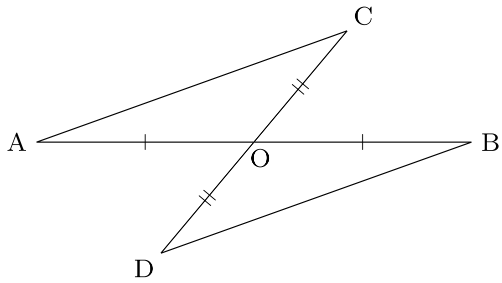
本文へ戻る

問 25. 『2 つの線分 AB と CD がある。線分 AB と線分 CD は交わっているが、それぞれお互いの中点で交わっている。線分 AB と線分 CD の交点を O と呼ぶことにする。

実は、このとき必ず ∠OAC と ∠OBD の大きさは等しくなっているということを、以下の問に答えることによって証明していくことにする。』ということでした。

(1) 『まず、問題文をよく読み、図を描け。』という問題でした。

問題文をよく読んで順番に図を作っていくと右のようになります。



(2) 『この主張の仮定と結論はどんなことですか？きちんと確認しなさい。』という問題でした。

仮定は　AO = BO、CO = DO

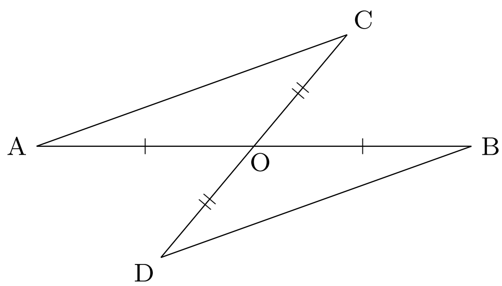
結論は　$\angle$OAC = $\angle$OBD

です。

(3) 『この主張を証明しなさい。』という問題でした。

証明の大まかな方針

右の図を見てください。まず、△AOC と △BOD に注目します。もし、この 2 つの三角形が合同になっている（つまりぴったり重ねることができる）という証拠が見つかれば、$\angle$OAC と $\angle$OBD だってぴったり重なることになるので大きさは等しいと断言できることになります。



（証明）

△AOC と △BOD では、

もともと（つまり、仮定から）

$$\mathrm{AO} = \mathrm{BO} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\mathrm{BO} = \mathrm{CO} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ②$$

が成り立っています。さらに、どんなときでも対頂角は必ず等しくなっているということを思い出すと、

$$\angle\mathrm{AOC} = \mathrm{BOD} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ③$$

が成り立っていると言えます。よって、①、②、③から、$\triangle\mathrm{AOC}$ と $\triangle\mathrm{BOD}$ では「対応する 2 組の辺の長さがそれぞれ等しくなっていて、その間の角の大きさが等しくなっている」ということになるので

$$\triangle\mathrm{AOC} \equiv \triangle\mathrm{BOD}$$

であると断言できます。

ということは、対応している角の大きさも等しいということになるので、

$$\angle\mathrm{OAC} = \angle\mathrm{OBD}$$

と断言できます。

（証明おわり）

本文へ戻る

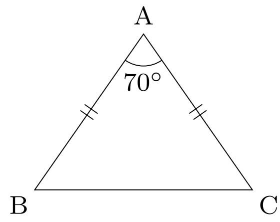
問 26. 『例題 8 がきちんと理解できた人のための問題です。例題 8 の解答では、補助線 2 を使って証明をすることができました。では、補助線 3 を使って証明ができるかどうか考えてください。』という問題でした。

この問題の答えは今は秘密にしておきます。

本文へ戻る

問 27. 三角形の角の大きさを求める問題でした。

(1) 『右の図は AB $=$ AC となっている二等辺三角形です。$\angle$A $= 70^\circ$ のとき、$\angle$C の大きさを求めなさい。』という問題でしたね。



これは AB $=$ AC となっている二等辺三角形なので、前に学んだ二等辺三角形に関する重要な事実を利用すると

$\angle$B と $\angle$C の大きさは等しい

ということがわかりますね。

また三角形の内角の和は 180° であることを思い出すと、$\angle$A は 70° なのですから

$\angle$B と $\angle$C の大きさをたすと 110° になる

ということがわかりますね。

今見つけた 2 つのことをあわせて考えると、

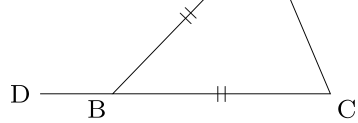
$\angle$B が 2 個分で 110° になる

ということになりますよね。ですから、

$$\angle \mathrm{A} = 110^\circ \div 2 = 55^\circ$$

ということですね。

(2) 『右の図は AB $=$ CB となっている二等辺三角形です。$\angle$A の大きさが 67° のとき、$\angle$B の外角大きさ、つまり $\angle$DBA の大きさを求めなさい。』という問題でしたね。



これは AB $=$ CB となっている二等辺三角形なので、前に学んだ二等辺三角形に関する重要な事実を利用すると

$\angle$A と $\angle$C の大きさは等しい

ということがわかりますね。そうすると

$$\angle\mathrm{A}\text{ の大きさも }\angle\mathrm{C}\text{ の大きさも }67^\circ$$

いうことがわかります。

ところで、$\angle$DBA は $\triangle$ABC の外角です。そこで、どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっているということを思い出すと

$$\angle\mathrm{DBA} = \angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{C} = 67^\circ + 67^\circ = 134^\circ$$

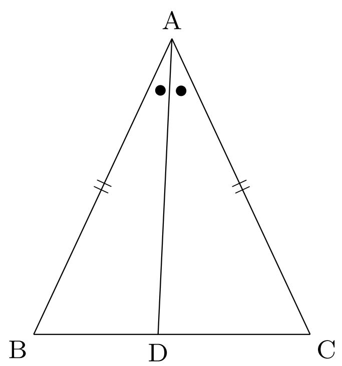
ということがわかりますね。

本文へ戻る

問 28. 『右の図の $\triangle$ABC は AB = AC となっている二等辺三角形です。$\angle$A の二等分線が辺 BC とぶつかる点の名前を D とします。このとき、

$$\mathrm{AD} \perp \mathrm{BC}$$

となってしまうことを証明しなさい。』という問題でしたね。



証明の方針

まず、$\triangle$ABD と $\triangle$ACD に注目します。もし、この 2 つの三角形が合同になっている（つまりぴったり重ねることができる）という証拠が見つかれば、$\angle$BDA と$\angle$CDA だってぴったり重なることになるので大きさはは等しいと断言できることになります。ところで $\angle$BDA と $\angle$CDA を合わせるとまっすぐになっています。同じ大きさの角を合わせてまっすぐ（つまり 180°）になるのですからどちらも 90° であると断言できることになりますね。

（証明）

$\triangle$ABD と $\triangle$ACD に注目してください。

この 2 つの三角形ではもともと（つまり仮定から）

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

$$\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{ACD} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

が成り立っています。

さらに、ちょっと考えてみると、辺 AD はどちらの三角形にも共通な辺ですから、当然長さは同じです。つまり

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AD} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

が成り立っています。

よって、①、②、③より、$\triangle\mathrm{ABD}$ と $\triangle\mathrm{ACD}$ では「対応する 2 組の辺の長さがそれぞれ等しくなっていて、その間の角の大きさが等しくなっている」ことになるので

$$\triangle\mathrm{ABD} \equiv \triangle\mathrm{ACD}$$

であると断言できます。

合同な三角形では対応している角の大きさは同じです。ですから、

$$\angle\mathrm{BDA} = \angle\mathrm{CDA}$$

であると断言できます。ところで $\angle\mathrm{BDA}$ と $\angle\mathrm{CDA}$ を合わせるとまっすぐになっています。同じ大きさの角を合わせてまっすぐ（つまり 180°）になるのですからどちらも 90°、つまり

$$\angle\mathrm{BDA} = \angle\mathrm{CDA} = 90^\circ$$

であると断言できます。ですから、

$$\mathrm{AD} \perp \mathrm{BC}$$

であるということになります。

（証明おわり）

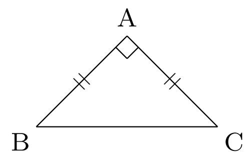
本文へ戻る

問 29. 例題 11 の解答をよく読んで自分一人で証明が書けるようにしておいてください。

本文へ戻る

問 30. 角度を求める問題でした。

(1) 『右の図の三角形は、AB = AC となっている二等辺三角形です。また ∠A = 90° です。∠B の大きさを求めなさい。』ということでしたね。



二等辺三角形では底角は等しくなっています。ですから ∠B と ∠C の大きさは同じです。

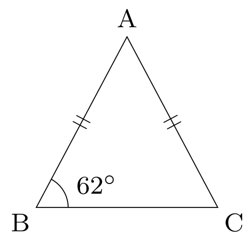
また、どんな三角形でも内角の和は 180° です。∠A は 90° ですから、∠B と ∠C の合計は 90° です。

というわけで、∠B が 2 つ分で 90° ということになります。ですから

$$\angle \mathrm{B} = 90^\circ \div 2 = 45^\circ$$

ということになります。

(2) 『右の図の三角形は、AB = AC となっている二等辺三角形です。また ∠B = 62° です。∠A の大きさを求めなさい。』ということでした。



二等辺三角形では底角は等しくなっています。ですから ∠B と ∠C の大きさは同じです。よって

$$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{C} = 62^\circ$$

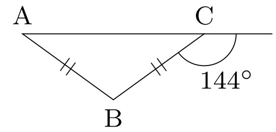
ということになります。

また、どんな三角形でも内角の和は 180° です。ということは

$$\angle A = 180^\circ - 62^\circ - 62^\circ = 56^\circ$$

ということになります。

(3) 『右の図の三角形は、AB = BC となっている二等辺三角形です。また $\angle C$ の外角の大きさは 144° です。$\angle B$ の大きさを求めなさい。』ということでした。



C のところにある $\triangle ABC$ の外角 144° に注目すると

$$\angle ACB = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$$

ということがわかります。

二等辺三角形では底角は等しくなっています。ですから $\angle ACB$ と $\angle CAB$ の大きさは同じです。よって

$$\angle ACB = \angle CAB = 36^\circ$$

ということになります。

どんな三角形でも内角の和は 180° です。ということは

$$\angle B = 180^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 108^\circ$$

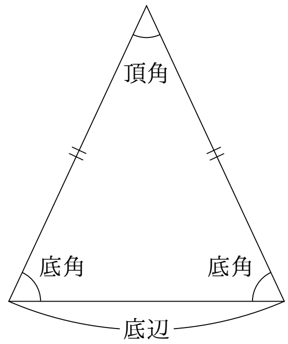
ということになります。

本文へ戻る

問 31. 次のそれぞれの文をよく読んで、述べられていることが正しいのか正しくないのか判断し、理由をつけて答える問題でしたね。

(1) 二等辺三角形の底角の大きさは 90° より大きいことがある。

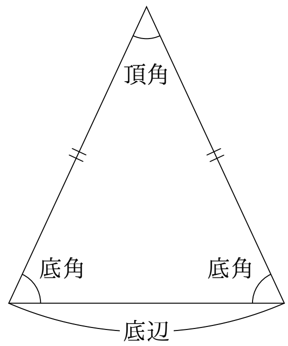
正しくないですよね。



理由：二等辺三角形の底角の大きさは等しいので、もし底角の大きさが 90° より大きかったら 90° より大きい角が 2 つあることになります。そうすると、その 2 つの角だけで合計が 180° より大きくなってしまします。どんな三角形でも 3 つの角を合わせて 180° なのですから、そんなことありえないはずです。

(2) 二等辺三角形の底角の大きさは 90° になることがある。

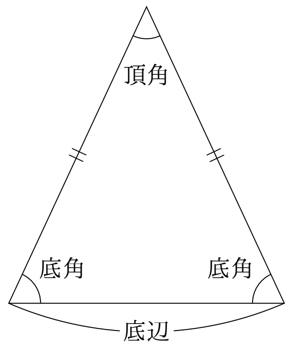
正しくないですよね。



理由：二等辺三角形の底角の大きさは等しいので、もし底角の大きさが 90° だったら 90° の角が 2 つあることになります。そうすると、その 2 つの角だけで合計が 180° になってしまします。どんな三角形でも 3 つの角を合わせて 180° なのですから、そんなことありえないはずです。

(3) 二等辺三角形の底角の大きさは必ず 90° より小さい。

正しいですよね。

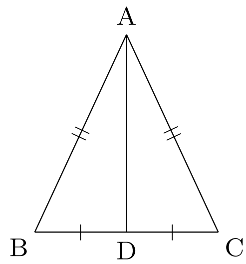


理由：どんな三角形でも「3 つ」の角を合わせて 180° です。頂角の大きさは 0° より大きいのですから、残った 2 つの角（つまり 2 つの底角）の合計は 180° より小さいということになります。ところで、二等辺三角形では底角の大きさは等しいのでした。

ということは底角の大きさは必ず 90° より小さいということになります。

本文へ戻る

問 32. 『右の図の $\triangle$ABC は AB = AC となっている二等辺三角形です。また、点 D は辺 BC の中点（つまり辺 BC の真ん中の点) です。このとき、実は「AD と BC は垂直になっている」ということを証明しなさい。』という問題でした。



証明の方針

まず、$\triangle$ABD と $\triangle$ACD に注目します。もし、この 2 つの三角形が合同になっている（つまりぴったり重ねることができる）という証拠が見つかれば、$\angle$BDA と$\angle$CDA だってぴったり重なることになるので大きさはは等しいと断言できることになります。ところで $\angle$BDA と $\angle$CDA を合わせるとまっすぐになっています。同じ大きさの角を合わせてまっすぐ（つまり 180°）になるのですからどちらも 90° であると断言できることになりますね。

（証明）

$\triangle$ABD と $\triangle$ACD に注目してください。

この 2 つの三角形ではもともと（つまり仮定から）

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ①$$

$$\mathrm{BD} = \mathrm{CD} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ②$$

が成り立っています。

さらに、ちょっと考えてみると、辺 AD はどちらの三角形にも共通な辺ですから、当然長さは同じです。つまり

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AD} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ③$$

が成り立っています。

よって、①、②、③より、△ABD と △ACD では「対応する 3 組の辺の長さがそれぞれ等しくなってる」ことになるので

$$\triangle \mathrm{ABD} \equiv \triangle \mathrm{ACD}$$

であると断言できます。

合同な三角形では対応している角の大きさは同じです。ですから、

$$\angle \mathrm{BDA} = \angle \mathrm{CDA}$$

であると断言できます。ところで ∠BDA と ∠CDA を合わせるとまっすぐになっています。同じ大きさの角を合わせてまっすぐ（つまり 180°）になるのですからどちらも 90°、つまり

$$\angle \mathrm{BDA} = \angle \mathrm{CDA} = 90^\circ$$

であると断言できます。ですから、

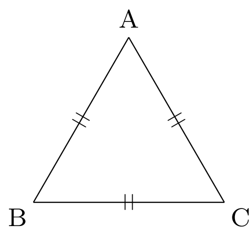
$$\mathrm{AD} \perp \mathrm{BC}$$

であるということになります。

（証明おわり）

本文へ戻る

問 33. 『右の図の △ABC は正三角形です。∠A、∠B、∠C の大きさが何度なのか、きちんと説明をつけて求めることにします。以下の文の空欄に正しい言葉、記号、数を書きなさい。』ということでした。



この問の前に学んだ重要な事実によると、正三角形の 3 つの角の大きさは全て $\boxed{\text{等し}}$ いので、∠A と ∠$\boxed{\mathrm{B}}$ と ∠$\boxed{\mathrm{C}}$ の大きさは全て等しい。一方、どんな三角形でも、3 つの角の大きさをたすと $\boxed{180^\circ}$ になる。ということは、∠A 、∠B、∠C の大きさは $\boxed{180^\circ} \div \boxed{3}$

を計算すると求めることができる。この計算をすると、

$$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{C} = \boxed{60^\circ}$$

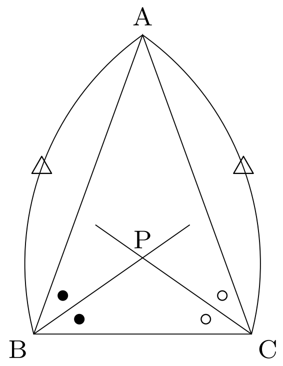
であることがわかる。

本文へ戻る

問 34. 『△ABC があるとします。この △ABC は、AB = AC となっている二等辺三角形です。∠B と ∠C の二等分線をひき、交点の名前を P とします。このとき、△PBC は二等辺三角形であることを証明しなさい。』という問題でしたね。

（証明）

問題をよく読んで図を作ると右のようになります。同じ長さの辺や同じ大きさの角には同じ印を付けておきました。



証明の方針

△PBC で、∠PBC と ∠PCB の大きさが等しいという証拠を見つけることができれば、△PBC では 2 つの角の大きさが等しいということになるので、102 ページの重要な事実により △PBC は二等辺三角形であると断言できます。

（証明）

PB は ∠ABC の二等分線なので

∠PBC の大きさは ∠ABC の大きさの半分

です。

PC は ∠ACB の二等分線なので

∠PCB の大きさは ∠ACB の大きさの半分

です。

ところで $\triangle$ABC は AB = AC となっている二等辺三角形なので

$$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{ACB}$$

であることがわかります。

そうすると、$\angle$ABC や $\angle$ACB を半分にした角どうしの大きさも等しいはずなので

$\angle$PBC と $\angle$PCB の大きさは等しい

ということになります。よって 102 ページの重要な事実により $\triangle$PBC は二等辺三角形であると断言できます。

（証明おわり）

本文へ戻る

問 35. 主張の仮定と結論を入れかえて、新しい主張を作る問題でした。

(1) 「a と b は同じ数であるならば $a+3$ と $b+3$ は同じ数である。」

という主張の仮定と結論を入れかえると

「$a+3$ と $b+3$ は同じ数であるならば a と b は同じ数である。」

となります。

(2) 「$\triangle$ABC と $\triangle$EFG は合同であるならば $\triangle$ABC と $\triangle$EFG の面積は等しい。」

という主張の仮定と結論を入れかえると

「$\triangle$ABC と $\triangle$EFG の面積は等しいならば $\triangle$ABC と $\triangle$EFG は合同である」

となります。

本文へ戻る

問 36. 主張の逆を作り、もとの主張は正しい主張なのか間違っている主張なのか判断し、さらにもとの主張の逆は正しい主張なのか間違っている主張なのか判断するのでしたね。

(1) 「$\triangle$ABC と $\triangle$EFG の面積は等しいならば $\triangle$ABC と $\triangle$EFG は合同である。」

という主張の逆は

「△ABC と △EFG は合同であるならば △ABC と △EFG の面積は等しい。」

です。

もとの主張

「△ABC と △EFG の面積は等しいならば △ABC と △EFG は合同である。」

は正しくない主張です。面積が同じでも形のちがう三角形はいくらでもあります。

もとの主張の逆

「△ABC と △EFG は合同であるならば △ABC と △EFG の面積は等しい。」

は正しい主張です。ぴったり重ねられる 2 つの三角形の面積は同じですから。

(2)　「a と b は偶数であるならば $a + b$ は偶数である。」

という主張の逆は

「$a + b$ は偶数であるならば a と b は偶数である。」

です。

もとの主張

「a と b は偶数であるならば $a + b$ は偶数である。」

は正しい主張です。

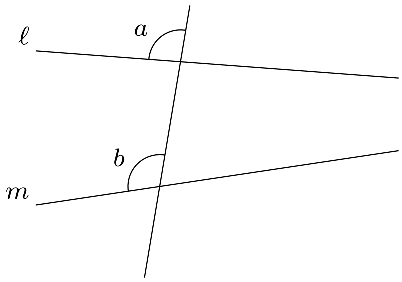
もとの主張の逆

「$a + b$ は偶数であるならば a と b は偶数である。」

は正しくない主張です。この主張は「a と b をたして偶数になっていたら、a も b も偶数だ」と言う主張ですよね。でも、例えば、$a = 1$、$b = 3$ の場合、$a + b$ は偶数であるにもかかわらず、a と b は偶数ではありません。

(3) 右の図で、

「直線 ℓ と直線 m は平行ならば $\angle a$ と $\angle b$ の大きさは等しい。」

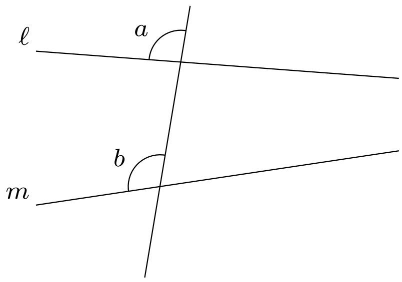


という主張の逆は

右の図で、

「 $\angle a$ と $\angle b$ の大きさは等しいならば直線 ℓ と直線 m は平行である。」

です。



「もとの主張」と「もとの主張の逆」はどちらも正しい主張です。これらは 27 ページの重要な事実で学んだことですね。

(4) 「$\triangle$ABC と $\triangle$EFG は合同であるならば辺 BC と辺 FG の長さは等しい。」

という主張の逆は

「辺 BC と辺 FG の長さは等しいならば $\triangle$ABC と $\triangle$EFG は合同である。」

です。

もとの主張

「$\triangle$ABC と $\triangle$EFG は合同であるならば辺 BC と辺 FG の長さは等しい。」

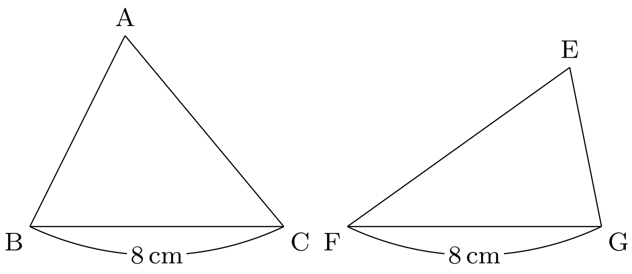
は正しい主張です。合同な三角形では対応している辺の長さは同じに決まっていますよね。

もとの主張の逆

「辺 BC と辺 FG の長さは等しいならば △ABC と △EFG は合同である。」

は正しくない主張です。

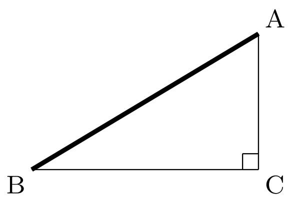
例えば右の図の △ABC と △EFG では、辺 BC と辺 FG の長さは等しくなっていても 2 つの三角形は合同ではありません。



本文へ戻る

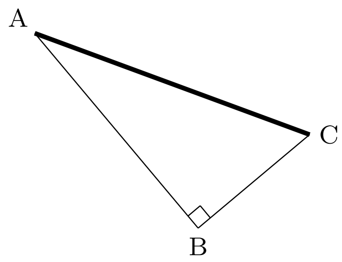
問 37. 『次の図の直角三角形で、斜辺はどれですか。』という問題でした。

(1)



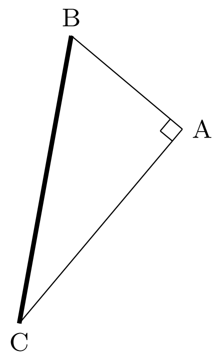
斜辺は辺 AB です。

(2)



斜辺は辺 AC です。

(3)

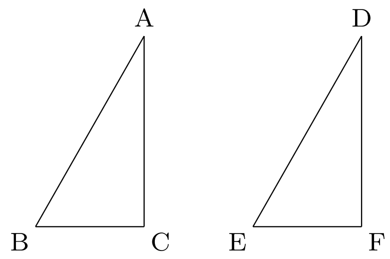


斜辺は辺 BC です。

本文へ戻る

問 38. 『2 つの直角三角形があるとします。実は、この 2 つの直角三角形では、「斜辺の長さは等しく、斜辺とは違う 1 組の辺の長さも等しくなっている」とします。このとき、2 つの直角三角形は合同であるということを、これまでに学んだ三角形の合同条件を使って証明しなさい。

つまり、右の図の $\triangle$ABC と $\triangle$DEF で、もし、



$\angle C = \angle F = 90^\circ$（どちらの三角形も直角三角形ということ）

$AB = DE$（斜辺の長さが等しいということ）

$AC = DF$（斜辺とは違う 1 組の辺の長さが等しいということ）

が成り立っていたら、

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

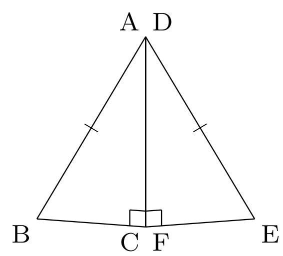
であるということを証明しなさい。』という問題でしたね。そして

『ヒント：$\triangle$DEF を裏返してから 2 つの三角形を辺 AC と辺 DF を張り合わて合体させます。そうすれば、きっと $\angle$B と $\angle$E の大きさは等しいという証拠が見つかるでしょう。』というヒントがありました。

ではヒントをあてにして考えることにしましょう。

（証明）

右の図を見てください。ヒントにしたがって、$\triangle$DEF を裏返してから 2 つの三角形を辺 AC と辺 DF を張り合わて合体させました。



この問題ではもとから、

$\angle C = \angle F = 90^\circ$（どちらの三角形も直角三角形ということ）

$AB = DE$（斜辺の長さが等しいということ）

$AC = DF$（斜辺とは違う 1 組の辺の長さが等しいということ）

が成り立っているので図にもそのことを印を付けてわかるようにしておきました。

ここで大切な注意をしておきます。もとから

$AC = DF$（斜辺とは違う 1 組の辺の長さが等しいということ）

が成り立っているので △ABC と △DEF はぴったりずれることなく AC と DF で貼り合わせることができるのです。しかし、いまのところB と C（F と呼んでも構いません）と E がまっすぐ並んでいる保証はありません。C のところで折れ曲がっているかもしれないのです。もし、B と C と E がまっすぐ並んでいるのだとしても、証拠を見せなくてはいけないのです。このことに注意して、議論を進めていきます。

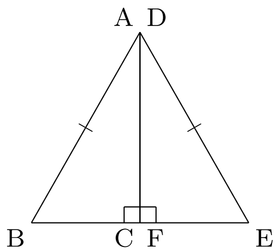
実はちょっと考えるとわかるのですが、B と C と E はまっすぐ並んでいます。どうしてなのかというと、この問題ではもとから

$$\angle \mathrm{BCA} = \angle \mathrm{EFD} = 90^\circ$$

なので、∠BCA と ∠EFD を合わせると 180° になるからです。

これで B と C と E はまっすぐ並んでいる証拠が見つかりました。

B と C と E はまっすぐ並んでいる（つまり C のところで折れ曲がらない）ということは、「2 つの三角形を辺 AC と辺 DF を張り合わて合体させてできた図形」は三角形ということになります。



右の図を見てください。合体させてできた図形は △ABE と呼ぶことができますね。

この問題ではもとから

$$\mathrm{AB} = \mathrm{DE}$$

となっているので △ABE は二等辺三角形であると断言できます。そして △ABE の底角は ∠ABC と ∠DEF です。ということは、二等辺三角形の性質を思い出すと

$$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{DEF}$$

であると断言できます。これは大切な発見です。これでこの問題はほとんど証明できたようなものです。どういうことか説明しましょう。

△ABC と △DEF ではもとから

$$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{DFE}\ (= 90^\circ) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

が成り立っています。そして、さっき

$$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{DEF}$$

が成り立っているということもわかりました。ところでどんな三角形も内角の和は同じです。（まぁ、180° なんですけどね。）いま 3 組ある内角のうち、2 組の内角の大きさが等しいのですから、残りの内角の大きさは等しいということになります。ですから

$$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{EDF} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立っていると断言できます。

△ABC と △DEF ではもとから

$$\mathrm{AC} = \mathrm{DF} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立っています。

よって、①、②、③から、△ABC と △DEF では、「1 組の辺の長さが等しくなっていてその両端にある 2 組の角の大きさも等しくなっている」ということになるので

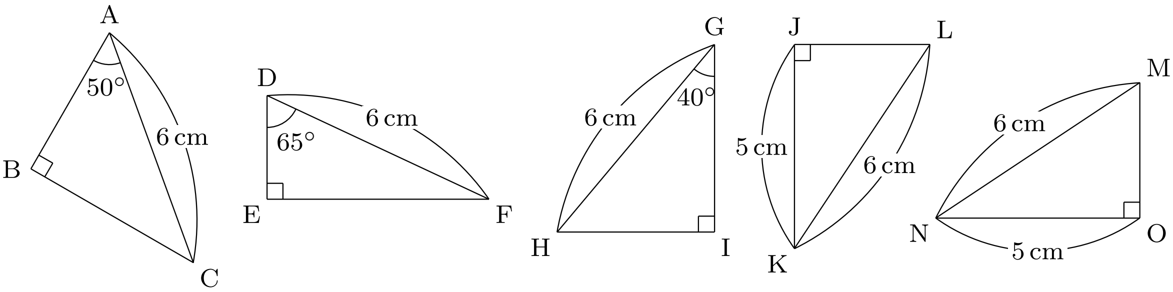
$$\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{DEF}$$

であると断言できます。

（証明おわり）

本文へ戻る

問 39. 『次の図の三角形ではどの三角形とどの三角形が合同になっていると断言できますか。合同であると判断するときに使った合同条件も一緒に答えなさい。』という問題でしたね。



くどいことは言わないで答えだけ書いておきます。

- △ABC と △HIG は合同であると断言できます。

  判断するときに使った合同条件は「この 2 つの直角三角形では、斜辺の長さが等しくなっていて、1 組の鋭角の大きさが等しくなっている」ということです。

- △JKL と △ONM は合同であると断言できます。

  判断するときに使った合同条件は「この 2 つの直角三角形では、斜辺の長さが等しくなっていて、斜辺とは他の 1 組の辺の長さも等しくなっている」ということです。

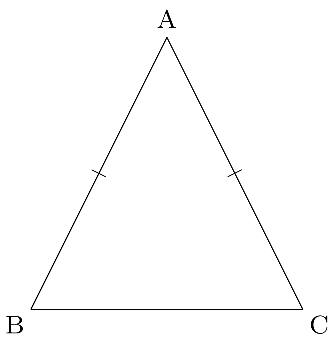
これ以外には合同であると断言できる三角形の組はありません。 本文へ戻る

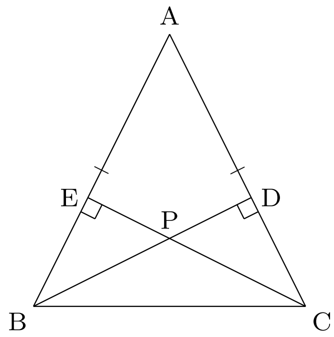
問 40. 『△ABC があり、この三角形は辺 AB と辺 AC の長さが等しくなっている二等辺三角形であるとします。B、C から辺 AC、辺 AB へ向けそれぞれ垂線 BD と垂線 CE を引くことにします。BD と CE の交点を P と呼ぶことにします。このとき、実は △PBC は二等辺三角形であることを証明しなさい。』という問題でしたね。

（証明）

まず。問題文をよく読んで図を描きましょう。

初めに、「△ABC があり、この三角形は辺 AB と辺 AC の長さが等しくなっている二等辺三角形である」と書いてあるのですから右の図のようになります。





次は、「B、C から辺 AC、辺 AB へ向けそれぞれ垂線 BD と垂線 CE を引き、交点を P と呼ぶ」とありますから、右の図のようになります。

B、C から辺 AC、辺 AB へ向けそれぞれ垂線 BD と垂線 CE を引いたのですから、∠BDC や ∠CEB の大きさは 90° です。

これで図は完成しました。そして, この問題は、「このとき、実は △PBC は二等辺三角形であることを証明しなさい。」というものでしたね。では、証明を考えてみることにしましょう。

ところで、ある三角形が二等辺三角形であるということを断言するためには、どんな証拠が見つかればよいでしょうか。それは、前に学んだように、

2 つの辺の長さが等しいという証拠を見つける

か、

2 つの角の大きささが等しいという証拠を見つける

のどちらかのことをすればよいのでしたね。

ですからこの問題では、

辺 PB と辺 PC の長さが等しくなっているという証拠を見つける

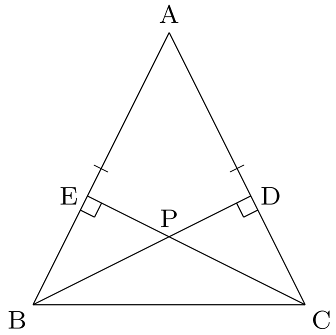
か、

∠PBC と ∠PCB の大きさが等しくなっているという証拠を見つける

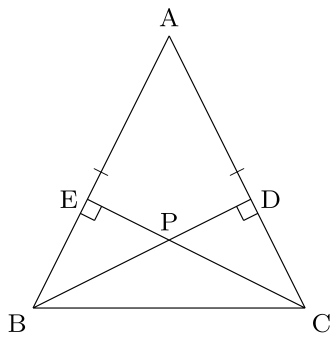
のどちらかのことをすれば、△PBC は二等辺三角形だと断言できますね。さて、どちらの作戦がよいのでしょう。それを決めるためにいつもの手を振り返ってみましょう。いつもの手というのは、「まず証明のために都合のよい 2 つの三角形を決め、次にその 2 つの三角形が合同であるという証拠を何とかして探し、合同なんだから対応している所だってぴったり重なるんだよ。」と話を進めていく方法です。この方法にうまく乗るのはどちら

の作戦でしょうか。図をもう一度見て悩むことにします。ここが一番の腕の見せ所です。

右の図を見てください。さっき作ったこの問題の図をもう一度描いておきました。この図を見ながら、あーでもない、こーでもないといろいろ悩んでみると、「辺 PB と辺 PC の長さが等しくなっているという証拠を見つける」より「∠PBC と ∠PCB の大きさが等しくなっているという証拠を見つける」ほうがうまく行きそうだと思うことでしょう。だって、∠PBC が含まれている三角形と ∠PCB が含まれている三角形はこの図の中にもうありますし（△DBC と △ECB のことですよ）、その 2 つの三角形については色々なことがわかっているからです。というわけで、△DBC と △ECB が合同であるという証拠を探していくことにします。



ここから先はあっさり説明します。



△DBC と △ECB では ∠BDC や ∠CEB の大きさは 90° なので

△DBC と △ECB はどちらも直角三角形　……… ①

です。

この問題では △ABC は AB = AC である二等辺三角形なので、

$$\angle \mathrm{DCB} = \angle \mathrm{EBC} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立っています。

△DBC の辺と △ECB の辺 CB は同じものなので

$$\mathrm{BC} = \mathrm{CB} \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立っています。

①、②、③より 2 つの直角三角形 △DBC と △ECB では「斜辺の長さが等しくなっているということと、1 組の鋭角の大きさも等しくなっている」ことが判明しました。よって

$$\triangle\mathrm{DBC} \equiv \triangle\mathrm{ECB}$$

と断言できます。

合同な図形では対応している角の大きさは同じです。ですから、

$$\angle\mathrm{DBC} = \angle\mathrm{ECB}$$

であると断言できます。そうすると、△PBC の 2 つの角の大きさが等しくなっているということになるので

△PBC は（PB と PC の長さが等しい）二等辺三角形である

と断言できます。

（証明おわり）

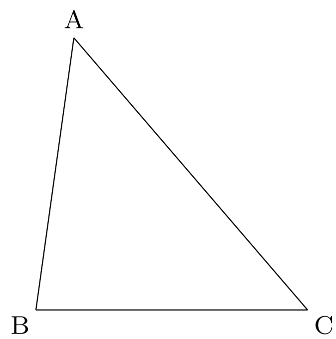
本文へ戻る

問 41. 『△ABC があるとします。辺 BC の中点を M とします。また、頂点 A から M をとおり、さらに果てしなく伸びていく直線を描きます。またさらに、頂点 B、C からこの直線へ向けてそれぞれ垂線 BD、垂線 CE を引きます。このとき、実は BD = CE となっていることを証明しなさい。』という問題でしたね。

（証明）

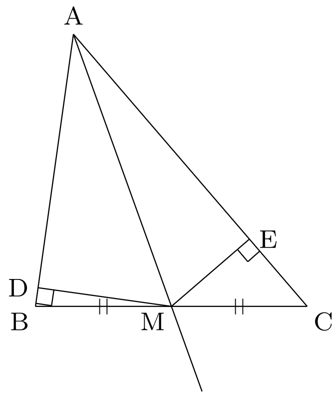
まず。問題文をよく読んで図を描きましょう。

初めに、「△ABC がある」といっているのですから、△ABC を適当に描いておきます。例えば右の図のようになります。



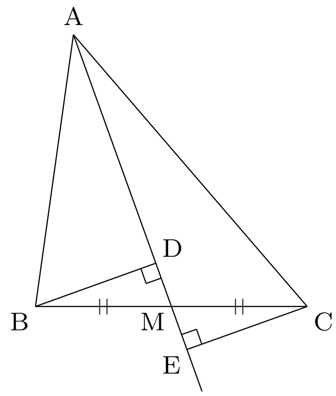
次は、「辺 BC の中点を M とし、頂点 A から M をとおり、さらに果てしなく伸びていく直線を描く」とありますから、右の図のようになります。

M は辺 BC の中点ですから、BM と CM の長さは同じです。



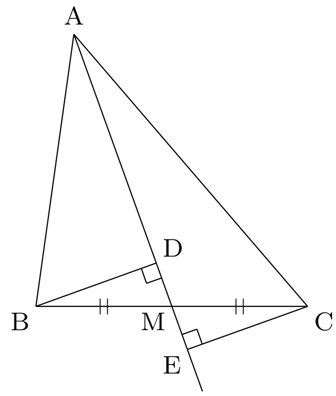
次は、「頂点 B、C からこの直線へ向けてそれぞれ垂線 BD、垂線 CE を引く」とありますから、右の図のようになります。

B、C からこの直線 AM へ向けて垂線を引いたのですから、$\angle$BDM や $\angle$CEM の大きさは $90°$ です。



これで図は完成しました。そして, この問題は、「このとき、実は BD = CE となっていることを証明しなさい。」というものでしたね。では、証明を考えてみることにしましょう。

いつもの方法でいくことにします。つまり、「まず証明のために都合のよい 2 つの三角形を決め、次にその 2 つの三角形が合同であるという証拠を何とかして探し、合同なんだから対応している所だってぴったり重なるんだよ。」と話を進めていく方法です。この問題では $\triangle$BDM と $\triangle$CEM に注目するのが良さそうですよね。



B、C から直線 AM へ向けて垂線を引いたのですから、$\angle$BDM や $\angle$CEM の大きさは 90° です。ですから、

$$\triangle \mathrm{BDM} \text{ と } \triangle \mathrm{CEM} \text{ はどちらも直角三角形} \qquad \cdots\cdots\cdot ①$$

です。

この問題では M は BC の中点ですから

$$\mathrm{BM} = \mathrm{CM} \qquad \cdots\cdots\cdot ②$$

が成り立っています。

どんなときでも対頂角の大きさは等しいのですから

$$\angle \mathrm{DMB} = \angle \mathrm{EMC} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot ③$$

が成り立っています。

①、②、③から 2 つの直角三角形 △BDM と △CEM では「斜辺の長さが等しくなっているということと、1 組の鋭角の大きさも等しくなっている」ことが判明しました。よって

$$\triangle \mathrm{BDM} \equiv \triangle \mathrm{CEM}$$

と断言できます。

合同な図形では対応している辺の長さは同じです。ですから、

$$\mathrm{BD} = \mathrm{CE}$$

であると断言できます。

（証明おわり）

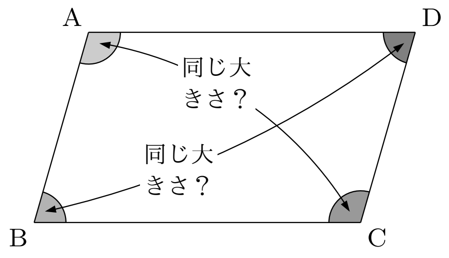
本文へ戻る

問 42. 例題 18 の解答を参考に自分で証明が書けるようにしておいてください。

本文へ戻る

問 43. 『（B さんの意見が正しいかどうか考える問題）

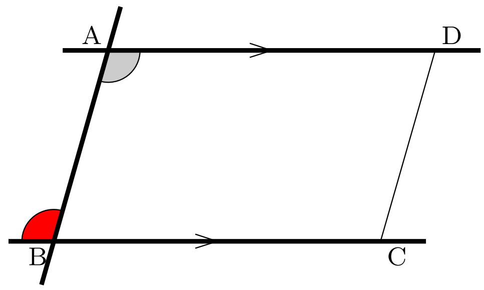
「どんな平行四辺形でも、2 組の向かい合っている角の大きさはそれぞれ等しい」ということが証明できるか考えなさい。



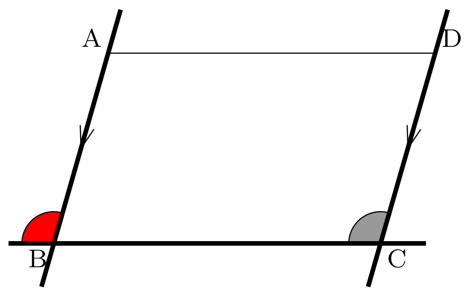
つまり、右の図の四角形 ABCD が平行四辺形が平行四辺形だとしたら、$\angle A = \angle C$、$\angle B = \angle DB$ であるということを証明できるかどうか考えなさい。』という問題でした。

$\angle A$ と $\angle C$ の大きさは同じかどうか悩んでみることにしましょう。

まず右の図を見てください。四角形 ABCD は平行四辺形ですから、AD と BC は平行です。そして平行線では錯角は必ず大きさが等しいのですから、A のところにある灰色の角と B のところにある赤い角は大きさが同じです。



次に右の図を見てください。四角形 ABCD は平行四辺形ですから、AB と CD は平行です。そして平行線では同位角は必ず大きさが等しいのですから、B のところにある赤い角と C のところにある灰色の角は大きさが同じです。

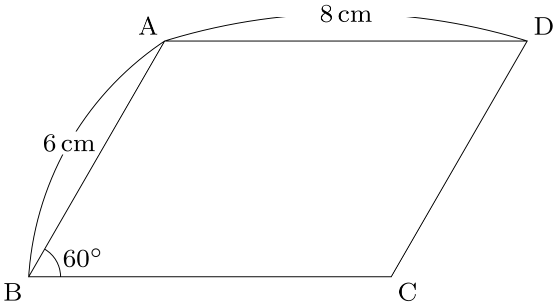


以上のことから、A のところにある灰色の角、B のところにある赤い角、C のところにある灰色の角は全て大きさが等しいということがわかりました。よって $\angle A$ と $\angle C$ の大きさは同じと断言できます。

この考えが納得できた人は、$\angle B$ と $\angle D$ の大きさは同じであるということも説明することが出来ますね。おまかせします。

本文へ戻る

問 44. 右の図の平行四辺形 ABCD についての問題でした。



(1) 『BC、CD の長さを求めなさい。』ということでした。

本文で、平行四辺形には「向かい合っている辺の長さは等しい」という性質があるということを証明しましたよね。ですから、

$$\mathrm{BC} = \mathrm{AD} = 8\,\mathrm{cm}$$

$$\mathrm{CD} = \mathrm{BA} = 6\,\mathrm{cm}$$

ということになります。

(2) 『∠A、∠C、∠D の大きさを求めなさい。』ということでした。

本文で、平行四辺形には「向かい合っている角の大きさは等しい」という性質があるということを証明しましたよね。ですから、まず、

$$\angle \mathrm{D} = \angle \mathrm{B} = 60^\circ$$

ということがわかります。

そうすると、∠B と ∠D の大きさを合わせると 120° ということになります。

どんな四角形でも内角の和は 360° です。ということは

$$\angle \mathrm{A} \text{ と } \angle \mathrm{C} \text{ の大きさの合計} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$$

であることがわかります。

∠A と ∠C は向かい合っている角です。平行四辺形には「向かい合っている角の大

きさは等しい」という性質があります。ということは $\angle \mathrm{A}$ の大きさも $\angle \mathrm{C}$ の大きさも 240° の半分です。つまり、

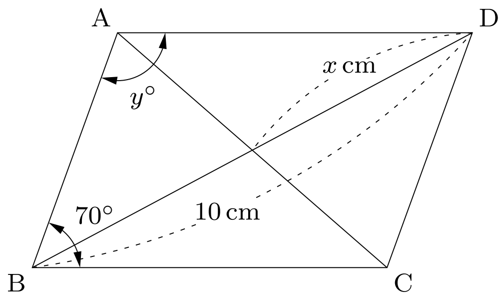
$$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{C} = 240^\circ \div 2 = 120^\circ$$

ということになります。

これで全て解決です。

本文へ戻る

問 45. 『右の図の平行四辺形 ABCD についての問題でした。



(1) 『x の値を求めなさい。』ということでした。

本文で、平行四辺形には「2 つの対角線は必ずそれぞれの中点で交わる」という性質があるということを証明しましたよね。ですから、

$$x = 10 \div 2 = 5$$

ということがわかります。

(2) 『y の値を求めなさい。』ということでした。

本文で、平行四辺形には「向かい合っている角の大きさは等しい」という性質があるということを証明しましたよね。ですから、まず、

$$\angle \mathrm{D} = \angle \mathrm{B} = 70^\circ$$

ということがわかります。

そうすると、$\angle \mathrm{B}$ と $\angle \mathrm{D}$ の大きさを合わせると 140° ということになります。

どんな四角形でも内角の和は 360° です。ということは

$$\angle \mathrm{A} \text{ と } \angle \mathrm{C} \text{ の大きさの合計} = 360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$$

であることがわかります。

$\angle$A と $\angle$C は向かい合っている角です。平行四辺形には「向かい合っている角の大きさは等しい」という性質があります。ということは $\angle$A の大きさも $\angle$C の大きさも 220° の半分です。つまり、

$$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{C} = 220^\circ \div 2 = 110^\circ$$

ということになります。

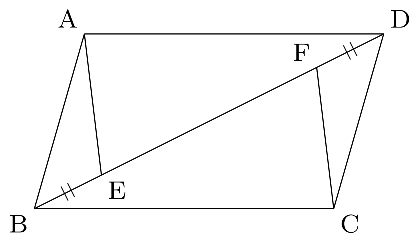
よって

$$y = 110$$

であることがわかりました。

本文へ戻る

問 46. 『平行四辺形 ABCD の対角線 BD 上に 2 つの点 E と F を、BE = DF となるようにとります。このとき、AE の長さと CF の長さは等しいということを証明しなさい。』という問題でした。



（証明）

△ABE と △CDF に注目します。

四角形 ABCD は平行四辺形ですから、向かい合っている辺の長さは同じです。ですから、

$$\mathrm{AB} = \mathrm{CD} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立っています。

四角形 ABCD は平行四辺形ですから、向かい合っている辺 AB と CD は平行です。また、平行線では錯角の大きさは必ず等しくなっています。ということは、

$$\angle \mathrm{ABE} = \angle \mathrm{CDF} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立っています。

この問題では、平行四辺形 ABCD の対角線 BD 上に 2 つの点 E と F を、

$$\mathrm{BE} = \mathrm{DF} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となるようにとりました。

①、②、③より、△ABE と △CDF では「対応する 2 組の辺の長さがそれぞれ等しくなっていて、その間の角の大きさが等しくなっている」ということが判明しました。ですから、

$$\triangle \mathrm{ABE} \equiv \triangle \mathrm{CDF}$$

であると断言できます。

合同な図形では、対応している辺の長さは等しいので

$$\mathrm{AE} = \mathrm{CF}$$

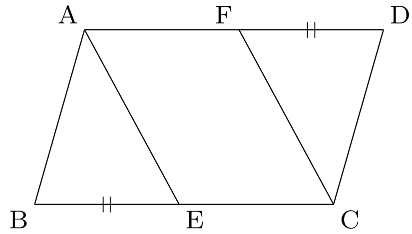
であると断言できます。

（証明おわり）

本文へ戻る

問 47. 『平行四辺形 ABCD の辺 BC 上に点 E をとり、辺 AD 上に点 F をとるのですが、BE = DF となるように E と F をとります。そして A と E をむすび、C と F を結びます。このとき、AE = CF となっていることを証明しなさい。』という問題でしたね。

（証明）



まず、問題文をていねいに読んで図を作ります。すると右の図のようになりますね。

ではいつもの手で証明してみることにしましょう。

△ABE と △CDF に注目します。

四角形 ABCD は平行四辺形なので、向かい合っている辺の長さは同じです。ですから

$$\mathrm{AB} = \mathrm{CD} \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立っています。

四角形 ABCD は平行四辺形なので、向かい合っている角の大きささは同じです。ですから

$$\angle\mathrm{ABE} = \angle\mathrm{CDF} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立っています。

この問題では、点 E と F を、

$$\mathrm{BE} = \mathrm{DF} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となるようにとりました。

①、②、③より、△ABE と △CDF では「対応する 2 組の辺の長さがそれぞれ等しくなっていて、その間の角の大きさが等しくなっている」ということが判明しました。ですから、

$$\triangle\mathrm{ABE} \equiv \triangle\mathrm{CDF}$$

であると断言できます。

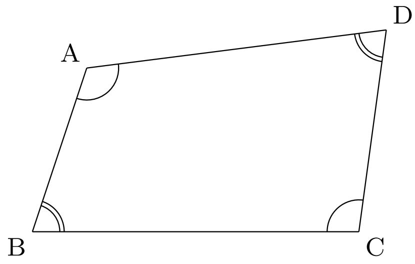
合同な図形では、対応している辺の長さは等しいので

$$\mathrm{AE} = \mathrm{CF}$$

であると断言できます。（証明おわり）

本文へ戻る

問 48. ある四角形で、もし、向かい合っている角の組が 2 組とも等しい大きさになっているということが判明したら、その四角形は平行四辺形であると断言できるという主張、つまり、右の図の四角形 ABCD で、もし、



$$\angle A = \angle C, \quad \angle B = \angle D$$

となっているならば、

四角形 ABCD は平行四辺形である

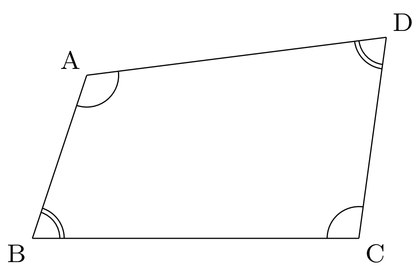
という主張を証明するのですね。

（証明）

そもそも「向かいあっている 2 組の辺がそれぞれ平行になっている」四角形を平行四辺形というのですよね。ですから、何とかして、「四角形 ABCD では、向かいあっている 2 組の辺がそれぞれ平行になっている」証拠を見つけようと思います。

たしか、「同位角の大きさが等しくなっていたら 2 つの直線は平行になっていると断言できる」とか「錯角の大きさが等しくなっていたら 2 つの直線は平行になっていると断言できる」ということでしたね。

まず、問題の図を見てみましょう。

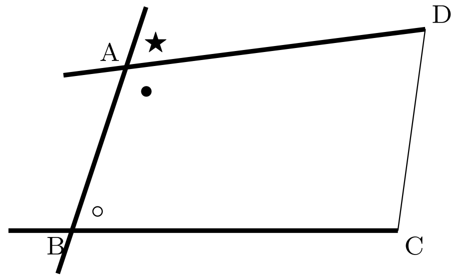


どんな四角形でも内角の和は 360° です。いま、$\angle A = \angle C, \quad \angle B = \angle D$ となっているのですから、$\angle A$ が 2 個分と $\angle B$ が 2 個分あわせると 360° なわけです。ということは $\angle A$ が 1 個分と $\angle B$ が 1 個分で 180°、つまり

$$\angle A + \angle B = 180^\circ \qquad \cdots\cdots ①$$

ということになります。

では右の図を見てください。注目してほしいところを太く描いておきました。また、注目してほしい 3 つの角にそれぞれ、○、●、★ というマークを付けておきました。



①は ○ と ● を合計すると 180° になるということですよね。

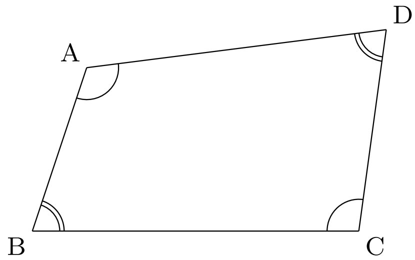
また、★ と ● を合わせるとまっすぐなので ★ と ● を合計すると 180° になります。

ということは ● を ○ にたしても ★ にたしても 180° になるということなのですから、○ と ★ は同じ大きさということになります。そうすると、同位角の大きさが等しといということになるので、

$$\mathrm{AD} \mathbin{/\!/} \mathrm{BC} \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立っていると断言できます。

また問題の図を見てみましょう。

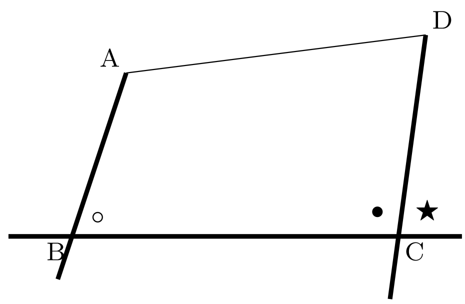


どんな四角形でも内角の和は 360° です。いま、$\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ となっているのですから、$\angle B$ が 2 個分と $\angle C$ が 2 個分あわせると 360° なわけです。ということは $\angle B$ が 1 個分と $\angle C$ が 1 個分で 180°、つまり

$$\angle B + \angle C = 180^\circ \qquad \cdots\cdots ③$$

ということになります。

次に右の図を見てください。注目してほしいところを太く描いておきました。また、注目してほしい 3 つの角にそれぞれ、○、●、★ というマークを付けておきました。



③は ∘ と ● を合計すると 180° になるということですよね。

また、★ と ● を合わせるとまっすぐなので ★ と ● を合計すると 180° になります。

ということは ● を ∘ にたしても ★ にたしても 180° になるということなのですから、∘ と ★ は同じ大きさということになります。そうすると、同位角の大きさが等しといということになるので、

$$\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

が成り立っていると断言できます。

②、④より、四角形 ABCD は「向かいあっている 2 組の辺がそれぞれ平行になっている」ということになるので、

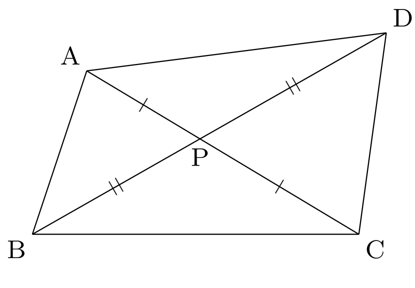
四角形 ABCD は平行四辺形である

と断言できます。

（証明おわり）

本文へ戻る

問 49. ある四角形で、もし、2 つの対角線がそれぞれの中点で交わっているということが判明したら、その四角形は平行四辺形であると断言できるという主張、つまり、右の図の四角形 ABCD で、もし、



$$\mathrm{AP} = \mathrm{CP}, \quad \mathrm{BP} = \mathrm{DP}$$

となっているということが判明したら、

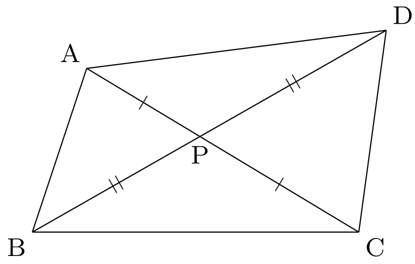
四角形 ABCD は平行四辺形である

という主張を証明するのですね。

（証明）

そもそも「向かいあっている 2 組の辺がそれぞれ平行になっている」四角形を平行四辺形というのですよね。ですから、何とかして、「四角形 ABCD では、向かいあっている 2 組の辺がそれぞれ平行になっている」証拠を見つけようと思います。

たしか、「同位角の大きさが等しくなっていたら 2 つの直線は平行になっていると断言できる」とか「錯角の大きさが等しくなっていたら 2 つの直線は平行になっていると断言できる」ということでしたね。



まず、△APB と △CPD に注目してください。

この問題ではもとから

$$\mathrm{AP} = \mathrm{CP} \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

ということと

$$\mathrm{BP} = \mathrm{DP} \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

ということが成り立っています。

どんなときでも対頂角の大きさは同じなのですから

$$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{CPD} \qquad \cdots\cdots \text{③}$$

が成り立っています。

①、②、③から △APB と △CPD では「対応する 2 組の辺の長さが等しく、その間にある角の大きさも等しい」ということになるので

$$\triangle\mathrm{APB} \equiv \triangle\mathrm{CPD}$$

であると断言できます。

合同な三角形では対応している角の大きさは等しいはずですから

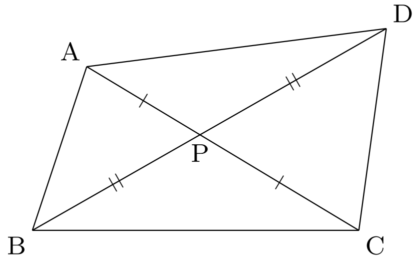
$$\angle\mathrm{BAP} = \angle\mathrm{DCP}$$

が成り立っていると断言できます。そうすると、錯角の大きさが等しいということになるので

$$\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ④$$

であると断言できます。

次は、△APD と △CPB に注目してください。



この問題ではもとから

$$\mathrm{AP} = \mathrm{CP} \qquad \cdots\cdots\cdots \ ⑤$$

ということと

$$\mathrm{DP} = \mathrm{BP} \qquad \cdots\cdots\cdots \ ⑥$$

ということが成り立っています。

どんなときでも対頂角の大きさは同じなのですから

$$\angle\mathrm{APD} = \angle\mathrm{CPB} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ⑦$$

が成り立っています。

①、②、③から △APD と △CPB では「対応する 2 組の辺の長さが等しく、その間にある角の大きさも等しい」ということになるので

$$\triangle\mathrm{APD} \equiv \triangle\mathrm{CPB}$$

であると断言できます。

合同な三角形では対応している角の大きさは等しいはずですから

$$\angle\mathrm{ADP} = \angle\mathrm{CBP}$$

が成り立っていると断言できます。そうすると、錯角の大きさが等しいということになるので

$$AD \parallel BC \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

であると断言できます。

④、⑧より、四角形では「向かいあっている 2 組の辺がそれぞれ平行になっている」ということが判明しました。ですから

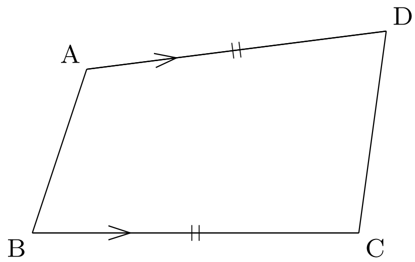
四角形 ABCD は平行四辺形である

と断言できます。

（証明おわり）

本文へ戻る

問 50. ある四角形で、もし、1 組の向かい合う辺が平行になっていて、さらにその 1 組の向かい合う辺の長さも等しくなっているということが判明したら、その四角形は平行四辺形であると断言できるという主張、つまり、右の図の四角形 ABCD で、もし、



$$AD \parallel BC, \quad AD = BC$$

となっているということが判明したら、

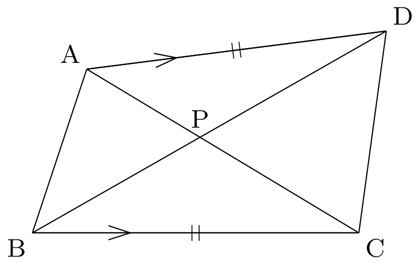
四角形 ABCD は平行四辺形である

と断言できるという主張を証明するのでしたね。

（証明）

問 50 で「ある四角形で、もし、2 つの対角線がそれぞれの中点で交わっているということが判明したら、その四角形は平行四辺形であると断言できる」ということが証明されています。このことを頼りにこの問題を証明してみようと思います。

まず、右の図のように対角線 AC と対角線 BD をひきます。ここでは 2 つの対角線の交点を P と呼ぶことにします。



では、△APD と △CPB に注目してください。

この問題ではもとから AD // BC となっているので、錯角の大きさは等しいはずです。ですから、

$$\angle \mathrm{PAD} = \angle \mathrm{PCB} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ということと

$$\angle \mathrm{PDA} = \angle \mathrm{PBC} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

ということが成り立っています。

この問題ではもとから

$$\mathrm{AD} = \mathrm{CB} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

ということが成り立っています。

①、②、③から △APD と △CPB では「対応する 2 組の角の大きさが等しく、その間にある辺の長さも等しい」ということになるので

$$\triangle \mathrm{APD} \equiv \triangle \mathrm{CPB}$$

であると断言できます。

合同な三角形では対応している辺の長さは等しいはずですから

$$\mathrm{AP} = \mathrm{CP}, \quad \mathrm{DP} = \mathrm{BP}$$

が成り立っていると断言できます。そうすると、四角形 ABCD では 2 つの対角線がそれぞれの中点で交わっているということになるので

四角形 ABCD は平行四辺形である

と断言できます。

（証明おわり）

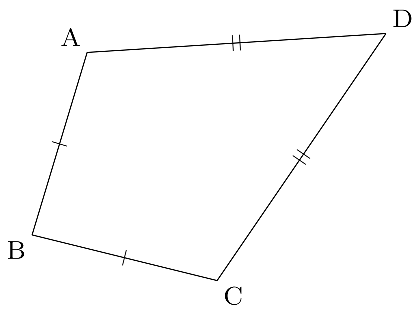
本文へ戻る

問 51. どんな条件が成り立っていたら平行四辺形であると断言できるのか判断する練習をする問題でした。

(1) 『$AB = BC$,　$AD = DC$ となっていたら、四角形 ABCD は平行四辺形であると断言してよいですか？』ということでした。

図を描いて慎重に考えてみましょう。

右の図を見てください。$AB = BC$,　$AD = DC$ となっている四角形 ABCD をかなり正確に描いてみました。どう見てもこれは平行四辺形ではありませんね。ですから、

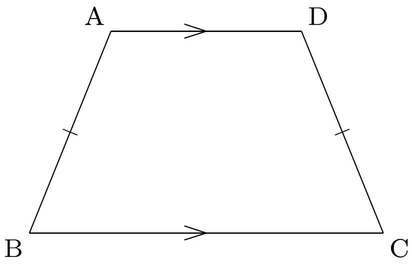


$AB = BC$,　$AD = DC$ となっていても、四角形 ABCD は平行四辺形であると断言できない

ということです。

(2) 『$AB = DC$,　$AD \mathbin{/\!/} BC$ となっていたら、四角形 ABCD は平行四辺形であると断言してよいですか？』ということでしたね。

図を描いて慎重に考えてみましょう。

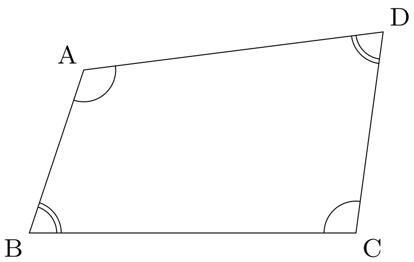


右の図を見てください。AB ＝ DC,　AD // BC となっている四角形 ABCD をかなり正確に描いてみました。どう見てもこれは平行四辺形ではありませんね。ですから、

> AB = DC,　AD // BC となっていても、四角形 ABCD は平行四辺形であると断言できない

ということです。

(3) 『∠A = ∠C,　∠B = ∠D となっていたら、四角形 ABCD は平行四辺形であると断言してよいですか？』ということでしたね。



右の図を見てください。∠A ＝ ∠C,　∠B ＝ ∠D となっている四角形 ABCD をいかげんに描いてみました。この図を見るとこの四角形は平行四辺形には見えませんが、実は平行四辺形です。なぜかというと、この四角形では「向かい合っている角の組が 2 組とも等しい大きさになっている」からです。（問 48 で「重要な事実：平行四辺形であると断言するために使える証拠その 3」を証明しましたよね。）つまり、

> ∠A = ∠C,　∠B = ∠D となっていたら、四角形 ABCD は平行四辺形であると断言してよい

ということです。

図を「いいかげん」に描いたので平行四辺形には見えないだけなのです。

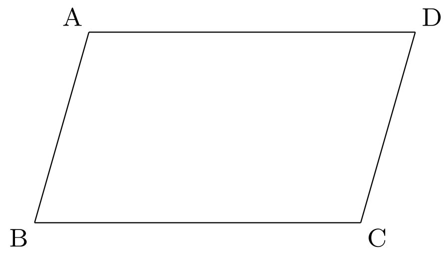
本文へ戻る

問 52. 『平行四辺形 ABCD があるとします。辺 AD と辺 BC の中点を、それぞれ M、N と呼ぶことにします。M と B を結び、D と N を結ぶと四角形 MBND ができます。このとき実は、四角形 MBND は平行四辺形になってしまうことを証明しなさい。』という問題でした。

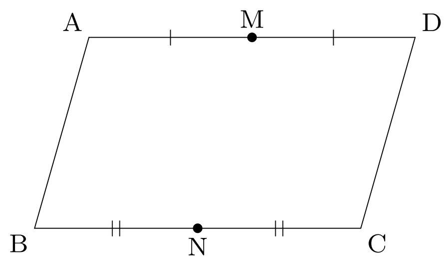
（証明）

まず、問題文をよく読んで図を作りましょう。

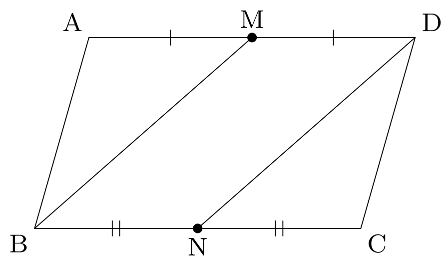
「平行四辺形 ABCD がある」ので、とりあえず右の図ようになります。



次は、「辺 AD と辺 BC の中点を、それぞれ M、N と呼ぶ」ので、右の図のようになります。



最後に「M と B を結び、D と N を結ぶと四角形 MBND ができる」ので、右の図のようになります。これで図は完成です。



四角形 ABCD は平行四辺形なので、向かい合う辺である AD とは平行です。ですから、当然

四角形 MBNC の辺 MD と辺 BN は平行である ······ ①

と断言できます。

四角形 ABCD は平行四辺形なので、向かい合う辺である AD と BC の長さは同じです。また、M は AD の中点なので MD の長さは AD の半分、N は BC 中点なので BN の長さは BC の半分です。ということは

四角形 MBNC の辺 MD と辺 BN の長さは同じ ⋯⋯ ②

と断言できます。①、②より、「四角形 MBNC では、1 組の向かい合う辺が平行になっていて、さらにその 1 組の向かい合う辺の長さも等しくなっている」ということが判明しました。ですから

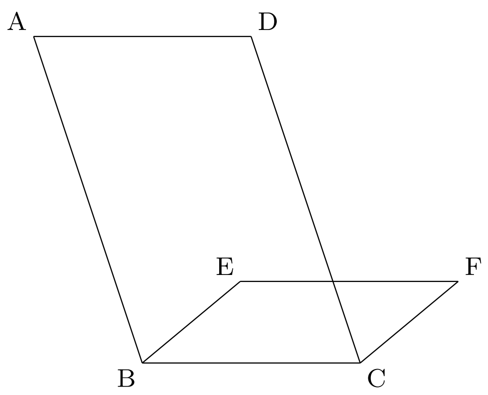
四角形 MBNC は平行四辺形である

と断言できます。

（証明おわり）

本文へ戻る

問 53. 『右の図は 1 つの平面の上に 2 つの平行四辺形 ABCD と平行四辺形 EBCF を描いたものです。以下の問に答えなさい。』ということでしたね。



(1) 『AD と EF の長さは同じであるということを証明しなさい。』という問題でした。

（証明）

四角形 ABCD は平行四辺形ですから向かい合う辺の長さは同じはずです。ですから

$$AD = BC \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立っています。

四角形 EBCF は平行四辺形ですから向かい合う辺の長さは同じはずです。ですから

$$\mathrm{BC} = \mathrm{EF} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

が成り立っています。

①、②より

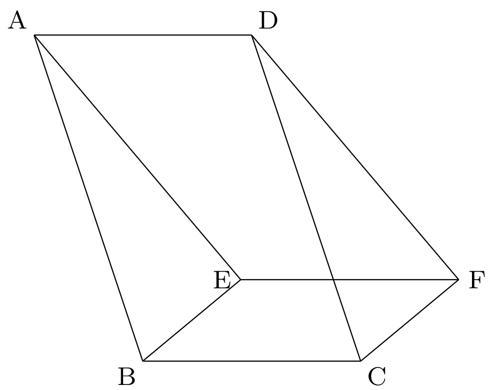
$$\mathrm{AD} = \mathrm{EF}$$

であると断言できます。

（証明おわり）

(2) 『A と E を結び、D と F を結ぶと四角形 AEFD ができます。四角形 AEFD は平行四辺形であるということを証明しなさい。』という問題でしたね。

（証明）



A と E を結び、D と F を結ぶと右の図のようになります。

四角形 ABCD は平行四辺形ですから向かい合う辺は平行なはずです。ですから

$$\mathrm{AD} \parallel \mathrm{BC} \qquad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

が成り立っています。

四角形 EBCF は平行四辺形ですから向かい合う辺は平行なはずです。ですから

$$\mathrm{BC} \parallel \mathrm{EF} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

が成り立っています。

①、②より

$$AD \parallel EF \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

であると断言できます。

(1) で

$$AD = EF \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

であることが判明しています。

ということは③、④より、「四角形 AEFD では 1 組の向かい合う辺が平行になっていて、さらにその 1 組の向かい合う辺の長さも等しくなっているということが判明した事になります。ですから

四角形 AEFD は平行四辺形である

と断言できます。

（証明おわり）

本文へ戻る

問 54. 「長方形の定義」、「ひし形の定義」、「正方形の定義」が理解できているかどうか確認する問題ですね。

(1) 『もし、$AB = BC = CD = DA$ となっていたら、この四角形は何と呼ばれますか。』という問題でしたね。

4 つの辺の長さが全て等しくなっているのですから、この四角形は「ひし形」と呼ばれることになりますね。

(2) 『もし、$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$ となっていたら、この四角形は何と呼ばれますか。』という問題でした。

4 つの角の大きさが全て等しくなっているのですから、どの角の大きさも 90° のはずです。ですからこの四角形は「長方形」と呼ばれることになりますね。

(3) 『もし、AB = BC = CD = DA となっていて、さらに、AB = BC = CD = DA = 90° となっていたら、この四角形は何と呼ばれますか。』という問題でしたね。

4 つの辺の長さが全て等しくなっているだけではなく、4 つの角の大きさが全て 90° になっているのですから、この四角形は「正方形」と呼ばれることになりますね。

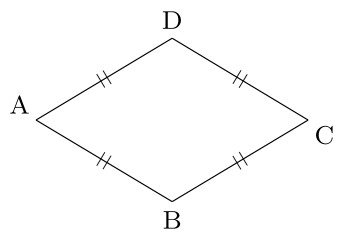
(4) 『もし、AD // BC となっていて、さらに AB // DC となっていたら、この四角形は何と呼ばれますか。』という問題でしたね。

向かい合う 2 組の辺がそれぞれ平行になっているのですから、この四角形は「平行四辺形」と呼ばれることになりますね。

本文へ戻る

問 55. 『実は、ひし形は平行四辺形の仲間であるということを証明しなさい。』という問題でしたね。

（証明）



そもそも、「4 つの辺の長さが全て等しくなっている四角形」を ひし形と呼ぶのでした。ですからひし型では、当然、向かい合っている辺の組は 2 組とも等しい長さになっています。ところで、「向かい合っている辺の組が 2 組とも等しい長さになっている」ということが判明したら、その四角形は平行四辺形であると断言してよいのでしたね。ですからひし型は平行四辺形の仲間であると言えます。

（証明おわり）

本文へ戻る

問 56. 「長方形の定義」、「ひし形の定義」、「正方形の定義」が理解できているかどうか確認する問題ですね。

(1) 長方形の定義を正確に言うのでしたね。

長方形とは、「4 つの角が全て直角（つまり 90°）になっている四角形」のことです。

(2) ひし形の定義を正確に言うのでしたね。

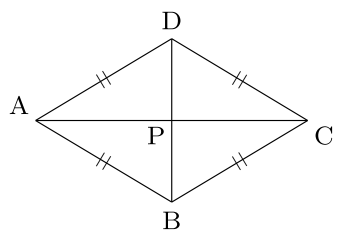
ひし型とは、「4 つの辺の長さが全て等しくなっている四角形」のことです。

(3) 『この世の中には、「長方形である」とも言えるし、「ひし形である」とも言える四角形があります。そのような四角形は何と呼ばれるのですか。』という問題でした。そのような四角形は正方形と呼ばれます。

本文へ戻る

問 57. 『一般に、平行四辺形では、2 つある対角線の長さは必ずしも垂直には交わりませんよね。ですが、平行四辺形の特別なものであるひし形は、2 つの対角線は必ず垂直に交わるのです。証明しなさい。』という問題でした。

（証明）



右の図を見てください。ひし形 ABCD とその対角線 AC、BD を描いておきました。またこの図では 2 つの対角線の交点を P と呼ぶことにします。

これから私たちは、右のひし形で AC と BD が垂直になっている証拠を見つければ良いわけです。

△APD と △CDP に注目してください。

四角形 ABCD はひし形ですから 4 つの辺の長さは全て同じです。ですから当然

$$AD = CD \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立っています。

ひし形は平行四辺形の仲間ですから、2 つの対角線はそれぞれの中点で交わります。ですから

$$AP = CP \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立っています。

△APD の辺 DP と △CDP の辺 DP は同じものです。ですから当然

$$\mathrm{DP} = \mathrm{DP} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立っています。

①、②、③から、△APD と △CDP では「対応している 3 組の辺の長さがそれぞれ等しい」ということになるので、

$$\triangle\mathrm{APD} \equiv \triangle\mathrm{CDP}$$

であると断言できます。合同な図形では対応している角の大きさは等しいはずなので

$$\angle\mathrm{APD} = \angle\mathrm{CPD} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

であると断言できます。

ところで ∠APD と ∠CPD を合わせるとまっすぐになっています。ということは

$$\angle\mathrm{APD}\ と\ \angle\mathrm{CPD}\ の合計は\ 180^\circ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

ということになります。そうすると、④と⑤から

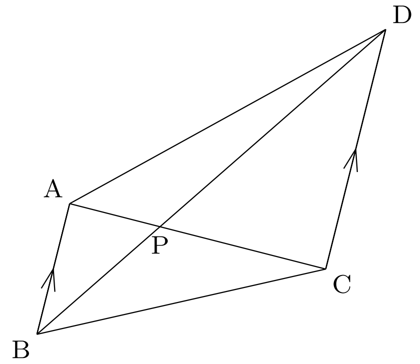
$$\angle\mathrm{APD} = \angle\mathrm{CPD} = 90^\circ$$

であると断言できます。これは AC と BD が垂直になっているということを意味しています。

（証明おわり）

本文へ戻る

問 58. 『右の図の四角形 ABCD では辺 BA と辺 CD は平行になっています。また、四角形 ABCD の 2 つの対角線の交点を P としました。この図の中に、面積の同じ三角形がいくつか隠れています。どの三角形とどの三角形の面積が同じになっているのか、あるだけ全部答えなさい。』という問題でしたね。

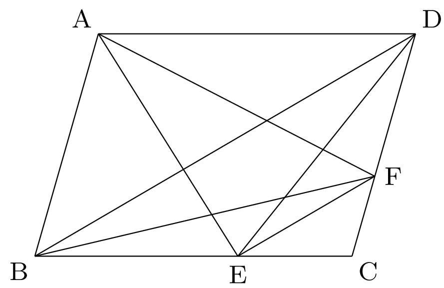


例題 27 の解答がきちんと理解できた人のために答えだけ書いておきます。

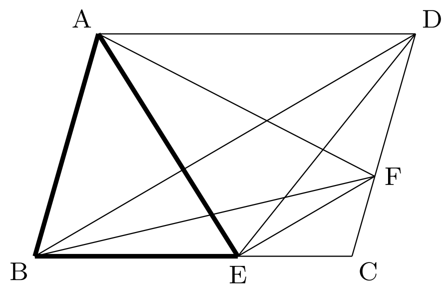
- △ABC と △ABD の面積は同じです。
- △BCD と △ACD の面積は同じです。

本文へ戻る

問 59. 『右の図の四角形 ABCD は平行四辺形であるとします。また、この図の線分 EF は平行四辺形 ABCD の対角線 BD と平行になっているとします。では、この図の中にある △ABE に注目してください。この図の中には △ABE と面積の等しい三角形がいくつか隠れているのですが、あるだけ全部見つけてください。』という問題でした。

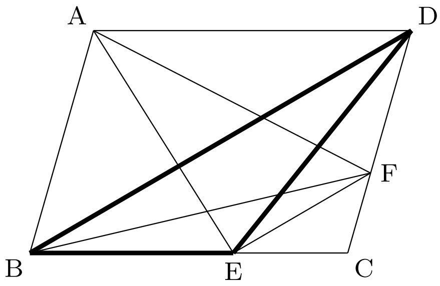


まず、△ABE の頂点を向かい合う辺に平行に移動して面積が同じになる三角形を探します。



- 頂点 A を移動することにより面積が同じになる三角形としては △BDE がありますね。
- 頂点 B を移動することにより面積が同じになる三角形はありません。
- 頂点 E を移動することにより面積が同じになる三角形はありません。

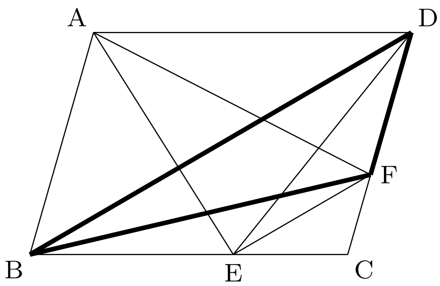
よってまずひとつ、△BDE が見つかりました。



次は △BDE の頂点を向かい合う辺に平行に移動して面積が同じになる三角形を探します。

- 頂点 B を移動することにより面積が同じになる三角形はありません。
- 頂点 D を移動することにより面積が同じになる三角形としては △ABE がありますが、これはいまさら答えに入れる必要はありませんね。
- 頂点 E を移動することにより面積が同じになる三角形としては △BFD があります。

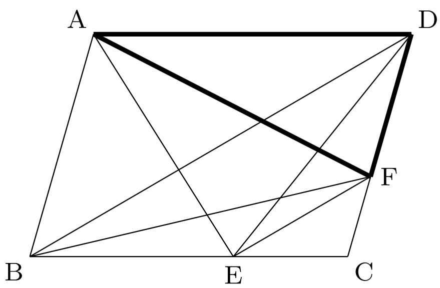
またひとつ、面積の等しい三角形 △BFD が見つかりました。



次は △BFD の頂点を向かい合う辺に平行に移動して面積が同じになる三角形を探します。

- 頂点 B を移動することにより面積が同じになる三角形としては △AFD があります。
- 頂点 F を移動することにより面積が同じになる三角形としては △BEF がありますが、これはいまさら答えに入れる必要はありませんね。
- 頂点 D を移動することにより面積が同じになる三角形はありません。

またひとつ、面積の等しい三角形 △AFD が見つかりました。



次は △AFD の頂点を向かい合う辺に平行に移動して面積が同じになる三角形を探します。

- 頂点 A を移動することにより面積が同じになる三角形としては △BFD がありますが、これはいまさら答えに入れる必要はありませんね。

- 頂点 F を移動することにより面積が同じになる三角形はありません。
- 頂点 D を移動することにより面積が同じになる三角形はありません。

もう、面積の等しい三角形は見つかりませんでした。ですから以上で調査は全て終了です。

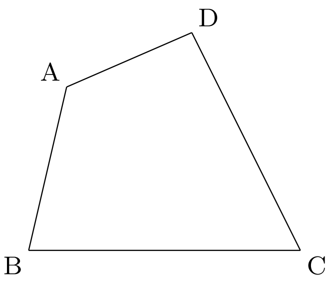
よって、この問題の答え、つまり、△ABE と面積の等しい三角形は

△BDE、△BFD、△AFD

ということになります。 本文へ戻る

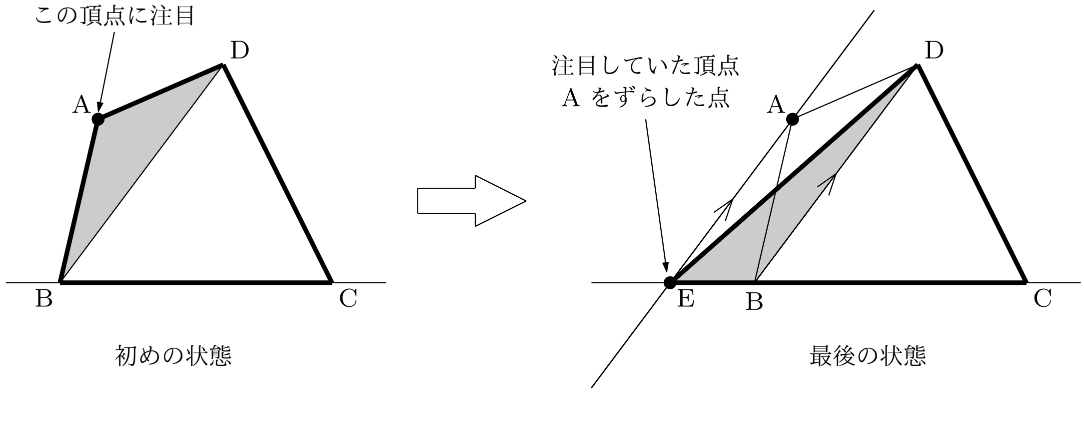
問 60. 例 4 がよく理解できた人のための問題でした。

(1) 『右の図の四角形 ABCD を面積を変えないで三角形に変えようと思います。ただし、四角形 ABCD の頂点 A を通る直線をうまい向きに描き、その直線の上のどこかに頂点 A をずらすことにより新しい頂点を見つけて三角形を作ってください。』ということでしたね。



頂点 A を通る直線を使うのですから、次のような 2 通りの方法があります。

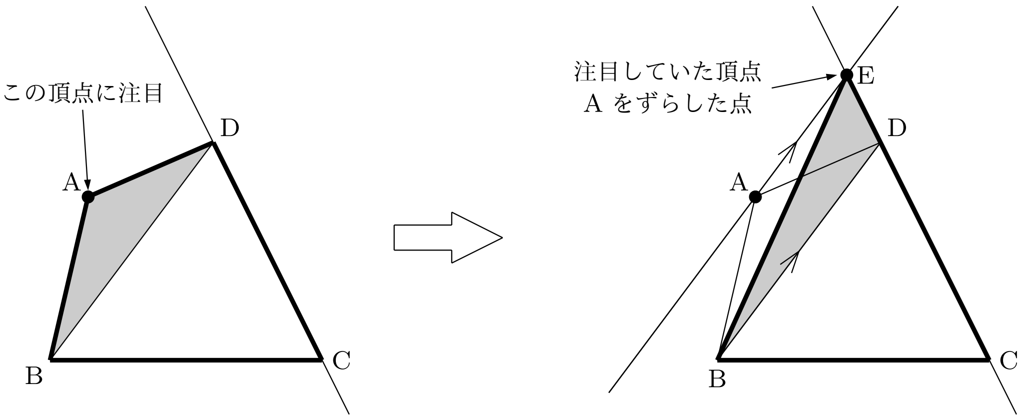
方法 1



初めの状態　　最後の状態

このようにして、四角形 ABCD を、面積を変えないで、三角形DEC にすることができます。

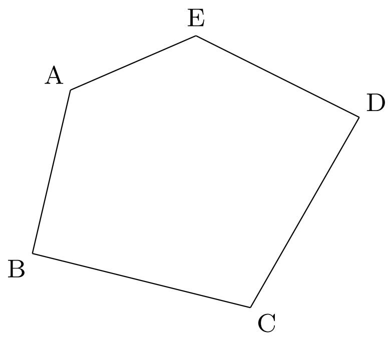
方法 2



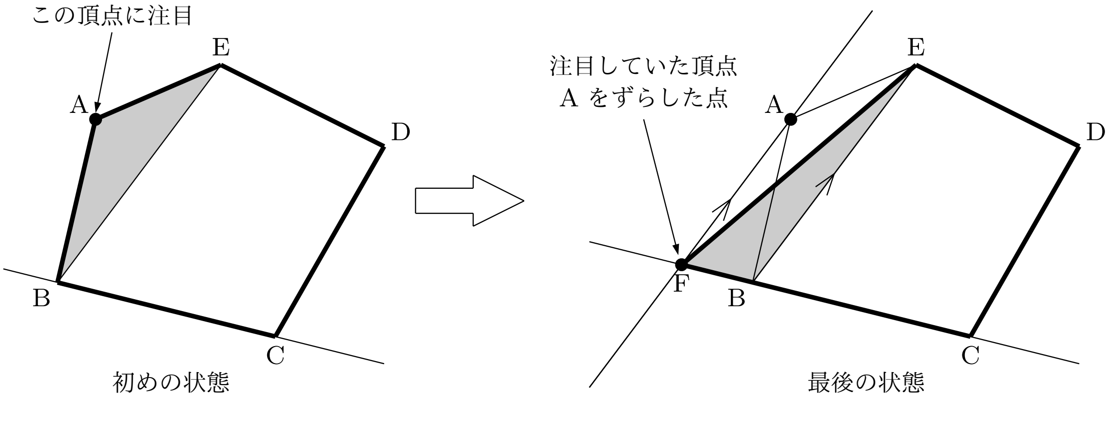
初めの状態　　　　　最後の状態

このようにして、四角形 ABCD を、面積を変えないで、三角形EBC にすることができます。

(2) 『右の図の五角形 ABCDE を面積を変えないで四角形に変えようと思います。ただし、五角形 ABCDE の頂点 C を通る直線をうまい向きに描き、その直線の上のどこかに頂点 A をずらすことにより新しい頂点を見つけて四角形を作ってください。』という問題でしたね。



次のような方法があります。



初めの状態　　　　　最後の状態

このようにして、五角形 ABCDE を、面積を変えないで、四角形FCDE にすることができます。

本文へ戻る