円周角の定理

2015 年 2 月 12 日

目次

このテキストの使いかた

日頃の学習では・・・

- テキストをていねいに読んでいきましょう。

  このテキストは、きちんと言葉を使っててていねいな説明が書かれています。記号や数式が並んでいるだけの、意味不明のものではありません。ひとことひとこと言葉を大切にして、解き方ではなく考え方を学び取るようにしてください。そして、書いてあることに対して、「あーそういうことか」とか「えーよくわからない」とか「これ、ちがうんじゃないの？」といった反応をしてください。数学は自分の頭を使って考えていく科目ですから立ち止まって考えることがとても大切なのです。

- テスト直前に勉強を始めるのではなく、テストで力を発揮できるように前もって準備をしておきましょう。

  数学のように、自分の頭を使って「あーでもない、こーでもない」と考えながら学んでいく科目では、学習を始めてからしばらくの間はなかなか成果が出ない事があります。しかし少し我慢をして学習を続けていくうちに、あるとき、驚くような力が付いていることに気づくことがあります。 つまり、実力は初めのうちはゆっくり伸びていき、あとからぐんと伸びることが多いのです。

- 例題を学ぶときには、解答を読む前に、できればまず自分の力で解くことができるかどうか試してみましょう。

  数学の学習では、誰かから教わっただけのことよりも自分で悩んで考えたことの

ほうがよく身につきます。紙と筆記用具を使って実際に答案を書いてみてください。それができたらテキストの解答をていねいに読んで自分の考えと比べてみましょう。

- 例題の学習ができたら、この問題がテストに出ても自分の力だけで解けるかどうか想像してみましょう。そして心配なものには印を付けておきましょう。

  日頃から自分の実力をつかんでおくとテスト対策がしやすくなります。

- 問はもちろん、まず自分の力で解くことができるかどうか試してみてください。

  紙と筆記用具を使って実際に答案を書いてみてください。それができたらテキストの解答をていねいに読んで自分の考えと比べてみましょう。そうすれば理解が深まるでしょう。

- 問を解き終わって答え合わせをしたら、間違ったものには印を付けておきましょう。

  日頃から自分の実力をつかんでおくとテスト対策がしやすくなります。

- ひとつのひとつの節を読み終わったら、どんなことをその節で学んだのか思い出して「あらすじ」を言えるようにしておきましょう。紙と筆記用具を用意して、誰かにあらすじを伝えるにはどんなふうに説明すればよいか考え、文章を書いてみるととても効果があります。

  中学生に「今日は学校の数学の授業でどんなことを勉強したの？」と聞いてみると、「えーと、何だっけ、そうだ、傾きとか習った。」と断片的なことを言えたりすることはあるのですが、改めて、「へぇ、ところで傾きってなんなの？」と聞いてみると「えー、何だっけ、そうだ、なんか計算したり直線を描いてた。」ぐらいの答えしか返ってこないことが多いのです。専門用語を正しく言えるようになることも必要なことかもしれませんが、そんなことより大切なのは「どんなお話を学んだのか」ということです。数学は意味の無い記号操作を学ぶ科目ではなく、ちゃんとしたストーリーがあるものを学んでいるのです。ですから「お話のあらすじ」を理

解しておくことが大切なのです。

定期テスト対策では・・・

「日頃の学習」のところにも書いてありますが、数学のような科目は力がつくまでに時間のかかる科目です。テストに備えて十分な日数を確保しておきましょう。そして、「日頃の学習」で心配な例題や間違った問にちゃんと印を付けているとテスト対策が楽になります。

- テキストから試験範囲の例題や問を探して、印のついていないものがちゃんと解けるかどうか試してみましょう。
- 印を付けた例題や問を繰り返し復習して、テストに出ても大丈夫な問題を少しでも増やしておきましょう。

第1章

おさらい

私たちはこれから「円周角の定理」と呼ばれているものを学ぼうとしています。しかしその前に、大事なことをおさらいします。ここでおさらいすることは円周角の定理を学ぶ人にとって「知らないと困ってしまうこと」ばかりです。

1.1　円と弧と中心角

1.1.1　そもそも円ってなに？ちゃんと知ってるかな？

あなたはきっと「円」と呼ばれている図形のことを知っていますね。でも、もし、あなたが「そもそも円って何なの？」と聞かれたらかれたら、どんなふうに答えますか？つまり、例えば「円」なんていうものを全然知らない人に、円とは何なのか教えるとしたら、何て教えてあげますか？

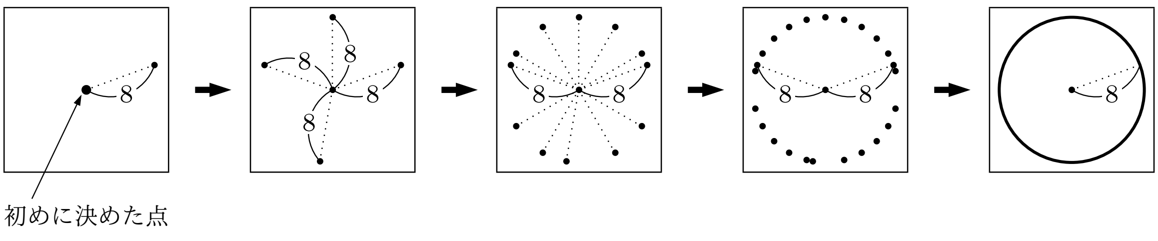
こういう質問をすると、かなり多くの中学生が、「丸い図形」とか「丸」などと、ボソッと答えます。これ、答えになってるんでしょうか。次の図を見てください。

どっちも「丸い図形」です。左の図形は「円って呼んでよい気がしますが、右の図形は「円」って呼ぶの、かなり気がひけますよね。ですから、「円というのはね、丸い図形のことだよ。」なんて教えると、まずいんじゃぁないでしょうか。「丸い図形」では、かなりいい加減ですよね。では何て教えてあげればよいのでしょう。だいいち、あなたは小学生のとき、学校の先生からなんて教わったんですか？思い出してみてください。まさか「丸い図形のことを円と呼びます。」なぁーんて教わってないですよね。

ではそろそろ、円とは何か、正確にあなたに教えることにしましょう。

平面の上に１つ点があるとします。この点までの距離が同じになっている点を、この平面の中で全部集めます。距離はあなたが好きに決めておいてください。そうすると、たくさん、キリがないほど点が集まって、最後にある曲線ができます。このようにしてできる曲線のことを「円」と呼ぶのです。

言っている意味、わかりましたか？念のため、図を使って説明しましょう。次の図を見てください。これは、初め１つの点を決め、その点からの距離が８になっている点をどんどんたくさん集めていくと、最後にある曲線ができていく様子を図にしたものです。



初めに決めた点から、距離が８の点を１つ打った。

初めに決めた点から、距離が８の点を４つ打った。

初めに決めた点から、距離が８の点をたくさん打った。

初めに決めた点から、距離が８の点をもっとたくさん打った。

初めに決めた点から、距離が８の点を全部打った。

どういうことかわかってもらえたでしょうか。この図の中の一番右の図を見てください。初めに決めた点が真ん中にあり、その周りに点がびっしり集まって丸い形の曲線が出来上がっています。びっしりと集まった点たちはどれも、初めに打った点からの距離が８

になっているのです。

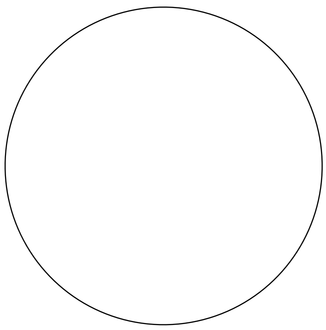
もう一度繰り返しておきましょう。「円とは、ある点から距離の等しい点を全て集めてできる曲線のこと」なのです。そして、実は、初めに決めたある点のことを**中心**と呼び、考えることにした一定の距離のことを**半径**と呼ぶのです。

正しく意味を覚えよう：円とは

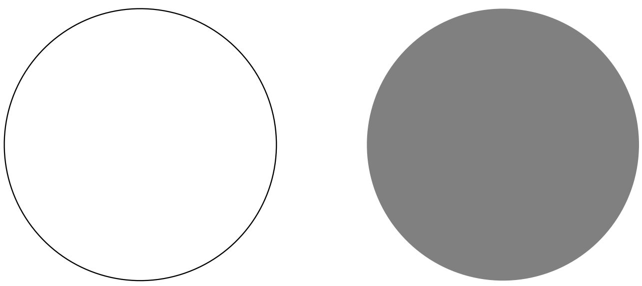
平面の上に、ある点が決められているとします。この点からの距離が等しくなっている点を、この平面の中で全部集めます。そうすると、ある曲線ができるわけです。このようにしてできる曲線のことを**円**と呼んでいます。また、初めに決めてあった点のことを、この円の**中心**と呼び、初めに決めた点から、集めた点たちまでの距離を、この円の**半径**と呼びます。

補足：円、円周、円板という言葉の使われ方について

さっき説明したように、「円」とは、「ある点からの距離が等しくなっているような点を全部集めるとできる曲線」なので、出来上がった曲線の内側にある点たちは、円の中には所属していないことになります。つまり、「円」は、ふちにできている曲線だけからできていて、その内側は「円」には含まれていないことになります。しかし、世の中では結構言葉が乱用されていて、内側まで全部含めて「円」呼んでいることがあります。



右の図を見てください。この図の左に描いてあるのは、内側の点たちは入っていない「円」だと思ってください。つまり、ふちにできている曲線だけを「円」と考えています。です

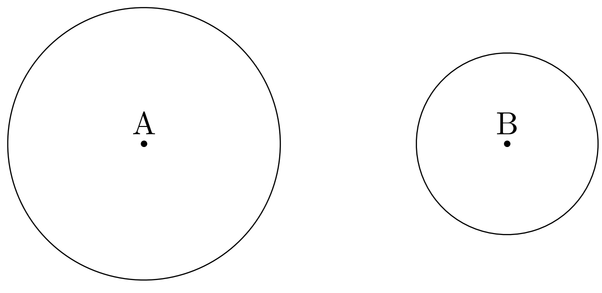


から、さっき「正しく意味を覚えよう：円とは」のところで説明したとおりの「円」です。それに対して、この図で右に描いてあるのは、内側の点たちも全部含めてできている「円」のつもりです。内側の点も全部入っているということを強調するために、右の「円では内側を灰色にしておきました。ですから右の「円」は、言葉を乱用して「円」と呼んでいるわけです。

「内側まで入っている円」を「内側まで入っていないふちだけの円」と区別して呼びたいときは、「内側まで入っている円」を**円板**と呼びます。また、「円のふちの所だけ」を**円周**と呼びます。

円の名前のつけ方

円は丸いので頂点がありません。頂点がある「多角形」では、頂点の名前を順番に並べて、その多角形の名前をつけましたね。例えば、頂点の名前が A、B、C となっている三角形だったら、「三角形 ABC」と呼んだわけです。円の場合は頂点がないので、このようなやり方で名前をつけるわけには行きません。そこで、中心の名前をそのまま円の名前として使うということがよく行われています。

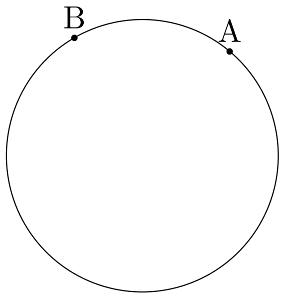


右の図を見てください。例えば、この図で左に描いてある円では中心の名前が A ですから、この円を「円 A」と呼ぶことにするわけです。また、例えば、この図で右に描いてある円では中心の名前が B ですから、この円を「円 B」と呼ぶことにするわけです。

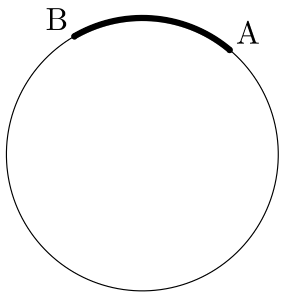
1.1.2　弧とか弦って何だっけ？

あなたはきっと、「弧」とか「弦」という言葉も聞いたことがありますよね。でも「弧」とか「弦」って何なのかちゃんと説明できますか？数学では、言葉の意味を正しく覚えるということはとても重要です。なぜなら、全ての話は言葉の意味から始まるからです。ですからここで、「弧」とか「弦」という言葉の意味をきちんと学ぶことにしましょう。

弧とは



右の図を見てください。まず円があるとします。そしてこれから、この円周の上を歩くことにします。（いいですか、円周の上を歩くのですよ。ですから円の内側を歩いてはいけません。円のふちの上だけを歩くのです。）スタートの点とゴールの点を決めて、円周の上に点を打つことにしましょう。この図では、スタートの点を A という名前にしてゴールの点を B にしました。

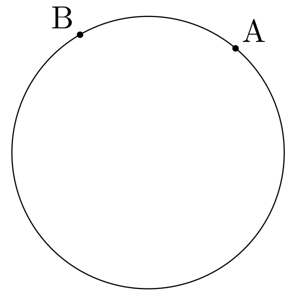


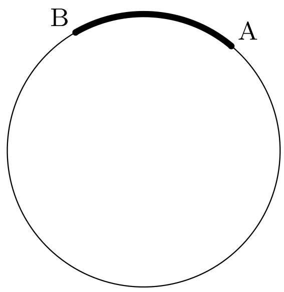
では、円周の上をスタートの点 A からゴールの点 B へ向けて歩くことにしましょう。右の図を見てください。円周の一部分が太く描かれていますね。これが歩いた跡です。わかりやすいように、円周の上を点 A から点 B へ向けて歩いた跡を太くしておいたのです。このような部分をこの円の「弧」と呼びます。つまり、円周の一部分を**弧**と呼んでいるのです。

弧に名前を付けるときはスタートの点の名前とゴールの点の名前を使ったりします。例えばこの図の弧は、「弧 AB」と呼ばれたりするわけです。弧の両端の点の名前である A と B を使って、「弧 AB」と呼んだわけです。また、漢字を使って「弧 AB」と書くのがめんどうな時は、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ という記号で書くこともあります。

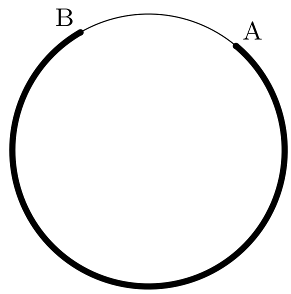
ここで念のため注意をしておきましょう。「弧 AB」とか $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ と書いてあるのを見たときに、時と場合によっては「どこなのかわからない」ことがあります。どういうことか説明することにしましょう。

まず、右の図のように、１つ円があるとします。この円の円周の上には、初めから２つの点 A と B が打たれています。そして２人の人、P さんと Q さんに「弧 AB のところを太くなぞってください。」と頼んでみました。そうすると、次の図のようになったのです。



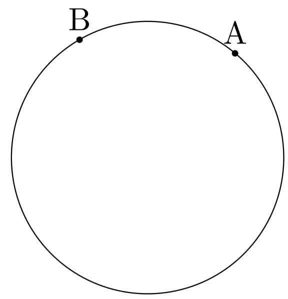


P さんのなぞった「弧 AB」



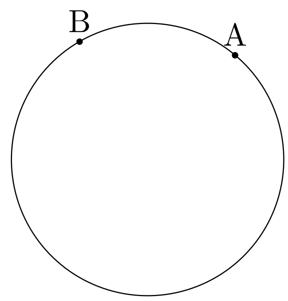
Q さんのなぞった「弧 AB」

P さんはこの図の左のようになぞり、Q さんはこの図の右のようになぞったのです。P さんと Q さんは違うところをなぞっているのです。では、正しくなぞれたのはどちらの人なのでしょうか。弧の名前は、弧の両端の点の名前を使ってつけるのですから、P さんが太くなぞったところの名前は弧 AB ですし、Q さんが太くなぞったところの名前も弧 AB ですね。ですから、どちら人も正しく「弧 AB」のところを太くなぞっているのです。でもこれ、困りますよね。「弧 AB のところを太くなぞって」と頼んだのに、２人の人は違う所をなぞったのですから、お願いしたことがちゃんと伝わっていないのです。つまり、「弧 AB」というだけでは、いったい「弧 AB」ってどれなのか、ちゃんと伝わっていないのです。というわけで、P さんと Q さんは、自分たちにお願いした人に向かって「ねぇ、あなたの考えていた弧 AB って、どっちのことだったの？」ともう１度聞くしかなかったのです。

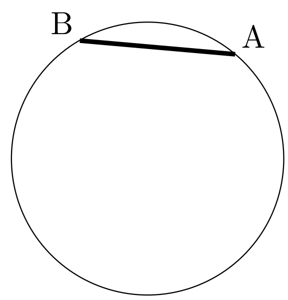


では右の図を見てください。この図では弧 AB ってどっちなんでしょうね。上側なんですかね。それとも下側なんですかね。そんなのどっちなのか決めようがないですよね。ですから、弧の話をするときは、図を描くときに、弧の部分を太く描いてわかるようにしておく癖をつけておくと良いのです。

弦とは



右の図を見てください。まず円があるとします。そしてこれから、この円板の上を歩くことにします。（いいですか、円板の上を歩くのですよ。ですから円の内側を歩いてよいのです。）ただし、スタートの点とゴールの点は円周の上にします。（いいですか、円周の上なのですから、スタートとゴールは、円のふちの上にあるんですよ。）ではスタートとゴールを決めて、円周の上に点を打つことにしましょう。右の図では、スタートの点を A という名前にしてゴールの点を B にしました。

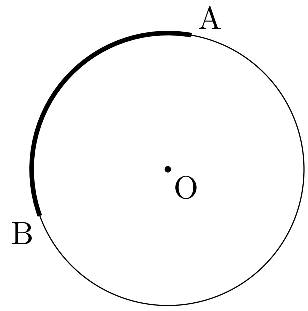


では、円板の上を、スタートの点 A からゴールの点 B へ向けて歩くことにしましょう。右の図を見てください。円板の上にまっすぐな線ができて、太く描かれていますね。これが歩いた跡です。わかりやすいように、円周の上を点 A から点 B へ向けて歩いた跡を太くしておきました。このような部分を、この円の「弦」と呼びます。つまり、円周の上にある 2 つの点をまっすぐ結んでできる線分を弦と呼んでいるのです。弦に名前を付けるときは、スタートの点の名前とゴールの点の名前を使ったりします。例えば、右の図の弦は、「弦 AB」と呼ばれたりするわけです。弦の両端の点の名前である A と B を使って、「弦 AB」と呼んだわけです。

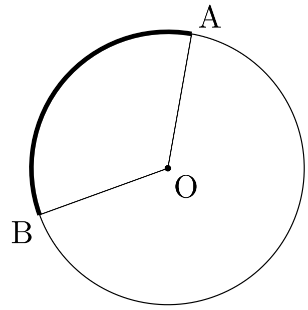
1.1.3　弧と中心角の間の深い関係

円周の上に弧を 1 つ決めると中心角と呼ばれる角が 1 つできるという話

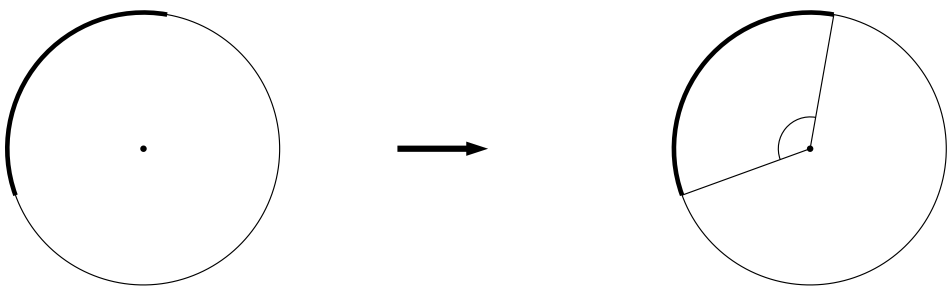
右の図を見てください。ある円があるとします。この円の中心の名前を O とします。この円 O の上には、1 つの「弧」が決められています。太く描いてあるところが「弧」です。この図を見ればわかるように、ここでは、この弧の名前は「弧 AB」にしました。



次は、「弧の両端の点」をそれぞれ、「円の中心」とまっすぐ結んでみましょう。すると右の図のようになります。円の中心のところに角ができているのがわかりますか？図をよく見てくださいね。角の名前は「角 AOB」ですよ。どこなのかわかりましたか？



ここまでのお話、わかってもらえてでしょうか。円の上に 1 つ「弧」を決めると、「弧の両端の点」と「円の中心」をまっすぐ結んで中心のところに角が 1 つできるというお話です。念のため、次の図に話をまとめておきます。



弧を 1 つ決める

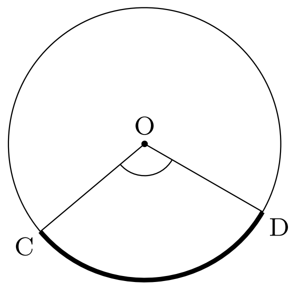
弧の両端と円の中心を
結ぶと中心のところに
角が 1 つできる

もう 1 度言っておきます。円の上に 1 つ弧を決めると、弧の両端の点と円の中心を結

んで、中心のところに角が 1 つできるのです。つまり、「弧」に「角」を対応させることができるのです。中心のところにできた角のことを**中心角**と呼びます。弧を決めると中心角ができるのですから、本当は詳しく、「弧・・に対応する中心角」と言うほうがよいでしょう。

ですから、例えば、右の図では、角 COD は弧 CO に対応する中心角ということです。

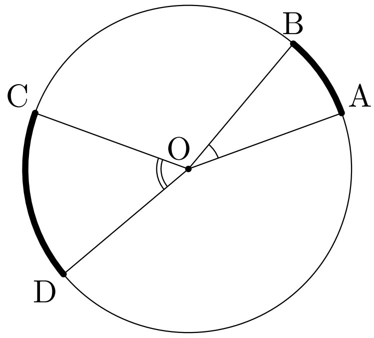
もちろん逆に、中心角を 1 つ決めると、弧が 1 つ決まるわけですから、この図では、「弧 CD は中心角 COD に対応する弧」ということもできます。



$\angle$COD は $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に
対応する中心角

弧の長さと中心角の大きさには何か関係があるの？

右の図を見てください。円が 1 つ描いてあります。ここではこの円の中心の名前を O としましょう。ですから、この円は円 O と呼ばれることになります。



この円の上には、2 つの弧が描かれています。2 つの弧の名前をそれぞれ「弧 AB」、「弧 CD」にしておきました。また、この図には「弧 AB に対する中心角」と「弧 CD に対する中心角」を作り、マークもつけておきました。では図をもう 1 度よく見てください。ここであなたに質問です。

質問 1　弧 AB の長さと弧 CD の長さはどちらが長いと思いますか。

質問 2　「弧 AB に対する中心角」の大きさと「弧 CD に対する中心角」の大きさはどちらが大きいですか。

質問 3　これまでも学習してきたように、「弧」と「中心角」は対応しているのでしたね。では、弧の長さが長くなると、その弧に対応している中心角の大きさはどうなるのでしょうか。大きくなるのでしょうか、それとも小さくなるのでしょうか。

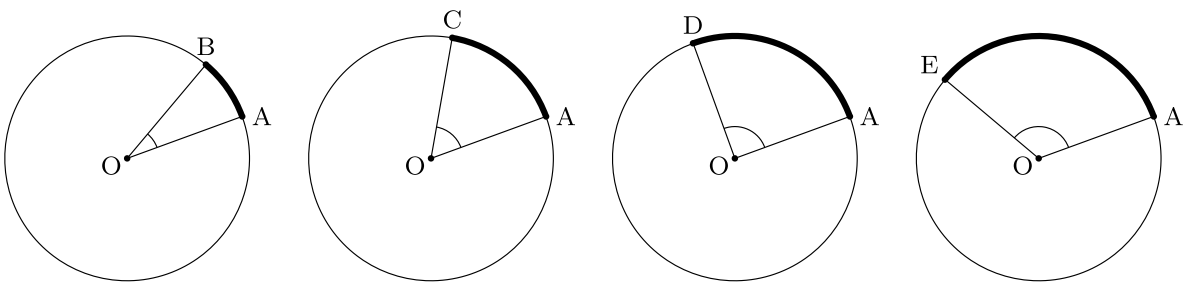
まだ質問したいことはあるのですが、質問を続ける前に、ここまでの質問の答えを言うことにします。

質問 1 の答え この図をどうみても、弧 CD のほうが弧 AB より長いですよね。

質問 2 の答え この図をどうみても、弧 CD に対する中心角のほうが弧 AB に対する中心角より大きいですよね。

質問 3 の答え 弧の長さが長くなると、その弧に対応している中心角は大きくなっていきますよね。

では、質問を続けます。次の図を見てください。



この図は、同じ円 O に、4 つの違う弧を描いたものです。太くなっている所が弧です。この図の一番左では、短めの弧 AB を描き、左から 2 番目ではさっきの弧より少し長い弧 AC を描き、左から 3 番目では、さらに長い弧 AD を描き、一番右では、またさらに長い弧 AE を描きました。またどの弧にも、その弧に対応する中心角を描き印を付けておきました。話を進める前に念のため注意しておきますが、4 つの円は全部同じ円ですよ。（大きさが同じ円が 4 つ描いてあると思ってもよいですが。）ではあなたに質問です。

質問 4 もう 1 度図を見てください。一番左の、弧 AB の長さをもとにして考えてみることにします。実はこの図では、弧 AC の長さは弧 AB の長さの 2 倍で、弧 AD の長さは弧 AB の長さの 3 倍で、弧 AE の長さは弧 AB の長さの 4 倍となるように描いてあります。（本当ですよ。この図は小さいので大変かもしれませんが、4 つの弧の長さを測ってみてくださいね。弧の長さを測るにはひもを使うとよいでしょう。）それでは、4 つのそれぞれの弧に対応している 4 つの中心角の大きさにはど

んな関係があるのでしょうか。分度器を使って測ってから答えてもいいですよ。

では 5 分待ちます。質問 4 の答え、じっくり考えてくださいね。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

はい、5 分たちました。考えはまとまりましたか？分度器で測ってみましたか？では答えを教えることにしましょう。

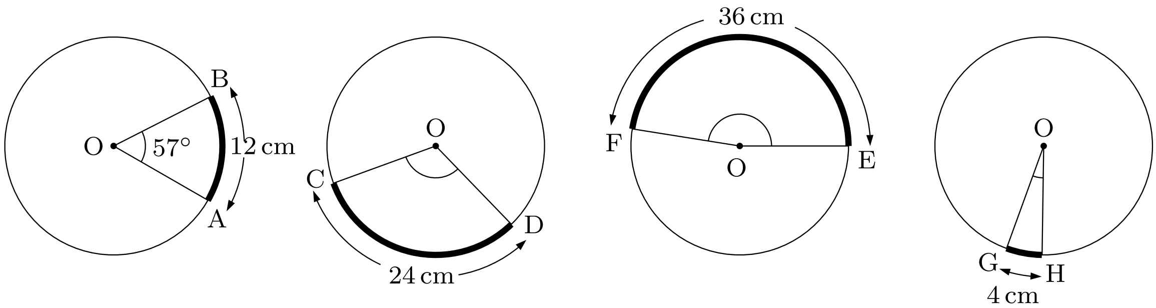
質問 4 の答え　実は、この図では、角 AOC の大きさは角 AOB の 2 倍、角 AOD の大きさは角 AOB の 3 倍、角 AOE の大きさは角 AOB の 4 倍になっているのです。（分度器を使った人、それぞれ何度になってましたか？この答えのとおりになってますよね。）つまり、弧の長さが 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと、弧に対応している中心角の大きさも 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくのです。数学っぽくかっこうつけて言うと、「弧の長さと、弧に対応している中心角の大きさは、比例している」のです。

それではここで、質問 1 から質問 4 までを考えてわかったことをまとめておきましょう。

重要な事実：弧の長さと中心角の関係

ある円があるとします。この円の「弧」を 1 つ決めるとその弧に対応する「中心角」が 1 つ決まり、逆に、この円の「中心角」を 1 つ決めるとその中心角に対応する「弧」が 1 つ決まります。このとき、「弧の長さ」と「中心角の大きさ」は比例しています。つまり、「弧の長さ」が 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと、弧に対応している「中心角の大きさ」も 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていき、逆に、「中心角の大きさ」が 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと、中心角に対応している「弧の長さ」も 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくのです。

例題 1　次の図を見てください。この図はある円 O に、長さの違う 4 つの弧と、それぞれの弧に対応する中心角を描いてみたものです。弧の長さはそれぞれ、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ は 12 cm、$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ は 24 cm、$\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$ は 36 cm、$\overset{\frown}{\mathrm{GH}}$ は 19 cm です。また、この図で一番左に出てくる、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角の大きさは 57° です。そのほかの弧に対する中心角の大きさはまだわかっていません。



(1)　$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する中心角の大きさを求めなさい。

(2)　$\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$ に対する中心角の大きさを求めなさい。

(3)　$\overset{\frown}{\mathrm{GH}}$ に対する中心角の大きさを求めなさい。

解答

弧の長さと中心角の大きさは比例しているのですよね。だから、弧の長さが 2 倍になれば中心角の大きさも 2 倍になるし、弧の長さが 3 倍になれば中心角の大きさも 3 倍になるし、弧の長さが $\frac{1}{3}$ 倍になれば中心角の大きさも $\frac{1}{3}$ 倍になるわけですね。

(1) 一番左と比べましょう。

$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ の長さは 24 cm で、これは $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の長さである 12 cm の 2 倍です。

ということは、

$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する中心角の大きさも、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角の大きさの 2 倍です。

このように考えると、

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角の大きさは 57° ですから、$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する中心角の大きさは 114° ですね。

(2) 一番左と比べましょう。

$\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$ の長さは 36 cm で、これは $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の長さである 12 cm の 3 倍です。

ということは、

$\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$ に対する中心角の大きさも、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角の大きさの 3 倍です。

このように考えると、

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角の大きさは 57° ですから、$\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$ に対する中心角の大きさは 171° ですね。

(3) 一番左と比べましょう。

$\overset{\frown}{\mathrm{GH}}$ の長さは 4 cm で、これは $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の長さである 12 cm の $\dfrac{1}{3}$ 倍です。

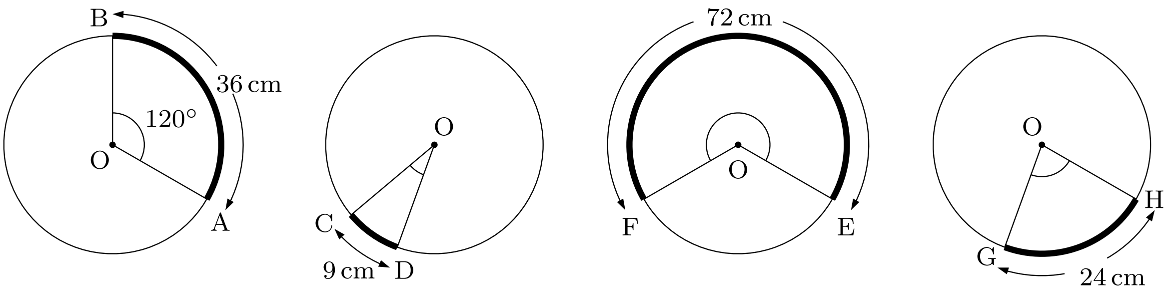
ということは、

$\overset{\frown}{\mathrm{GH}}$ に対する中心角の大きさも、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角の大きさの $\dfrac{1}{3}$ 倍です。

このように考えると、

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角の大きさは 57° ですから、$\overset{\frown}{\mathrm{GH}}$ に対する中心角の大きさは 19° ですね。

問 1. 次の図を見てください。この図はある円 O に、長さの違う 4 つの弧と、それぞれの弧に対応する中心角を描いてみたものです。弧の長さはそれぞれ、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ は 36 cm、$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ は 9 cm、$\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$ は 72 cm、$\overset{\frown}{\mathrm{GH}}$ は 24 cm です。また、この図で一番左に出てくる、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角の大きさは 120° です。そのほかの弧に対する中心角の大きさはまだわかっていません。



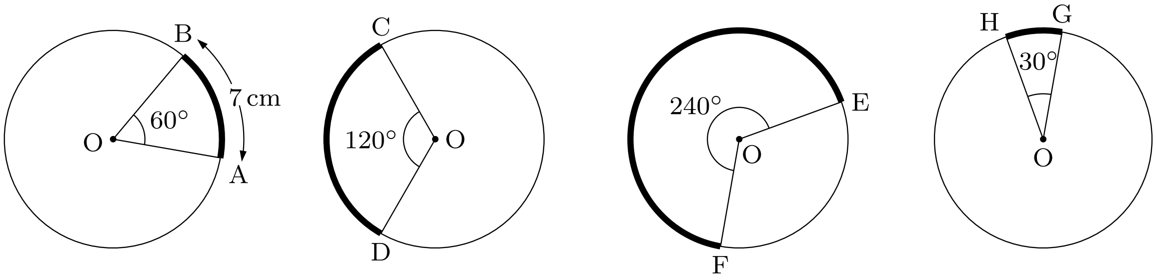
(1) $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する中心角の大きさを求めなさい。

(2) $\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$ に対する中心角の大きさを求めなさい。

(3) $\overset{\frown}{\mathrm{GH}}$ に対する中心角の大きさを求めなさい。

答えを見る

例題 2　次の図を見てください。この図はある円 O に、長さの違う 4 つの弧と、それぞれの弧に対応する中心角を描いてみたものです。中心角の大きさは、ぞれぞれ、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角の大きさが $60°$、$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する中心角の大きさが $120°$、$\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$ に対する中心角の大きさが $240°$、$\overset{\frown}{\mathrm{GH}}$ に対する中心角の大きさが $30°$ です。また、この図で一番左に出てくる $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の長さは 7 cm です。ほかの弧の長さはまだわかっていません。



(1)　$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ の長さを求めなさい。　　(2)　$\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$ の長さを求めなさい。

(3)　$\overset{\frown}{\mathrm{GH}}$ の長さを求めなさい。

解答

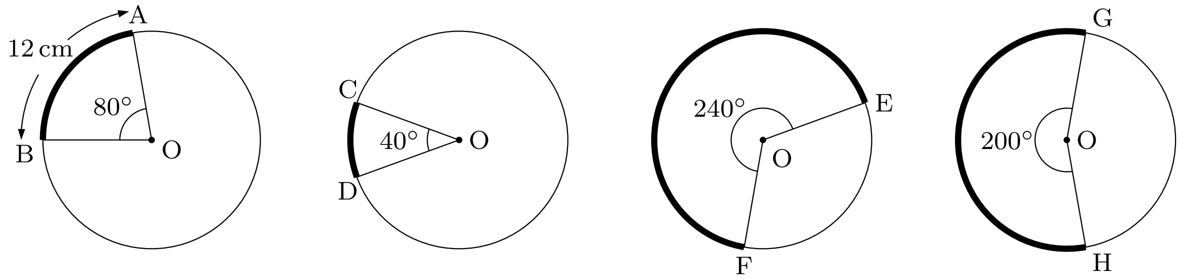
中心角の大きさと弧の長さは比例しているのですよね。だから、中心角の大きさが 2 倍になれば弧の長さも 2 倍になるし、中心角の大きさが 3 倍になれば弧の長さも 3 倍になるし、中心角の大きさが $\frac{1}{2}$ 倍になれば弧の長さも $\frac{1}{2}$ 倍になるわけですね。

(1) 一番左と比べましょう。$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する中心角は $120°$ です。これは、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角である $60°$ の 2 倍です。ですから弧の長さも 2 倍になるわけです。だから、$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ の長さは　$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の 2 倍の 14 cm ということになりますね。

(2) 一番左と比べましょう。$\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$ に対する中心角は $240°$ です。これは、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角である $60°$ の 4 倍です。ですから弧の長さも 4 倍になるわけです。だから、$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ の長さは　$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の 4 倍の 28 cm ということになりますね。

(3) 一番左と比べましょう。$\overset{\frown}{\mathrm{GH}}$ に対する中心角は $30°$ です。これは、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角である $60°$ の $\frac{1}{2}$ 倍です。ですから弧の長さも $\frac{1}{2}$ 倍になるわけです。だから、$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ の長さは　$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の $\frac{1}{2}$ 倍の 3.5 cm ということになりますね。

問 2. 次の図を見てください。この図はある円 O に、長さの違う 4 つの弧と、それぞれの弧に対応する中心角を描いてみたものです。中心角の大きさは、ぞれぞれ、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角の大きさが 80°、$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する中心角の大きさが 40°、$\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$ に対する中心角の大きさが 240°、$\overset{\frown}{\mathrm{GH}}$ に対する中心角の大きさが 200° です。また、この図で一番左に出てくる $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の長さは 12 cm です。ほかの弧の長さはまだわかっていません。



(1) $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ の長さを求めなさい。　(2) $\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$ の長さを求めなさい。

(3) $\overset{\frown}{\mathrm{GH}}$ の長さを求めなさい。

答えを見る

1.1.4　円と直線があると何が起こる？

ここでは、2 つのものの「位置関係」について考えることにします。「位置関係を考える」というのはどういうことかというと、自分から見ると相手はどっちにいるとか、相手からみると自分はどっちにいるのか考えるということです。例えば、自分からみると相手は「東のほうへ 3 m 離れた所にいる」とか、相手から見る自分は「相手の右のほうに 6 m 離れた所にいる」といったことを考えたりするのです。場合によっては、もっと単純に考えることもあります。例えば、自分と相手は「同じ所にいる」とか「離れた所にいる」ということを気にするのです。ただ、大きさや広がりのあるものについての位置関係を考える場合、「同じ所にいる」とか「離れた所にいる」といっているだけではすまないことがあります。どういうことかというと、「一部分重なっている」とか「接触している」とか「離れている」ということが起こるのです。では、これから、「円」と「直線」があるとき、この 2 つのものの位置関係について考えることにしましょう。「円」と「直線」があると、

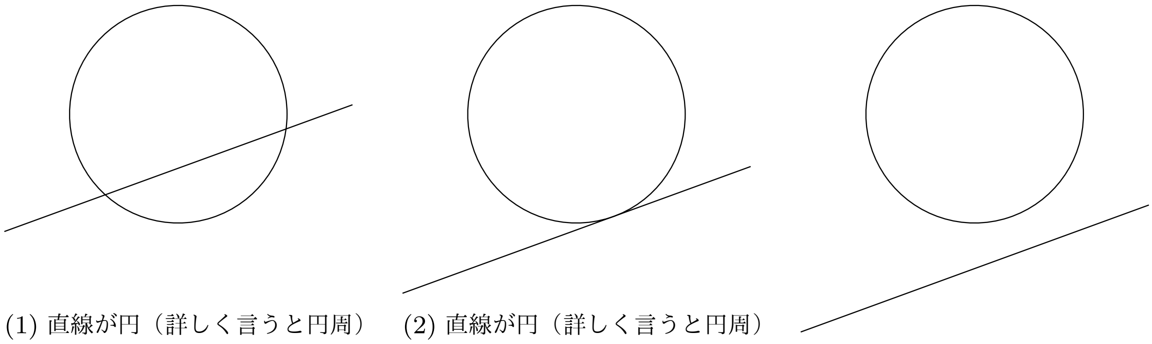
2 つのものの位置関係は次の 3 通りに分類して考えることができます。

(1) 直線が円（詳しく言うと円周）を 2 ヶ所つらぬいている場合

(2) 直線が円（詳しく言うと円周) と 1 ヶ所で接触している場合

(3) 直線が円から離れている場合

どういうことか説明しましょう。次の図を見てください。



(1) 直線が円（詳しく言うと円周）を 2 ヶ所つらぬいている　(2) 直線が円（詳しく言うと円周）と 1 ヶ所で接触している　(3) 直線が円から離れている

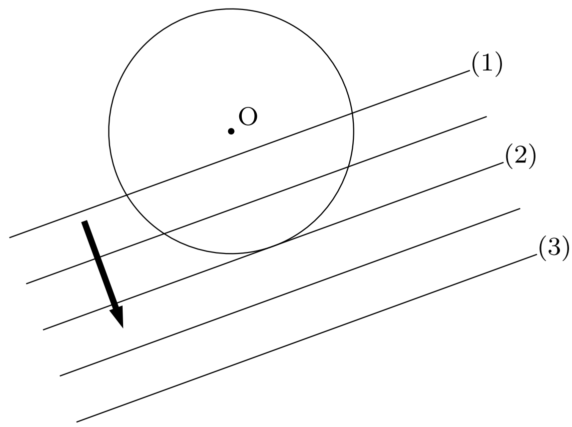
この図で一番左、つまり (1) は「円」と「直線」の 1 部が重なっている場合で、「円」と「直線」は 2 つの点で交わっています。「交わる」というのは「片方のものが、もう片方のものをつらぬいている」という意味です。交わる点を**交点**と呼びます。

この図の真ん中、つまり (2) は、「円」と「直線」が接触している場合です。「接触している」というのは、「片方のものが、もう片方のものに、かすっている」という意味です。数学では、「接触している」という代わりに**接する**ということがあります。また、接触している点のことを**接点**と呼びます。この場合、「円」から見ると、「直線」は「円に接している」ので、「この直線はこの円の**接線**になっている」ということがあります。つまり、「円の接線」とは、その円に接している直線のことです。

この図で一番右、つまり (3) は「円」と「直線」が離れている場合です。

ここまで見てきたことをもう少し詳しく考えて見ることにます。

右の図を見てください。この図は、直線が向きを変えずに矢印のほうへだんだん進んで動いていく所を表しています。初め、直線は (1) の位置にあります。このとき、直線は円と 2 ヶ所で交わっています。では矢印の方向へ直線が少しずつ動いていくのを想像してみることにしましょう。当分の間は、直線は円と 2 ヵ所で交わったままです。しかしそのうち、直線は (2) の位置にきて、直線は円と 1 ヶ所で接しているだけになります。これが、円と直線が接している状態です。直線がここからちょっとでも矢印の方向へ動くと、もう直線は円と全く接触しなくなります。つまり、直線は円と離れてしまうのです。このように考えれば、円と直線の位置関係は「2 点で交わっている」、「1 点で接している」、「離れている」の 3 通り以外には無いということがはっきりするでしょう。

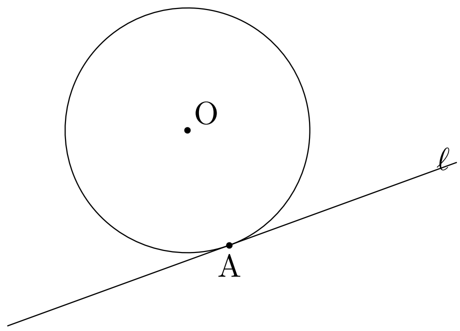


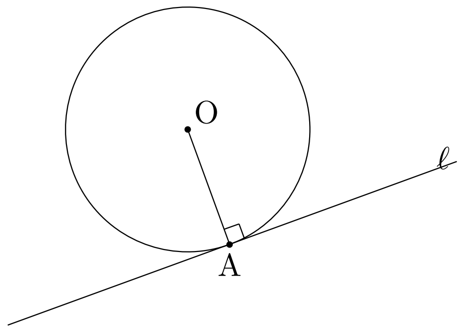
直線が矢印のほうへだんだん進むと・・・

1.1.5　円の接線の持っている重要な性質

ここでは円と直線が接している場合のことを考えることにします。

では右の図を見てください。これは円と直線が接している図です。ここでは、円の名前は円 O とし、接線の名前は ℓ にしました。また、接点の名前を A としました。さて、円の接線には、何か面白い性質はあるでしょうか。実は、ある、大切な所に 90° が隠れているのです。このことを考えるために、円の中心と接点を結んで見ることにしましょう。





そうすると右の図のようになりますね。どこに 90° が隠れていたかわかりましたか？もうおわかりだと思いますが、念のため直角マークをつけておきました。「円の中心 O と接点 A を結んでできた線」は、「この円の半径を表す線」の 1 つですが、この図を見ればわかるように、「円の中心と接点を結んでできる円の半径」は、接線と垂直になっているのです。

重要な事実：円の接線の性質

円と、その円の接線があるとします。この円の中心と、接線を結んで、この円の半径を表す線分を作ります。そうすると、「円の中心と接点を結んでできる、この円の半径を表す線分」と、「円の接線」は必ず垂直になっているのです。

第2章

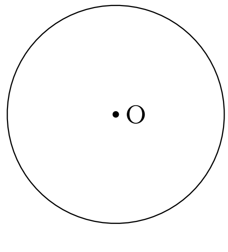
円周角の定理

2.1　円周角の定理ってどんな定理？

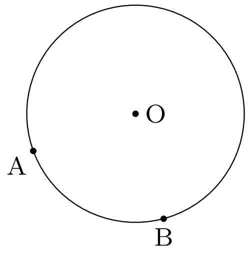
私たちの身の回りには円の形をしたものがいろいろあり、よく見慣れているため、私たちは円のことは何でも知っていると思いがちです。ですが、ちょっとやそっとでは気がつかない円の性質もあります。私たちがこれから学ぼうとしている「円周角の定理」もその 1 つです。昔の人がとても不思議なことに気がついたのです。まず、「円周角」とはなんなのかを説明し、その後に、昔の人はどんなことに気がついたのか説明することにしましょう。

2.1.1　円周角って何？

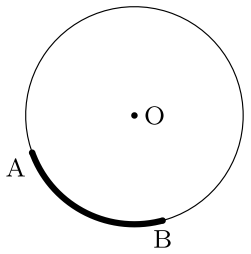
まず、ある円 O があるとします。



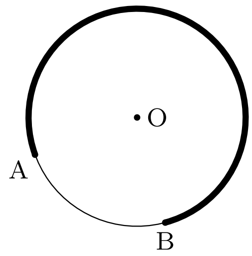
次に、この円 O の円周上に 2 つの点 A、B を打ちます。すると例えば、右の図のようになります。



次は、点 A と点 B が結ばれるように、円周上を太くなぞります。すると次の図のようになります。

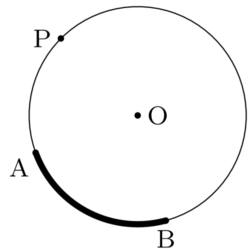


または

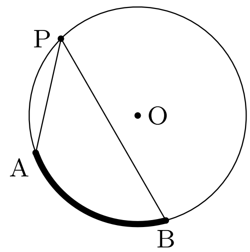


この図のどちらを使うこともできるのですが、左の図のほうが見やすそうなのでこの先は左の図を使って説明を続けます。（念のために確認しておきますが、この図で太くなぞられているような曲線は「弧」と呼ばれるのでしたね。）

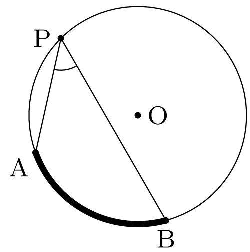
次は円周上の**好きな場所**に点 P を打ちます。ただし、太くなぞられているところに打ってはいけません。つまり、弧の上ではないところに点 P を打ちます。すると右の図のようになります。



次は弧の両端の点と点 P をそれぞれまっすぐ結びます。つまり、点 A と点 P を結び、点 B と点 P を結ぶわけです。すると右の図のようになります。

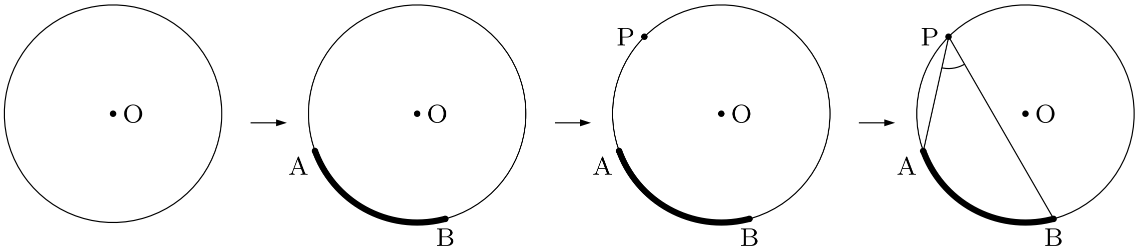


そうすると、点 P のところに 1 つ角ができているはずです。右の図を見てください。点 P のところに ∠APB ができていますね。



説明を進める前に、ここまでの話をまとめておくことにします。

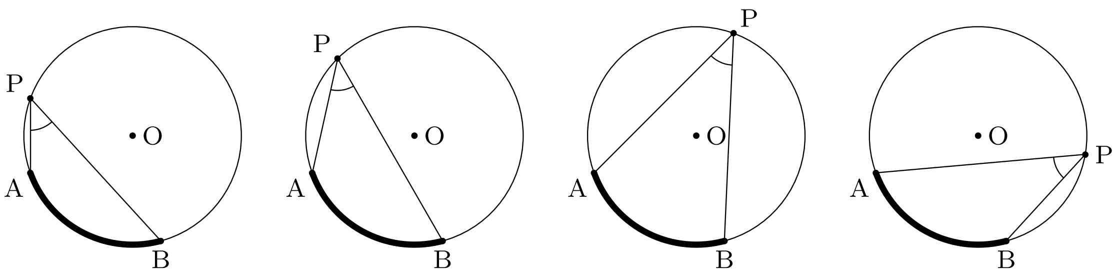
次の図を見てください。



円がある　弧を決める　円周上の弧の上ではない場所に点を打つ　角ができる

この図に表されているように、ここまでの話は「円周上に弧をひとつ決め、円周上の弧の上ではないところに点を打ち、その点と弧の両端を結ぶと角ができる」という話でしたね。つまり、弧を１つ決めると角を作ることができるわけです。このようにしてできる角を**（決めた）弧に対する円周角**と呼びます。ですから、この図では「∠APB は弧 AB に対する円周角」ということになりますね。

ところで、弧を１つ決めたとしても、さっきの説明のようにしてできる角は１つではありません。つまり、ある１つの弧に対する円周角は１つではなくたくさんあるのです。どういうことかわかりますか？次の図を見てください。



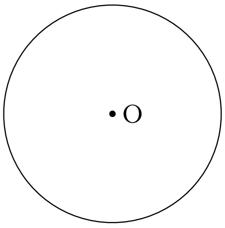
∠APB は弧 AB に対する円周角　∠APB は弧 AB に対する円周角　∠APB は弧 AB に対する円周角　∠APB は弧 AB に対する円周角

この図を見るとわかるように、弧 AB は同じでも、点 P の場所をいろいろに変えることにより、いくらでも違う場所に「弧 AB に対する円周角」を作ることができるわけです。ですから、「弧 AB に対する円周角」といっても１つに決まっているわけではなくたくさんあるのです。

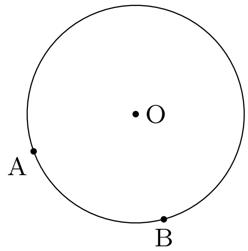
これで、「円周角とはそもそも何なのか」という説明を終わります。（もちろん、「円周角の定理」の説明はまだ終わっていません。）

次は念のため、「中心角」という言葉の意味を説明します。（14 ページの「弧と中心角の間の深い関係」で詳しくおさらいしているはずです。）

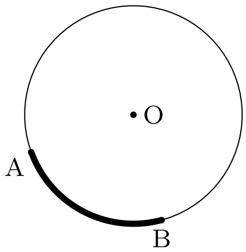
まず、ある円 O があるとします。



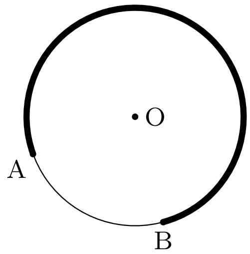
次に、この円 O の円周上に 2 つの点 A、B を打ちます。すると例えば、右の図のようになります。



次は、点 A と点 B が結ばれるように円周上を太くなぞり、弧 AB を作ります。すると次の図のようになります。

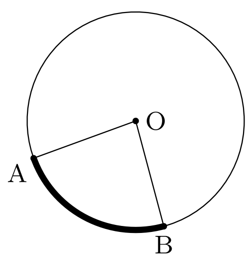


または

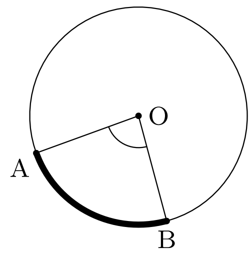


この図のどちらを使うこともできるのですが、左の図のほうが見やすそうなのでこの先は左の図を使って説明を続けます。

次は弧の両端の点と円の中心 O をそれぞれまっすぐ結びます。つまり、点 A と点 O を結び、点 B と点 O を結ぶわけです。すると右の図のようになります。



そうすると、点 P のところに 1 つ角ができているはずです。右の図を見てください。中心 O のところに ∠AOB ができていますね。



このように、弧の両端と中心をまっすぐ結んでできる角のことを（決めた）**弧に対する中心角**と呼びます。ですから、さっきの図では、「∠AOB は弧 AB に対する中心角」と呼ばれることになりますね。

ところで、円周角とは違い、弧を 1 つ決めてしまうと誰がどうやってもその弧に対する中心角は 1 つしか作ることができませんね。

以上で、「円周角の定理」を説明するための準備が終わりました。

2.1.2 円周角の定理ってどんな定理？

では、いよいよ「円周角の定理」を説明することにしましょう。実は、昔の人が次のような驚くべき事実を発見し、証明もしたのです。

重要な事実：円周角の定理

ある円があるとします。この円の円周上に弧を 1 つ決めると、その弧に対する円周角と中心角を作ることができますね。そして、その弧に対する円周角はいくらでもたくさん作ることができますが、その弧に対する中心角は 1 つだけでしたね。このとき実は次のことが成り立っています。

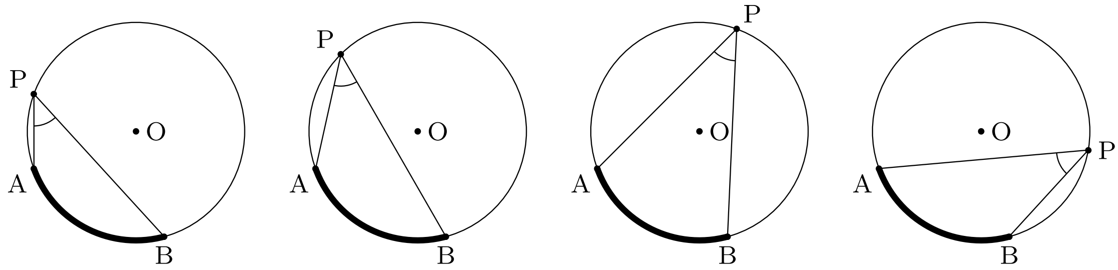
(1) その弧に対する円周角はたくさんあるわけですが、どの円周角の大きさも同じです。

(2) その弧に対する円周角はたくさんあるわけですが、どの円周角の大きさもその弧に対する中心角の大きさの半分です。

どうですか、書いてあること、意味わかりましたか？「図がないとよくわからない」という人も多いかもしれませんね。ですからこれから図を使って詳しく説明します。

「円周上に弧をひとつ決め、円周上の弧の上ではないところに点を打ち、その点と弧の両端を結ぶと角ができる」のでしたね。つまり、弧を 1 つ決めると角を作ることができるわけです。そして、このようにしてできる角を**（決めた）弧に対する円周角**と呼ぶのでした。

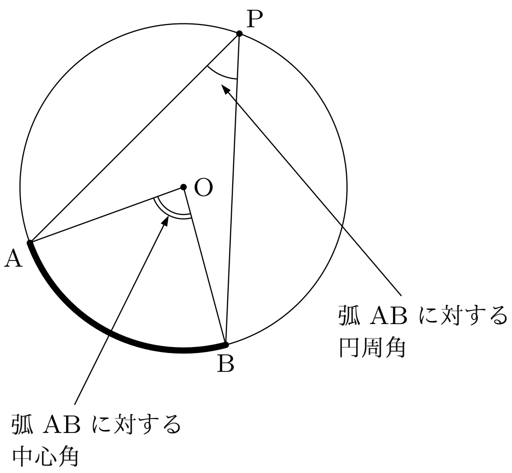
では次の図を見てください。この図はある円 O と円 O の弧 AB を 1 つ決めておいて、円周角を作ったものです。この 4 つの図では、点 P のところにできている角はどれも、「∠APB は弧 AB に対する円周角」ということになりますね。この図を見れば分かるように、弧を 1 つ決めたとしても、ある 1 つの弧に対する円周角は 1 つではなくたくさんあるわけです。



∠APB は弧 AB に対する円周角　∠APB は弧 AB に対する円周角　∠APB は弧 AB に対する円周角　∠APB は弧 AB に対する円周角

この図を見るとわかるように、弧 AB は同じでも、点 P の場所をいろいろに変えることにより、いくらでも違う場所に「弧 AB に対する円周角」を作ることができるわけです。ですから、「弧 AB に対する円周角」といっても 1 つに決まっているわけではなくたくさんあるのです。

しかし、驚いたことに「どの円周角も大きさは同じになっている」ということに昔の人は気づいたのです。弧が同じだったら、その弧に対する円周角はどれも大きさは同じだというのです。さっきの 4 つの図で言うと、点 P のところにできている ∠APB の大きさはどれも同じだというのです。こんなこと、あなたは信じられますか？



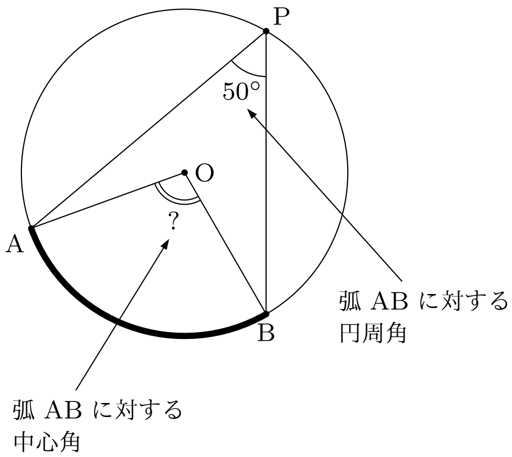
さらに昔の人は、もっとすごいことに気がついています。右の図を見てください。なんと、「円周角の大きさは中心角の大きさの半分になっている」というのです。弧が同じだったら、その弧に対するどの円周角の大きさもその弧に対する中心角の大きさの半分だというのです。右の図で言うと、$\angle$APB の大きさは $\angle$AOB の大きさの半分であると言っているのです。こんなこと、あなたは信じられますか？

どうですか？これで意味はわかってもらえたと思います。ですが、これまで説明したようなことですが、いくら私たちの身の回りに円の形をしたものがあるからといっても、普通、なかなかこんなことには気づきませんよね。「円にはなにかおもしろい性質はないのかなぁ」って考えること、これまであなたにはありましたか？また、こういうことに気づくにはかなりの観察力が必要ですね。でも気づいただけで満足するわけにも行きません。今あなたは数学を学んでいるのですから、円周角の定理の証明を学ばなくてはいけませんね。数学は「証拠のないことは気楽に信じない」という学問なのですから。

2.1.3　円周角の定理ってどうやって証明するの？

数学では「探りを入れる」ということはとても大切なことです。そして「探りを入れる」とき、「具体的な数で試してみる」とか「具体的な例で考えてみる」ということをすることがあります。私たちはこれから「円周角の定理」を証明しようとしているのですが、本格的に証明を考える前に「探りを入れてみる」ことにしましょう。だってそもそも、「円周角の定理って本当に正しいの？ただのハッタリじゃないの？」って思いませんか？そこで次のような例を考えることにします。

例 1　　右の図を見てください。円 O と弧 AB を 1 つ決め、弧 AB に対する円周角 ∠APB と弧 AB に対する中心角 ∠AOB を作ったところ円周角 ∠APB の大きさが 50° になったとします。このとき中心角 ∠AOB の大きさは何度なのか分かるのでしょうか。



念のための注意：今はまだ「円周角の定理」を使って答えを求めてはいけませんよね。だって、私たちはまだ「円周角の定理」を証明できていません。ですから、「円周角の定理」は本当なのかどうか確信がないのです。そもそも「円周角の定理」が本当なのかどうか探りを入れるため、こんな例を考えることにしているのです。では 10 分待ちます。円周角の定理を使わないで答えを求めてください。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・

・・・・・・

・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・

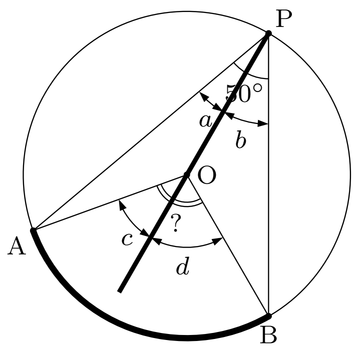
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・

はい、10 分たちました。どうですか？答えは出せましたか？答えは出なくても、何かわかったことはありましたか？もしかすると、「えー、難しいよー。全然わからないよ。」という人も多いかもしれませんね。

では少しヒントを出しましょう。右の図を見てください。円周角ができている場所と円の中心をむすんだ線をすこし長めに書いてみましょう。つまり、P と O を結ぶ線を少し長めに書いてみるのです。そうすると、この図の場合、円周角 ∠APB は今描いた線で 2 つの角に分割さます。図では分割されてできた 2 つの角をそれぞれ $\angle a$、$\angle b$ としてあります。



また、同じように中心角 ∠AOB は今描いた線で 2 つの角に分割されます。図では分割されてできた 2 つの角をそれぞれ $\angle c$、$\angle d$ としてあります。これがヒントです。このヒントをしっかり頭に入れて、中心角 ∠AOB が何度になるのか考えてみてください。では 10 分待ちます。

. . . .

. . . .

. . . . . .

. . . .

. . . .

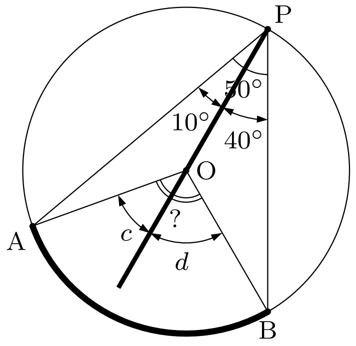
. . . .

. . . . . .

. . . .

. . . .

はい、10 分たちました。どうですか？今度は答えは出せましたか？答えは出なくても、何かわかったことはありましたか？もしかすると、「えー、難しいよー。まだまだ全然わからないよ。だって、$\angle a$、$\angle b$ が何度なのかわからないもん。」という人も多いかもしれませんね。そうですよねぇ、50° の角を 2 つに分割したわけですから、$\angle a$ が 10° で、$\angle b$ が 40° ということも考えられますし、$\angle a$ が 20° で、$\angle b$ が 30° ということも考えられますし、$\angle a$ が 22° で、$\angle b$ が 28° ということも考えられますし $\cdots$ この他にも色々考えられますよね。今のところ、$\angle a$、$\angle b$ が何度なのかということはわかりませんね。



もし、50° の円周角 ∠APO が 10° と 40° に分割されていたら中心角 ∠AOP は何度？

　ではまたヒントを出しましょう。こういう時はまた探りを入れてみるのです。右の図を見てください。例えば、もし、仮に $\angle a$ が 10° で、$\angle b$ が 40° だったら中心角は何度になるのだろうと考えてみるのです。（これは勝手な決めつけなので危険な考えですが、なにか手がかりをつかみたいのであえてこんな危険なことをするのです。）そして、他の場合のことはまたあとで考えるのです。ではまた 10 分待ちます。中心角 ∠AOB が何度になるのか考えてみてください。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・

・・・・・・

・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・

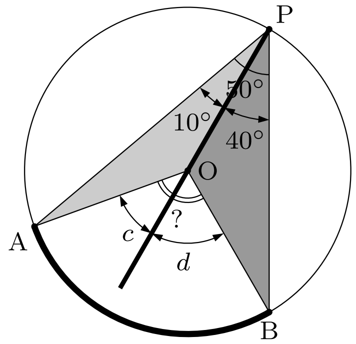
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

はい、10 分たちました。どうですか？今度は答えは出せましたか？答えは出なくても、何かわかったことはありましたか？もしかすると、「えー、難しいよー。まだまだ全然わからないよ。だって、$\angle a$ が 10°、$\angle b$ が 40° ってなってたとしても、こんなところにある角と中心角には特に関係は無さそうだもん。」なんて思っていたりしませんか？よく観察してくださいね。これは円の話なんですよ。円って「中心からの距離が等しくなっている点を集めてできている」のですよ。このことをちゃんと頭に入れてておけば、この図の中には 2 等辺三角形が 2 つ出てきているってことわかりますよね。ちゃんと気がついていますか？

では右の図を見てください。薄い灰色の三角形の三角形は 2 等辺三角形ですよね。だって、円の半径は一定なので、OP の長さと OA の長さは同じなのですから。同じように、濃い灰色の三角形はどちらも 2 等辺三角形ですよね。だって、円の半径は一定なので、OP の長さと OB の長さは同じなのですから。ここまでヒントを出せば、この図の $\angle c$ と $\angle d$ がそれぞれ何度になるのかわかりますよね。では 10 分待ちます。



薄い灰色の三角形の三角形と濃い灰色の三角形はどちらも 2 等辺三角形なのである

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・

・・・・・・

・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

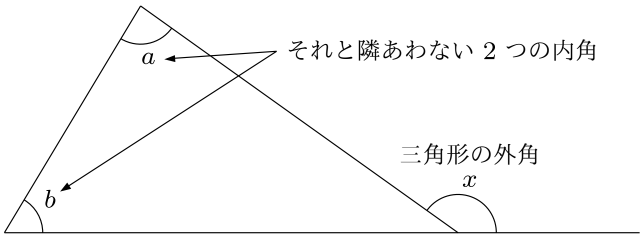
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

はい、10 分たちました。どうですか？ $\angle c$ と $\angle d$ はそれぞれ何度になるのかわかりましたか。多分求めることができたと思いますが、念のため説明しましょう。

とっくの昔に学んだのであなたはもちろん知っているはずのことですが、まず思い出しておきたいことがあります。それは、「三角形の内角と外角の間にある深い関係」のことです。次の重要な事実をじっくり読んでください。

重要な事実：三角形の外角と内角の間にある深い関係

どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっています。つまり、右の図では、例えば、

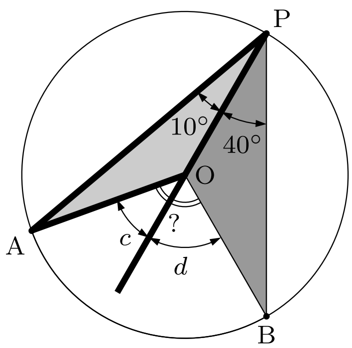


$$x = a + b$$

が成り立っているのです。

という話です。どうですか？覚えていましたか？意味はわかりましたか？それではこのことをしっかり頭に入れて、以下の文の空欄に正しい数を記入してください。

まず、薄い灰色の三角形に注目してみましょう。



右の図を見てください。円の半径は一定なので、

$$\mathrm{AO} = \mathrm{PO}$$

が成り立っています。ですから、薄い灰色の三角形は$\boxed{\quad\quad\text{三角形}}$です。二等辺三角形では底角は必ず等しくなっているので、$\angle$APO と $\angle\boxed{\quad\quad}$ の大きさは等しいわけです。ということは、いま $\angle$APO の大きさは 10° なのですから、

$$\angle \mathrm{PAO}\ \text{の大きさも}\ \boxed{\quad}^\circ$$

ということがわかります。

ではここで、この図の太い線で描かれているところに注目してみましょう。さっき

思い出してもらった「三角形の外角と内角の間にある深い関係」によると、∠APO と ∠ $\boxed{}$ の大きさをたすと $\angle c$ の大きさになるはずですね。ですから、

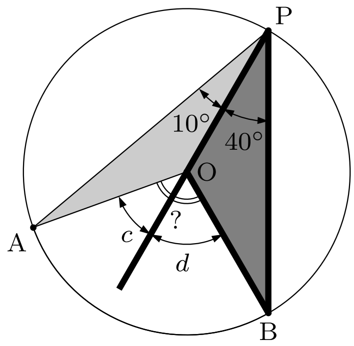
$$\begin{aligned}\angle c &= \angle \mathrm{APO} + \angle \mathrm{OAP} \\ &= 10^\circ + \boxed{}^\circ \\ &= 20^\circ\end{aligned}$$

ということになりますね。

次は、濃い灰色の三角形に注目してみましょう。

右の図を見てください。円の半径は一定なので、

$$\mathrm{BO} = \mathrm{PO}$$



が成り立っています。ですから、濃い灰色の三角形は $\boxed{\text{三角形}}$ です。二等辺三角形では底角は必ず等しくなっているので、∠BPO と ∠ $\boxed{}$ の大きさは等しいわけです。ということは、いま ∠BPO の大きさは 40° なのですから、

$$\angle \mathrm{PBO}\ \text{の大きさも}\ \boxed{}^\circ$$

ということがわかります。

ではここで、この図の太い線で描かれているところに注目してみましょう。さっき思い出してもらった「三角形の外角と内角の間にある深い関係」によると、∠BPO と ∠ $\boxed{}$ の大きさをたすと $\angle d$ の大きさになるはずですね。ですから、

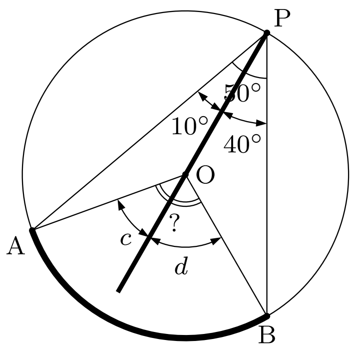
$$\begin{aligned}\angle c &= \angle \mathrm{BPO} + \angle \mathrm{OBP} \\ &= 40^\circ + \boxed{}^\circ \\ &= 80^\circ\end{aligned}$$

ということになりますね。

これで $\angle c$ の大きさは 20°、$\angle d$ の大きさは 80° であることがわかりました。ですから中心角 ∠AOP の大きさは、

$$\angle \mathrm{AOP} = \angle c + \angle d = 20 + 80 = 100°$$

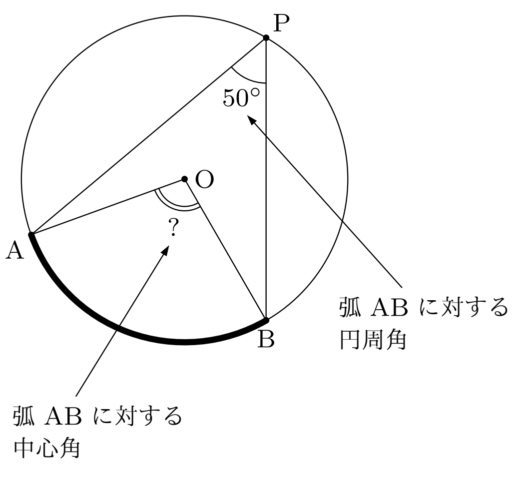
ということになりますね。これでめでたしめでたしと言いたいところですが、まだそういうわけには行かないですよね。右の図を見てください。いま私たちが発見したのは、もし、50° の円周角 ∠APO が 10° と 40° に分割されていたら、中心角 ∠AOP は 100° になるということですよね。50° の円周角 ∠APO が 20° と 30° に分割されているときの話や、22° と 28° に分割されているときの話などは後でまた考えるということにしてありましたね。ですから、そのようなときにも中心角 ∠AOB が 100° になるのかどうか考えなくてはいけないのです。そして、もし、50° の円周角 ∠APO が何度と何度にに分割されていても中心角 ∠AOB が 100° になるのだとしたら、それはどうしてなのか理由を考えなくてはならないのです。では次の問で、あなたに悩んでもらうことにしましょう。

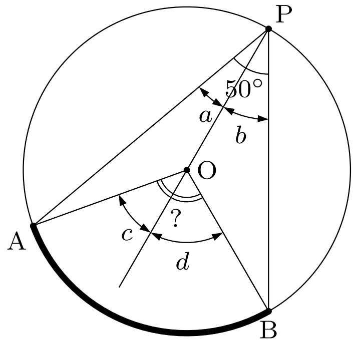


もし、50° の円周角 ∠APO が 10° と 40° に分割されていたら $\angle c$ は 20°、$\angle d$ は 80° になることがわかった

問 3. 例 1 の説明の続きを考えてもらう問題です。

右の図を見てください。円 O と弧 AB を 1 つ決め、弧 AB に対する円周角 ∠APB と弧 AB に対する中心角 ∠AOB を作ったところ円周角 ∠APB の大きさが 50° になったとします。このとき中心角 ∠AOB の大きさが何度になっているの調べるため、次に説明するようにまず、補助線をかいて考えることにしました。





右の図を見てください。円周角ができている場所と円の中心をむすんだ線をすこし長めに描いてみることにしました。つまり、P と O を結ぶ線を少し長めに描いてみます。そうすると、この図の場合、円周角 $\angle$APB は今描いた線で 2 つの角に分割さます。図では分割されてできた 2 つの角をそれぞれ $\angle a$、$\angle b$ としてあります。また、同じように中心角 $\angle$AOB は今描いた線で 2 つの角に分割されます。図では分割されてできた 2 つの角をそれぞれ $\angle c$、$\angle d$ としてあります。それでは以下の問に答えていくことによって、中心角 $\angle$AOB の大きさを求めてください。

(1) 50° の角を 2 つに分割したわけですから、$\angle a$ が 10° で、$\angle b$ が 40° ということも考えられますし、$\angle a$ が 20° で、$\angle b$ が 30° ということも考えられますし、$\angle a$ が 22° で、$\angle b$ が 28° ということも考えられますし $\cdots$ この他にも色々考えられますよね。ここでは、例えば $\angle a$ が 20° で、$\angle b$ が 30° になっている場合を考えてみます。

(a) △PAO は二等辺三角形であると断言してよいですか。もし、断言して良いとしたら、それはどうしてですか。理由を言いなさい。

(b) △PBO は二等辺三角形であると断言してよいですか。もし、断言して良いとしたら、それはどうしてですか。理由を言いなさい。

(c) 二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しくなっているのでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle$PAO の大きさは何度ですか。

(d) 二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しくなっているのでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle$PBO の大きさは何度ですか。

(e) 「三角形の外角と内角の間にある深い関係」によると、「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっている」のでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle c$ の大きさは何度ですか。

(f)「三角形の外角と内角の間にある深い関係」によると、「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっている」のでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle d$ の大きさは何度ですか。

(g) 中心角 $\angle$AOB の大きさを求めなさい。

(2) 50° の角を 2 つに分割したわけですから、$\angle a$ が 10° で、$\angle b$ が 40° ということも考えられますし、$\angle a$ が 20° で、$\angle b$ が 30° ということも考えられますし、$\angle a$ が 22° で、$\angle b$ が 28° ということも考えられますし $\cdots$ この他にも色々考えられるのでしたよね。では今度は、例えば $\angle a$ が 34° で、$\angle b$ が 16° になっている場合を考えてみます。

(a) $\triangle$PAO は二等辺三角形であると断言してよいですか。もし、断言して良いとしたら、それはどうしてですか。理由を言いなさい。

(b) $\triangle$PBO は二等辺三角形であると断言してよいですか。もし、断言して良いとしたら、それはどうしてですか。理由を言いなさい。

(c) 二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しくなっているのでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle$PAO の大きさは何度ですか。

(d) 二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しくなっているのでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle$PBO の大きさは何度ですか。

(e)「三角形の外角と内角の間にある深い関係」によると、「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっている」のでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle c$ の大きさは何度ですか。

(f)「三角形の外角と内角の間にある深い関係」によると、「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっている」のでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle d$ の大きさは何度ですか。

(g) 中心角 ∠AOB の大きさを求めなさい。

(3) 50° の角を 2 つに分割したわけですから、$\angle a$ が 10° で、$\angle b$ が 40° ということも考えられますし、$\angle a$ が 20° で、$\angle b$ が 30° ということも考えられますし、$\angle a$ が 22° で、$\angle b$ が 28° ということも考えられますし $\cdots$ この他にも色々考えられるのでしたよね。では今度は、具体的な数値を使うなんてケチなことはやめて、$\angle a$ が a° で、$\angle b$ が b° になっている場合を考えてみます。

(a) △PAO は二等辺三角形であると断言してよいですか。もし、断言して良いとしたら、それはどうしてですか。理由を言いなさい。

(b) △PBO は二等辺三角形であると断言してよいですか。もし、断言して良いとしたら、それはどうしてですか。理由を言いなさい。

(c) 二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しくなっているのでしたね。このことを考えに入れて答えてください。∠PAO の大きさは何度ですか。

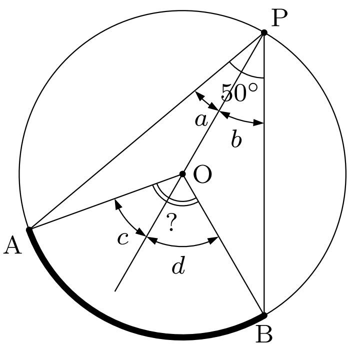
(d) 二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しくなっているのでしたね。このことを考えに入れて答えてください。∠PBO の大きさは何度ですか。

(e) 「三角形の外角と内角の間にある深い関係」によると、「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっている」のでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle c$ の大きさは何度ですか。

(f) 「三角形の外角と内角の間にある深い関係」によると、「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっている」のでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle d$ の大きさは何度ですか。

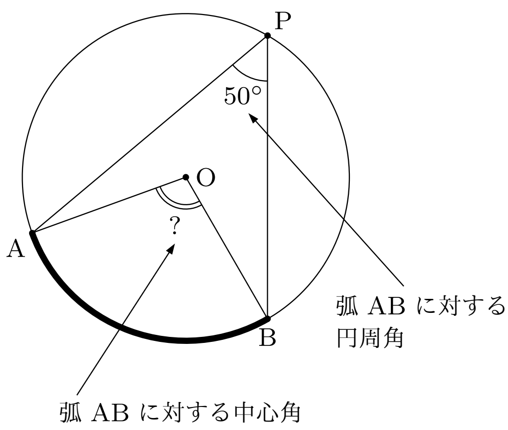
(g) 中心角 ∠AOB の大きさを求めなさい。

(4) 右の図を見てください。ここまでしっかり考えることができた人に質問です。 $50°$ の角を 2 つに分割したわけですから、$\angle a$ が $10°$ で、$\angle b$ が $40°$ ということも考えられますし、$\angle a$ が $20°$ で、$\angle b$ が $30°$ ということも考えられますし、$\angle a$ が $22°$ で、$\angle b$ が $28°$ ということも考えられますし $\cdots$ この他にも色々考えられるのですよね。でも、$\angle a$ と $\angle b$ が何度と何度になっていようが、（合わせて $50°$ になっているときは）中心角 $\angle$AOB の大きさは必ず $100°$ になると断言してよいですか。

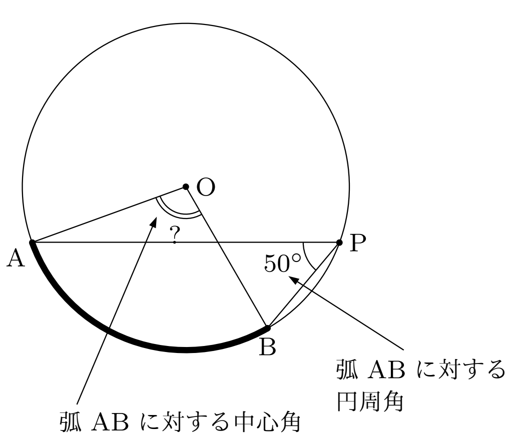


答えを見る

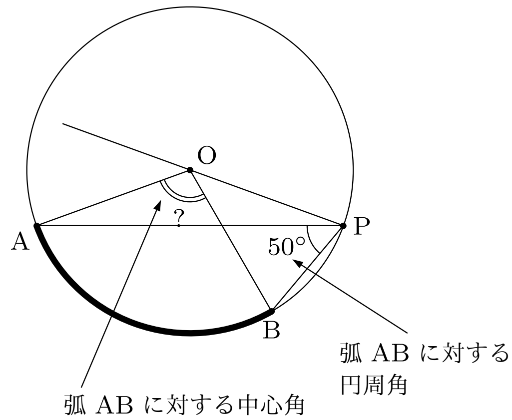
ここまで例 1 と問 3 を自分の頭で考えきちんと理解できた人は、大きさが $50°$ である「弧 AB に対する円周角」が右の図のような場所にある場合、「弧 AB に対する中心角」の大きさは $100°$ になるということを断言できるようになったわけですね。いいですか、あくまでも「円周角が右の図のような場所にあるとしたら」ということですよ。「円周角が右の図のような場所になかったとしたら」（たとえ円周角の大きさが $50°$ だとしても）、中心角の大きさが $100°$ であるとはまだ断言できないんですよ。どうして断言できないのかわかりますか？わからない人のために説明しましょう。



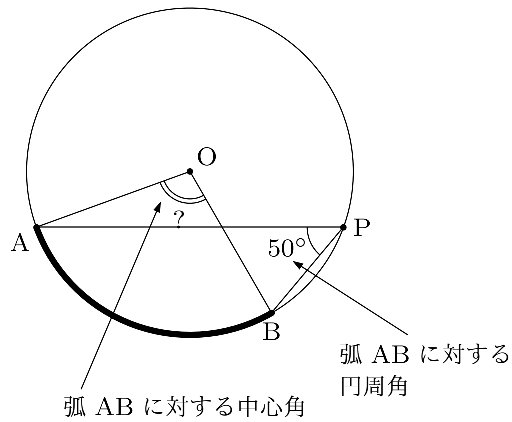
右の図を見てください。大きさが $50°$ の「弧 AB に対する円周角」がこの図のような場所にあることだってありますよね。こんな時には例 1 や問 3 で行ったように補助線を引いても円周角や中心角は 2 つに分割されません。



つまり、P と O を結ぶ線を少し長めに描いてみても右の図のようになってしまい、円周角や中心角は 2 つに分割されません。そうすると、例 1 や問 3 と同じ方法で考えることはできなくなってしまいますよね。ですから、このような場所に、大きさが 50° の「弧 AB に対する円周角」があるとき、「弧 AB に対する中心角の大きさが 100° になっている保証」は今のところ何もないのです。というわけで、この場合はまた初心に戻って考えなおさないといけないわけです。それを次の例で学ぶことにしましょう。

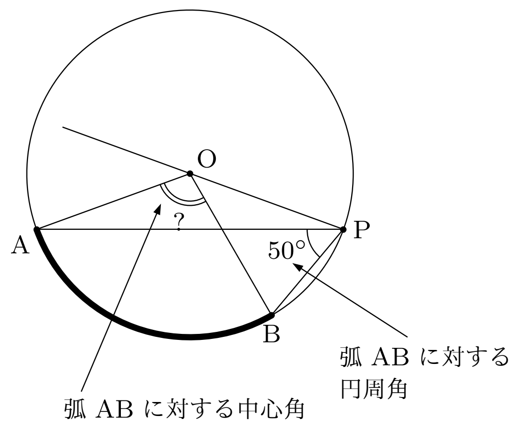


例 2　右の図を見てください。円 O と弧 AB を 1 つ決め、図のような場所に弧 AB に対する円周角 ∠APB と弧 AB に対する中心角 ∠AOB を作ったところ円周角 ∠APB の大きさが 50° になったとします。このとき中心角 ∠AOB の大きさは分かるのかどうか、以下の順で考えていくことによって結論を出す事にします。



念のための注意：今はまだ「円周角の定理」を使って中心角の大きさを求めてはいけませんよね。だって、私たちはまだ「円周角の定理」を証明できていません。ですから、「円周角の定理」は本当なのかどうか確信がないのです。そもそも「円周角の定理」が本当なのかどうか探りを入れるため、こんな例を考えることにしているのです。

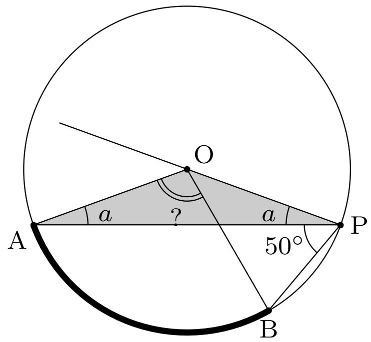
右の図のように、やはりこの時も例 1 や問 3 の方法を真似て、P と O を結ぶ線を少し長めに描いてみることにします。そんなことをしても円周角や中心角は 2 つに分割されませんが、図をよく観察してなにか役に立つことを見つけることにします。きっと何か役に立つことが見つかるはずで



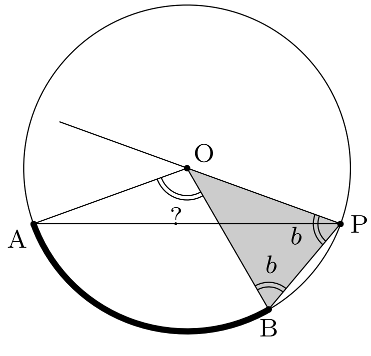
す。円は中心からの距離が一定になっている点を集めて出きている図形なのですから、P と O を結ぶ線を少し長めに描いてみれば、この時だって例 1 や問 3 の時と同じように、図のどこかに二等辺三角形が出てくるはずです。

(1) 図をよく見て、どこに二等辺三角形があるのか探すことにしましょう。円は中心からの距離が一定になっている点を集めて出きている図形なのですから「中心 O から円の上にある点 A までの距離」、「中心 O から円の上にある点 B までの距離」、「中心 O から円の上にある点 P までの距離」はすべて同じですね。このことに注目すれば、△AOP と △BOP はどちらも二等辺三角形であることがわかりますね。

(2) 右の図を見てください。まず、二等辺三角形である △AOP に注目してみましょう。（わかりやすくするために △AOP を灰色にしておきました。）二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しいのでしたね。ですから、右の図で a とかいてある 2 つの角の大きさは等しいと断言できます。



では右の図を見てください。今度は、二等辺三角形である △BOP に注目してみましょう。（わかりやすくするために △BOP を灰色にしておきました。）二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しいのでしたね。ですから、右の図で b とかいてある 2 つの角の大きさは等しいと断言できます。

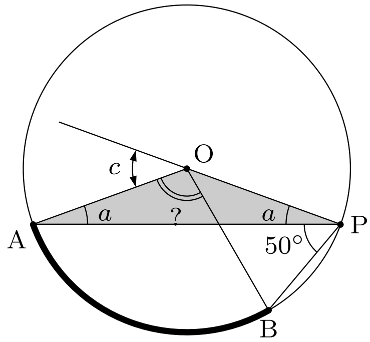


このようにして大きさが等しくなっている角をいくつか見つけることができたのは良いのですが、困ったことに $\angle a$ や $\angle b$ がそれぞれ何度なのかはわかりませんよね。ですが、図をしっかり見ると分かると思いますが、$\angle b$ の大きさから $\angle a$ の大きさをひくと 50° になることだけは確かですね。

(3) 例 1 や問 3 では、二等辺三角形をさがして大きさが等しくなっている角をいくつか

見つけたあと、「三角形の内角とその外角の間の深い関係」を使って中心角に迫っていきましたね。では今回も、その時と同じような感じで中心角を求めていくことができるのでしょうか。悩んでみることにしましょう。

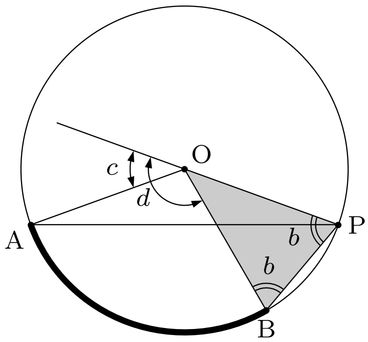
右の図を見て $\angle c$ の大きさのことを考えることにしましょう。$\angle c$ は灰色の三角形の外角ですよね。ですから、「三角形の外角の大きさはそれに隣り合わない 2 つの内角の大きさの和になっている」ということを使うと、$\angle c$ の大きさ c は、



$$c = a + a = 2a$$

であることがわかりますね。（つまり、$\angle c$ の大きさは $\angle a$ の大きさの 2 個分なのです。）

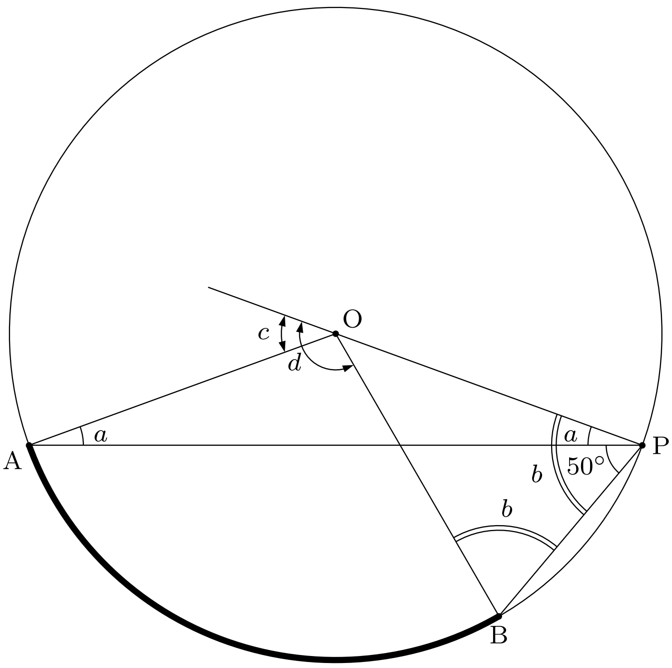
次は右の図を見て $\angle d$ の大きさのことを考えることにしましょう。$\angle d$ は灰色の三角形の外角ですよね。ですから、「三角形の外角の大きさはそれに隣り合わない 2 つの内角の大きさの和になっている」ということを使うと、$\angle d$ の大きさ d は、



$$d = b + b = 2b$$

であることがわかりますね。（つまり、$\angle d$ の大きさは $\angle b$ の大きさの 2 個分なのです。）

それではいよいよ中心角 $\angle$AOB に迫ることにしましょう。次の図を見てください。見やすくするために図を大きくしました。



図を見ると分かるように、中心角 $\angle$AOB の大きさは $\angle d$ の大きさから $\angle c$ の大きさをひいたものになっていますよね。そして $\angle c$ の大きさは $\angle a$ の大きさの 2 個分で $\angle d$ の大きさは $\angle b$ の大きさの 2 個分なのでしたね。ですから、

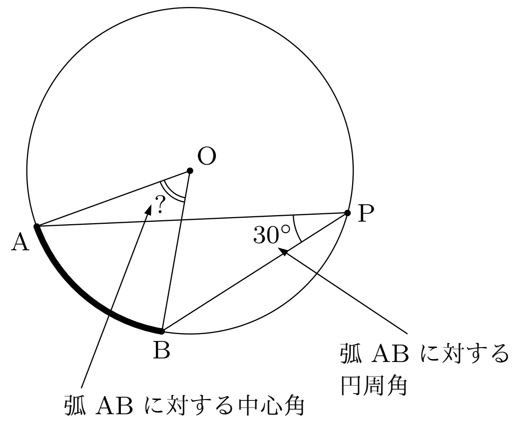
$$\begin{aligned}\text{中心角 } \angle \mathrm{AOB} \text{ の大きさ} &= d - c \\ &= 2b - 2a \\ &= 2(b - a)\end{aligned}$$

となっていることがわかりますね。つまり、中心角 $\angle$AOB の大きさは「$\angle b$ の大きさから $\angle a$ の大きさをひいたもの」の 2 倍ということがわかったのです。ところで、$\angle b$ の大きさから $\angle a$ の大きさをひくと 50° になることは確かですね。ですから、

$$\text{中心角 } \angle \mathrm{AOB} \text{ の大きさ} = 2 \times 50^\circ = 100^\circ$$

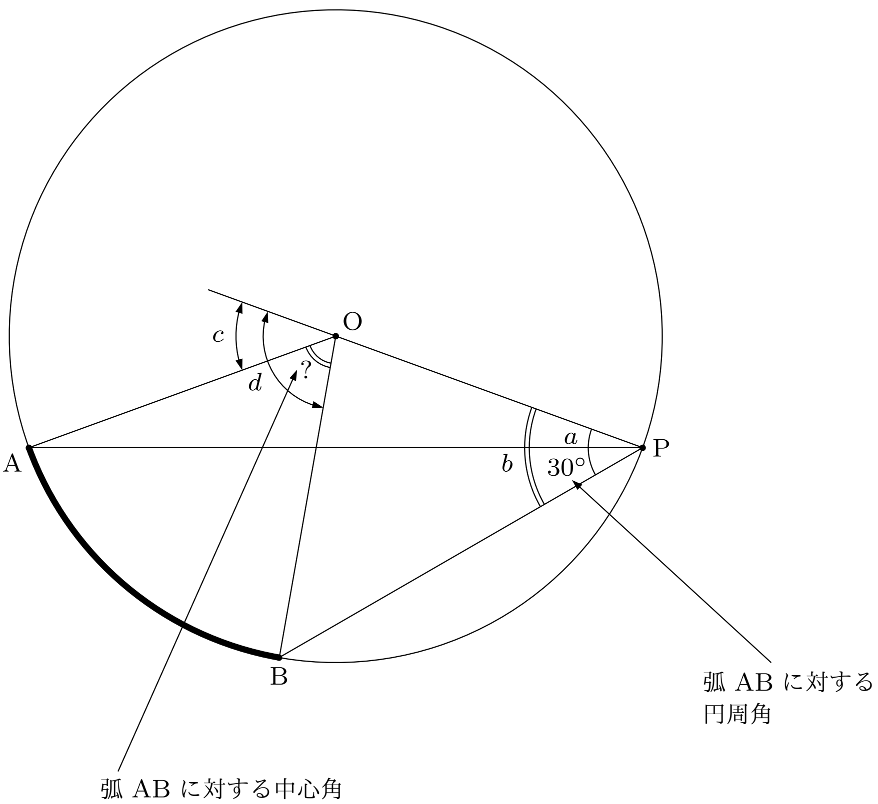
ということになりますね。以上で、$\angle b$ や $\angle a$ の大きさが変わったとしても、中心角 $\angle$AOB の大きさは必ず 100° になることがわかりました。

問 4. 右の図を見てください。円 O と弧 AB を 1 つ決め、図のような場所に弧 AB に対する円周角 ∠APB と弧 AB に対する中心角 ∠AOB を作ったところ円周角 ∠APB の大きさが 30° になったとします。このとき中心角 ∠AOB の大きさは分かるのかどうか、以下の順で考えていくことによって結論を出す事にします。



念のための注意：今はまだ「円周角の定理」を使って答えを求めてはいけませんよね。だって、私たちはまだ「円周角の定理」を証明できていません。ですから、「円周角の定理」は本当なのかどうか確信がないのです。そもそも「円周角の定理」が本当なのかどうか探りを入れるため、こんな問を考えることにしているのです。

次の図を見てください。見やすくするために図を大きくしました。



やはりこの時も例 1 や問 3 の方法を真似て、P と O を結ぶ線を少し長めに描いてみることにしました。そしてこの線を描くことによってできた角の名前を図のように、それぞれ $\angle a$、$\angle b$ $\angle c$、$\angle d$ としました。それでは以下の問に答えていくことによって、中心角 ∠AOB の大きさを求めてください。

(1) 困ったことに $\angle a$ や $\angle b$ がそれぞれ何度なのかはわかりませんよね。しかし、 図をしっかり見ると分かると思いますが、$\angle b$ の大きさから $\angle a$ の大きさをひくと必ず何度になっいるはずですか。

(2) △AOP は二等辺三角形であると断言してよいですか。もし、断言して良いとしたら、それはどうしてですか。理由を言いなさい。

(3) △BOP は二等辺三角形であると断言してよいですか。もし、断言して良いとしたら、それはどうしてですか。理由を言いなさい。

(4) 二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しくなっているのでしたね。このことを考えに入れて答えてください。∠OAP の大きさは何度ですか。

(5) 二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しくなっているのでしたね。このことを考えに入れて答えてください。∠OBP の大きさは何度ですか。

(6) 「三角形の外角と内角の間にある深い関係」によると、「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっている」のでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle c$ の大きさは何度ですか。

(7) 「三角形の外角と内角の間にある深い関係」によると、「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっている」のでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle d$ の大きさは何度ですか。

(8) 中心角 ∠AOB の大きさを求めなさい。

答えを見る

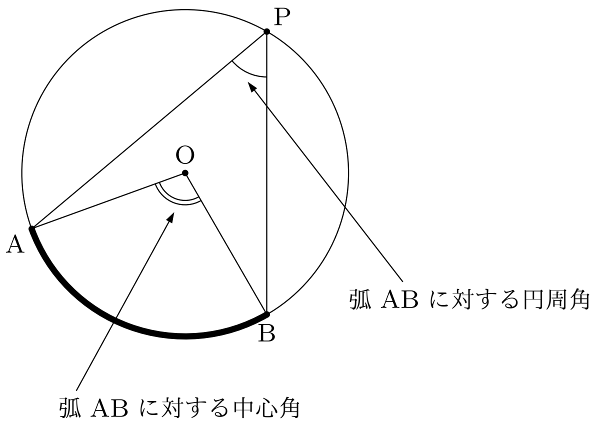
私たちはこれまで、円周角の大きさが 50° だったら中心角の大きさが何度になるのかということを、例 1 や問 3、例 2 でじっくりと考えてきました。そしてそのようなときには中心角の大きさは必ず 100° になっていることを (もちろん円周角の定理は使わずに) 発見

しました。つまり、円周角の定理は本当なのかどうか探りを入れてみたわけです。どうして探りを入れてみたのかというと、探りを入れてみれば、円周角の定理を証明するために大事なことが分かるかもしれないと考えたからですね。実は、例 1 や問 3、例 2、問 4 が理解できた人は、もう証明の本質を知っているのです。探りを入れるのはこれぐらいにして、そろそろ本格的に円周角の定理の証明をすることにしましょう。

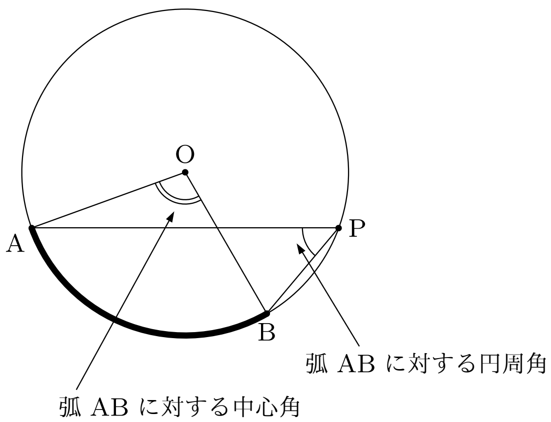
円周角の定理の証明

これまで例 1 や問 3、例 2、問 4 が理解できた人は、円周角の定理を証明するためには、まず話を場合分けしなければならないことがわかったと思います。どのような場合分けが必要になるのかというと、次のような 3 つの場合があるわけです。

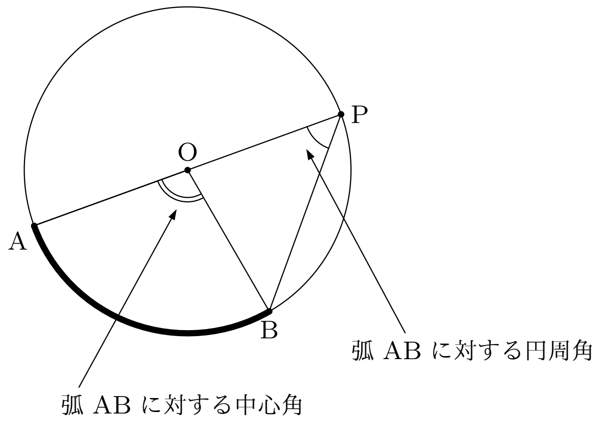
- 右の図のように、円の中心が円周角の中にある場合



- 右の図のように、円の中心が円周角の外にある場合



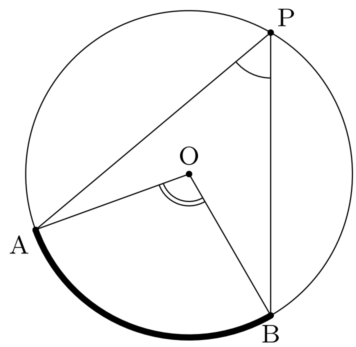
- 右の図のように、円の中心が円周角の中にあるわけでもなく、外にあるわけでもない場合



それではこの 3 通りのそれぞれの場合について、円周角の定理を証明することにしましょう。

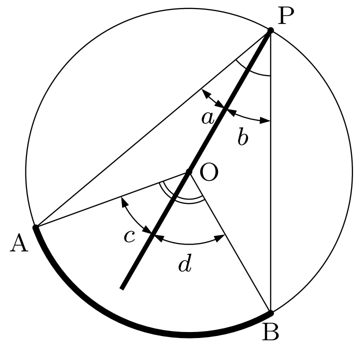
円の中心が円周角の中にある場合

右の図を見てください。弧 AB に対する中心角 ∠AOB の大きさが弧 AB に対する円周角 ∠APB の大きさの 2 倍になっているということを証明すればよいわけですね。



そのために、まず補助線を描いてみます。

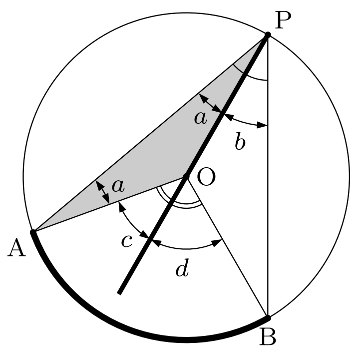
右の図のように、補助線として、円周角ができている場所と円の中心をむすんだ線をすこし長めに書いてみましょう。つまり、P と O を結ぶ線を少し長めに書いてみるのです。そうすると、この図の場合、円周角 ∠APB は今描いた線で 2 つの角に分割さます。図では分割されてできた 2 つの角をそれぞれ $\angle a$、$\angle b$ としてあります。また、同じように中心角 ∠AOB は今描いた線で 2 つの角に分割されます。図では分割されてできた 2 つの角をそれぞれ $\angle c$、$\angle d$ としてあります。



この図の中には二等辺三角形が現れています。円は中心からの距離が一定になって

いる点を集めて出きている図形なのですから「中心 O から円の上にある点 A までの距離」、「中心 O から円の上にある点 B までの距離」、「中心 O から円の上にある点 P までの距離」はすべて同じですね。このことに注目すれば、△AOP と △BOP はどちらも二等辺三角形であることがわかりますね。

右の図を見てください。まず、二等辺三角形である △AOP に注目してみましょう。（わかりやすくするために △AOP を灰色にしておきました。) 二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しいのでしたね。ですから、右の図で a とかいてある 2 つの角の大きさは等しいと断言できます。

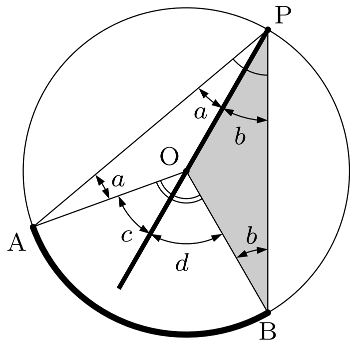


$\angle c$ はこの灰色の三角形の外角です。三角形の外角の大きさはそれと隣り合わない 2 つの内角の大きさの和になっているわけですから、

$$\angle c = \angle a + \angle a = 2\angle a \cdots ①$$

ということがわかります。つまり、$\angle c$ の大きさは $\angle a$ の大きさの 2 倍になっているということが判明したのです。

右の図を見てください。今度は、二等辺三角形である △BOP に注目してみましょう。（わかりやすくするために △BOP を灰色にしておきました。）二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しいのでしたね。ですから、右の図で b とかいてある 2 つの角の大きさは等しいと断言できます。



$\angle d$ はこの灰色の三角形の外角です。三角形の外角の大きさはそれと隣り合わない 2 つの内角の大きさの和になっているわけですから、

$$\angle d = \angle b + \angle b = 2\angle b \cdots ②$$

ということがわかります。つまり、$\angle d$ の大きさは $\angle b$ の大きさの 2 倍になっているということが判明したのです。

中心角 $\angle \mathrm{AOB}$ の大きさは $\angle c$ と $\angle d$ の大きさを合わせたものですよね。ということは、①、②より、

$$\begin{aligned}\text{中心角 } \angle \mathrm{AOB} \text{ の大きさ} &= \angle c + \angle d \\ &= 2\angle a + 2\angle b \\ &= 2\left(\angle a + \angle b\right) \cdots ③\end{aligned}$$

ということになりますね。ところで当然、

$$\text{円周角 } \angle \mathrm{APB} \text{ の大きさ} = \angle a + \angle b \cdots ④$$

となっているわけです。ですから、③、④より、

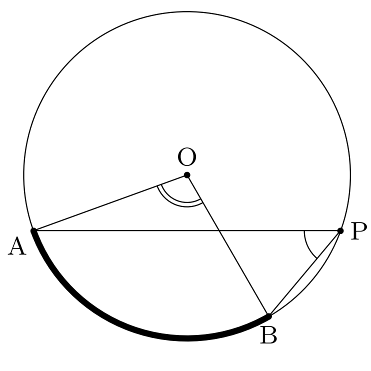
$$\text{中心角 } \angle \mathrm{AOB} \text{ の大きさ} = 2 \times \text{円周角 } \angle \mathrm{APB} \text{ の大きさ}$$

が成り立っていると断言できるわけです。これで、円の中心が円周角の中にある場合、中心角の大きさは円周角の大きさの 2 倍になっていることが証明できましたね。

円の中心が円周角の外にある場合

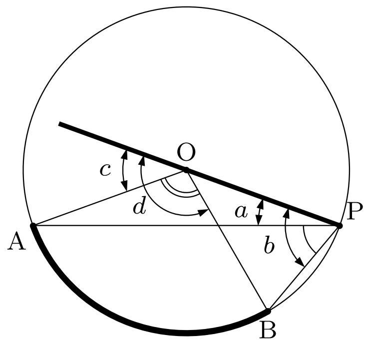
この場合も、円の中心が円周角の中にある場合とそっくりな議論をすれば証明できます。ですから、この場合の証明はあなたに以下の文の空欄に正しい言葉、記号を記入してもらうことにより完成してもらうことにしましょう。

右の図を見てください。弧 AB に対する中心角 $\angle \mathrm{AOB}$ の大きさが弧 AB に対する円周角 $\angle \mathrm{APB}$ の大きさの 2 倍になっているということを証明すればよいわけですね。



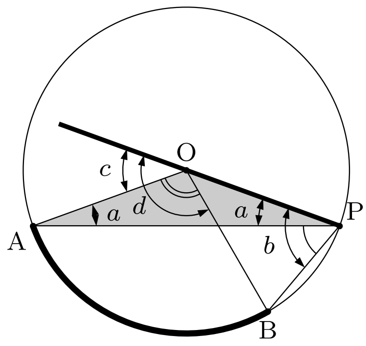
そのために、まず補助線を描いてみます。

右の図のように、補助線として、円周角ができている場所と円の中心をむすんだ線をすこし長めに書いてみましょう。つまり、P と O を結ぶ線を少し長めに書いてみるのです。円周角の中に中心がある場合とは違って、円周角 ∠APB や中心角 ∠APO は今描いた線で 2 つの角に分割されるわけではありません。ですが、円周角や中心角のところに新しい角ができますね。この図では、円周角のところに新しくできた 2 つの角をそれぞれ $\angle a$、$\angle b$ としてあります。また、同じように中心角のところに新しくできた 2 つの角をそれぞれ $\angle c$、$\angle d$ としてあります。



この図の中には二等辺三角形が現れています。円は中心からの距離が $\boxed{\quad\quad\quad}$ なっている点を集めて出きている図形なのですから「中心 O から円の上にある点 A までの距離」、「中心 O から円の上にある点 B までの距離」、「中心 O から円の上にある点 P までの距離」はすべて同じですね。このことに注目すれば、△AOP と △BOP はどちらも $\boxed{\quad\quad\quad\text{三角形}}$ であることがわかりますね。

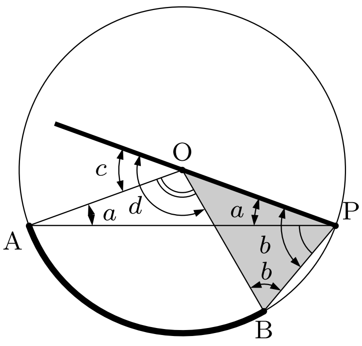
右の図を見てください。まず、二等辺三角形である △AOP に注目してみましょう。（わかりやすくするために △AOP を灰色にしておきました。）二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しいのでしたね。ですから、右の図で a とかいてある 2 つの角の大きさは等しいと断言できます。



$\angle c$ はこの灰色の三角形の外角です。三角形の外角の大きさはそれと隣り合わない 2 つの内角の大きさの和になっているわけですから、

$$\angle c = \angle a + \angle a = 2\angle a \cdots ①$$

ということがわかります。つまり、$\angle c$ の大きさは $\angle a$ の大きさの 2 倍になっているということが判明したのです。



右の図を見てください。今度は、二等辺三角形である $\triangle$BOP に注目してみましょう。（わかりやすくするために $\triangle$BOP を灰色にしておきました。）二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しいのでしたね。ですから、右の図で b とかいてある 2 つの角の大きさは等しいと断言できます。

$\angle d$ はこの灰色の三角形の外角です。三角形の外角の大きさはそれと隣り合わない 2 つの内角の大きさの和になっているわけですから、

$$\angle d = \angle b + \angle b = 2\angle b \cdots ②$$

ということがわかります。つまり、$\angle d$ の大きさは $\angle b$ の大きさの 2 倍になっているということが判明したのです。

中心角 $\angle$AOB の大きさは $\angle d$ の大きさから $\angle c$ の大きさを $\boxed{}$ たものですよね。ということは、①、②より、

$$\begin{aligned}\text{中心角 } \angle\mathrm{AOB} \text{ の大きさ} &= \angle\boxed{} - \angle\boxed{} \\ &= 2\angle\boxed{} - 2\angle\boxed{} \\ &= 2\,(\angle b - \angle a) \cdots ③\end{aligned}$$

ということになりますね。ところで当然、

$$\text{円周角 } \angle\mathrm{APB} \text{ の大きさ} = \angle\boxed{} - \angle a \cdots ④$$

となっているわけです。ですから、③、④より、

$$\text{中心角 } \angle\mathrm{AOB} \text{ の大きさ} = \boxed{} \times \text{円周角 } \angle\mathrm{APB} \text{ の大きさ}$$

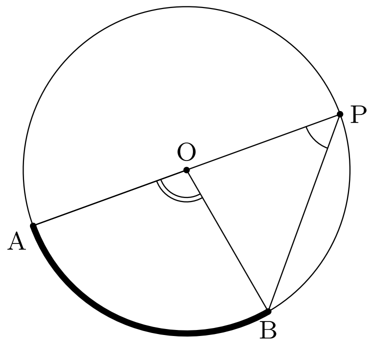
が成り立っていると断言できるわけです。これで、円の中心が円周角の外にある場合、中心角の大きさは円周角の大きさの 2 倍になっていることが証明できまし

たね。

円の中心が円周角の中にあるわけでもなく、外にもあるわけでもない場合

この場合も、円の中心が円周角の中にある場合や円の中心が円周角の外にある場合とそっくりな議論をすれば証明できます。ですから、この場合の証明はあなたに以下の文の空欄に正しい言葉、記号を記入してもらうことにより完成してもらうことにしましょう。

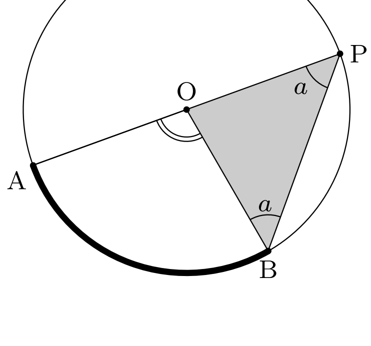
右の図を見てください。弧 AB に対する中心角 ∠AOB の大きさが弧 AB に対する円周角 ∠APB の大きさの 2 倍になっているということを証明すればよいわけですね。



この場合、今さら補助線を描く必要はありませんね。なぜなら、これまでと同じように、円周角ができている場所と円の中心をむすんだ線をすこし長めに描いてみてもすでに描いてある AP と重なるだけだからです。ですから、この図のまま考えれば良いわけです。

この時もきっと二等辺三角形が出てきているはずです。円は中心からの距離が $\boxed{}$ なっている点を集めて出きている図形なのですから「中心 O から円の上にある点 B までの距離」と「中心 O から円の上にある点 P までの距離」は同じですね。このことに注目すれば、△BOP は $\boxed{\text{三角形}}$ であることがわかりますね。

右の図を見てください。二等辺三角形である △BOP に注目してみましょう。（わかりやすくするために △BOP を灰色にしておきました。）二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しいのでしたね。ですから、右の図で a とかいてある 2 つの角の大きさは等しいと断言できます。



中心角 ∠AOB はこの灰色の三角形の外角です。三角形の外角の大きさはそれと隣り合わない 2 つの内角の大きさの和になっているわけですから、

$$\text{中心角 } \angle\mathrm{AOB} \text{ の大きさ} = \angle a + \angle a = 2\angle a \cdots ①$$

ということがわかります。つまり、中心角 ∠AOB の大きさは $\angle a$ の大きさの 2 倍になっているということが判明したのです。

ところで図では円周角 ∠APB の大きさを a としたのですから、結局①は、

$$\text{中心角 } \angle\mathrm{AOB} \text{ の大きさ} = \boxed{} \times \text{中心角 } \angle\mathrm{AOB} \text{ の大きさ}$$

が成り立っているということを意味しますね。これで、円の中心が円の中心が円周角の中にあるわけでもなく、外にもあるわけでもない場合も、中心角の大きさは円周角の大きさの 2 倍になっていることが証明できましたね。

以上で、円周角の定理の証明が完全にできました。

2.2　円周角の定理を利用して角の大きさを求めてみよう

数学では一度きちんと証明されたことは、いろいろな問題を解くときに自由に利用できるのでしたね。さっき円周角の定理が完全に証明されました。ですからこの先は、円周角の定理を自由に使って問題を解いても良いわけです。これから円周角の定理を使って解くことのできる問題を練習することにしますが、念のため円周角の定理をまず思い出しておくことにしましょう。

重要な事実：円周角の定理

ある円があるとします。この円の円周上に弧を 1 つ決めると、その弧に対する円周角と中心角を作ることができますね。そして、その弧に対する円周角はいくらでもたくさん作ることができますが、その弧に対する中心角は 1 つだけでしたね。このとき実は次のことが成り立っています。

(1) その弧に対する円周角はたくさんあるわけですが、どの円周角の大きさも同じです。

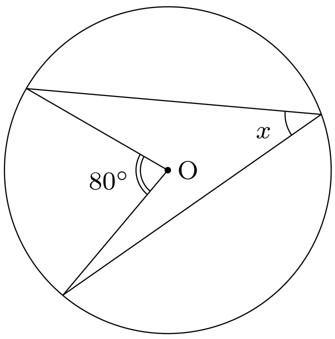
(2) その弧に対する円周角はたくさんあるわけですが、どの円周角の大きさもその弧に対する中心角の大きさの半分です。

書いてあることがよくわからない人は 29 ページを開いて「2.1.2 円周角の定理ってどんな定理？」を全部読みなおしてください。

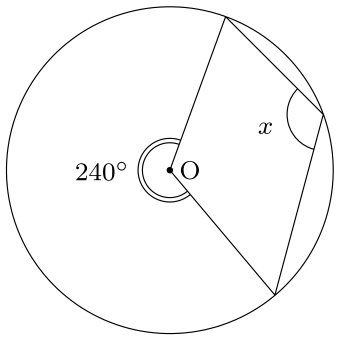
では円周角の定理を使って解くことのできる問題を練習することにしましょう。

例題 3　次の図で点 O は円の中心です。$\angle x$ の大きさを求めなさい。

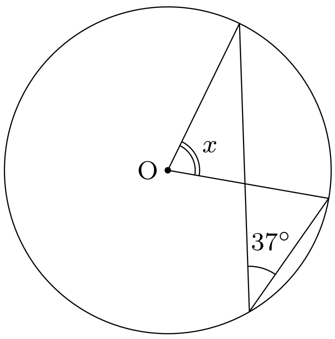
(1)



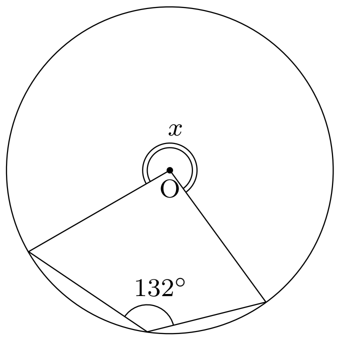
(2)



(3)



(4)

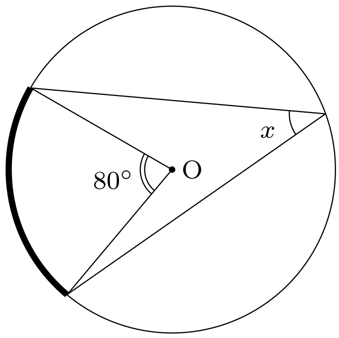


解答

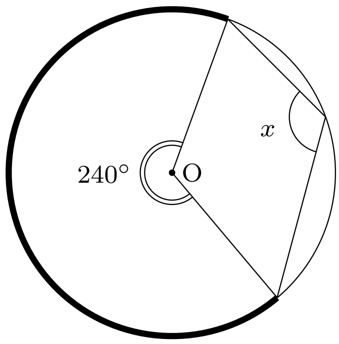
初めに大切な注意をしておきます。「円周角」とか「中心角」という言葉を使うときには

必ず「弧」のことを意識することが大切です。そもそも、弧を 1 つ決めると円周角を（いろいろ）作ることができ、弧を 1 つ決めると中心角を 1 つ作ることができるのでしたね。ですから、どの弧に対する円周角なのかということ、どの弧に対する中心角なのかということをしっかりと確認して問題を解かないといけないのです。

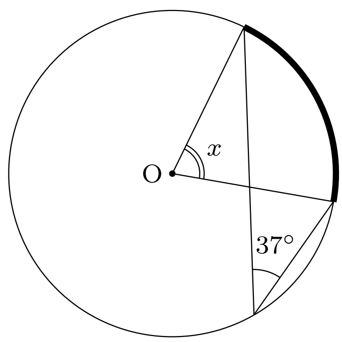
(1) 右の図を見てください。80° の大きさの角は「太く描かれている弧」に対する中心角ですね。また、これから求めようとしている $\angle x$ は「太く描かれている弧」に対する円周角ですね。ということは、円周角の定理によると $\angle x$ の大きさは 80° の半分ということになりますよね。よって、$x = 40^\circ$ ですよね。



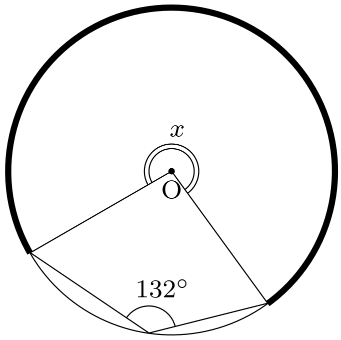
(2) 右の図を見てください。240° の大きさの角は「太く描かれている弧」に対する中心角ですね。また、これから求めようとしている $\angle x$ は「太く描かれている弧」に対する円周角ですね。ということは、円周角の定理によると $\angle x$ の大きさは 240° の半分ということになりますよね。よって、$x = 120^\circ$ ですよね。



(3) 右の図を見てください。37° の大きさの角は「太く描かれている弧」に対する円周角ですね。また、これから求めようとしている $\angle x$ は「太く描かれている弧」に対する中心角ですね。ということは、円周角の定理によると $\angle x$ の大きさは 37° の 2 倍ということになりますよね。よって、$x = 74^\circ$ ですよね。

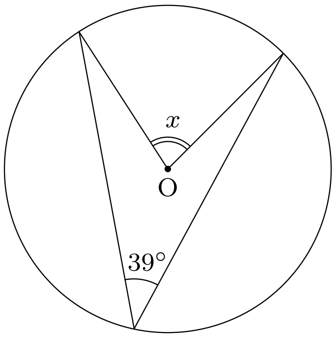


(4) 右の図を見てください。132° の大きさの角は「太く描かれている弧」に対する円周角ですね。また、これから求めようとしている $\angle x$ は「太く描かれている弧」に対する中心角ですね。ということは、円周角の定理によると $\angle x$ の大きさは 132° の 2 倍ということになりますよね。よって、$x = 264^\circ$ ですよね。

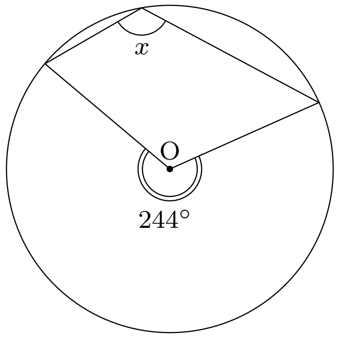


問 5. 次の図で点 O は円の中心です。$\angle x$ の大きさを求めなさい。

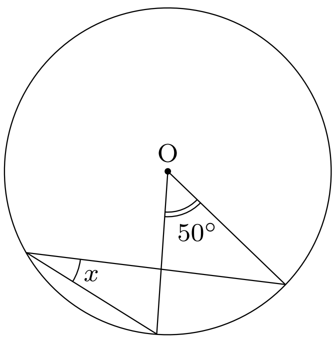
(1)



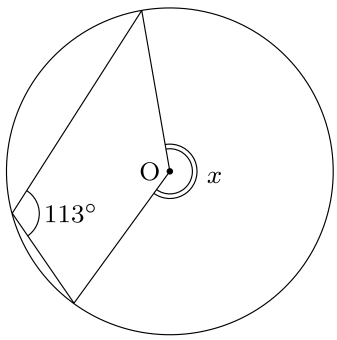
(2)



(3)



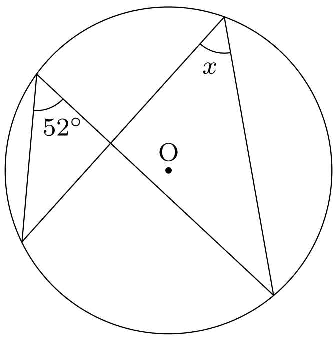
(4)



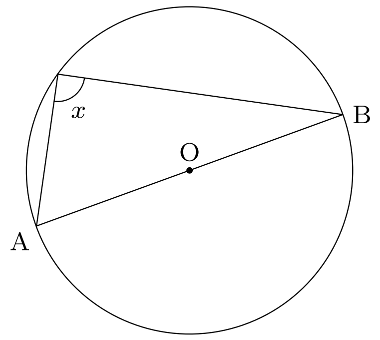
答えを見る

例題 4　次の図で点 O は円の中心です。$\angle x$ の大きさを求めなさい。

(1)



(2)

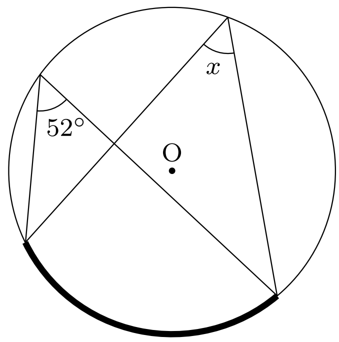


この図で AB は円 O の直径になっているとする

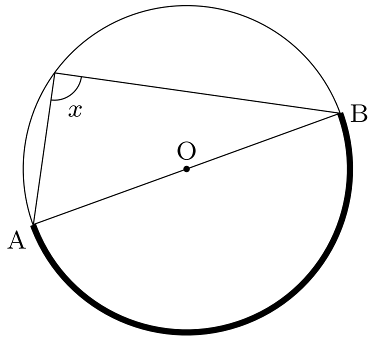
解答

例題 3 を学んだ時にも言いましたが、再び大切な注意をしておきます。「円周角」とか「中心角」というものを考えるときには必ず「弧」のことを意識することが大切です。そもそも、弧を 1 つ決めると円周角を（いろいろ）作ることができ、弧を 1 つ決めると中心角を 1 つ作ることができるのでしたね。ですから、どの弧に対する円周角なのかということ、どの弧に対する中心角なのかということをしっかりと確認して問題を解かないといけないのです。ですから、問題を解くときに、自分で弧を太くなぞるクセをつけておくと良いでしょう。

(1) 右の図を見てください。52° の大きさの角は「太く描かれている弧」に対する円周角ですね。また、これから求めようとしている $\angle x$ も「太く描かれている弧」に対する円周角ですね。(どちらの角も同じ弧に対する円周角なわけです。) ということは、円周角の定理によると、この 2 つの角の大きさは等しいはずですね。ですから、$x = 52°$ ですよね。

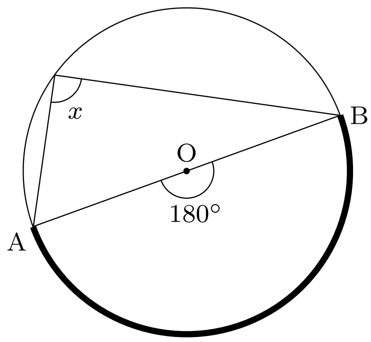


(2) 右の図を見てください。$\angle x$ は「太く描かれている弧」に対する円周角ですね。では、「太く描かれている弧」に対する中心角はどれなのでしょう。



この図で AB は円 O の直径になっているとする

では右の図を見てください。弧の両端と中心を結んで中心のところにできる角が中心角なのですから「太く描かれている弧」に対する中心角は右の図で 180° と書いてあるところですね。



この図で AB は円 O の直径になっているとする

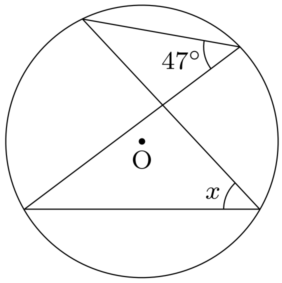
これさえわかれば、あとは円周角の定理で $\angle x$ を求めることができます。円周角の定理によれば、円周角の大きさは中心角の大きさの半分なのですから、

$$x = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$$

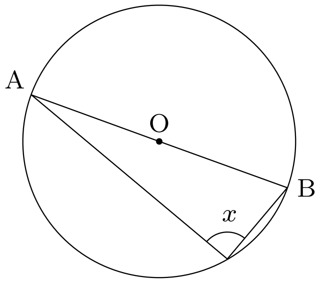
ですね。

問 6. 次の図で点 O は円の中心です。$\angle x$ の大きさを求めなさい。

(1)

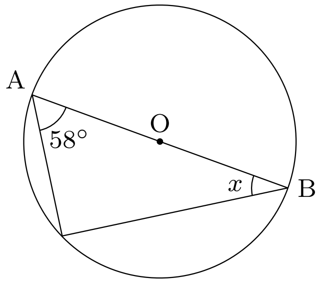


(2)



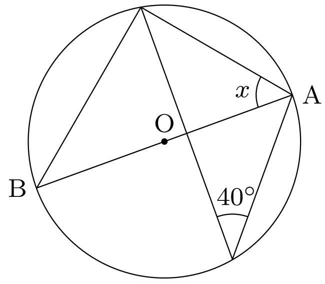
この図で AB は円 O の直径になっているとする

(3)



この図で AB は円 O の直径に
なっているとする

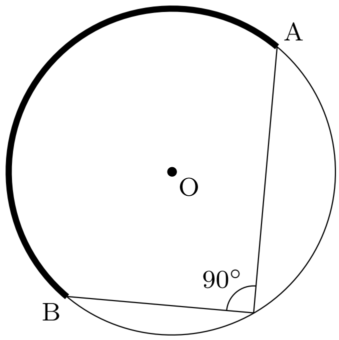
(4)



この図で AB は円 O の直径に
なっているとする

答えを見る

問 7. 右の図のように、太くなぞられている $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角の大きさが 90° になっているとします。また、O はこの円の中心です。このとき以下の問に答えなさい。



(1) $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角を図に書き込みなさい。そして円周角の定理を使って、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角の大きさを求めなさい。

(2) A と B を結んで線分 AB を作ってください。この円の中心は線分 AB の上にあると断言できるでしょうか。

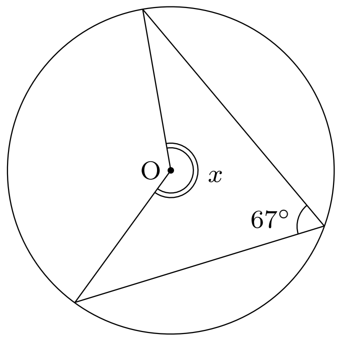
(3) 線分 AB はこの円の直径であると断言できるでしょうか。

答えを見る

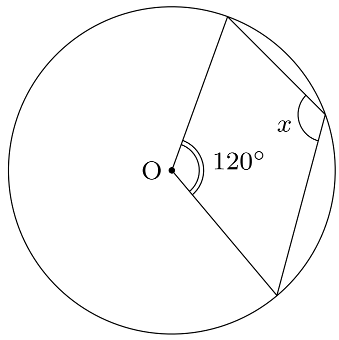
ではもう少しむずかしい問題に挑戦しましょう。

例題 5　次の図で点 O は円の中心です。$\angle x$ の大きさを求めなさい。

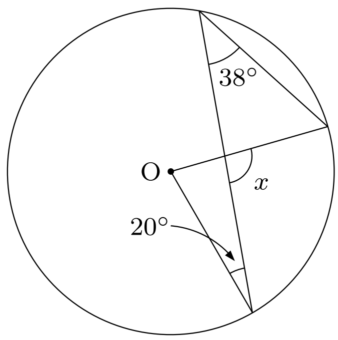
(1)



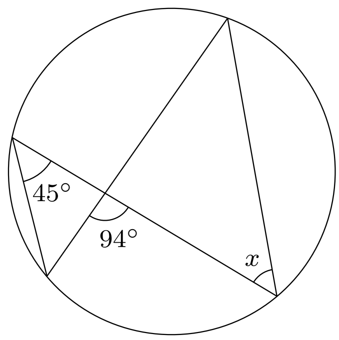
(2)



(3)

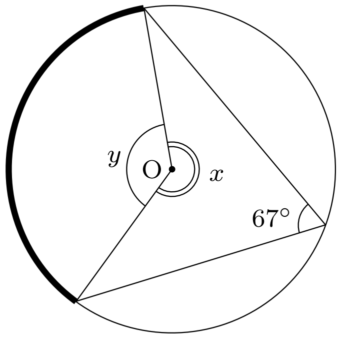


(4)



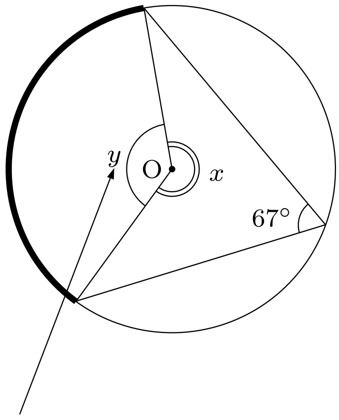
解答

例題 3 を学んだ時にも言いましたが、再び大切な注意をしておきます。「円周角」とか「中心角」という言葉を使うときには必ず「弧」のことを意識することが大切です。そもそも、弧を 1 つ決めると円周角を（いろいろ）作ることができ、弧を 1 つ決めると中心角を 1 つ作ることができるのでしたね。ですから、どの弧に対する円周角なのかということ、どの弧に対する中心角なのかということをしっかりと確認して問題を解かないといけないのです。ですから、問題を解くときに、自分で弧を太くなぞるクセをつけておくと良いでしょう。さらにいうと、円周角ではないのに円周角になっていると勘違いしたり、中心角ではないのに中心角になっていると勘違いして問題を解いてしまう人がよくいます。こういう勘違いをしてしまうと間違った答えが出ることになります。よく注意してくださいね。



(1) 右の図を見てください。問題の図をもう一度描いておきました。まず問題の図をしっかり確認しましょう。

67° の円周角はどの弧に対応しているのかはっきりさせるため、弧を太くなぞってみました。この図を見るとはっきりしますが、$\angle x$ は太くなぞられている弧に対する中心角ではありませんね。その代わり、図で y と書いておいた $\angle y$ が太くなぞられている弧に対する中心角になっています。このことに注意して問題を解いていくことにしましょう。



では右の図を見てください。今確認したように、「太くなぞられている弧に対する円周角」は 67° の角で、「太くなぞられている弧に対する中心角」は $\angle y$ ですから、円周角の定理によると、

$$y = 2 \times 67° = 134°$$

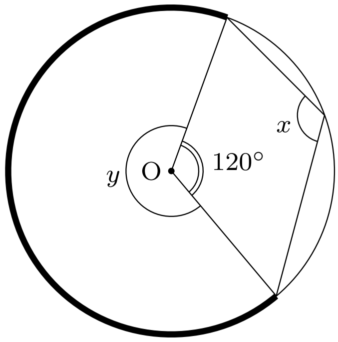
ということになりますね。

y の値が分かると x の値もわかりますよね。中心の周りを 1 周すると 360° なのですから、x の値を知りたければ 360° から y の値をひけばよいわけです。ですから、

$$x = 360° - 134° = 226°$$

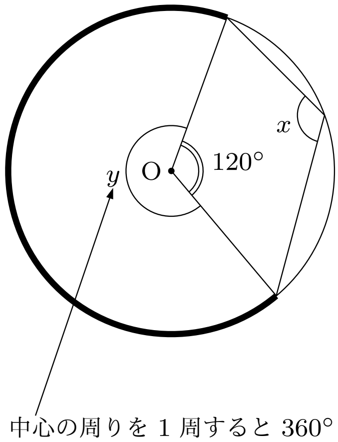
ということになりますね。これで解決しました。

(2) 右の図を見てください。問題の図をもう一度描いておきました。まず問題の図をしっかり確認しましょう。



円周角である $\angle x$ はどの弧に対応しているのかはっきりさせるため、弧を太くなぞってみました。この図を見るとはっきりしますが、120° の角は太くなぞられている弧に対する中心角ではありませんね。その代わり、図で y と書いておいた $\angle y$ が太くなぞられている弧に対する中心角になっています。このことに注意して問題を解いていくことにしましょう。

では右の図を見てください。まずどこの角の大きさなら簡単に求めれれるのかというと、$\angle y$ の大きさですよね。中心の周りを 1 周すると 360° なのですから、y の値を知りたければ 360° から 120° をひけばよいわけです。ですから、



$$y = 360° - 120° = 240°$$

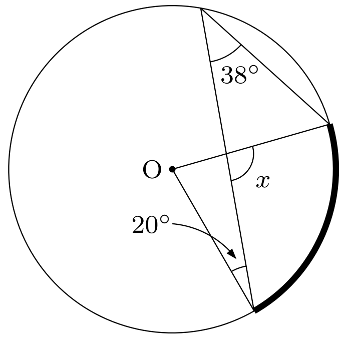
ということになりますね。これで、「太くなぞられている弧に対する中心角」は 240° であることがわかりました。

そうすると、円周角の定理より、「太くなぞられている弧に対する円周角」である $\angle x$ の大きさは、「太くなぞられている弧に対する中心角」の大きさ 240° の半分なのですから、

$$x = \frac{1}{2} \times 240° = 120°$$

ということになりますね。これで解決しました。

(3) 右の図を見てください。問題の図をもう一度描いておきました。まず問題の図をしっかり確認しましょう。

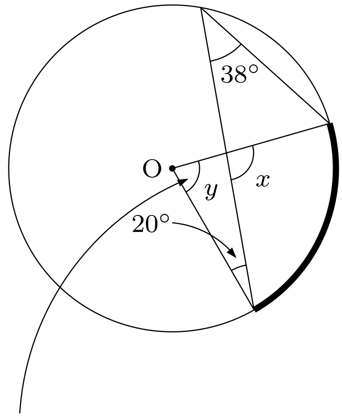


円周角である 38° の大きさの角はどの弧に対応しているのかはっきりさせるため、弧を太くなぞってみました。

またこの図を見ればすぐにわかりますが、$\angle x$ は中心角ではありませんね。このことに注意して問題を解いていくことにしましょう。

では右の図を見てください。この図では太くなぞられている弧に対する中心角を $\angle y$ としておきました。とりあえず $\angle y$ の大きさを求めることならできますよね。だって、$\angle y$ は太くなぞられている弧に対する中心角で、38° の大きさの角は太くなぞられている弧に対する円周角ですよね。ですから、円周角の定理によると、

$$y = 2 \times 38^\circ = 76^\circ$$



円周角の定理によると、中心角は円周角の 2 倍なので 38° を 2 倍して $y = 76^\circ$ であると分かる。

ということがわかりますね。これで一歩前進です。では次はどうしましょか。図をよく見て悩んでください。5 分待ちます。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

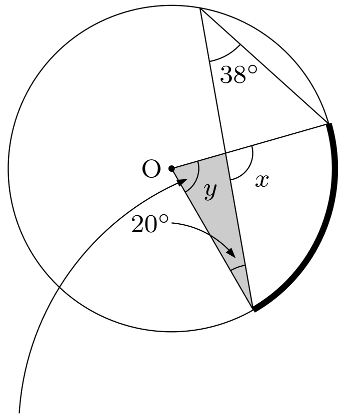
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

はい 5 分たちました。なにかよい考えは出ましたか？

では右の図を見てください。x を求めるためにとても役に立つ三角形を見つけたので灰色にしておきました。



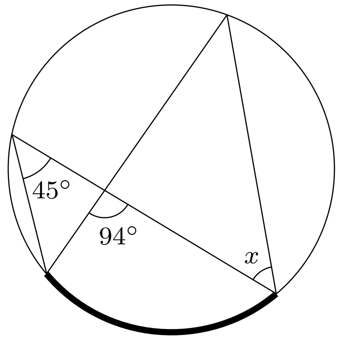
さっき $y = 76°$ であると分かった。また x は灰色の三角形の外角なので、それに隣合わない 2 つの内角の和になっているはずである。

x は灰色の三角形の外角なので、それに隣合わない 2 つの内角の和になっているはずですね。ですから、

$$x = 20° + 76° = 96°$$

ということがわかりますね。これで解決しました。

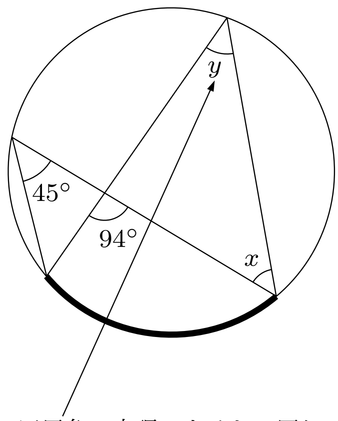
(4) 右の図を見てください。問題の図をもう一度描いておきました。まず問題の図をしっかり確認しましょう。



45° の円周角はどの弧に対応しているのかはっきりさせるため、弧を太くなぞってみました。

またこの図を見ればわかりますが、94° の角は中心角ではありませんね。このことに注意して問題を解いていくことにしましょう。

では右の図を見てください。この図には 45° の角の他にも「太くなぞられている弧に対する中心角」がありますね。その角を $\angle y$ としておきました。とりあえず $\angle y$ の大きさを求めることならできますよね。だって、円周角の定理によれば、同じ弧に対する円周角の大きさは同じなのですよね。ですから、



円周角の定理によると、同じ弧に対する円周角の大きさは等しいので $y = 45°$ であると分かる。

$$y = 45°$$

ということがわかりますね。これで一歩前進です。で

は次はどうしましょか。図をよく見て悩んでください。5 分待ちます。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

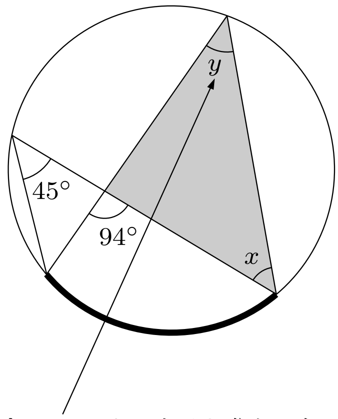
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

はい 5 分たちました。なにかよい考えは出ましたか？

では右の図を見てください。x を求めるためにとても役に立つ三角形を見つけたので灰色にしておきました。



さっき $y = 45°$ であると分かった。また 94° の角は灰色の三角形の外角なので、それに隣合わない 2 つの内角の和になっているはずである。

94° の大きさの角は灰色の三角形の外角なので、それに隣合わない 2 つの内角の和になっているはずですね。ですから、

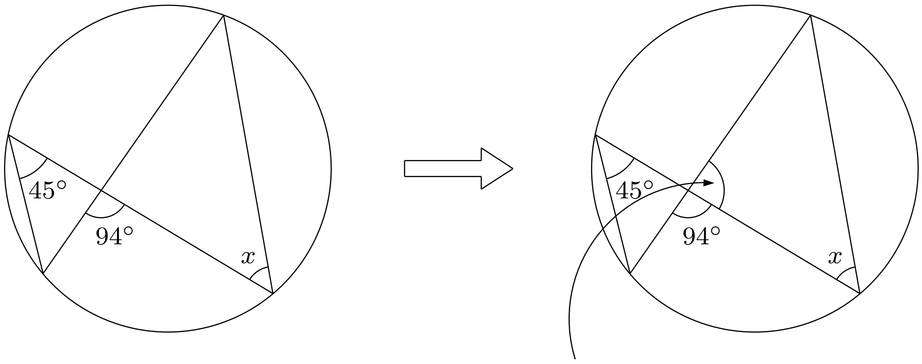
$$94° = x + 45°$$

が成り立っていることになります。ですから、

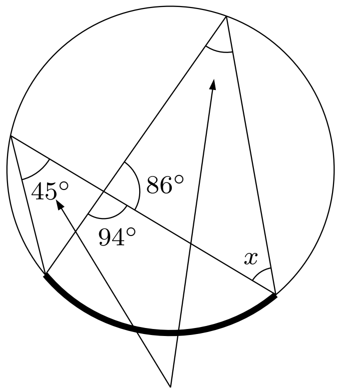
$$x = 94° - 45° = 49°$$

ということになりますね。これで解決しました。

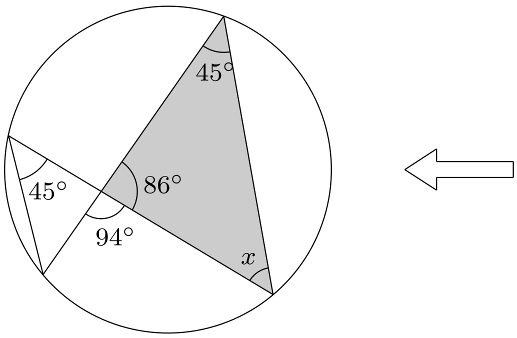
補足：当たり前のことですが、こういう問題の解き方は 1 通りではありません。人によって違う解き方があるわけです。例えば次のように考えて解いた人もいるかもしれません。



180° から 94° をひけばこの角の大きさがわかる。つまりこの角の大きさは $180° - 94° = 86°$ である。



どちらも太くなぞられている弧の円周角である。だから大きさは同じ。どっちも 45°



灰色の三角形で、内角の和は 180° であることを使えば x を求めることができる。

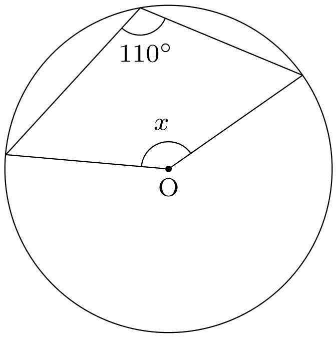
$$\begin{aligned} x &= 180° - (45° + 86°) \\ &= 180° - 131° \\ &= 49° \end{aligned}$$

となる。

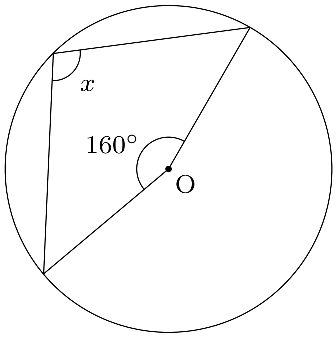
どうですか？このように考えていっても正しい答えが出せましたね。

問 8. 次の図で点 O は円の中心です。$\angle x$ の大きさを求めなさい。

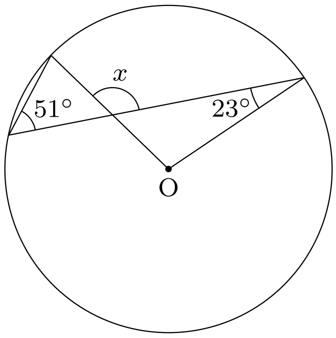
(1)



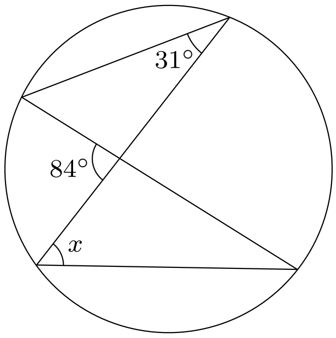
(2)



(3)



(4)



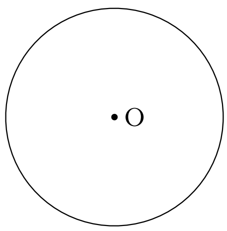
答えを見る

2.3　円周角と弧の長さにはどんな関係があるの？

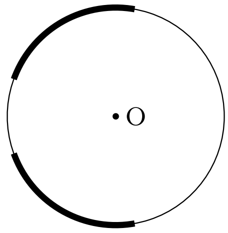
2.3.1　おさらい：中心角の大きさと弧の長さの関係

ここでは念のためのおさらいをします。本当はもう、7 ページ「1.1 円と弧と中心角」でもおさらいしているので今さらおさらいしなくても良いのですが、忘れている人がいると困るのでここで簡単に思い出しておくことにします。

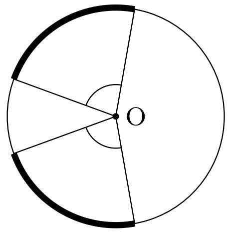
- まず 1 つの円があるとします。



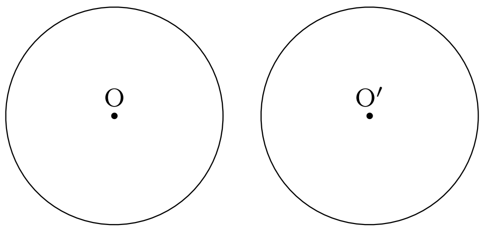
次にこの円の上に 2 つ弧を決めます。



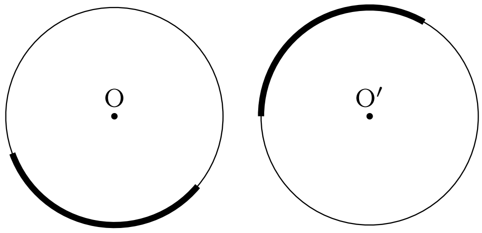
このとき、もし 2 つの弧の長さが等しくなっていたら、それぞれの弧に対する中心角の大きさは等しいと断言できます。



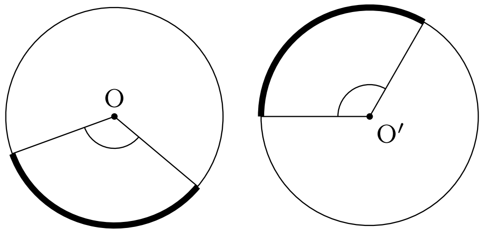
- まず 2 つの円があるとします。2 つの円の半径は同じだとします。（乱暴な言い方をすると、2 つの円の大きさは同じということです。）



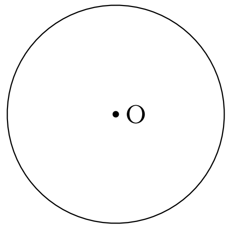
次にそれぞれ円の上に弧を 1 つ決めます。



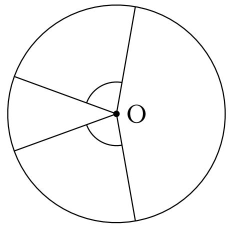
このとき、もし 2 つの弧の長さが等しくなっていたら、それぞれの弧に対する中心角の大きさは等しいと断言できます。



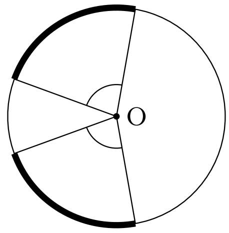
- まず 1 つの円があるとします。



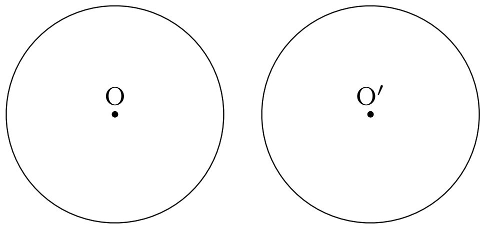
次にこの円に中心角を 2 つ決めます。



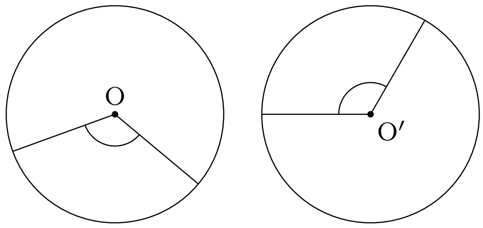
このとき、もし 2 つの中心角の大きささが等しくなっていたら、それぞれの中心角に対する弧の長さは等しいと断言できます。



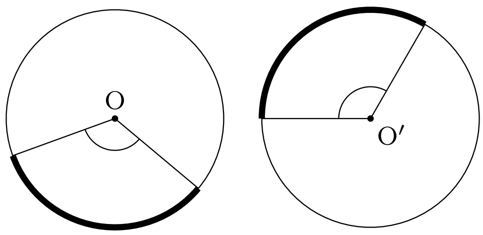
- まず 2 つの円があるとします。2 つの円の半径は同じだとします。(乱暴な言い方をすると、2 つの円の大きさは同じということです。)



次にそれぞれ円の上に中心角を 1 つ決めます。



このとき、もし 2 つの中心角の大きさが等しくなっていたら、それぞれの中心角に対する弧の長さは等しいと断言できます。

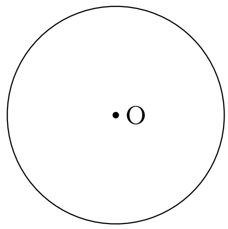


おさらい終わり

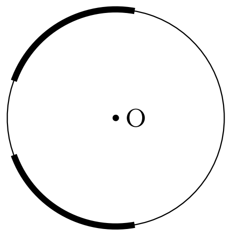
2.3.2　円周角の大きさと弧の長さの関係

　円周角の定理によれば、円周角の大きさは中心角の大きさの半分になっているのでしたね。また、さっきまでおさらいしていたこと（つまり 70 ページから始まる「おさらい：中心角の大きさと弧の長さの関係」）によると、1 つの円で中心角や弧がいくつかきめてある場合や大きさの等しい 2 つの円がありそれぞれの円に中心角や弧が決めてある場合、弧の長さが等しければ中心角の大きさは等しいと断言できますし、中心角の大きさが等しければ弧の長さは等しいと断言できるのでしたね。ということは円周角についても中心角の時と同じように次のようなことが成り立っていることになります。

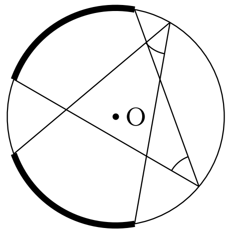
- まず 1 つの円があるとします。



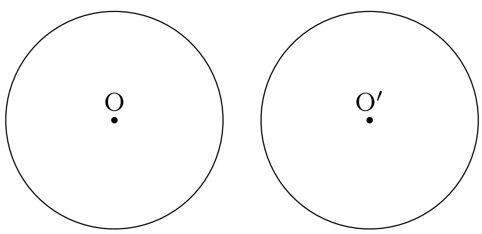
次にこの円の上に 2 つ弧を決めます。



このとき、もし 2 つの弧の長さが等しくなっていたら、それぞれの弧に対する円周角の大きさは等しいと断言できます。

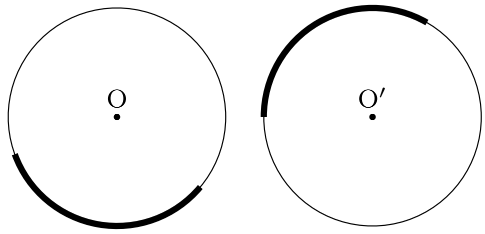


- まず 2 つの円があるとします。2 つの円の半径は同じだとします。（乱暴な言い方をすると、2 つの円の大きさは同じということ

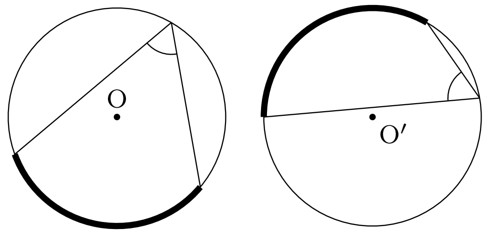


とです。)

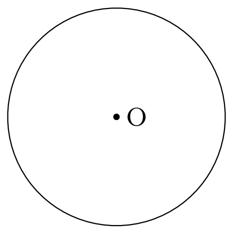
次にそれぞれ円の上に弧を 1 つ決めます。



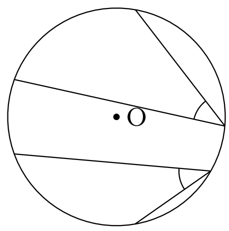
このとき、もし 2 つの弧の長さが等しくなっていたら、それぞれの弧に対する円周角の大きさは等しいと断言できます。



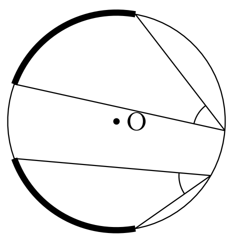
- まず 1 つの円があるとします。



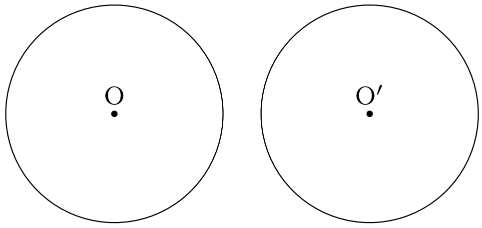
次にこの円に円周角を 2 つ決めます。



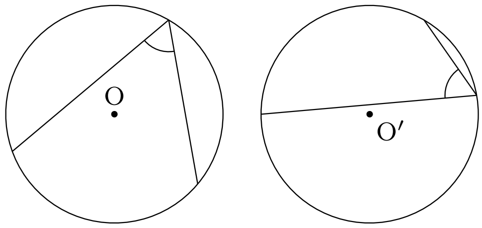
このとき、もし 2 つの円周角の大きささが等しくなっていたら、それぞれの円周角に対応している弧の長さは等しいと断言できます。



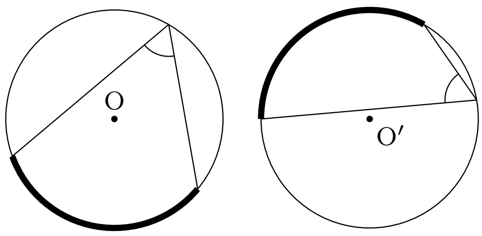
- まず 2 つの円があるとします。2 つの円の半径は同じだとします。（乱暴な言い方をすると、2 つの円の大きさは同じということです。）



次にそれぞれ円の上に円周角を 1 つ決めます。

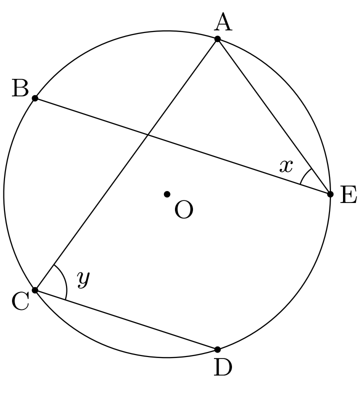


このとき、もし 2 つの円周角の大きさが等しくなっていたら、それぞれの円周角に対応している弧の長さは等しいと断言できます。

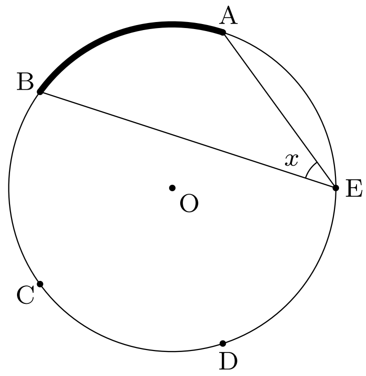


それでは前におさらいした「中心角の大きさと弧の長さの関係」や今学んだばかりの「円周角の大きさと弧の長さの関係」をしっかりと頭にいれて、いろいろな問題を解いてみることにしましょう。

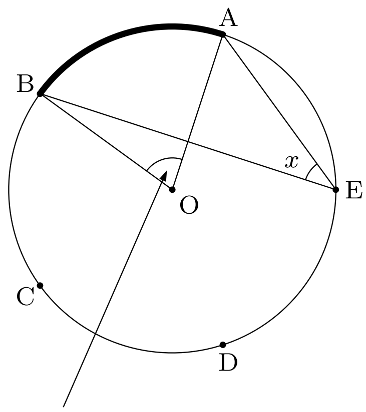
例題 6　右の図を見てください。円 O の円周上に 5 つの点 A、B、C、D、E があります。この 5 つの点によって円周は 5 等分されているとします。この図の $\angle x$、$\angle y$ の大きさを求めなさい。



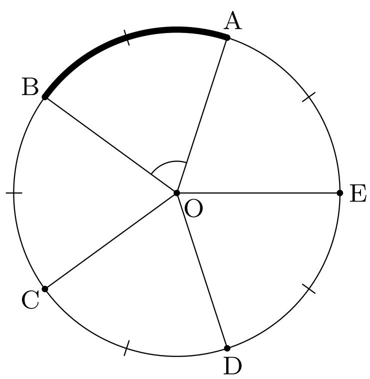
解答



右の図を見てください。まず $\angle x$ の大きさを求めることにします。そのために必要な線だけ残した図を作りました。この図を見ればすぐにわかりますが、$\angle x$ は「弧 AB に対する円周角」になっていますね。ということは、例えば「弧 AB に対する中心角」の大きさがわかれば、円周角の定理を頼りにして $\angle x$ の大きさを求めることができます。そこで「弧 AB に対する中心角」の大きさはわかるのかどうか考えてみましょう。



では右の図を見てください。「弧 AB に対する中心角」を描いてみました。いったいこの角の大きさは何度なのでしょうか。



右の図を見るとわかると思いますが、5 つの点 A、B、C、D、E によってて円周は 5 等分されているのですから、中心角も 5 等分されているはずです。ですから、

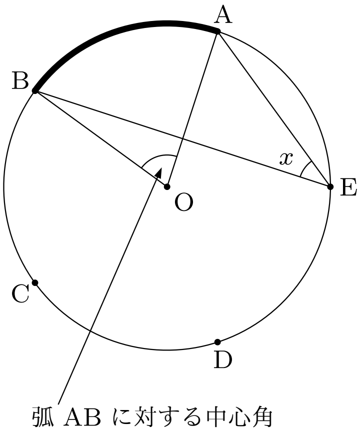
$$\text{弧 AB に対する中心角の大きさ} = 360^\circ \div 5 = 72^\circ$$

ということになりますね。

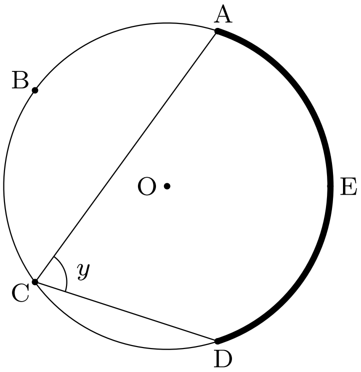
これでいよいよ $\angle x$ の大きさを求めることができますね。右の図を見てください。円周角の定理によれば円周角の大きさは中心角の大きさの半分です。ですから $\angle x$ の大きさは

$$x = 72° \div 2 = 36°$$

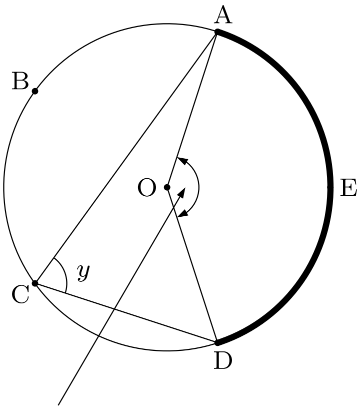
ということになりますね。



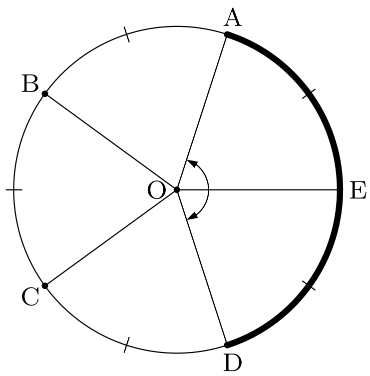
右の図を見てください。次に $\angle y$ の大きさを求めることにしましょう。そのために必要な線だけ残した図を作りました。この図を見ればすぐにわかりますが、$\angle y$ は「弧 DA に対する円周角」になっていますね。そうすると、例えば「弧 DA に対する中心角」の大きさがわかれば、円周角の定理を頼りにして $\angle y$ の大きさを求めることができます。そこで「弧 DA に対する中心角」の大きさはわかるのかどうか考えてみましょう。



では右の図を見てください。「弧 DA に対する中心角」を描いてみました。いったいこの角の大きさは何度なのでしょうか。



右の図を見るとわかると思いますが、5 つの点 A、B、C、D、E によってて円周は 5 等分されているのですから、中心角も 5 等分されているはずです。ですから、5 等分されたうちの 2 個分が「弧 DA に対する中心角の大きさ」となるはずです。つまり、



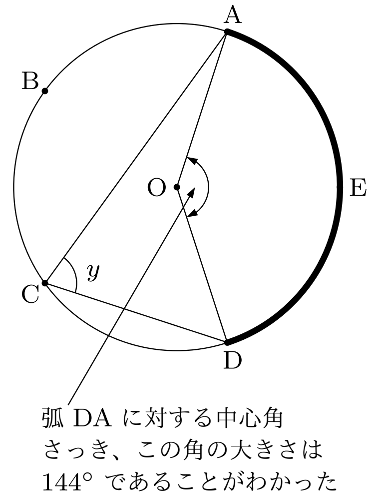
$$\text{弧 DA に対する中心角の大きさ} = 360^\circ \div 5 \times 2 = 144^\circ$$

ということになりますね。

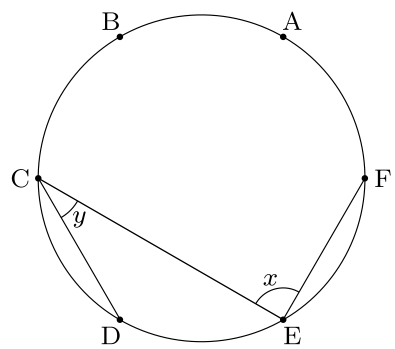
これでいよいよ $\angle y$ の大きさを求めることができますね。右の図を見てください。円周角の定理によれば円周角の大きさは中心角の大きさの半分です。ですから $\angle y$ の大きさは

$$x = 144^\circ \div 2 = 72^\circ$$

ということになりますね。



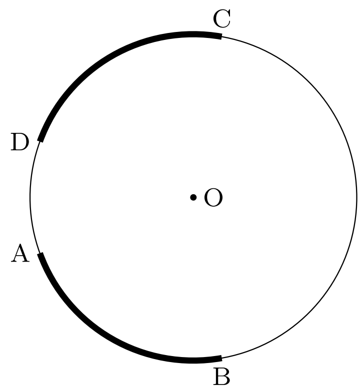
問 9. 右の図を見てください。円の円周上に 6 つの点 A、B、C、D、E、F があります。この 6 つの点によって円周は 6 等分されているとします。この図の $\angle x$、$\angle y$ の大きさを求めなさい。



答えを見る

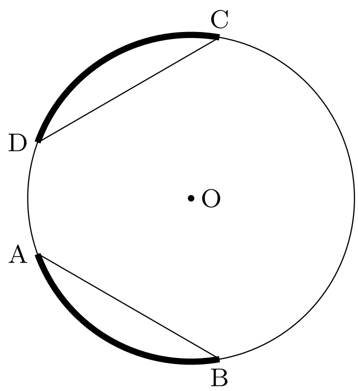
例題 7　弧の長さが等しかったら弦の長さも等しいと断言できるのか考える問題

まず右の図を見てください。ある円 O の円周上に 2 つの弧が太くなぞられています。この図では 2 つの弧をそれぞれ $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$、$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ と呼ぶことにします。



次は右の図を見てください。それぞれの弧で弧の両端の点をまっすぐ結び、弦 AB と弦 CD を作ってみます。

このときもし、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の長さと $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ の長さが等しいくなっているということが判明したら、弦 AB と弦 CD の長さは等しいと断言して良いのでしょうか。きちんと証拠を示して説明しなさい。



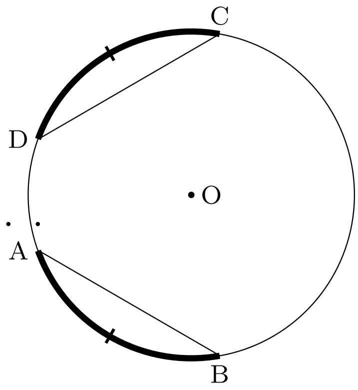
解答

もしかすると、「$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の長さと $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ の長さが等しいんだったら、弦 AB と弦 CD の長さは等しいって断言して良いに決まっているじゃん。そんなの当たり前だよ。いちいち証拠なんかいらないよ。」って思った人も多いかもしれませんね。

結論を先に言っておきましょう。実は、「$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の長さと $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ の長さが等しいくなっているということが判明したら弦 AB と弦 CD の長さは等しいって断言してよい」のですが、きちんと証拠を見せるべきです。数学では何事もきちんとした証拠が必要です。「証拠のないことは信じない」というのが数学なのですから。というわけで証拠を探すことにしましょう。

では右の図を見てください。あなたのためにもう一度問題の図を描いておきました。そして今、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ と $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ の長さは等しいということから話が始まるのですから、それぞれの弧に同じ短い縦棒をつけ、「長さは等しいんだよ」と強調しておきました。これから「弦 AB の長さと弦 CD の長さは等しくなっている証拠」を見つけたいわけですが、どうです

か、なにか証拠は見つかりそうですか？では 10 分待ちます。考えてみてください。



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

はい、10 分たちました。なにかよい考えは出ましたか？もしかすると、全然よい考えがでなくて困っている人も多いかもしれませんね。だって、この図には手がかりかあるような感じがしませんからね。でもちゃんと手がかりはあるのです。手がかりを探そうとするときに、どんな議論をすれば弦 AB と弦 CD の長さが等しいと断言できるのかということを考えてみてください。そうすると、なにかよい考えが出るかもしれません。そこでもう一度 10 分待つことにします。

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

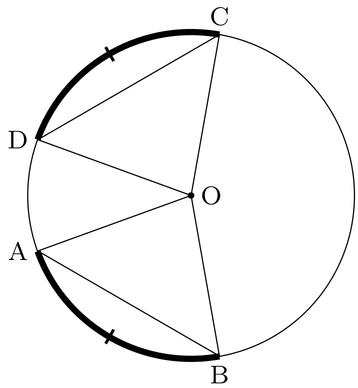
. . . .

. . . .

はい、10 分たちました。今度こそ、なにかよい考えは出ましたか？「どんな議論をすれば

弦 AB と弦 CD の長さが等しいと断言できるのか」ということを考えてほしいと言っておいたのですがわかりましたか？そうです、かなり昔から使っているいつもの手を使えばよいのです。つまり、別の場所にある 2 つの線分の長さが等しいということを断言したければ、その 2 つの線分を含む図形を 2 つ見つけ、その 2 つの図形が合同であるということを示せばよいですね。そういうことが頭にあれば、この問題では、弧の両端を中心と結んで三角形をつくってみると良さそうな感じがしませんか？

では右の図を見てください。いま言ったように、2 つの弧でそれぞれ、弧の両端を中心と結んで 2 つの三角形をつくってみました。△AOB と △COD のことですよ。この 2 つの三角形が合同であるということを示すことができれば、(2 つの三角形はぴったり重ねられるということになるので）AB の長さと CD の長さは等しいということが言えますよね。これが証拠探しの方針です。



それではこれから、△AOB と △COD が合同であるという証拠を探すことにしましょう。ここから先はあなたが以下の文の空欄に正しい言葉や記号を記入して証明を完成ください。

（証明）

△AOB と △COD において、

円は中心からの距離が等しい点を集めてできている図形なので、

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OC} \cdots ①$$

$$\mathrm{OB} = \boxed{} \cdots ②$$

が成り立っています。

ある 1 つの円に 2 つの弧がある場合、その 2 つの弧の長さが等しければその 2 つの弧に対応している中心角の大きさも等しいと断言して良いので、（いま、$\overparen{\mathrm{AB}}$ と $\overparen{\mathrm{CD}}$ の長さ

は等しいのですから)、

$$\angle \mathrm{AOB} = \angle \boxed{} \cdots ③$$

であると断言できます。

よって①、②、③より $\triangle\mathrm{AOB}$ と $\triangle\mathrm{COD}$ では 2 組の辺の長さとその間にある $\boxed{}$ の大きさが等しいということが判明したので、

$$\triangle\mathrm{AOB} \equiv \triangle\mathrm{COD}$$

であると断言できます。

合同な図形では対応している辺の長さも当然等しいので、

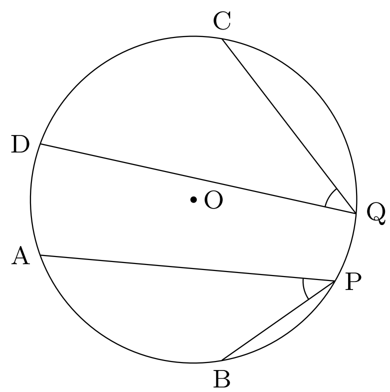
$$\mathrm{AB} = \mathrm{CD}$$

であると断言できますね。

（証明終わり）

問 10. 円周角の大きさささが等しかったら弦の長さも等しいと断言できるのか考える問題

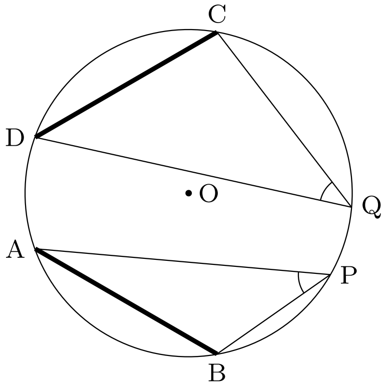
まず右の図を見てください。ある円 O に 2 つの円周角があるとします。この図の $\angle\mathrm{APB}$ と $\angle\mathrm{CQD}$ のことです。



次は右の図を見てください。点 A と点 B をまっすぐ結んで弦 AB を作り、点 C と点 D をまっすぐ結んで弦 CD を作りました。

このときもし、円周角 $\angle\mathrm{APB}$ の大きさと円周角 $\angle\mathrm{CQD}$ の大きさが等しいくなっているということが判

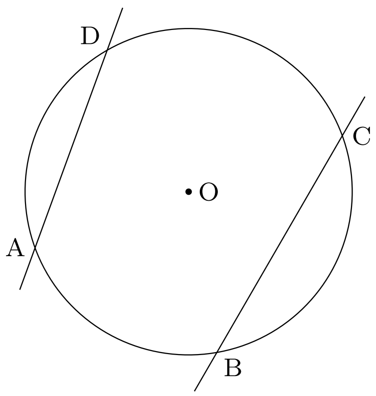
明したら、弦 AB と弦 CD の長さは等しいと断言して良いのでしょうか。きちんと証拠を示して説明しなさい。



答えを見る

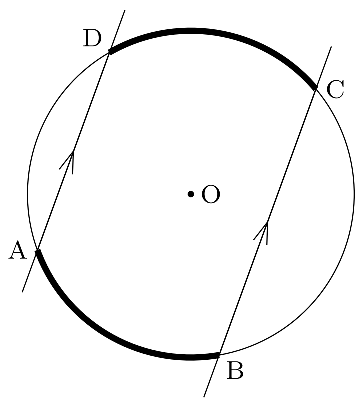
例題 8　右の図のように、ある円 O に 2 本の直線が交わっているとします。すると、2 本の直線にはさまれたところに弧が 2 つできます。この図の $\overset{\frown}{AB}$ と $\overset{\frown}{CD}$ のことです。

このとき、もし、2 本の直線が平行だったら、$\overset{\frown}{AB}$ と $\overset{\frown}{CD}$ の長さは等しくなると断言できますか。きちんと証拠を示して説明しなさい。



解答

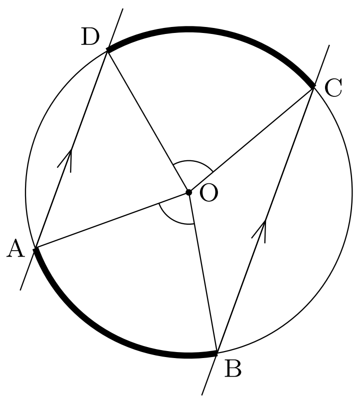
問題の図では 2 つの直線が平行には見えません。そこで、2 つの直線が平行に見えるようにかなり正確な図を右に描いてみました。そして、$\overset{\frown}{AB}$ と $\overset{\frown}{CD}$ を太くなぞってみました。



どうですか？ $\overset{\frown}{AB}$ と $\overset{\frown}{CD}$ の長さは同じに見えますか？それとも違って見えますか？多分「同じ長さなんじゃないの」って思った人が多いことでしょう。しかし今私たちは数学を学習しています。見た目だけでは断言してはいけないのですよね。つまりきちんとした証拠が必要なわけです。というわけで、証拠探しをすることにしましょう。

私たちは以前、70 ページから 75 ページにかけて、「中心角の大きさが等しかったら弧の長さも等しい」ということや、「円周角の大きさが等しかったら弧の長さも等しい」ということを学びましたね。こういうことが頼りになるかどうか考えてみましょう。ですから、問題の図にいくつか線を付け加え、中心角が出てくるようにしたり円周角が出てくるようにしてみることにします。

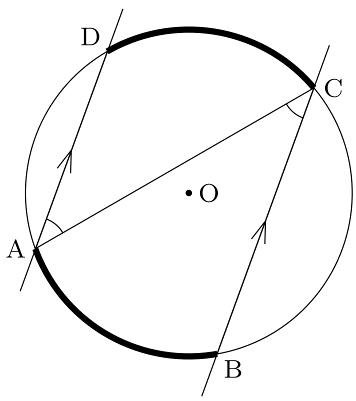
では右の図を見てください。円の中心と弧の両端を結んで $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角と $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する中心角が出てくるようにしてみました。



この図をじっくり見て、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角の大きさと $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する中心角の大きさが等しいという証拠が見つかれば、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の長さと $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ の長さも等しいと断言できるわけですね。では、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角の大きさと $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する中心角の大きさが等しいという証拠を見つけることはできるでしょうか？

うーん、これら 2 つの中心角と 2 つの直線はあまり相性が良くないですよね。2 つの直線が平行にっているということを中心角の話と結びつけるのは難しいのかもしれません。うーん、2 つの直線が平行なっているということを角の話と結びつけたいのですが・・・あっ、きっと同位角とか錯角というのをどこかに見つければよいのではないでしょうか。だって、平行な 2 つの直線では、同位角の大きさは等しくなっていますし、錯角の大きさは等しくなっていますよね。あー。そうか、だったら今みたいに中心角なんて作らずに、例えば A と C を結んで円周角を作ったほうが良かったですよね。

では右の図を見てください。A と C を結んで $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角 $\angle\mathrm{ACB}$ と $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する円周角 $\angle\mathrm{CAD}$ が出てくるようにしてみました。



この図をじっくり見て、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角の大きさと $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する円周角の大きさが等しいという証拠が見つかれば、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の長さと $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ の長さも等しいと断言できるわけですね。この先は以下の文の空欄をあなたに正し

く埋めてもらうことにより、証明を完成したいと思います。

（証明）

　A と C を結びます。

　平行な 2 つの直線では錯角の大きさは等しいので、

$$\angle\mathrm{ACB} = \angle\boxed{}$$

が成り立っています。

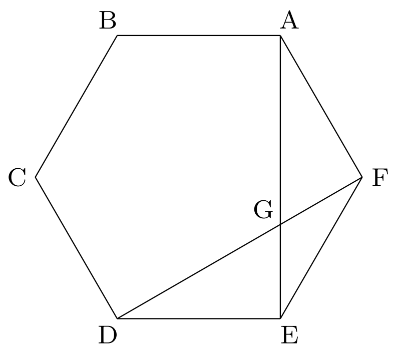
　ということは「$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角 ∠ACB の大きさ」と「$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する円周角 ∠CAD の大きさ」は $\boxed{}$ ということになるので、弧の長さについても、

$$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \overset{\frown}{\mathrm{CD}}$$

が成り立っていると断言できます。

（証明終わり）

例題 9　右の図を見てください。P さんはある日、正六角形 ABCDEF をまず描き、次に、対角線 AE と対角線 FD を引いてみました。そして対角線 AE と対角線 FD の交点を G と呼ぶことにしました。このとき、正六角形 ABCDEF の中に △EFG ができますが、P さんはこの図を見ているうちに △EFG は二等辺三角形なのではという気がしてきました。しかしいくら考えても P さんには「△EFG が二等辺三角形であるという証拠」を見つけることはできませんでした。そこで P さんの代わりに、あなたに考えてもらうことにします。



(1)　ある三角形が二等辺三角形であるということを示すには、

　　その三角形では 2 つの辺の長さが等しくなっているという証拠を見つける

という方法と、

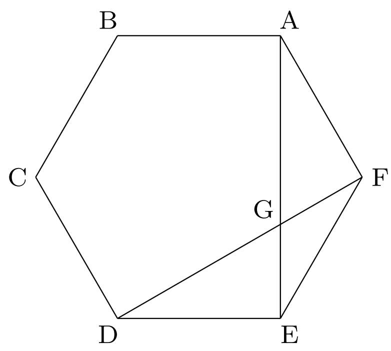
その三角形では 2 つの角の大きさが等しくなっているという証拠を見つける

という方法がありますよね。△EFG が二等辺三角形であるということを証明する場合、あなたならどちらの方法を選びますか。

(2) △EFG は二等辺三角形であることを証明しなさい。

解答

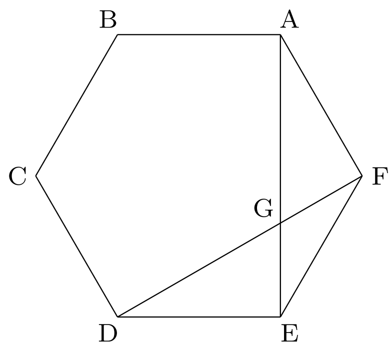
あることがらを証明する方法は必ずしも 1 通りとは限りません。色々と違う方法で同じことを証明できることがあります。ですからこの問題の答えも 1 つとは限りません。しかし、すべての証明法をここで説明するわけにもいきませんから、ここでは円周角と弧の関係を頼る方法を紹介することにします。



(1) 右の図を見てください。あなたのためにもう一度この問題の図を描いておきました。この六角形はただの六角形ではなく正六角形なのですから、6 個の辺の長さはすべて等しいわけです。しかし問題の図を見ても、今のところこれ以外、辺の長さの情報はありません。ですか辺の長さの話を頼りに証明を進める場合、色々と悩むことが多くなりそうです。（まぁ、それで悪いというわけではないのですが）そこでここでは角の大きさを頼りにして考えていこうと思います。つまり、

△EFG では 2 つの角の大きさが等しくなっているという証拠を見つける

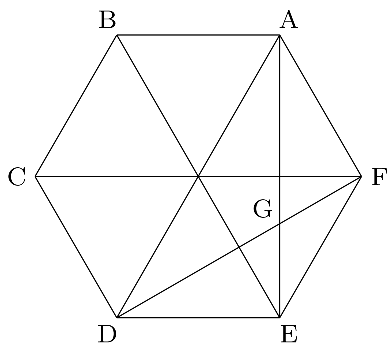
という方法を選ぶことにします。



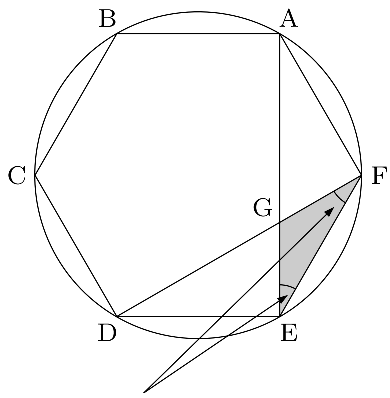
(2) 右の図を見てください。あなたのためにもう一度この問題の図を描いておきました。 (1) で、角の大きさを頼りに議論をしていくことにしたのでしたね。でも、もしかすると、「図を見ても角の大きさなんて全然わからないじゃん。」って思った人も

いるかもしれません。

でも例えば、右の図のように対角線をいくつか描いて見ると、正三角形がたくさん出て来るので、いろいろなところに 60° の角があることがわかります。ですから、工夫次第で色々と角の大きさを頼って議論を進めることはできそうです。うーん、でもどうせ角の話をするなら、対角線を正六角形にかいてみるより、正六角形の外側に円を描いてみるほうが話が早く進みそうです。どういうことか説明することにしましょう。

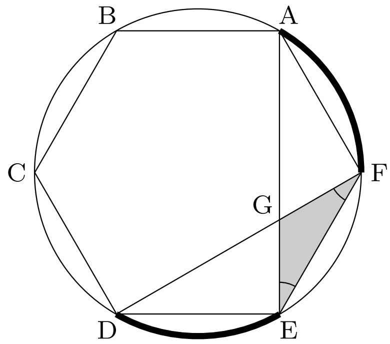


右の図を見てください。正六角形の外側に円を描いてみました。そして、二等辺三角形であることを証明しようとしている三角形を灰色にしておきました。この灰色の三角形が二等辺三角形であるということを証明するには、$\angle$GEF と $\angle$GFE の大きさが等しいという証拠を見つければ良いのですよね。



この 2 つの角の大きさが等しいという証拠が見つかれば、灰色の三角形は二等辺三角形であると断言できる

では右の図を見てください。注目してほしい 2 つの弧を太くなぞってみました。この図を見ると解ると思いますが、$\angle$GEF は $\overset{\frown}{\mathrm{DE}}$ に対する円周角になっていて、$\angle$GFE は $\overset{\frown}{\mathrm{FA}}$ に対する円周角になっていますね。ここで前に学んだ「円周角の大きさと弧の長さの関係」を思い出してみましょう。たしか、「弧の長さが等しければ円周角の大きさは等しいと断言できる」という話でし

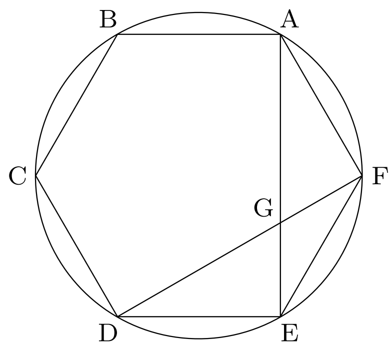


弧の長さが等しかったら円周角の大きさも等しいと断言できることを前に学んでいる。ということは、太くなぞられている 2 つの弧の長さが等しいという証拠が見つかれば、灰色の三角形で印が付いている 2 つの角の大きさは等しいと断言できる。

たね。ですからいま私たちは、$\angle$GEF と $\angle$GFE の大きさが等しいということを示すために、$\overset{\frown}{\mathrm{DE}}$ と $\overset{\frown}{\mathrm{FA}}$ の長さが等しいという証拠を見つければ良いわけですね。しかし、$\overset{\frown}{\mathrm{DE}}$ と $\overset{\frown}{\mathrm{FA}}$ の長さが等しいというということは明らかと言って良いでしょう。六角形 ABCDEF は正三角形なのですから A、B、C、D、E、F は円周を 6 等分しているからです。

以上が証明のあらずじです。ここまで考えてきたことを整理して、数学の答案っぽい証明を書くことにします。

（証明）



右の図のように、まず、正六角形 ABCDEF の頂点がすべてピッタリ乗るような円を描くことにします。$\angle$GFE は $\overset{\frown}{\mathrm{DE}}$ に対する円周角になっていて、$\angle$GEF は $\overset{\frown}{\mathrm{FA}}$ に対する円周角になっていることに注意しておきましょう。

六角形 ABCDEF は正六角形ですから、A、B、C、D、E、F は円周を 6 等分しています。ですから特に、

$$\overset{\frown}{\mathrm{DE}} \text{ の長さと } \overset{\frown}{\mathrm{FA}} \text{ の長さは等しい} \cdots ①$$

と断言できます。

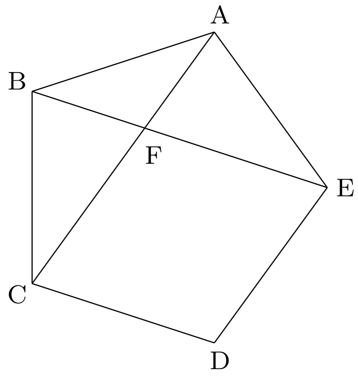
ここで前に学んだ「円周角の大きさと弧の長さの関係」を思い出してみましょう。たしか、「弧の長さが等しければ円周角の大きさは等しいと断言できる」という話でした。ということは、①より、

$$\angle \mathrm{GFE} \text{ の大きさと } \angle \mathrm{GEF} \text{ の大きさは等しい}$$

と断言できます。

これは $\triangle$EFG では 2 つの角の大きさが等しいということを意味してるのですから、$\triangle$EFG は二等辺三角形であると断言できます。　（証明おわり）

問 11. 右の図を見てください。P さんはある日、正五角形 ABCDE をまず描き、次に、対角線 AC と対角線 BE を引いてみました。そして対角線 AC と対角線 BE の交点を F と呼ぶことにしました。このとき、正五角形 ABCDE の中に △ABF ができますが、P さんはこの図を見ているうちに △ABF は二等辺三角形なのではという気がしてきました。しかしいくら考えても P さんには「△ABF が二等辺三角形であるという証拠」を見つけることはできませんでした。そこで P さんの代わりに、あなたに考えてもらうことにします。



(1) ある三角形が二等辺三角形であるということを示すには、

　　その三角形では 2 つの辺の長さが等しくなっているという証拠を見つける

　という方法と、

　　その三角形では 2 つの角の大きさが等しくなっているという証拠を見つける

　という方法がありますよね。△ABF が二等辺三角形であるということを証明する場合、あなたならどちらの方法を選びますか。

(2) △ABF は二等辺三角形であることを証明しなさい。

(3) ついでに ∠BFC の大きさを求めなさい。

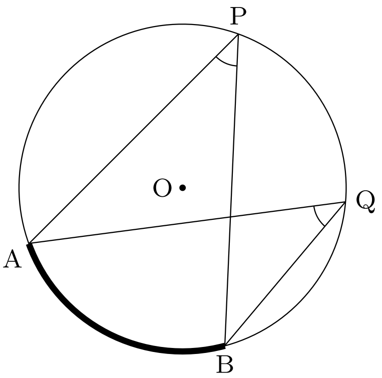
答えを見る

2.4　いくつかの点が、ある同じ円の周上にあると断言するには（円周角の定理の逆）

ある 1 つの弧に対する円周角はいくつもあるわけですが、円周角の定理によるとそれらの角の大きさは全て等しいのでしたね。

右の図を見てください。この図はある円 O と円 O の弧 AB を 1 つ決めておいて、円周角 ∠APB と ∠AQB を作ったものです。この図では、点 P や点 Q のところにできている角はどちらも、「弧 AB に対する円周角」ということになりますね。

この図のように、弧 AB は同じでも、点の場所を円周の上のいろいろな場所に変えて、いくらでも違う場所に「弧 AB に対する円周角」を作ることができるわけです。ですから、「弧 AB に対する円周角」といっても 1 つに決まっているわけではなくたくさんあるのです。

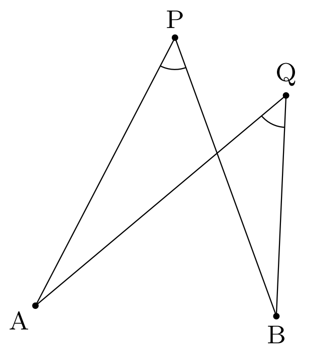


∠APB は弧 AB に対する円周角
∠AQB も弧 AB に対する円周角

しかし、驚いたことに「どの円周角も大きさは同じになっている」ということを昔の人は証明したのでしたね。（私たちも 31 ページから始まる「2.1.3 円周角の定理の定理ってどうやって証明するの」で証明しました。）

それではここであなたに質問です。

質問　右の図のように、4 つの点 A、B、P、Q があり ∠APQ の大きさと ∠AQB の大きさは等しいということがわかっているとします。このとき、4 点 A、B、P、Q は、ある 1 つの円の上に全部乗っていると断言してよいでしょうか。つまり、4 点 A、B、P、Q が全部乗るような円は存在するのでしょうか。

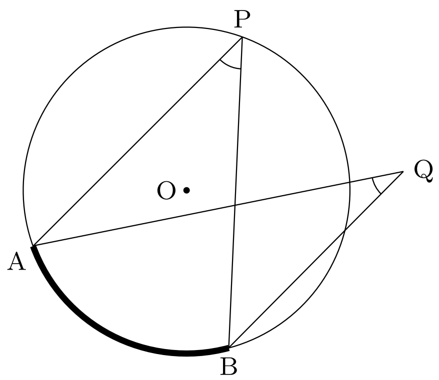


∠APB の大きさと ∠AQB の大きさは等しいとする。このとき、4 点 A、B、P、Q はある 1 つの円の上に全部乗っていると断言できる？

この質問の答えを得るために、円がもとからあるときの話を詳しく考えてみることにしましょう。

円の外にある点と弧の両端を結んでできる角の大きさを円周角の大きさと比べてみよう

右の図を見てください。円 O に 1 つ弧 AB を決めてから、円の上にある点 P を使って $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角 ∠APB を作るだけではなく、円の外にある点 Q を使って、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の両端の点と点 Q を結んで ∠AQB を作ってみました。



∠APB は弧 AB に対する円周角
∠AQB は円の外にある点 Q と弧 AB の両端を結んでできる角

ところで、∠APB と ∠AQB ではどちらの大きさが大きいのでしょうか。

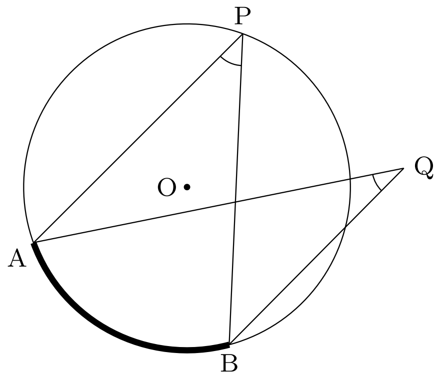
どうですか？あなたはどう思いますか？まぁ、こんなことを考えるときには、「頭の中で色々と実験をしてみて予想をたてる」のも 1 つの手です。どんな実験を頭の中でするのかというと、例えば、「点 Q は初め円の上にあるとして、そこから点 Q がどんどん円の外へ動いていったら ∠AQB の大きさってどうなるんだろう？」とか想像してみると良いのです。どんどん「細い角」になっていくのが想像できませんか？ですからきっと、点 Q が円の外へ少しでも出てしまった時にできる ∠AQB は、点 Q が円の上にあるときにできる ∠AQB と比べて「細い角」になってしまうと思われますね。

いっぽう円周角の定理によると、もし点 Q が円の上にあれば、∠APB と ∠AQB の大きさは同じですね。

このようなことを考えに入れると、点 Q が円の外にある場合、弧 AB の両端と点 Q を結んでできる ∠AQB の大きさは弧 AB に対する円周角 ∠APB の大きさより小さいと予想できますね。

問 12. この問の前の説明の続きを考えてもらう問題です。

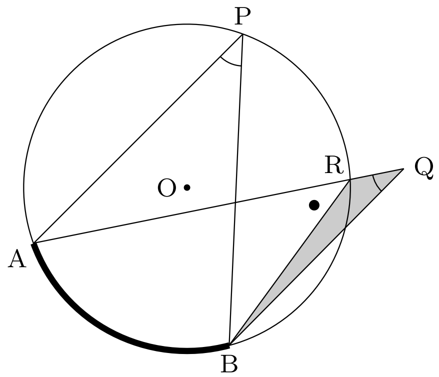
右の図を見てください。この図の $\angle$AQB の大きさは $\angle$APB の大きさより小さいということをきちんと証明しようと思います。以下の文の空欄に正しい言葉、記号を記入して証明を完成しなさい。



$\angle$APB は弧 AB に対する円周角
$\angle$AQB は円の外にある点 Q と弧 AB の両端を結んでできる角

（証明）

右の図を見てください。AQ と円の交点を R と呼ぶことにします。また R と B を結びます。そして灰色にしておいた $\triangle$BQR に注目してください。



この図で $\bullet$ をつけた角、つまり $\angle$ARB は灰色にしておいた $\triangle$BQR の外角です。ですから、

$$\bullet \text{ をつけた角の大きさ} = \angle\text{AQB の大きさ} + \angle\boxed{}\text{ の大きさ}$$

が成り立っています。この式は、「$\bullet$ をつけた角の大きさ」は「$\angle$AQB の大きさ」より「$\angle\boxed{}$ の大きさ」のぶんだけ大きいということを意味しています。ですから当然、

「$\bullet$ をつけた角の大きさ」は「$\angle$AQB の大きさ」より大きい $\cdots$①

ということになります。

一方 $\angle$APB と $\bullet$ をつけた角はどちらも $\overset{\frown}{\text{AB}}$ に対する $\boxed{\text{角}}$ です。ですから、円周角の定理によると、

「● をつけた角の大きさ」と「∠APB の大きさ」は等しい · · · ②

ということになります。

①、②より、

「∠APB の大きさ」は「∠AQB の大きさ」より大きい

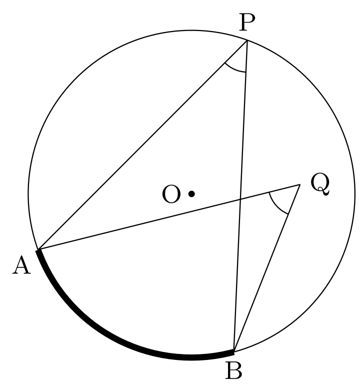
と断言できます。

（証明おわり）

答えを見る

円の中にある点と弧の両端を結んでできる角の大きさを円周角の大きさと比べてみよう

右の図を見てください。円 O に 1 つ弧 AB を決めてから、円の上にある点 P を使って $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角 ∠APB を作るだけではなく、円の中にある点 Q を使って、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の両端の点と点 Q を結んで ∠AQB を作ってみました。



∠APB は弧 AB に対する円周角
∠AQB は円の中にある点 Q と弧 AB の両端を結んでできる角

ところで、∠APB と ∠AQB ではどちらの大きさが大きのでしょうか。

どうですか？あなたはどう思いますか？まぁ、こんなことを考えるときには、「頭の中で色々と実験をしてみて予想をたてる」のも 1 つの手です。どんな実験を頭の中でするのかというと、例えば、「点 Q は初め円の上にあるとして、そこから点 Q がどんどん円の中へ動いていったら ∠AQB の大きさってどうなるんだろう？」とか想像してみると良いのです。どんどん「太い角」になっていくのが想像できませんか？ですからきっと、点 Q が円の中は外へ少しでも入ってしまった時にできる ∠AQB は、点 Q が円の上にあるときにできる ∠AQB と比べて「太い角」になってしまうと思われますね。

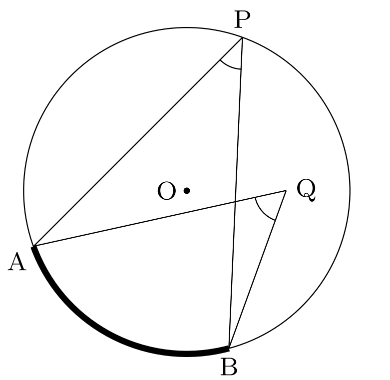
いっぽう円周角の定理によると、もし点 Q が円の上にあれば、∠APB と ∠AQB の大

きさは同じですね。

このようなことを考えに入れると、点 Q が円の中にある場合、弧 AB の両端と点 Q を結んでできる ∠AQB の大きさは弧 AB に対する円周角 ∠APB の大きさより大きいと予想できますね。

問 13. この問の前の説明の続きを考えてもらう問題です。

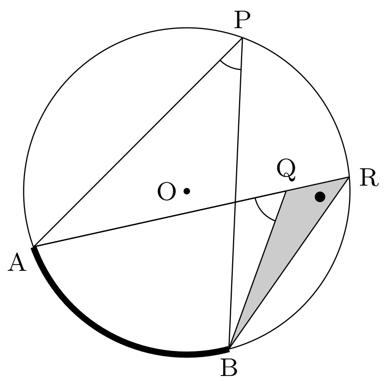
右の図を見てください。この図の ∠AQB の大きさは ∠APB の大きさより大きいということをきちんと証明しようと思います。以下の文の空欄に正しい言葉、記号を記入して証明を完成しなさい。



∠APB は弧 AB に対する円周角
∠AQB は円の外にある点 Q と弧 AB の両端を結んでできる角

（証明）

右の図を見てください。AQ を Q の方へ延長した線と円の交点を R と呼ぶことにします。また R と B を結びます。そして灰色にしておいた △BQR に注目してください。



この図で ∠AQB は灰色にしておいた △BQR の外角です。ですから、

∠AQB の大きさ ＝ ● をつけた角の大きさ ＋ ∠ $\boxed{}$ の大きさ

が成り立っています。この式は、「● をつけた角の大きさ」は「∠AQB の大きさ」より「∠ $\boxed{}$ の大きさ」のぶんだけ大きいということを意味しています。ですから当然、

「∠AQB の大きさ」は「● をつけた角の大きさ」」より大きい ···①

ということになります。

一方 ∠APB と ● をつけた角はどちらも $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する $\boxed{\quad\quad 角}$ です。ですから、円周角の定理によると、

「● をつけた角の大きさ」と「∠APB の大きさ」は等しい $\cdots$ ②

ということになります。

①、②より、

「∠AQB の大きさ」は「∠APB の大きさ」より大きい

と断言できます。

（証明おわり）

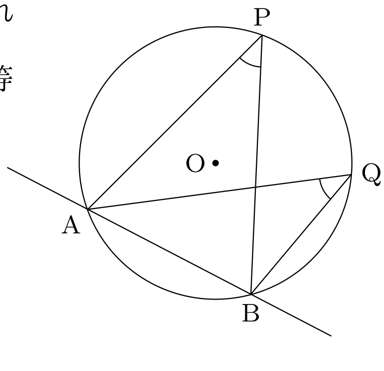
答えを見る

91 ページからここまで調べてきたことを考えに入れると次のようなことがわかります。

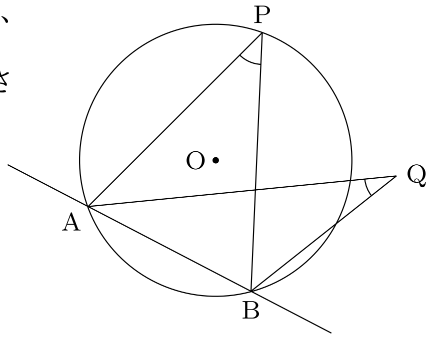
円周角の大きさと比べてみよう

ある円 O があり、その円の周上に 3 点 A、B、P が決められているとします。また、点 Q を線分 AB に関して点 P と同じ側にあるようにして、自分の好きなところに打ちます。このとき次のことが成り立っています。

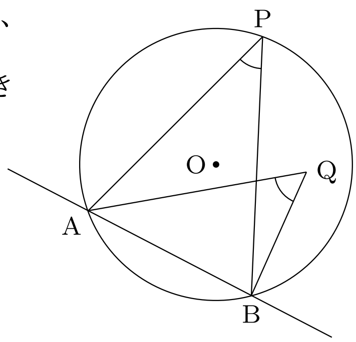
(1) 右の図のように、点 Q が円 O の周上にあれば、∠AQB の大きさは ∠APB の大きさと等しくなっています。



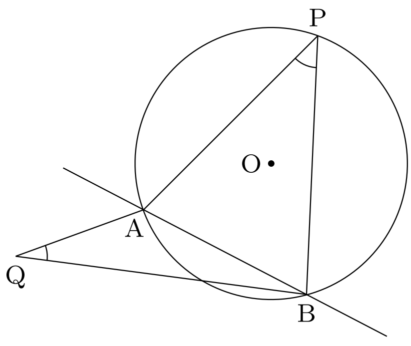
(2) 右の図のように、点 Q が円 O の外にあれば、$\angle$AQB の大きさは $\angle$APB の大きさより小さくなっています。



(3) 右の図のように、点 Q が円 O の中にあれば、$\angle$AQB の大きさは $\angle$APB の大きさより大きくなっています。

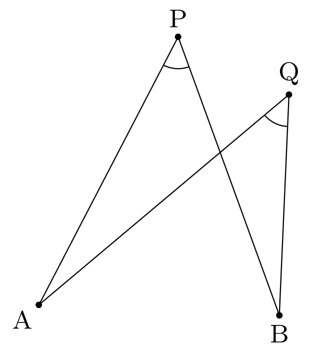


注意：右の図のように線分 AB に関して点 Q が点 P とは反対側にある場合の話は除外しています。このような場合、点 Q が円周上にあろうが、円の外にあろうが、円の中にあろうが、「$\angle$AQB の大きさが $\angle$APB の大きさと比べてどうなっているのか」ということは簡単にはわからないのです。



それではここで、いよいよ 90 ページの質問の答えを考えることにしましょう。あなたのためにもう一度、質問を次に書いておきます。

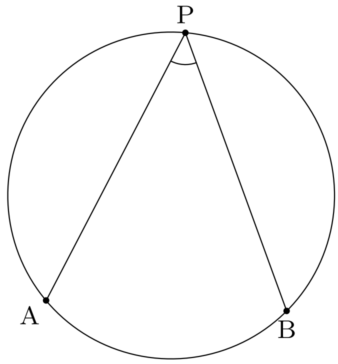
質問　右の図のように、4 つの点 A、B、P、Q があり ∠APQ の大きさと ∠AQB の大きさは等しいということがわかっているとします。このとき、4 点 A、B、P、Q は、ある 1 つの円の上に全部乗っていると断言してよいでしょうか。つまり、4 点 A、B、P、Q が全部乗るような円は存在するのでしょうか。



∠APB の大きさと ∠AQB の大きさは等しいとする。このとき、4 点 A、B、P、Q はある 1 つの円の上に全部乗っていると断言できる？

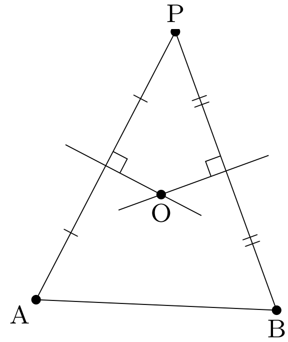
質問の答え　まず結論をいいます。4 点 A、B、P、Q は、ある 1 つの円の上に全部乗っていると断言できるのです。なぜ断言して良いのかこれから理由を説明します。

右の図を見てください。今のところ、4 つの点 A、B、P、Q が全てうまく乗るような円があるのかどうかわからないわけですが、3 つの点 A、B、P がすべてうまく乗る円だったら絶対にあります。どうして点が 3 つだけなら、そんな円があるのか説明することにしましょう。



点の数が 3 つなら、その 3 つの点がすべて乗るような円を描くことができる。理由は本文でこれから説明する。

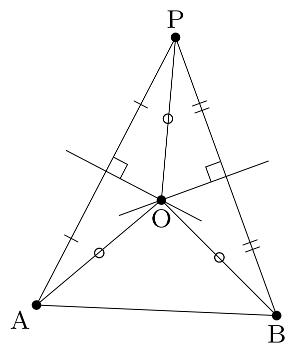
右の図を見てください。まず、3 つの点 A、B、P をむすんでできる三角形を考えることにします。そしてその三角形の 3 つの辺のうち、どれか 2 つの辺に注目することにします。どの 2 つに注目しても良いのですが、ここでは例えば辺 AP と辺 PB に注目することにします。そしてその 2 つの辺に対してそれぞれ垂直二等



3 つの点を結んでできる三角形の 2 つの辺に注目し、その 2 つの辺の垂直二等分線を描く。すると、その 2 つの垂直二等分線はある場所で交わる。

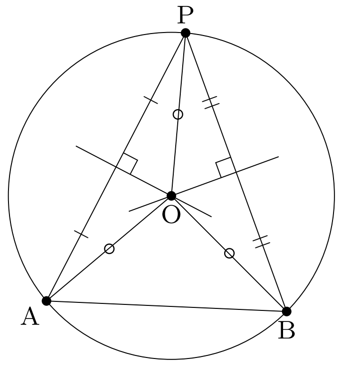
分線を描くのです。つまり、ここでは辺 AP の垂直二等分線と辺 BP の垂直二等分線を描くわけです。そうすると、2 つの垂直二等分線はある場所で交わります。この図では交点の名前を O としました。

では次に右の図を見てください。さっき見つけた点 O と 3 つの △PAB の頂点をそれぞれ結んで OP、OA、OB を作りました。実は OP、OA、OB はすべて同じ長さなのです。どうして同じ長さなのかあなたはわかりますか？線分の垂直二等分線の性質を覚えていますか？忘れてしまった人のために念のためいっておくと、「線分の垂直二等分線の上のどこに点を決めても、その点から線分の両端までの距離は等しい」のでしたね。ですから、辺 AP の垂直二等分線に注目すれば、AP と OP の長さは等しいと断言できますし、辺 BP の垂直二等分線に注目すれば、BP と OP の長さは等しいと断言できるわけです。



線分の垂直二等分線の上のどこに点を決めても、その点から線分の両端までの距離は等しいので、OP、OA、OB の長さはすべて等しいと断言できる。

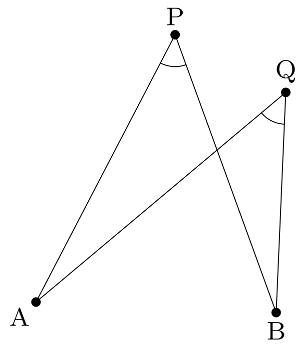
では次に右の図を見てください。さっき、OP、OA、OB の長さが全て等しいということが判明したのですから、コンパスの幅を OP の長さと同じにして、コンパスの針を O にさしてコンパスをくるっと 1 回転すれば、P、A、B がすべて乗っているような円を描くことができますね。



OP、OA、OB の長さはすべて等しいことが判明したので、O を中心にして P、A、B がすべて乗っているような円を描くことができる。

これで、点の数が 3 つならばそれら 3 つの点がすべて乗るような円を絶対に作ることができるということがわかりました。（三角形の外接円というものを知っている人にとっては、これはもう、とっくに知っていたことですね。）

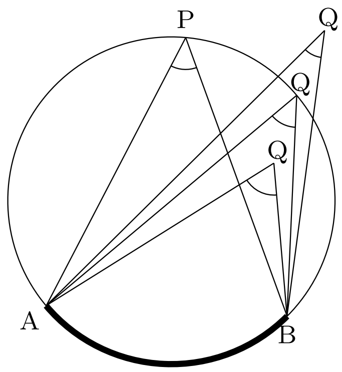
右の図を見てください。さっき判明したように、3 つの点 P、A、B がすべて乗るような円だったら必ず描くことができるわけです。問題は、その円の上に 4 つ目の点 Q が乗るのかということです。このことを考えるために、95 ページの「円周角の大きさと比べてみよう」をもう一度読んで思い出してください。



∠APB の大きさと ∠AQB の大きさは等しいとする。このとき、4 点 A、B、P、Q はある 1 つの円の上に全部乗っていると断言できる？

まず、3 つの点 P、A、B がすべて乗るような円を描くと、∠APB は $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角となるわけです。

「円周角の大きさと比べてみよう」で学んだことを思い出すと、もし、点 Q がこの円の外にあると、∠AQB の大きさは ∠APB の大きさより小さくなっているはずです。また、もし点 Q がこの円の中にあると、∠AQB の大きさは ∠APB の大きさより大きくなっているはずです。ということは、∠AQB の大きさが ∠APB の大きさと等しくなっている場合、点 Q はこの円の上にあると断言できることになりますね。



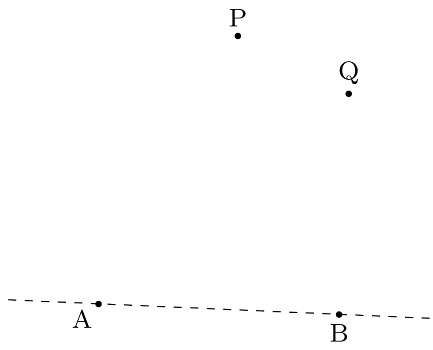
点の数が 3 つなら、その 3 つの点がすべて乗るような円を描くことができる。そして、3 つの点 P、A、B がすべて乗るような円を描くと、∠APB は弧 AB に対する円周角となる。

ではここまで「質問」と「質問の答え」を考えてわかったことを次にまとめておきます。

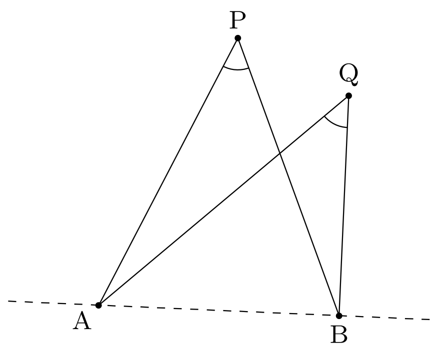
重要な事実：4 つの点がすべて同じ円の上に乗るかどうか判断するには

円周角の定理の逆

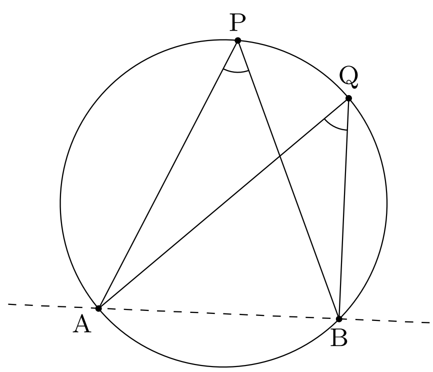
右の図を見てください。平面の上に 4 つの点があるとします。ここでは 4 つの点を A、B、P、Q と呼ぶことにします。ただし、P と Q は A と B を通る直線 AB に関して同じ側にあるとします。



次に、右の図のように ∠APB と ∠AQB を作ってみます。

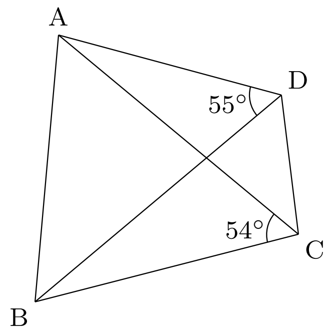


このとき ∠APB と ∠AQB の大きさが等しいということが判明したとします。そうしたら、4 つの点 A、B、P、Q がすべて乗るような円が必ずあると断言して良いのです。

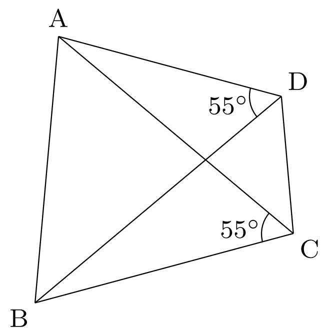


例題 10　以下の問に答えなさい。

(1)　右の図の四角形 ABCD の頂点 A、B、C、D がすべて乗るような円は存在するのでしょうか。わけをきちんとつけて答えなさい。

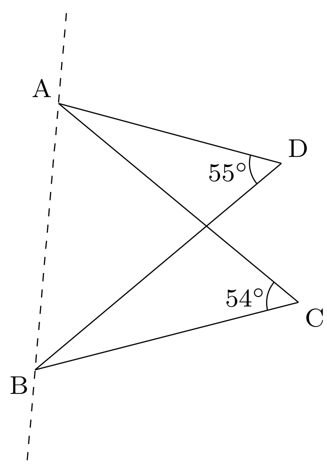


(2)　右の図の四角形 ABCD の頂点 A、B、C、D がすべて乗るような円は存在するのでしょうか。わけをきちんとつけて答えなさい。



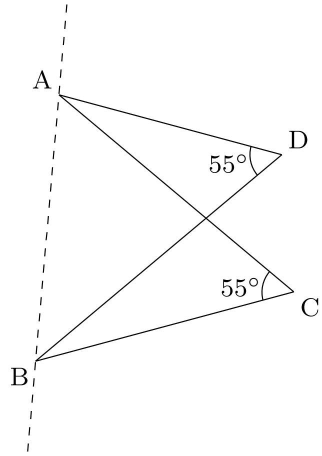
解答

(1)　右の図を見てください。四角形 ABCD の頂点 A、B、C、D がすべて乗るような円は存在するのかどうか判定するため、必要な線だけを残した図を描いてみました。また判定するために必要な直線 AB を点線で描いておきました。



この図を見ればわかるように、点 C と点 D は直線 AB に関して同じ側にあります。そこまでは良いのですが、∠ACB と ∠ADC の大きさは違いますよね。ですから、4 点 A、B、C、D がすべて乗るような円は存在しないと断言できます。

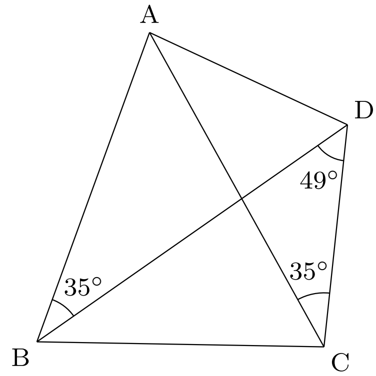
(2) 右の図を見てください。四角形 ABCD の頂点 A、B、C、D がすべて乗るような円は存在するのかどうか判定するため、必要な線だけを残した図を描いてみました。また判定するために必要な直線 AB を点線で描いておきました。



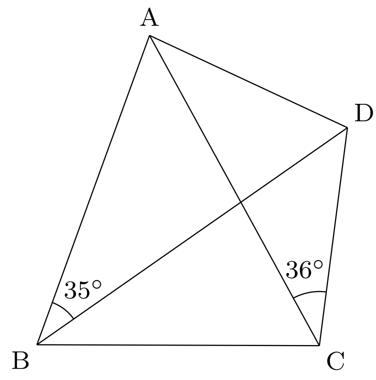
この図を見ればわかるように、点 C と点 D は直線 AB に関して同じ側にあります。そして、∠ACB と ∠ADC の大きさは同じですよね。ですから、4 点 A、B、C、D がすべて乗るような円は存在すると断言できます。

問 14. 以下の問に答えなさい。

(1) 右の図の四角形 ABCD の頂点 A、B、C、D がすべて乗るような円は存在するのでしょうか。わけをきちんとつけて答えなさい。



(2) 右の図の四角形 ABCD の頂点 A、B、C、D がすべて乗るような円は存在するのでしょうか。わけをきちんとつけて答えなさい。



答えを見る

例題 11　まず、円 O があり、直径 AB が描かれているとします。そして円 O の円周上に点 C と点 D を打ちます。ただし点 C と点 D は直径 AB に関して反対側にあるようにします。次に、直線 AD と直線 CB を描きます。すると、直線 AD と直線 CB はどこかで交わるので交点を E と呼ぶことにします。同じように、直線 AC と直線 DB を描きます。すると、直線 AC と直線 DB はどこかで交わるので交点を F と呼ぶことにします。このとき以下の問に答えなさい。

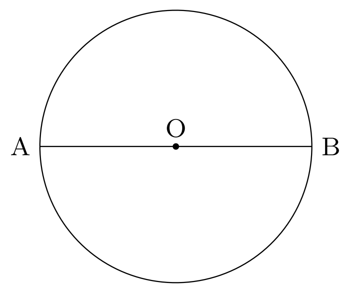
(1) 問題をよく読んでこの問題の状況をあらわす図を描きなさい。

(2) 4 点 C、D、E、F がすべて乗ってしまうような円はありますか？理由をきちんとつけて答えなさい。

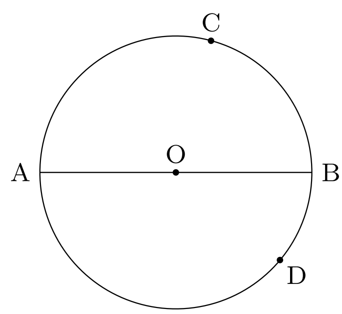
解答

(1) この問題の状況をあらわす図を描くのですね。

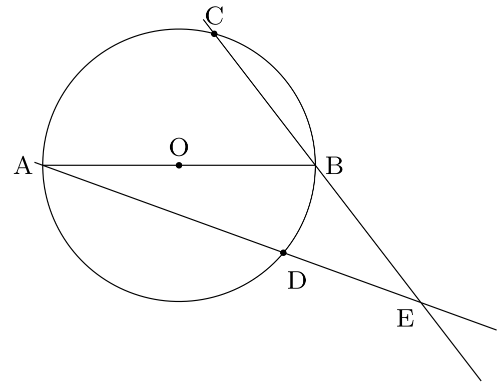
まず、円 O があり、直径 AB が描かれているのですから、例えば右の図のようになります。



そして円 O の円周上に点 C と点 D を打つのでしたね。ただし点 C と点 D は直径 AB に関して反対側にあるようにするのですよね。ですから、例えば右の図のようになります。

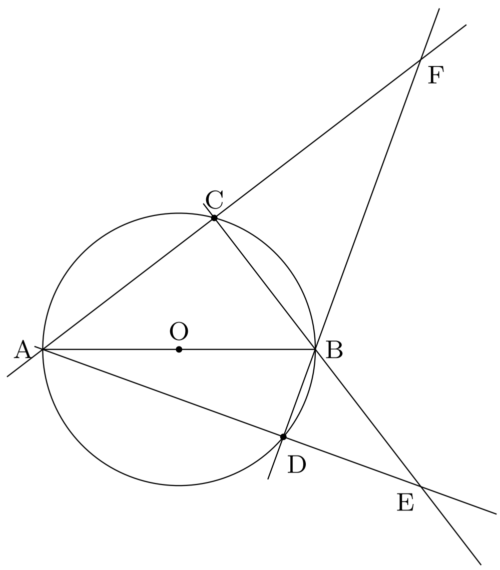


次に、直線 AD と直線 CB を描くのでしたね。そして、直線 AD と直線 CB はどこかで交わるので交点を E と呼ぶのでしたね。ですから、右の図のようになります。



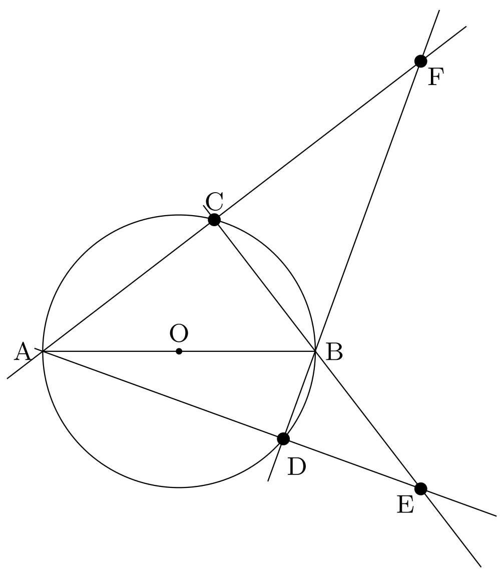
次に、直線 AC と直線 DB を描くのでしたね。そして、直線 AC と直線 DB はどこかで交わるので交点を F と呼ぶのでしたね。ですから、右の図のようになります。

これでこの問題の図は完成ですね。



(2) 4 点 C、D、E、F がすべて乗ってしまうような円があるのかどうか、きちんと理由をつけて判断する問題ですね。

では右の図を見てください。さっき完成した図で、 4 点 C、D、E、F を強調してわかりやすくしてみました。どうですか？この 4 つの点がすべて乗ってしまうような円はありそうですか？少し考えてみてください。10 分待ちます。



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . . . .

. . . .

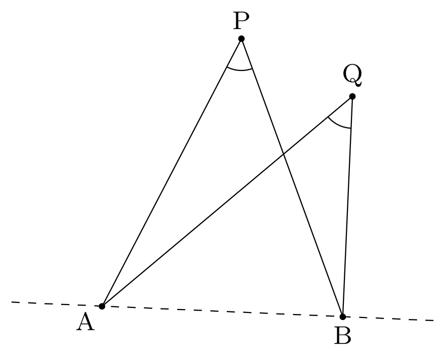
. . . .

. . . .

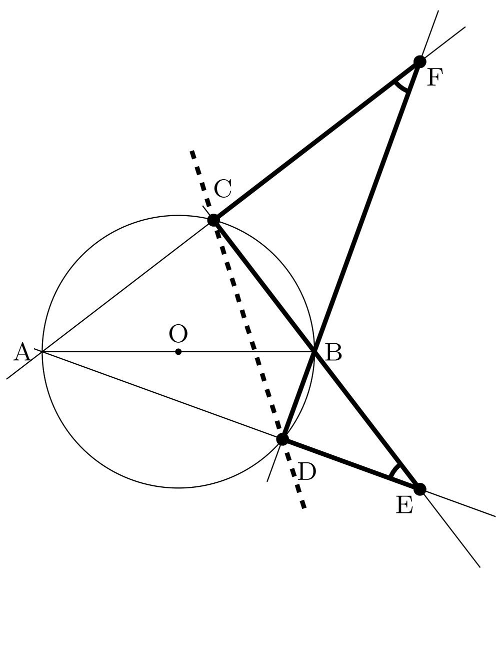
. . . .

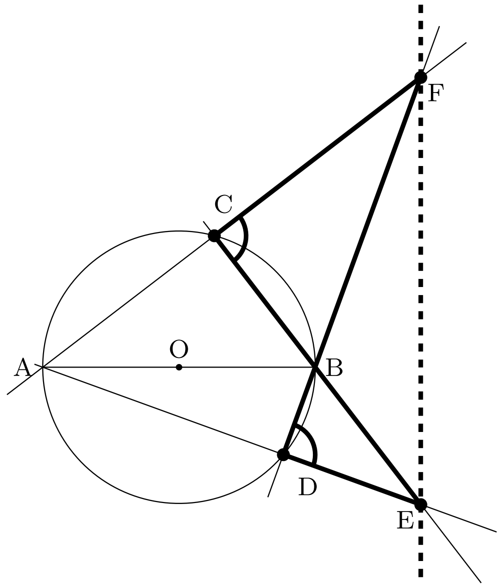
はい、10 分たちました。なにかわかったことはありましたか？

右の図を見てください。100 ページにまとめてありますが、4 つの点 A、B、P、Q がある場合、∠APB の大きさと ∠AQB の大きさが等しいということが判明したら、4 つの点 A、B、P、Q がすべて乗ってしまう円があると断言できるということを私たちは知っています。（「円周角の定理の逆」と呼ばれている話です。）



ということは、例えば、右の図で印をつけてある 2 つの角（つまり ∠CFB と ∠BED）の大きさが等しいという証拠が見つかれば、4 つの点 CDEF がすべて乗ってしまうような円があると断言できることになりますね。





また例えば、右の図で印をつけてある 2 つの角（つまり ∠BCF と ∠EDB）の大きさが等しいという証拠が見つかった場合でも、4 つの点 CDEF がすべて乗ってしまうような円があると断言できることになります。

もちろんいま紹介した 2 つの方法以外にも、証拠の見つけ方はいろいろあるかもしれませんが、あなたならどうしますか？少し考えてみてください。また 10 分待ちます。

・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・

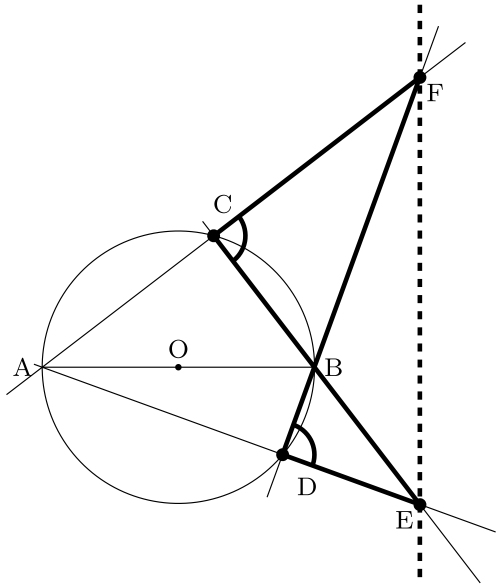
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・

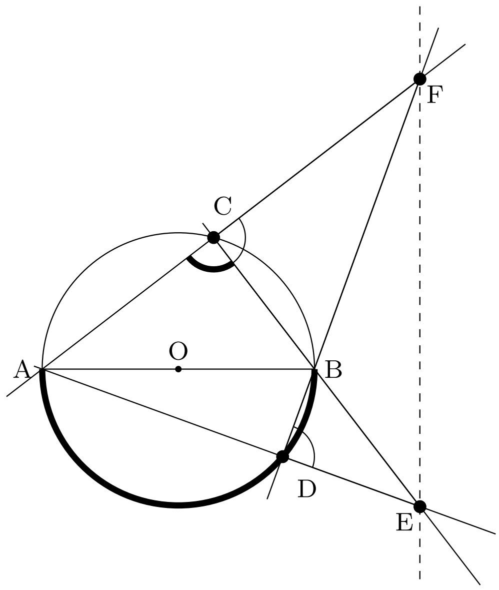
・・・・・・・・・・・・・・・・・・

はい 10 分たちました。ちゃんと 10 分悩んで考えた人のために答えを教えることにしましょう。



右の図を見てください。一番楽に証拠を見つけたい人は、右の図で印をつけてある 2 つの角 (つまり ∠BCF と ∠EDB) の大きさが等しいという証拠を見つけると良いのです。

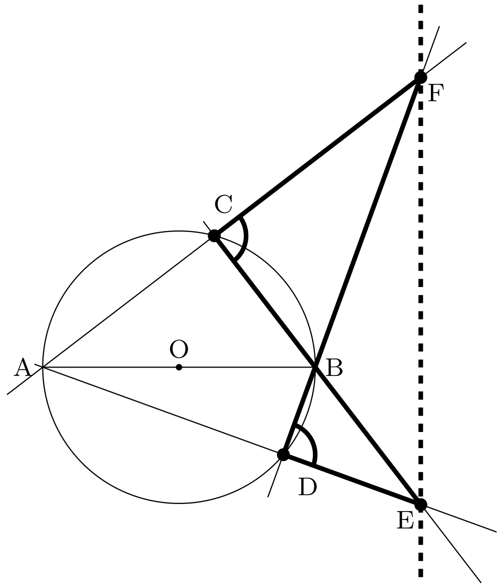
実は、右の図で印をつけてある 2 つの角（つまり ∠BCF と ∠EDB）の大きさはどちらも 90° なのです。どうしてなのかわかりますか？



右の図を見てください。∠ACB の大きさはどう考えても 90° ですよね。だって、この角は弧 AB(太くなっている下側の弧) に対する円周角ですが線分 AB は直径なので、弧 AB に対する中心角 ∠AOB の大きさは 180° なわけです。すると円周角の定理から、弧 AB に対する円周角である ∠ACB の大きさは 90° のはずですね。ということは、その隣の ∠BCD の大きさは 90° ということになりますよね。

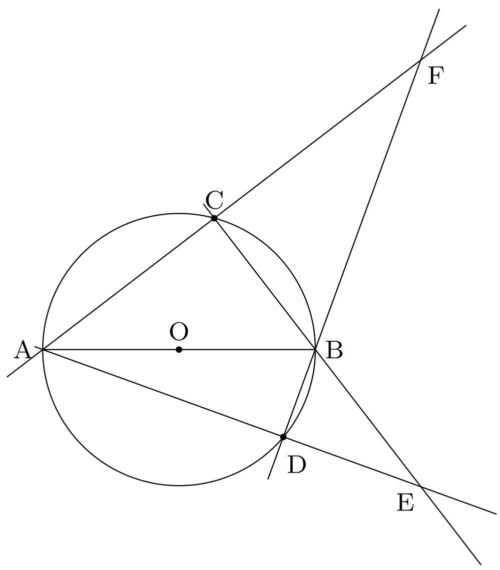
同じように考えると、まず ∠ADB の大きさは 90° であるとわかり、その結果 ∠EDB の大きさが 90° であることが判明するわけです。

これで、右の図で印をつけてある 2 つの角（つまり ∠BCF と ∠EDB）の大きさが等しいという証拠が見つかったわけですから、4 つの点 C、D、E、F がすべて乗ってしまうような円があると断言できますね。



問 15. 例題 11 がきちんと理解できたかどうか確認する問題です。

右の図を見てください。まず、円 O があり、直径 AB が描かれているとします。そして円 O の円周上に点 C と点 D を打ちます。ただし点 C と点 D は直径 AB に関して反対側にあるようにします。次に、直線 AD と直線 CB を描きます。すると、直線 AD と直線 CB はどこかで交わるので交点を E と呼ぶことにします。同じように、直線 AC と直線 DB を描きます。すると、直線 AC と直線 DB はどこかで交わるので交点を F と呼ぶことにします。このとき 4 点 C、D、E、F がすべて乗ってしまうような円が存在するということを証明しようと思います。以下の証明の空欄に正しい言葉、文、記号を記入して証明を完成しなさい。



（証明）

AB は円 O の直径なので、弧 AB に対する中心角 ∠AOB の大きさは 180° です。円周角の定理によると円周角の大きさは中心角の大きさの半分なので、弧 AB に対する円周角

$\angle$ACB の大きさは 90° であると断言できます。よって隣にある角 $\angle$BCF の大きさは、

$$\angle BCF = \boxed{\quad\ ^\circ} \cdots ①$$

であると断言できます。

同じように考えると、AB は円 O の直径なので、$\angle$ADB の大きさは $\boxed{\quad\ ^\circ}$ であると断言できます。よって隣にある角 $\angle$BDE の大きさは、

$$\angle BDE = \boxed{\quad\ ^\circ} \cdots ②$$

であると断言できます。

今、図を見るとわかるように、点 C と点 D は直線 EF に関して $\boxed{\quad\quad}$ 側にあります。そして①、②より、

$$\angle BCF = \angle\boxed{\quad\quad\quad}$$

が成り立っています。ですから、

4 点 C、D、E、F がすべて乗るような円が $\boxed{\quad\quad}$ する

と断言できます。

（証明おわり）

答えを見る

問 16. まず、△ABC があるとします。そして頂点 B から辺 AC へ垂直な線を伸ばしていき、辺 AC とぶつかった点を D と呼ぶことにします。また、同じように、頂点 C から辺 AB へ垂直な線を伸ばしていき、辺 AB とぶつかった点を E と呼ぶことにします。すると直線 BD と直線 CE はどこかで交わりますが、交わる点を F と呼ぶことにします。このとき以下の問に答えなさい。

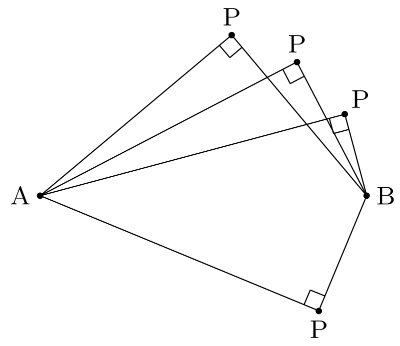
(1) 問題の図をよく読んで、この問題の状況をあらわす図を描きなさい。

(2) 4 つの点 B、C、D、E がすべて乗るような円が存在することを証明しなさい。

(3) 4 つの点 A、E、D、F がすべて乗るような円が存在することを証明しなさい。

答えを見る

問 17. 平面の上にあらかじめ 2 つの点 A、B が決められているとします。そして、∠APB の大きさが 90° になるような点 P をすべて集めると何ができるのか考えることにします。以下の問に答えなさい。



(1) あなたは何ができると思いますか？予想を立てなさい。

(2) あなたが予想したことを証明しなさい。

答えを見る

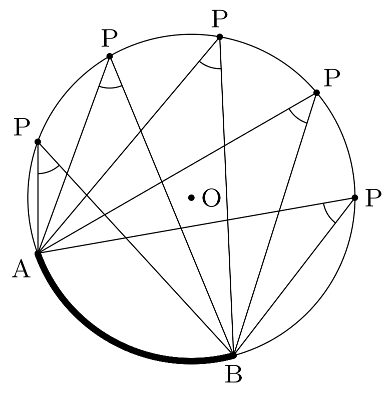
2.5　円周角の性質を使って作図をしてみよう

円周角の性質を使って、これからいくつか作図をしてみようと思います。まず円周角の性質について、必要なことだけ簡単におさらいをしておきます。

2.5.1　おさらい：作図で役に立つかもしれない円周角の性質

(1) ある円の円周上に 1 つの弧を決めておきます。そうすると。この弧に対する円周角の大きさはすべて等しくなっています。

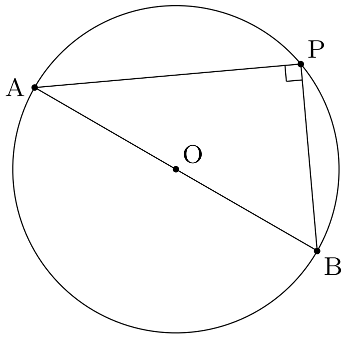
つまり、右の図で、点 P が円周上のいろいろなところ（ただし太くなっている弧の上を除く）を動いても、∠APB の大きさは変わりません。



この図の ∠APB はどれも弧 AB に対する円周角。∠APB の大きさはどれも等しい。

(2) 円の直径の両端の点と円周上の点を結んでできる角の大きさは 90° になります。

つまり、右の図で、点 P が円周上のいろいろなところを動いても、∠APB の大きさは必ず 90° になります。



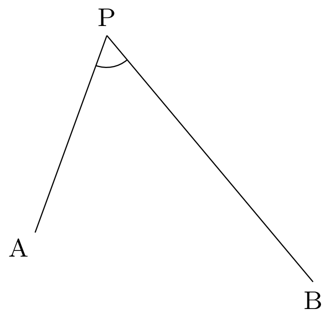
この図で AB は円 O の直径になっているとすると、P が円周上のどこにあっても ∠APB の大きさは 90° となる。

2.5.2　円周角の性質を使った作図

円周角の性質をうまく利用するといろいろな作図ができるという話に入りましょう。

(1) 円周角の性質を使うと角の大きさを変えずに場所を変えることができます。どういうことかこれから説明します。

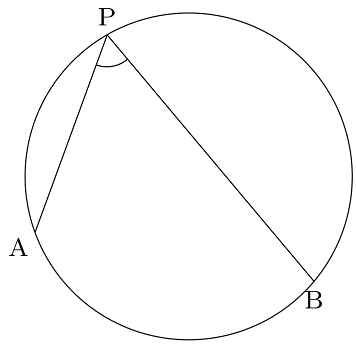
右の図のように、まず角があるとします。この角の大きさを変えないで別の場所に角を作図しようと思います。



まず角があるとする。この角の大きさを変えないで別の場所に角を作図したい。

手順 1　まずコンパスと定規を使って、何とかして 3 つの点 A、P、B を通る円を作図します。

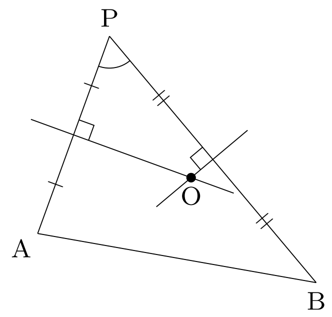
どのようにして作図をすれば、このような円を作図できるのかわかりますか？線分 PA の垂直二等分線と線分 PB の垂直二等分線を作図して、2 本の垂直二等分線の交点を中心にして 3 点 A、P、B を通る円を描くことがで



まず 3 つの点 A、P、B を通る円を何とかして作図する。

きるのでしたね。「そんなことを言われてもどうやって円を描くのかわかりません。」なんて言ってませんよね。前に一度、詳しく説明してあるのですよ。本当はもう、説明し直している余裕はないのですが、どうしても思い出せない人のために念のため説明します。（どうすれば良いのかわかっている人はとばしてください。）

右の図を見てください。まず、3 つの点 A、B、P をむすんでできる三角形を考えることにします。そしてその三角形の 3 つの辺のうち、どれか 2 つの辺に注目することにします。どの 2 つに注目しても良いのですが、ここでは例えば辺 AP と辺 PB に注目することにします。そして



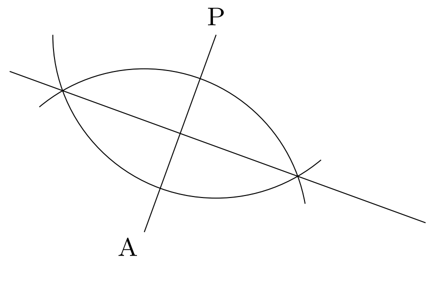
3 つの点を結んでできる三角形の 2 つの辺に注目し、その 2 つの辺の垂直二等分線を作図する。すると、その 2 つの垂直二等分線はある場所で交わる。

その 2 つの辺に対して、コンパスと定規を使ってそれぞれ垂直二等分線を作図するのです。つまり、ここでは辺 AP の垂直二等分線と辺 BP の垂直二等分線を作図するわけです。そうすると、2 つの垂直二等分線はある場所で交わります。この図では交点の名前を O としました。

ところで、線分の垂直二等分線の作図の仕方は知ってますよね。もしかして、忘れてしまった人はいますか？忘れてしまった人がいるとかなり困るわけですが。どうしても思い出せない人のために簡単に説明します。（線分の垂直二等分線の作図の仕方を知っている人はとばしてください。）

右の図を見てください。これは、コンパスと定規を使って線分 PA の垂直二等分線を作図した跡です。

まず、コンパスを適切な幅に開き、コンパスの針を A にさし、コンパスをくるっと回して曲線を適切な長さだけ描きます。



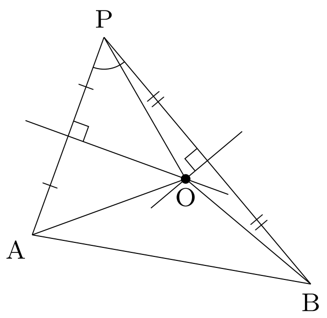
線分 PA の垂直の二等分線の作図

次はコンパスの幅はさっきと変えないで、コンパスの針を P にさし、コンパスをくるっと回して曲線を適切な長さだけ描きます。そうすると 2 つの曲線は 2 つの点で交わります。最後に定規を使ってその 2 つの点を結ぶと、「線分 PA の垂直二等分線」が完成するのです。

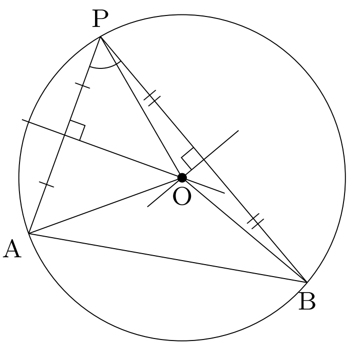
問　この作図の方法で本当に線分 PA の垂直二等分線が作図できる理由を説明してください。つまり、最後に出来上がった線は、「線分 PA とは垂直になっている」ということと、「線分 PA の真ん中を通っている」ということの証拠を見つけてください。

それでは線分の垂直二等分線の作図のしかたのおさらいはここまでにして本題に戻りましょう。

次に右の図を見てください。線分 PA の垂直二等分線と垂直二等分線を作図すると、2 つの垂直二等分線はある場所で交わりますよね。そして、その点の名前を O としたのでしたね。ではここで、点 O と 3 つの △PAB の頂点をそれぞれ結んで 3 つの線分 OP、OA、OB を作ってみましょう。すると、実は、OP、OA、OB はすべて同じ長さなのです。どうして同じ長さなのかあなたはわかりますか？線分の垂直二等分線の性質を覚えていますか？忘れてしまった人のために念のため言っておくと、「線分の垂直二等分線の上のどこに点を決めても、その点から線分の両端までの距離は等しい」のでしたね。ですから、辺 AP の垂直二等分線に注目すれば、AP と OP の長さは等しいと断言できますし、辺 BP の垂直二等分線に注目すれば、BP と OP の長さは等しいと断言できるわけです。



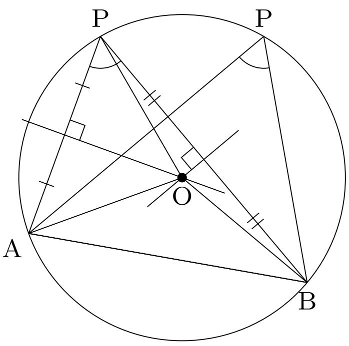
線分の垂直二等分線の上のどこに点を決めても、その点から線分の両端までの距離は等しいので、OP、OA、OB の長さはすべて等しいと断言できる。



OP、OA、OB の長さはすべて等しいことが判明したので、O を中心にして P、A、B がすべて乗っているような円を描くことができる。

では次に右の図を見てください。さっき、OP、OA、OB の長さが全て等しいということが判明したのですから、コンパスの幅を OP の長さと同じにして、コンパスの針を O にさしてコンパスをくるっと 1 回転すれば、P、A、B がすべて乗っているような円を描くことができますね。

これで、3 つの点 A、P、B がすべて乗るような円の作図の仕方がわかりましたね。（三角形の外接円というものを知っている人にとっては、これはもう、とっくに知っていたことです。）



点 P の場所をこの円の円周上でいろいろな場所に変えても、∠APB の大きさは変わらない。

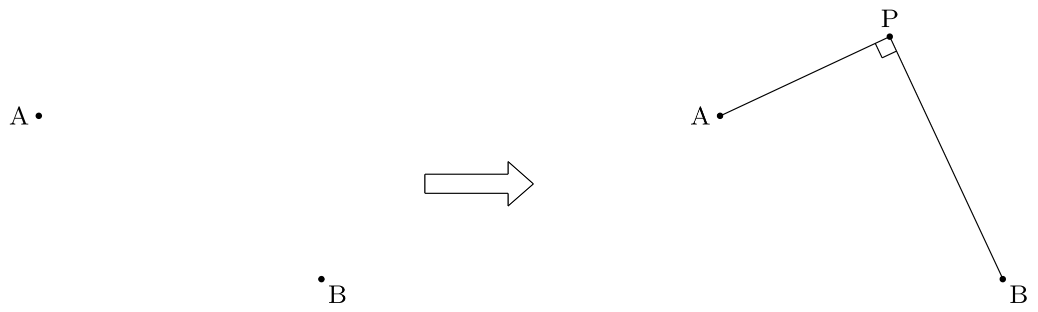
手順 2　手順 1 で 3 つの点 A、P、B がすべて乗っている円を作図することができましたね。そうすると、∠APB は $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角になっているわけです。ですから、円周角の定理によれば、点 P をこの円の円周上のいろいろなところに動かしても角の大きさは変わらないはずです。

では右の図を見てください。点 P の場所をこの円の円周上で動かして別の場所にしてみました。さっき言ったようにこの図に現れている 2 つの ∠APB の大きさは等しくなっているわけです。ですから、これで、大きさを変えずに ∠APB の場所を別の場所へ移せたことになりますね。

(2) 円周角の性質を使うと直角を作図することができます。

どういうことかこれから説明します。

次の図を見てください。

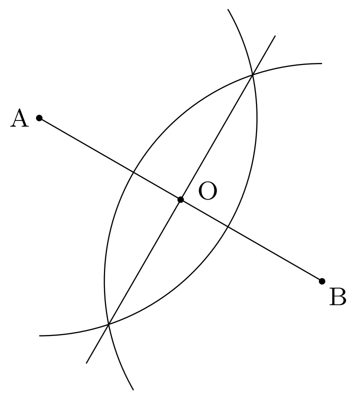


あらかじめ 2 つの点 A、B があるとする。このとき、どこかに点 P を打ち、
∠APB が直角になるようにしたい。

この図の左のようにあらかじめ 2 つの点 A、B があるとします。このとき、この図の右のように、どこかに点 P を打ち、∠APB が直角になるようにしたいと思います。点 P の場所を作図で探したいと思います。

手順 1　コンパスと定規を使って、線分 AB が直径になるような円を作図します。

まず、円の中心になる場所を見つけなくてはいけませんよね。どうすればよいでしょう。もうお分かりだと思いますが、コンパスと定規を使って、線分 AB の垂直二等分線を作図してみればよいですよね。線分の垂直二等分線の作図の仕方は大丈夫ですよね。これまでにも何度も説明しましたから。（どうしても思い出せない人は、112 ページを開いてください。そのページのどこかに説明がありますよね。）

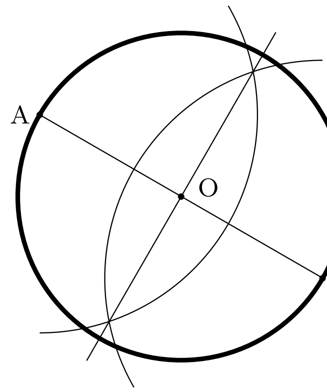


線分 AB の垂直二等分線を作図する。そうすると、垂直二等分線と線分 AB の交点がこれから描こうとしている円の中心になる。

このようにして線分 AB の垂直二等分線を作図すると、その垂直二等分線は線分 AB と交わっています。線分 AB の垂直二等分線なのですからもちろん線分 AB を二等分しているわけです。ですから、「線分 AB」と「線分 AB の垂直

二等分線」の交点は線分 AB のちょうど真ん中にあるわけです。この図では、「線分 AB」と「線分 AB の垂直二等分線」の交点を O と呼ぶことにしました。これでコンパスを使って線分 AB が直径になっているような円を描くことができます。

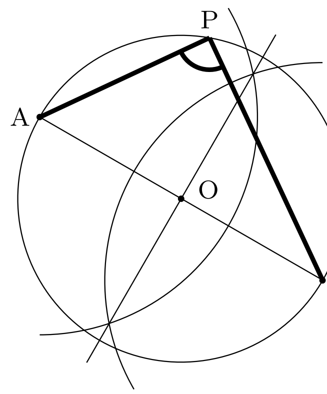
右の図を見てください。O は線分 AB のちょうど真ん中にあるのですから、AO と BO の長さは同じですね。ということは、コンパスの幅を AO に合わせて、コンパスの針を O にさし、コンパスをくるっと 1 回転させれば、線分 AB が直径になっているような円ができるわけです。



さっき見つけた O は線分 AB のちょうど真ん中にあるので、コンパスの幅を AO に合わせて、コンパスの針を O にさし、コンパスをくるっと 1 回転させれば、線分 AB が直径になっているような円ができる。

手順 2　手順 1 で作図した円の円周上の好きなところに点 P を打ち、それぞれ線分 AB の両端の点と P を結びます。

右の図を見てください。点 P を手順 1 で作図した円の円周上に打ってみました。そして P と A を結び、P と B を結びました。そうすると、P のところに ∠APB ができますが、円周角の性質を思い出してみれば、∠APB の大きさは 90° ということになりますね。

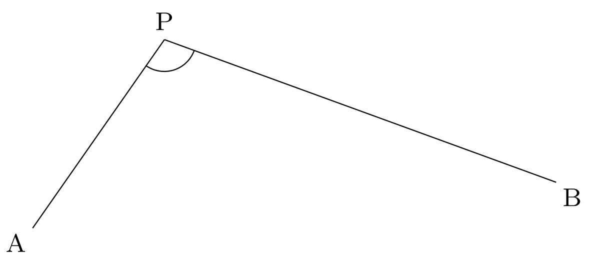


さっき作図した円の円周上の好きなところに点 P を打ち、それぞれ線分 AB の両端の点と P を結ぶ。このようにしてできる ∠APB の大きさは 90° である。

以上、作図によって、「円周角の性質を使うと角の大きさを変えずに場所を変えることができる」という話と、「円周角の性質を使うと直角を作図することができる」という話を学びました。

問 18. 作図によって「円周角の性質を使うと角の大きさを変えずに場所を変えることができる」という話が理解出来ているかどうか確認する問題です。

作図によって右の図のどこかに点 Q を打ち、∠APB の大きさと ∠AQB の大きさが等しくなるようにしなさい。



答えを見る

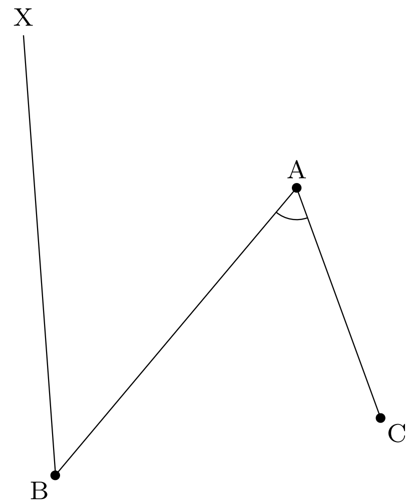
問 19. 作図によって「円周角の性質を使うと直角を作図することができる」という話が理解出来ているかどうか確認する問題です。

作図によって右の図のどこかに点 P を打ち、∠APB が直角になるようにしなさい。

答えを見る

それではこれまでに学んだ作図の方法を利用する問題を練習することにしましょう。

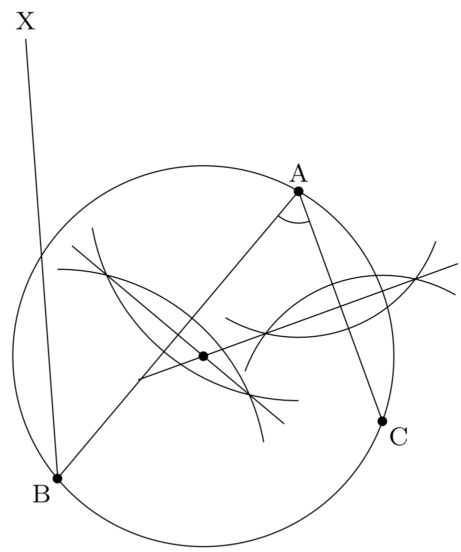
例題 12　右の図のように、∠BAC と半直線 BX があるとします。半直線 BX の上のどこかに点 P を打って、∠BPC を作ります。そのときにできる ∠BPC の大きさが ∠BAC の大きさと同じようになるように、作図によって点 P の場所を見つけてください。



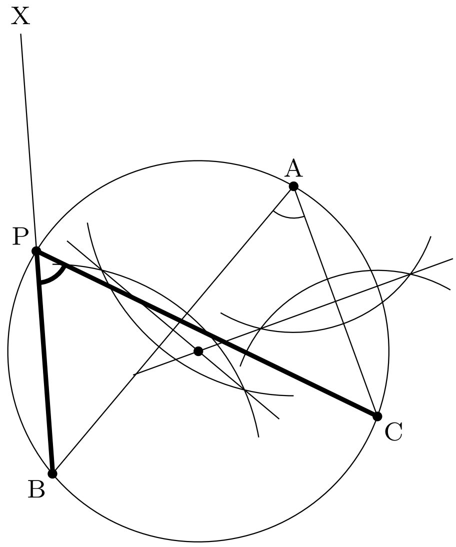
解答

111 ページで詳しく学びましたが、たしか、円周角の性質を利用すると、角の大きさを変えずに場所を変えることができるのでしたね。その方法を頼ることにしてみましょう。そうすると、きっと 3 つの点 A、B、C を全部通る円を作図するのが良さそうですよね。

では右の図を見てください。これはコンパスと定規を使って 3 つの点 A、B、C を全部通る円を作図した跡です。どのように作図したのか、もうおわかりですよね。これまでに何度か説明していますから。（どうしてもわかない人は、111 ページの手順 1 を復習してください。）



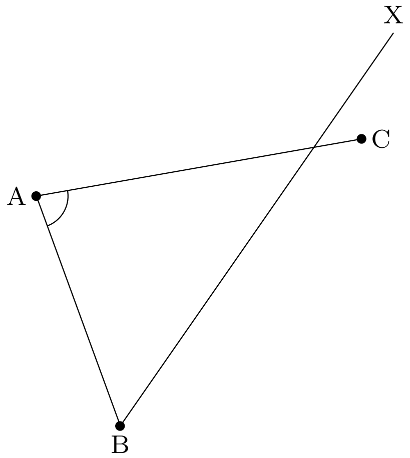
3 つの点 A、B、C をすべて通る円を作図できたので、いよいよ点 P の場所を発見することにしましょう。



では右の図を見てください。今作図したばかりの円と半直線 BX はある点で交わっていますね。この図ではこの点の名前を P としました。そして、C と P を結んでみました。そうすると点 P のところに ∠BPC ができますね。円周角の性質を思い出してみれば、この ∠BPC の大きさは ∠BAP の大きさと同じですよね。これで、半直線 BX の上に点 P を決めて、∠BPC の大きさが ∠BAP と同じになるように作図をすることができましたね。

問 20.　例題 12 の解答が理解できているかどうか確認するための問題です。

右の図のように、∠BAC と半直線 BX があるとします。半直線 BX の上のどこかに点 P を打って、∠BPC を作ります。そのときにできる ∠BPC の大きさが ∠BAC の大きさと同じようになるように、作図によって点 P の場所を見つけてください。



答えを見る

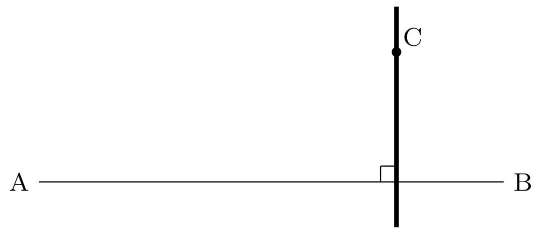
例題 13　右の図を見てください。線分 AB と点 C がありますね。これからコンパスと定規を使って、「点 C を通り線分 AB に垂直な直線」を作図しようと思います。実はもう、かなり昔、このような作図の方法は学んでいるのですが、ここではその時とは方法をかえて、「円周角の性質」を頼りにして作図をすることにします。どのように作図をすれ

ばよいですか。

解答

　114 ページで詳しく学びましたが、たしか、円周角の性質を利用すると、直角を作図することができるのでしたね。その方法を頼ることにしてみましょう。

どうすれば良いのか考えるために、そうですねぇ、完成予想図を思い浮かべることにしましょうか。右の図を見てください。

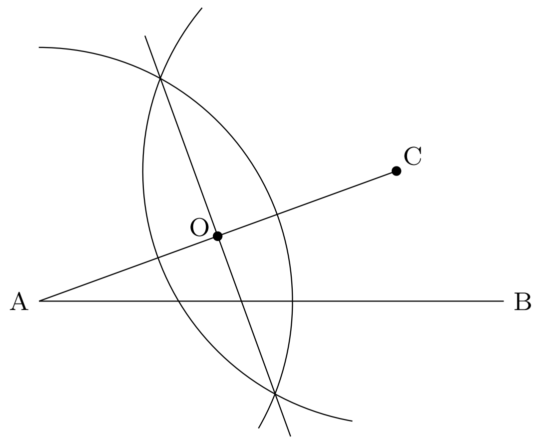


完成予想図

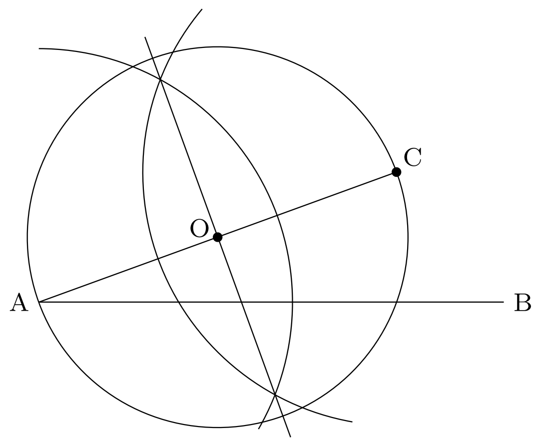
　最後にこの図で太く描かれている直線が描ければ良いですよね。ということは、円周角の性質を利用して直角を作図するとしたら、AC が直径になるような円を作図すると良さそうですね。

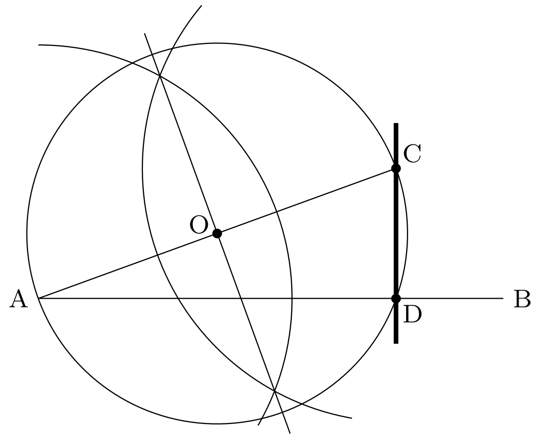
　では AC が直径になる円を作図することにしましょう。

　まず右の図を見てください。コンパスと定規を使って線分 AC の垂直二等分線を作図し、線分 AB と垂直二等分線の交点を O としました。そうすると、OA と OB の長さは等しくなっているわけです。



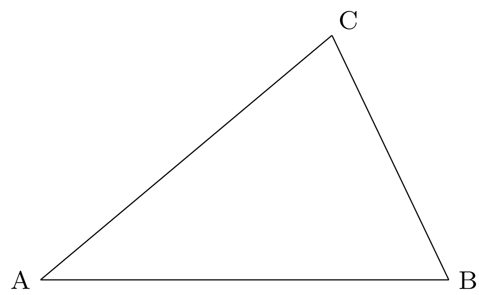
では次は右の図を見てください。OA と OB の長さは等しくなっているわけですから、コンパスの幅を OA に合わせ、コンパスの針を O にさし、くるっと 1 回転させると線分 AB が直径になる円が描けますよね。





では最後に右の図を見てください。線分 AB と今描いたばかりの円の交点がありますよね。図ではこの点を D と呼ぶことにしました。そして点 C と点 D を通る直線を（この図ではわかりやすくするために太く）描いてみました。

円周角の性質を思い出すと、この図の $\angle$ADC の大きさは 90° のはずですね。ですからこれで、点 C を通り線分 AB に垂直な直線を作図できたことになりますよね。



問 21. 右の図を見てください。これからコンパスと定規を使って、この図の $\triangle$ABC で、辺 AB を底辺としたときの高さをあらわす線分を作図しようと思います。実はもう、かなり昔、このような作図の方法は学んでいるのですが、ここではその時とは方法をかえて、「円周角の性質」を頼りにして作図をすることにします。どのように作図をすればよいですか。

答えを見る

2.6　円の外にある点から円への接線を作図するには

まず、いくつかおさらいをします。

おさらいその 1：円と直線の位置関係

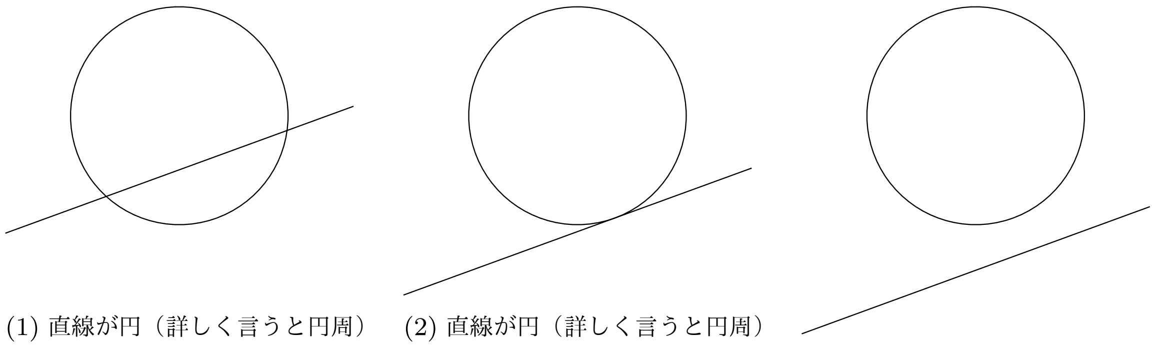
「円」と「直線」があると、2 つのものの位置関係は次の 3 通りに分類して考えることができます。

(1) 直線が円（詳しく言うと円周）を 2 ヶ所つらぬいている場合

(2) 直線が円（詳しく言うと円周) と 1 ヶ所で接触している場合

(3) 直線が円から離れている場合

どういうことか説明しましょう。次の図を見てください。



(1) 直線が円（詳しく言うと円周）を 2 ヶ所つらぬいている　(2) 直線が円（詳しく言うと円周）と 1 ヶ所で接触している　(3) 直線が円から離れている

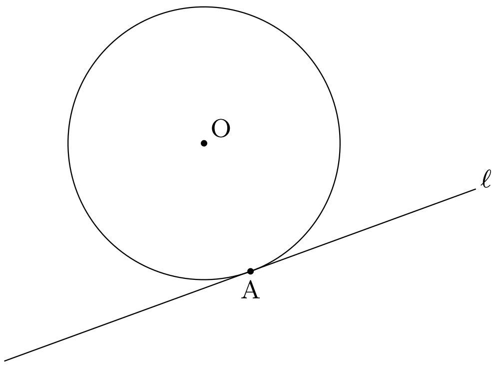
この図で一番左、つまり (1) は「円」と「直線」の 1 部が重なっている場合で、「円」と「直線」は 2 つの点で交わっています。「交わる」というのは「片方のものが、もう片方のものをつらぬいている」という意味です。交わる点を**交点**と呼びます。

この図の真ん中、つまり (2) は、「円」と「直線」が接触している場合です。「接触している」というのは、「片方のものが、もう片方のものに、かすっている」という意味です。数学では、「接触している」という代わりに**接する**ということがあります。また、接触している点のことを**接点**と呼びます。この場合、「円」から見ると、「直線」は「円に接している」ので、「この直線はこの円の**接線**になっている」ということがあります。つまり、「円の接線」とは、その円に接している直線のことです。

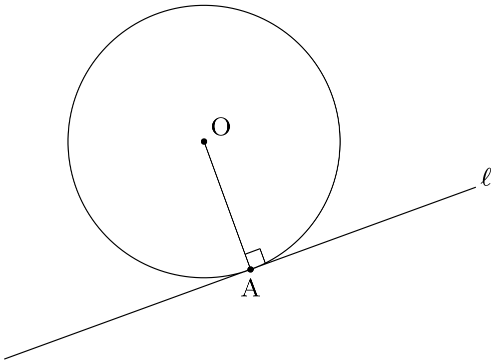
この図で一番右、つまり (3) は「円」と「直線」が離れている場合です。

おさらいその 2：円の接線の持っている重要な性質

ここでは円と直線が接している場合のことを考えることにします。



右の図を見てください。これは円と直線が接している図です。ここでは、円の名前は円 O とし、接線の名前は ℓ にしました。また、接点の名前を A としました。さて、円の接線には、何か面白い性質はあるでしょうか。実は、ある、大切な所に 90° が隠れているのです。このことを考えるために、円の中心と接点を結んで見ることにしましょう。



そうすると右の図のようになりますね。どこに 90° が隠れていたかわかりましたか？もうおわかりだと思いますが、念のため直角マークをつけておきました。「円の中心 O と接点 A を結んでできた線」は、「この円の半径を表す線」の 1 つです。この図を見ればわかるように、「円の中心と接点を結んでできる円の半径」は、接線と垂直になっているのです。

重要な事実：円の接線の性質

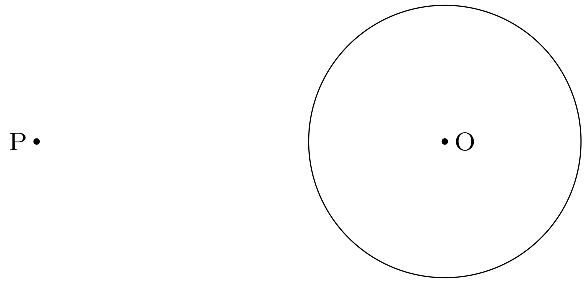
円と、その円の接線があるとします。この円の中心と、接線を結んで、この円の半径を表す線分を作ります。そうすると、「円の中心と接点を結んでできる、この円の半径を表す線分」と、「円の接線」は必ず垂直になっているのです。

おさらい終わり

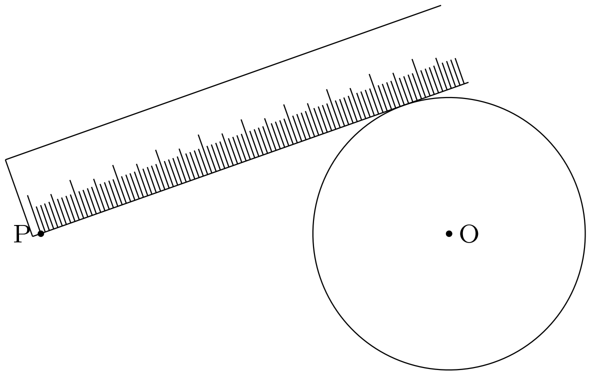
では本題に入ることにしましょう。

2.6.1　円の外にある点からその円へ接線を引くには

例題 14　右の図を見てください。円 O と円の外にある点 P がありますね。コンパスと定規を使って、点 P から円 O へ接線をひこうと思います。どのように作図をしていけばよいですか。



解答



右の図を見てください。これは、定規を「できるだけうまい感じ」にあてて、定規だけを使って一発で接線をひこうとしているところを表しています。

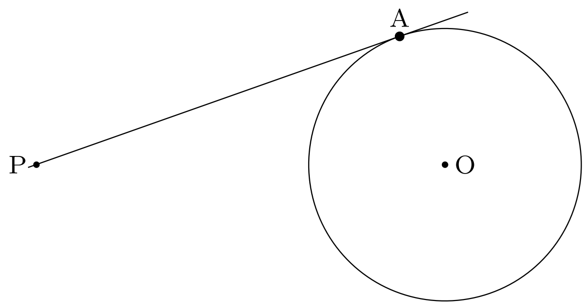
あなたはどう思いますか、この方法。もしかして、「私もそうすれば良いと思った」という人はいますか。実はこの方法はダメなんです。どうしてダメなのかわかりますか。この方法では「接線のようなものもの」をひいただけです。「ちゃんとした接線」をひいたことにはならないのです。どういうことかもう少し説明しましょう。直線は 2 つの点によって 1 つに決まります。つまり、2 つの点の場所がもとからちゃんと決めてあると、その 2 つの点を通る直線をただ 1 つだけ描くことができます。このとき、例えば、2 つの点のうちのどちらか 1 つの点の場所だけでもずれてしまったら、普通は、直線も違う場所にずれてしまいます。ですからきちんと決まった直線をひこうと思ったら、先に 2 つの点をはっきりと決めておかなくてはいけないのです。

ということは、さっきの、定規を「できるだけうまい感じ」にあてて、定規だけを使って一発で接線をひく方法ですが、はっきりと決まっている点は P だけですよね。もうひとつの点は円 O の円周上のどこかにあるはずですが、今のところどこにあるのかはっきりと

はわかっていないのです。ですからきちんと決まった直線を引くことはできないのです。

それではどうやって作図をすればよいのでしょうか。「直線は 2 つの点の場所を決めると描くことができる」わけです。そして、これから作図しようとしている直線は P を通るのは明らかです。ですから、もう一つの点を発見しなくてはいけません。そしてその点は「円 O の円周上のどこかにあるはずですが、今のところどこにあるのかはっきりとはわかっていない」のですよね。でもその点はこれから作図しようとしている直線と円 O の「接点」ですよね。つまり、これから私たちは「接点」の場所を正確に発見しなくてはならないのです。このことをしっかり頭に入れて、作図の方法を考えていくことにしましょう。

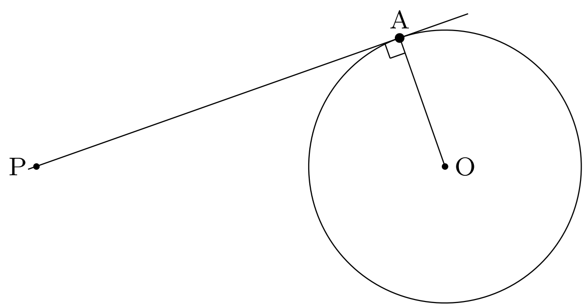
では右の図を見てください。これは完成予想図です。この図では接点の名前を A としておきました。何とかして「接点 A」の場所を突き止めてから、定規を P と A にあてて接線を描けばこの図のようになるわけです。ですから私たちはまず、「接点 A」の場所を正確に発見しなくてはなりませんね。どうすればよいでしょうか。こういうときに頼りになるのは 122 ページでおさらいした「円の接線の持っている重要な性質」です。つまり、「円の中心と接点を結んでできる、この円の半径を表す線分」と、「円の接線」は必ず垂直になっているという性質です。



完成予想図

つまり、右の図のように、A と O を結んでできる「円の半径をあらわす線分」は「円の接線」と垂直になっているのです。

ということは、円の上に点 A を、「∠PAO が 90° になるような場所」に打つことができれば良いということ

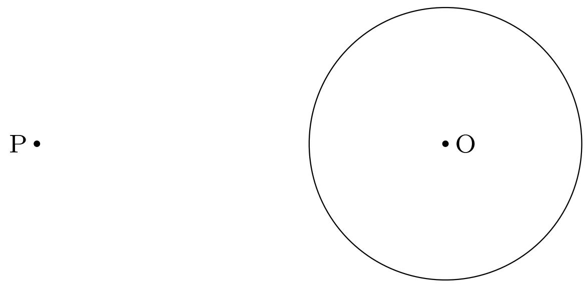


円の接線は接点と中心を結んでできる半径と垂直になっている。つまり、この図の ∠PAO の大きさは 90°。

になりますね。これが A の場所を発見するための手がかりになるわけです。

それではどうすれば、「∠PAO が 90° になるような場所」を見つけることができるでしょうか。「90° になるような場所」ですよね。えーと、90° なのですから · · ·、ああそうだ、114 ページで「円周角の性質を利用すると直角を作図することができる」という話を学びましたよね。 この話、使えそうですよね。（何の話なのかわからない人はすぐに、114 ページから 116 ページまですべて復習してください。）ではどうすれば良いのか説明することにします。

まず、右の図を見てください。念のため確認しておきますが。これが、この問題の初めの状態ですね。

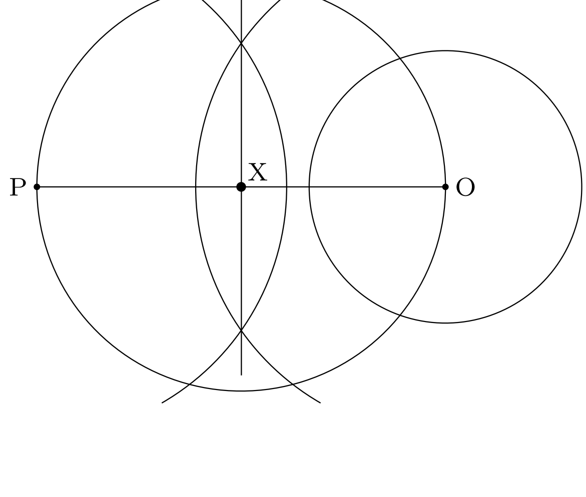


それでは作図の手順を説明します。

手順 1　まず、P と O を結んでできる線分 PO が直径になるような円を作図します。

もう、いまさら、どうやって作図をするのか詳しく説明しなくても大丈夫ですよね。だって、114 ページから 116 ページまでで詳しく学びましたから。

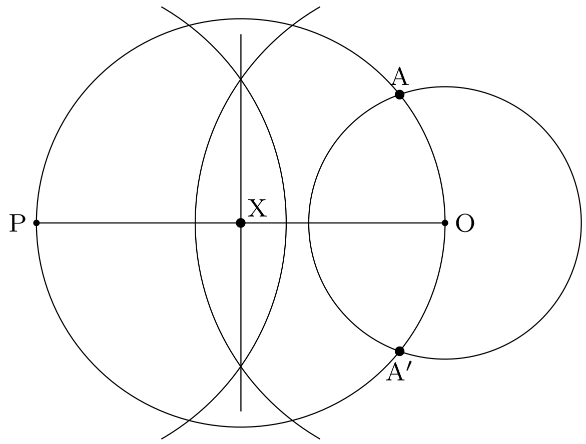
では右の図を見てください。コンパスと定規を使い、まず線分 PO の垂直二等分線を描くと、線分 PO の中点が発見できます。この図では線分 PO の中点の名前を X にしておきました。そして次にコンパスの幅を PX の長さに合わせ、コ



ンパスの針を X にさし、コンパスをくるっと 1 回転させると、右の図のように「線分 PO が直径になるような円」が作図できるのでしたね。

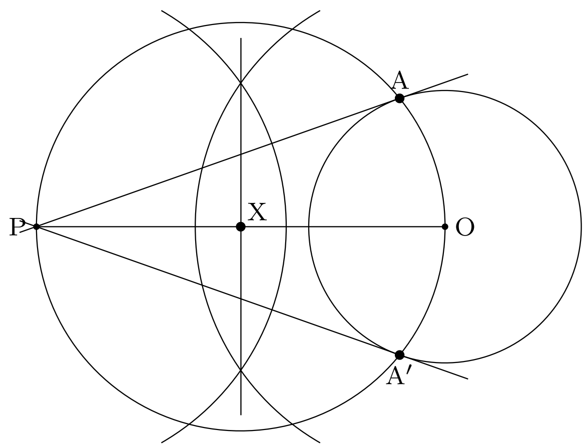
手順 2　接点となる予定の点を発見します。どこが接点になるのかというと、「もとからあった円 O」と「手順 1 で作図した円」の交点です。

では右の図を見てください。もとからあった円 O と手順 1 で描いた円の交点は 2 つありますね。この図ではその 2 つの点の名前を A と A′ にしておきました。

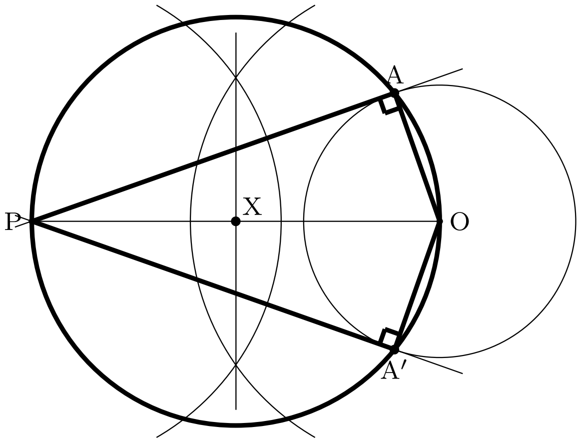


手順 3　接線を作図します。

右の図を見てください。接線は 2 本作図することができます。1 つは P と A を通る直線を定規を使って作図します。もう 1 つは P と A′ を通る直線を定規を使って作図します。これで「点 P から円 O へひいた接線」を作図することができました。（実は、接線を 2 本引くことができたのですね。）

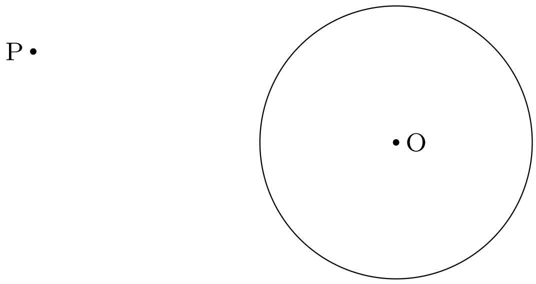


念のための注意　右の図を見てください。この方法で作図すれば、ちゃんと $\angle\mathrm{PAO}$ や $\angle\mathrm{PA'O}$ は直角になりますよね。なぜなら、点 A や点 A′ は PO を直径とする円の周上にあるので、円周角の性質により直角になっているからです。



問 22. 例題 14 の解答が理解できているか確認するための問題です。

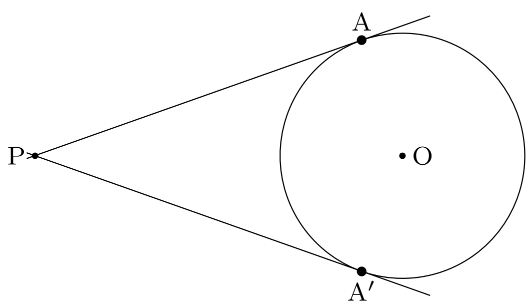
右の図を見てください。円 O と円の外にある点 P がありますね。コンパスと定規を使って、点 P から円 O への接線を作図しなさい。



答えを見る

2.7　円の外の点から円へ描いた 2 本の接線の長さにはなにか関係があるの？

右の図を見てください。私たちは 124 ページの例題 14 で、円の外にある点から円へ向かって接線を作図する方法を学びました。そして、そのような作図をすると、2 本接線を引くことができることがわかりました。

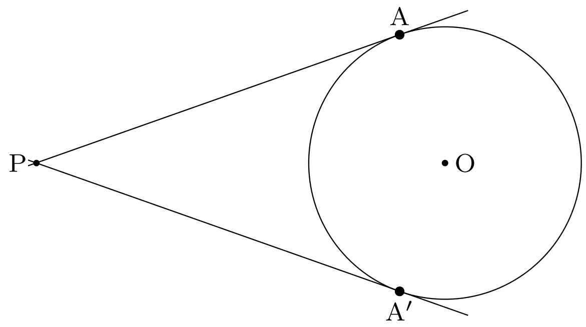


円 O の外にある点 P から円 O へ向けて 2 本接線を描くことができる。ところで、PA の長さと PA′ の長さは同じなのだろうか？

ではここで、「点 P から接点までの長さ」

のことを考えてみたいと思います。接線は 2 つあるのですから、「点 P から接点までの長さ」も 2 つ考えることができるわけです。つまり、PA の長さと PA′ の長さがあるわけですね。それでは、PA の長さと PA′ の長さの間には、なにか関係はあるでしょうか。まぁ、図を見ると、多分同じ長さなんですよね。でも本当に同じ長さなのでしょうか。私たちは今数学を学んでいるわけです。ですから、いくら本当っぽいことでも証拠がなければ正しいとは認めてもらえないのでしたね。そこでこれから、PA の長さと PA′ の長さの間が同じであるという証拠を見つけることにしましょう。

例題 15　右の図は、円 O の外にある点 P から円 O へ向けて、2 本の接線をひいたものです。この図では接点の名前をそれぞれ A、A′ としました。P から A までの長さ PA と P から A′ までの長さ PA′ は等しいことを証明しなさい。

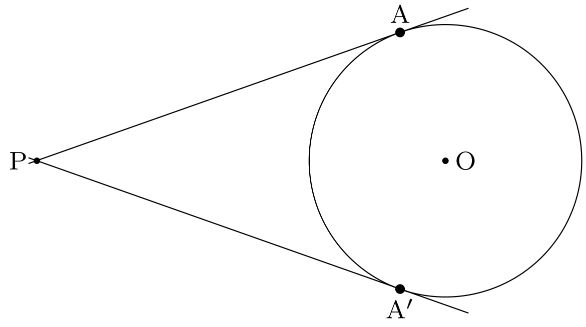


解答

さて、どうしましょうか。PA と PA′ の長さが等しいということを証明するのですよね。どんな証拠が見つかれば良いのでしょう。どんな議論をすれば良いのでしょう。証明の方針を考えてみましょう。

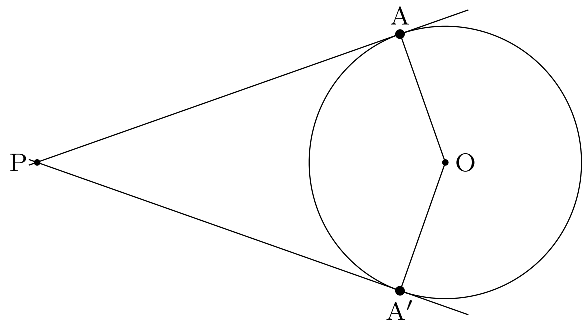
まぁ、こういう時はいつもの手で行くのが良さそうですよね。いつもの手ってどんな手なのかわかりますよね。そうです、合同な図形を発見する方法です。つまり、PA が含まれている図形と PA′ が含まれている図形を使い、その 2 つの図形が実は合同になっているという証拠を見つけます。そうすれば 2 つの図形はぴったり重なるということになるので、対応しているところの長さも等しいと断言できるわけです。

では問題の図をよく見てみましょう。あなたのためにもう一度この問題の図を描いておきました。

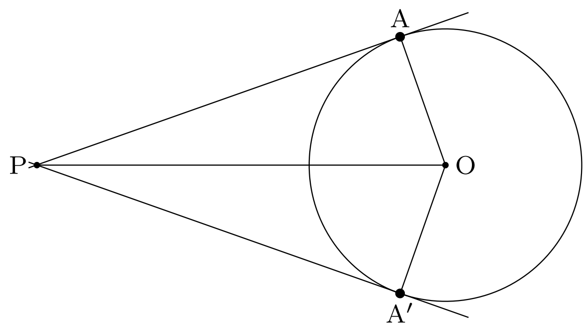


PA が含まれている図形と PA′ が含まれている図形を使うことにしたのですよね。でも、この図を見ても良さそうな図形がありませんね。そこで、どこかに役に立ちそうな線を描いて、PA が含まれている図形と PA′ が含まれている図形が出てくるようにしようと思います。そうすると、もちろん O と A を結び、O と A′ を結ぶのが一番自然な考えですよね。

では右の図を見てください。いま言ったように、O と A を結び、O と A′ を結んで見ました。うーん、でもまだ、PA が含まれている図形と PA′ が含まれている図形が出てきませんね。（PA と PA′ は四角形 APA′O に含まれていますが、図形が 1 つでは合同になるとかならないとかいう話はできません。）そこでこの図にもう少し、線を追加しようと思います。一番素直な考えは、P と O を結ぶことですよね。

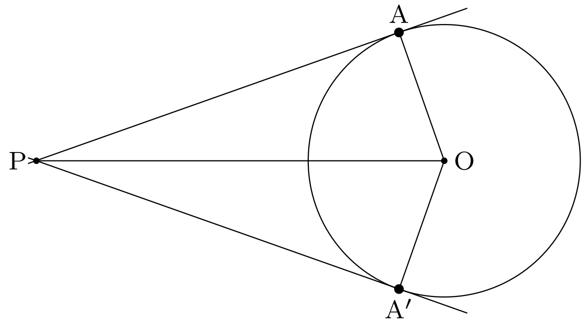


では右の図を見てください。いま言ったように、P と O を結んで見ました。どうですか、これで「PA が含まれている図形」と「PA′ が含まれている図形」が出てきましたね。△PAO と △PA′O のことですよ。とうわけで、これから △PAO と △PA′O が合同であるという証拠を見つければ良いことになります。



ではこの先は、あなたに以下の文の空欄を正しく埋めてもらうことにしましょう。

（証明）



$\triangle$PAO と $\triangle$PA′O において、

円の接線は円の中心と接点を結んでできる半径と垂直なのですから、$\angle$PAO の大きさと $\angle$PA′O の大きさはどちらも $\boxed{\quad\ ^{\circ}}$ です。ですから $\triangle$PAO と $\triangle$PA′O はどちらも $\boxed{\quad\text{三角形}}$ です。というわけで、直角三角形の合同条件を頼りにして証明を進めることができます。

PO はどちらの三角形にも共通に含まれています。ですから当然、

$$\mathrm{PO} = \boxed{\quad\quad} \cdots ①$$

が成り立っています。

円は中心からの距離が等しい点を集めてできている図形ですから、

$$\mathrm{OA} = \boxed{\quad\quad} \cdots ②$$

が成り立っています。

以上、①、②より 2 つの直角三角形 $\triangle$PAO と $\triangle$PA′O では $\boxed{\quad\quad}$ の長さと他の 1 組の $\boxed{\quad}$ の長さが等しいということが判明しました。ですから、（直角三角形の合同条件により）

$$\triangle\mathrm{PAO} \equiv \triangle\mathrm{PA'O}$$

でると断言できます。合同な図形では対応している辺の長さは等しいのですから、

$$\mathrm{PA} = \mathrm{PA'}$$

であると断言できます。

（証明おわり）

問 23. 直角三角形の合同条件をちゃんと覚えているかどうか確認する問題です。

以下の文の中から正しい文を選びなさい。

① 2 つの直角三角形があるとします。このとき、斜辺の長さが等しく、1 組の鋭角の大きさが等しければ、この 2 つの直角三角形は合同であると断言できます。

② 2 つの直角三角形があるとします。このとき、斜辺の長さが等しければ、この 2 つの直角三角形は合同であると断言できます。

③ 2 つの直角三角形があるとします。このとき、斜辺の長さが等しく、斜辺以外の 1 組の辺の長さが等しければ、この 2 つの直角三角形は合同であると断言できます。

④ 2 つの直角三角形があるとします。このとき、1 組の鋭角の大きさが等しければ、この 2 つの直角三角形は合同であると断言できます。

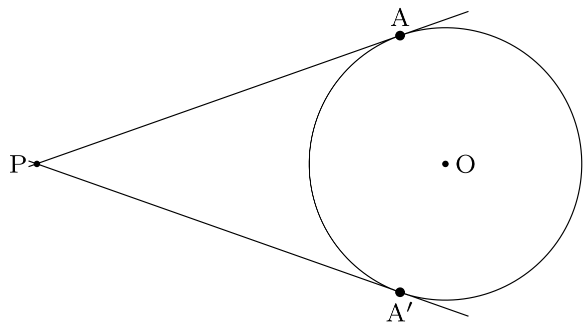
⑤ 2 つの直角三角形があるとします。このとき、2 組の辺の長さが等しく、1 組の角の大きさが等しければ、この 2 つの直角三角形は合同であると断言できます。

⑥ 2 つの直角三角形があるとします。このとき、2 組の角の大きさが等しく、斜辺以外の 1 組の辺の長さが等しければ、この 2 つの直角三角形は合同であると断言できます。

答えを見る

問 24. 例題 15 の解答が理解できているか確認する問題です。

右の図は、円 O の外にある点 P から円 O へ向けて、2 本の接線をひいたものです。この図では接点の名前をそれぞれ A、A$'$ としました。P から A までの長さ PA と P から A$'$ までの長さ PA$'$ は等しいことを証明しなさい。

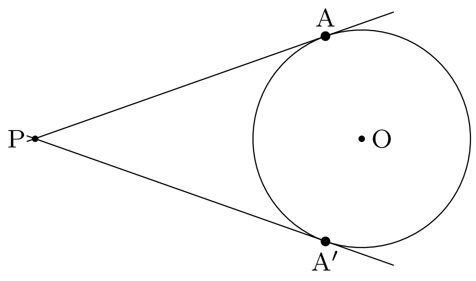


答えを見る

それではここで、例題 15 で証明した大事なことをまとめておくことにしましょう。

重要な事実：円の外の点から描いた 2 本の接線の長さにはなにか関係があるの？

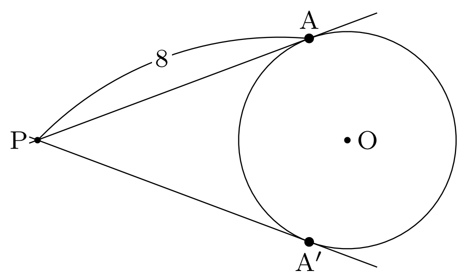
円の外にある点から円に向けて 2 本の接線をひきます。このとき、「円の外にある点」から「円の接点」までの長さはどちらの接線でも同じです。



つまり、右の図で、PA の長さと PA′ の長さは等しくなっているのです。

この図で直線 PA と直線 PA′ はどちらも円 O の外にある点 P から円 O へ向けてひいた接線です。また A と A′ は接点です。このとき、PA の長さと PA′ の長さは必ず等しくなっているのです。

例題 16　右の図のように、円の外にある点 P から円に向けて 2 本の接線をひいたところ、P から片方の接点 A までの長さは 8 であることがわかりました。このとき、P からもう片方の接点 A′ までの長さを求めなさい。

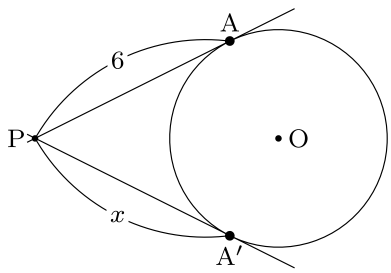


解答

133 ページの「重要な事実：円の外から描いた 2 本の接線の長さにはなにか関係があるの？」で、「円の外にある点から円に向けて 2 本の接線をひくと、円の外にある点から円の接点までの長さはどちらの接線でも同じであるということを学びました。つまり、PA の長さと PA′ の長さは等しくなっているのです。ですからもちろん、PA′ の長さも 8 ということになりますね。

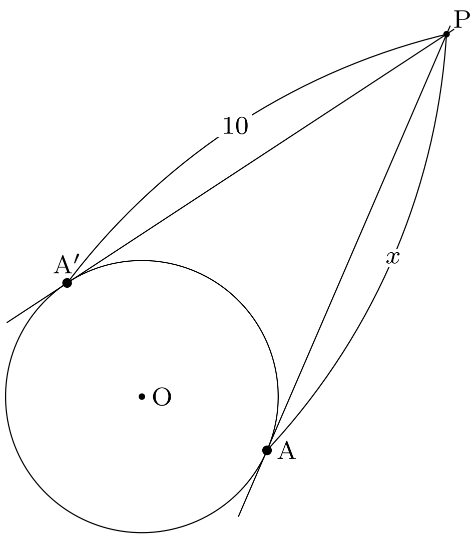
問 25. 次の図の x の値を求めなさい。

(1)



この図で直線 PA と直線 PA′ は円 O の接線。
点 A と点 A′ は接点。

(2)



この図で直線 PA と直線 PA′ は円 O の接線。
点 A と点 A′ は接点。

答えを見る

次の例題を学ぶ前に「三平方の定理」をおさらいしておくことにします。

おさらい：三平方の定理

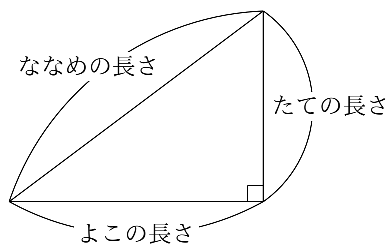
驚くべき事実：三平方の定理

どんな直角三角形でも、「よこの長さを 2 乗した数」と「たての長さを 2 乗した数」をたすと、必ず「ななめのの 2 乗した数」と等しくなっています。

つまり、右の図のような直角三角形では、必ず、

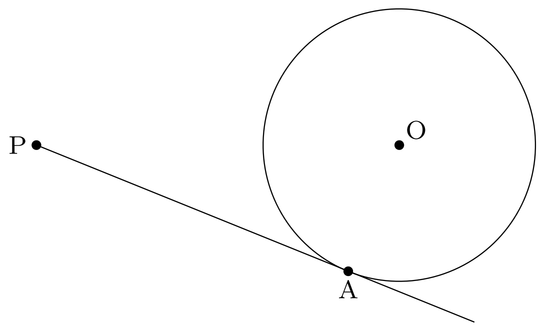
$$(\text{よこの長さ})^2 + (\text{たての長さ})^2 = (\text{ななめの長さ})^2$$

が成り立っています。



おさらい終わり

覚えていましたか？では先に進みましょう。次の例題では三平方の定理が使われます。



例題 17　右の図のように円 O があり、円 O の外にある点 P から、円 O に接するような線が描かれているとします。ここではこの直線が円 O と接する点を A と呼ぶことにします。これから、「P から A までの長さ」を求めてみようと思います。ただし、円 O の半径は 3 cm で、点 P は円 O の中心 O から 8 cm 離れたところにあるとします。次の問を順番に考えていくことにより、「P から A までの長さ」を求めなさい。

(1)　この問題の図に、いくつか役に立ちそうな線を追加しようと思います。あなたならどこにどんな線を描きますか。

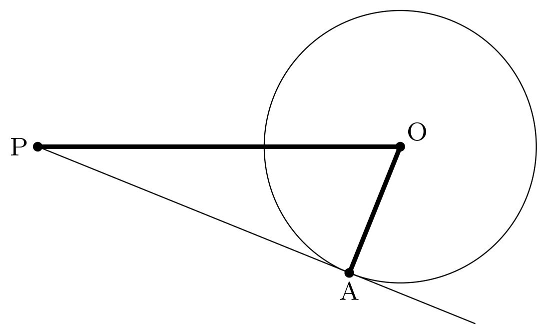
(2)　役に立つ線が (1) で描けた人は、図の中にとても役に立つ直角三角形が現れているはずです。それを利用して PA の長さを求めなさい。

(3)　点 P から円 O へ向けてもう 1 本接線を引くことができますね。その接線が円 O に接する点の名前を B とすることにしましょう。PB の長さを求めなさい。

解答

この問題にはきちんとおさらいしておきたい大事なことが隠れています。ですからこの解答の中であなたに質問をすることにします。その質問もきちんと考えてこの解答を読んでください。

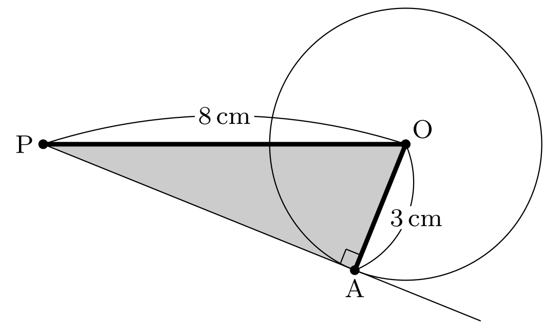
(1) PA の長さを求めるために、問題の図に役に立ちそうな線を追加するのでしたね。右の図を見てください。O と P を結んだ線を描き、O と A を結んだ線を描いてみました。



質問　この図を見ると、$\angle$OAP は直角になっているようにも見えますよね。でも、本当に直角なのでしょうか。(だって、直角になるように O から接線へ線を引いていったわけではないですよね。ただ、O と接点 A を結んだだけですよね。)

質問の答え　もうこういうことは、とっくの昔におさらいしましたね。忘れてしまった人は**??**ページの「重要な事実：円の接線の性質」をもう一度読んでください。答えは「断言できる」です。

(2) 右の図を見てください。役に立ちそうな直角三角形が現れたので灰色にしておきました。また、この図にはすでにわかっている長さも書き込んでおきました。確か、この問題では、「円 O の半径は 3 cm で、点 P は円 O の中心 O から 8 cm 離れたところにある」のでしたね。さらにこの図では、(1) の解答の中の「質問」と「質問の答え」が理解できた人のために、$\angle$PAO のところに直角マークもつけておきました。この灰色の直角三角形に注目して三平方の定理を使えば、PA の長さを求めることができそうですね。では以下の説明の空欄に正しい数を記入してください。



三平方の定理より、

$$\mathrm{PA}^2 + \square^2 = \square^2$$

が成り立っています。つまり、

$$\mathrm{PA}^2 + \square = \square$$

が成り立っているわけです。この式から、

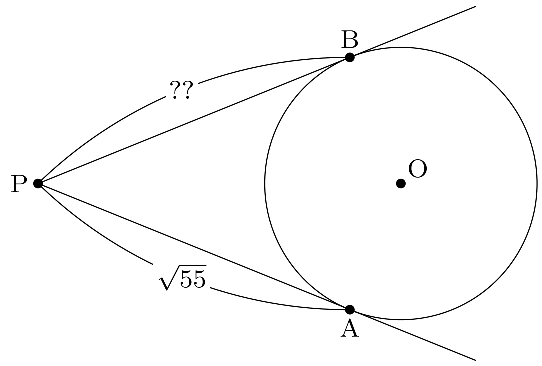
$$\mathrm{PA}^2 = \square$$

であることがわかります。ですから PA の長さを知りたければ 2 乗すると $\boxed{}$ になる数を探せばよいのですが、PA は長さなのでマイナスにはならないということを考えに入れておくと、

$$\mathrm{PA} = \boxed{}$$

であることがわかります。これで PA の長さは $\sqrt{55}\,\mathrm{cm}$ ということがわかりましたね。

(3) 右の図を見てください。もう一本ある接線を図に描き込んでみました。また、(2) で PA の長さは $\sqrt{55}\,\mathrm{cm}$ であることがわかったので、図にも PA の長さを記入しておきました。133 ページの「重要な事実 : 円の外から描いた 2 本の接線の長さにはなにか関係があるの？」では、「円の外にある点から円に向けて 2 本の接線をひくと、円の外にある点から円の接点までの長さはどちらの接線でも同じであるということを学びましたね。ですから、PA の長さと PB の長さは等しくなっているわけです。ですからもちろん、PB の長さも $\sqrt{55}\,\mathrm{cm}$ ということになりますね。

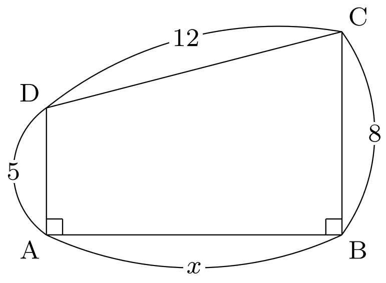


問 26. 半径が 3 cm の円 O があるとします。この円の外部に点 P があり、P は円 O の中心から 10 cm 離れています。点 P から円 O へ接線を引き、接点を T とします。PT の長さを求めなさい。 答えを見る

次の例題を学ぶ前にまた三平方の定理の使い方についておさらいします。

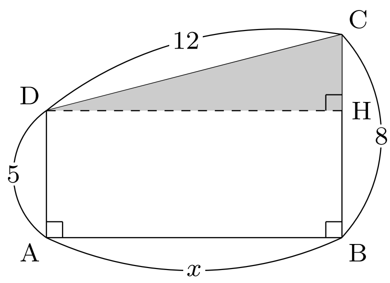
おさらい：三平方の定理を使う練習

問題　右の図の台形で x の値を求めなさい。

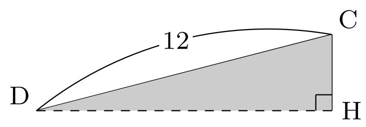


解答

右の図のように頂点 D から辺 BC へ垂線 DH を描いてみると、役に立つ直角三角形 △DHC が現れます。（この図で灰色にしてある三角形のことです。）そうすると、三平方の定理を使って DH の長さを求めればこの問題は解決ですね。



では右の図を見てください。灰色の三角形を取り出しておきました。この図を見ながら三平方の定理を使ってみることにしましょう。そのためにはまず、CH の長さを知る必要がありますね。前の図をてみましょう。HB の長さは DA の長さと同じですよね。つまり、HB の長さは 5 ですね。ということは、



$$
\begin{aligned}
\mathrm{CH} &= \mathrm{CB} - \mathrm{HB} \\
&= 8 - 5 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

であることがわかりますね。

それではいよいよ DH の長さを求めましょう。三平方の定理より、

$$\mathrm{DH}^2 + 3^2 = 12^2$$

が成り立っていることになります。つまり、

$$\mathrm{DH}^2 + 9 = 144$$

が成り立っているわけです。ですから、

$$\mathrm{DH}^2 = 135$$

ということになりますが、この式は「DH の長さを 2 乗すると 135 になる」という意味の式なので、DH の長さを知りたい人は、「2 乗すると 135 になる数」を探せば良いわけです。そうすると、とりあえず $\sqrt{135}$ という数と $-\sqrt{135}$ という数が見つかりますが、辺の長さはマイナスにはなれないので $\sqrt{135}$ が採用されることになります。ところで $\sqrt{135}$ という数は $3\sqrt{15}$ と見かけを変えることができますよね。（大丈夫ですよね。わからない人は「平方根」のテキストを探して自分で復習してください。）というわけで、

$$\mathrm{DH} = 3\sqrt{15}$$

であることがわかりました。

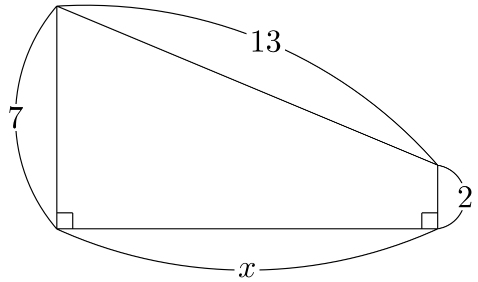
DH の長さとこの問題で求めようとしていた x の値は同じですよね。ですから、

$$x = 3\sqrt{15}$$

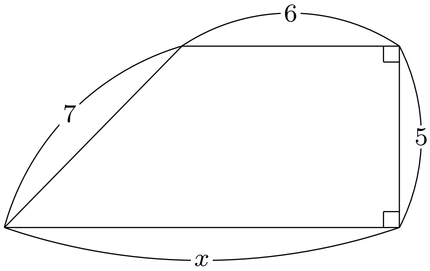
ということになりますね。

問 27. 次の図の台形で x の値を求めなさい。

(1)



(2)

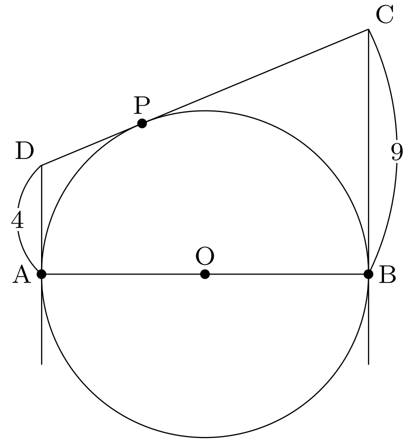


答えを見る

おさらい終わり

では本題に戻ることにしましょう。次の例題では、今おさらいしたことが活躍します。

例題 18　右の図を見てください。線分 AB を直径とする円 O があります。また、直線 DC、直線 DA、直線 CB はどれも円 O の接線で、P、A、B でそれぞれの接線は円 O に接しています。いま、$DA = 4$、$CB = 9$ とするとき、円 O の直径の長さを求めなさい。



解答

まず自分の頭で考えてみてください。10 分待ちます。どうしてもわからない人のために、10 分後にヒントを出します。

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

はい、10 分たちました、どうでしたか？わかりましたか？それでは約束したとおり、どうしてもわからなかった人のためにヒントを出しましょう。

ヒントその 0　133 ページの「重要な事実：円の外から描いた 2 本の接線の長さにはなにか関係があるの？」をもう一度読んでください。

ヒントその 1　問題の図をよく見て考えてください。DA の長さは 4 ですよね。実はこの図には、DA と同じ長さのところがあります。それはどこですか。

ヒントその 2　問題の図をよく見て考えてください。CB の長さは 9 ですよね。実はこの図には、DA と同じ長さのところがあります。それはどこですか。

ではまた 10 分待ちます。自分の頭で考えてみてください。

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

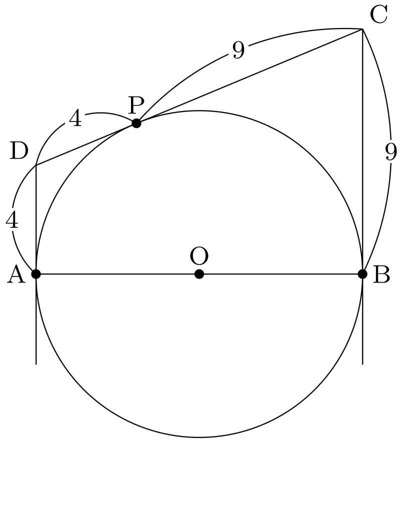
. . . .

. . . .

. . . .

はい、10 分たちました、どうでしたか？ヒントは役にたちましたか。

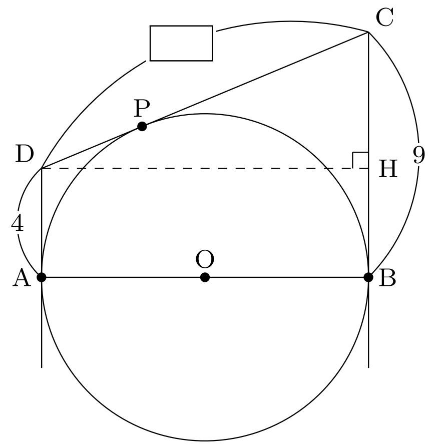
では右の図を見てください。直線 DA と直線 DP に注目してみましょう。どちらも、円 O の外にある点から円 O は向かってひいた接線と考えることができますね。そうすると、どちらの接線で考えても D から接点までの長さは同じになるのでしたね。つまり、DP の長さと DA の長さは同じということになります。ですから、もう図には描き込んでありますが、DP の長さも 4 ということになりますね。



同じように考えれば、CP の長さと CB の長さは同じということがわかりますね。ですから、もう図には描き込んでありますが、CP の長さも 9 ということになりますね。

ここまでわかれば、138 ページの「おさらい：三平方の定理を使う練習」をしっかりおさらいした人は、もうこの問題は簡単に解くことができるでしょう。

ここから先は図を見てもらいながら、あなたに穴埋めをしてもらうことにします。



D から BC へ向かって垂直になるような線をひき、その線が BC とぶつかるところを H としました。そうすると直角三角形 DHC が現れます。

この直角三角形の斜辺 DC の長さは $\boxed{}$ です。（図の空欄にも DC の長さを記入しておいてください。）

この直角三角形のたて、つまり CH の長さは $\boxed{}$ です。

そうすると、三平方の定理より、

$$\mathrm{DH}^2 + \boxed{}^2 = \boxed{}^2$$

がなりたちます。この式より、

$$\mathrm{DH}^2 = 144$$

であることがわかります。つまり、「DH の長さを 2 乗すると 144 になる」ということがわかったのです。ですから、DH の長さを知りたければ「2 乗すると 144 になる数」を探せば良いわけです。ところで、「2 乗すると 144 になる数」は $\boxed{}$ と $\boxed{}$ があります。DH の長さがマイナスのはずはありませんから、

$$\mathrm{DH} = \boxed{}$$

ということになりますね。

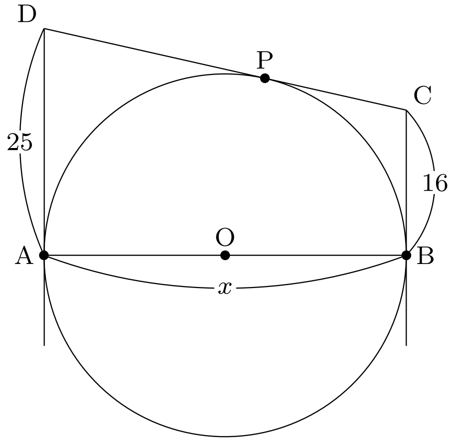
図を見ると解ると思いますが、円 O の直径と DH の長さは同じですよね。ですから、

円 O の直径は 12

ということになります。これでこの問題は解決しました。

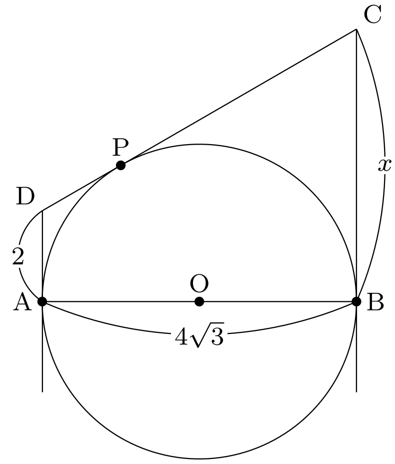
問 28.　次の図で x の値を求めなさい。

(1)



AB は円 O の直径
DC、DA、CB は円 O の接線で、それぞれ P、A、B で円 O と接している

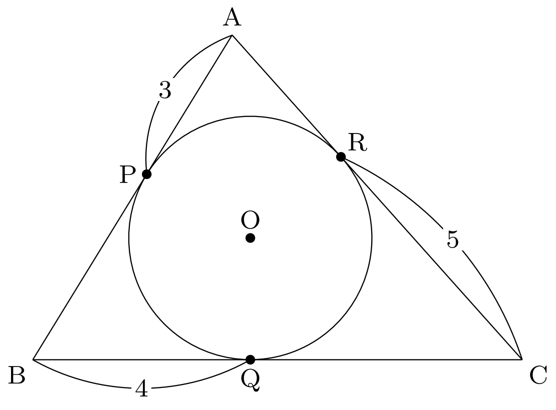
(2)



AB は円 O の直径
DC、DA、CB は円 O の接線で、それぞれ P、A、B で円 O と接している

答えを見る

例題 19　右の図を見てください。△ABC の内側に円 O が接触しています。(このようなとき、「円 O は △ABC に内接している」というのでしたんね。) この図では接点の名前を P、Q、R としました。いま、AP = 3、BQ = 4、CR = 5 となっています。このとき、以下の問に答えなさい。

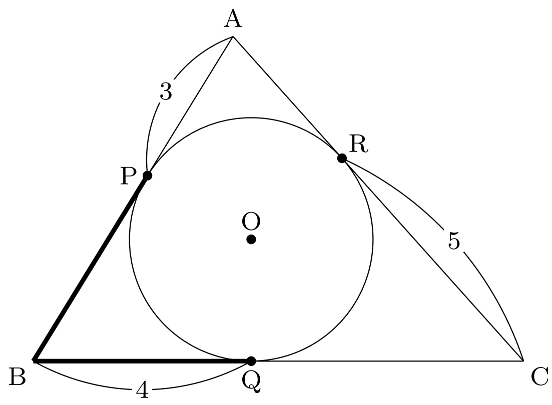


(1)　BP、CQ、AR の長さをそれぞれ求めなさい。

(2)　△ABC の周りの長さを求めなさい。

解答

(1) 右の図を見てください。例えば、この図で太くなぞっておいたところ、つまり、BP と BQ に注目してみましょう。BP と BQ はどちらも、「円 O の外にある点 B から 円 O へ向かってひいた接線」と思うことができますね。ですから、BP の長さと BQ の長さは同じですよね。というわけで、



$$\mathrm{BP} = 4$$

ということになります。

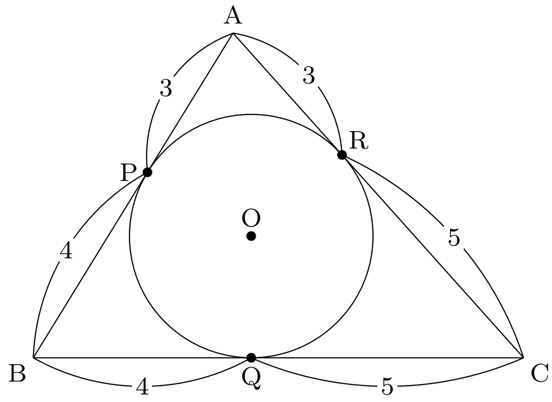
同じように考えれば、

$$\mathrm{CQ} = 5$$

$$\mathrm{AR} = 3$$

であることがわかりますね。

(2) 右の図を見てください。(1) でもとめた BP、CQ、AR の長さを図に記入しておきました。△ABC の周の長さを求めたいのですから、この図に記入されている長さをすべてたせばよいですよね。まぁ、何も気にしないで全部たしてもよいのですが、図をよく見ると同じ長さが 2 つずつ出てきていることに気が付きませんか？ 3、4、5 がどれも 2

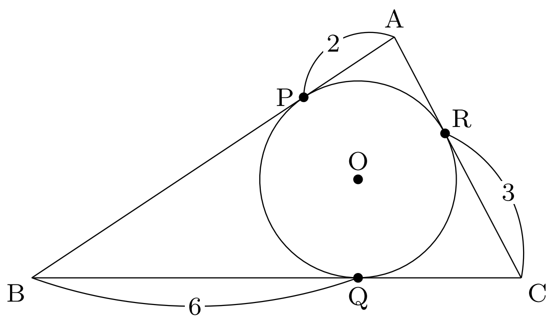


つずつ出てきていますよね。ですから、

$$
\begin{aligned}
\triangle\mathrm{ABC}\text{ の周の長さ} &= 2 \times (3 + 4 + 5) \\
&= 2 \times 12 \\
&= 24
\end{aligned}
$$

と計算することができますね。

問 29.　右の図を見てください。△ABC の内側に円 O が接触しています。（このようなとき、「円 O は △ABC に内接している」というのでしたね。）この図では接点の名前を P、Q、R としました。いま、AP = 2、BQ = 6、CR = 3 となっています。このとき、以下の問に答えなさい。

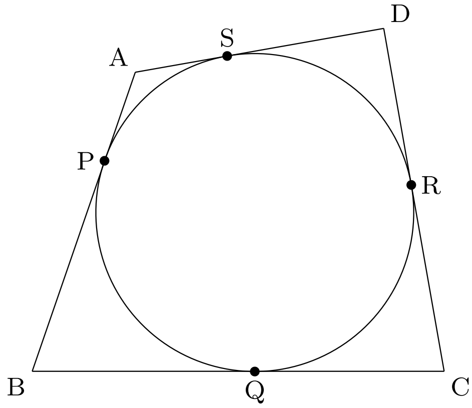


(1) BP、CQ、AR の長さをそれぞれ求めなさい。

(2) △ABC の周りの長さを求めなさい。

答えを見る

問 30.　右の図を見てください。ある円が四角形 ABCD に P、Q、R、S で内接しています。このとき以下の問に答えなさい。



(1) AP と同じ長さのところを見つけなさい。

(2) BP と同じ長さのところを見つけなさい。

(3) DR と同じ長さのところを見つけなさい。

(4) CR と同じ長さのところを見つけなさい。

(5) 実は、四角形 ABCD がどんな四角形でも、この問題のように、ある円が四角形

ABCD に内接しているときは「AB の長さと DC の長さをたしたもの」と「AD の長さと BC の長さをたしたもの」は必ず等しくなります。どうしてなのか、わけをきちんと説明しなさい。

答えを見る

2.8　円に 2 つの直線が交わると、相似な三角形が現れることがあるという話

2.8.1　おさらい：どんな証拠があれば 2 つの三角形は相似だと断言できるの？

「図形の相似」については以前詳しく学習しましたね。この先の学習で必要になることだけを簡単におさらいすることにします。

そもそも相似ってどういうこと？

まず、2 つの図形が相似であるとはどういう意味なのか思い出すことにしましょう。

図形どうしが相似であるってどういう意味？

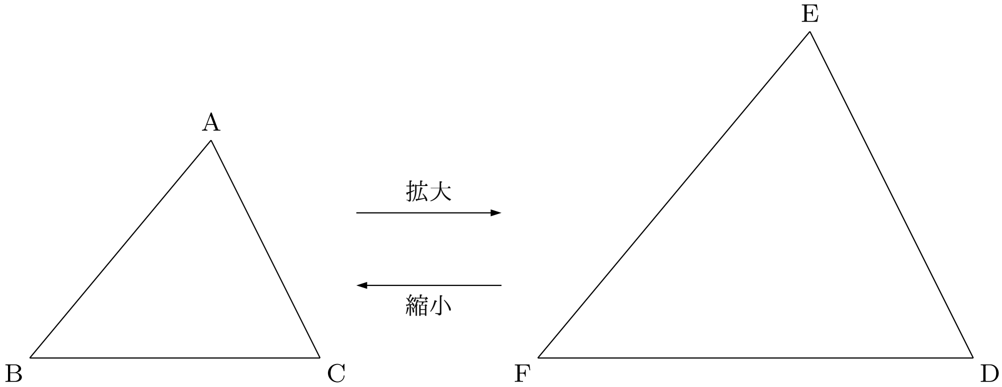
ある図形を形を変えずに一定の割合に拡大または縮小して大きさだけを変えた図形を新しく作ったとします。このとき、新しくできた図形はもとの図形と**相似**であると言います。

では、いくつかの例を見てみることにしましょう。

例 3　相似な図形の例

(1)　相似な 2 つの三角形

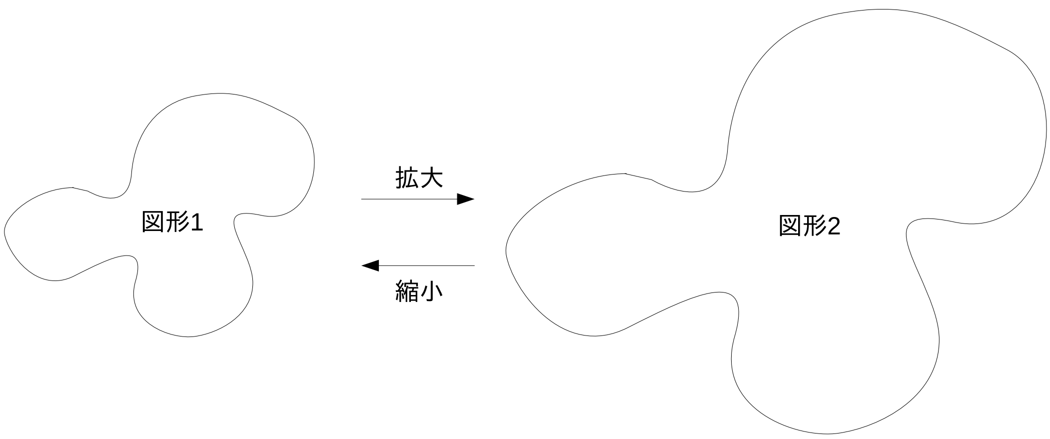
実は、次の図の 2 つの三角形は形は同じで大きさだけが違っています。



コピー機をうまい倍率に設定して △ABC を拡大すると △EFD ができます。また、コピー機をうまい倍率に設定して △EFD を縮小すると △ABC ができます。つまり △ABC と △EFD は相似です。

(2)　相似な 2 つのアメーバのような形

実は、次の図の 2 つのアメーバのような形は形は同じで大きさだけが違っています。



コピー機をうまい倍率に設定して図形 1 を拡大すると図形 2 ができます。また、コピー機をうまい倍率に設定して図形 2 を縮小すると図形 1 ができます。つまり図形 1 と図形 2 は相似です。

2 つの図形が相似であることをあらわすマーク

「2 つの図形が相似になっている」と言いたいときは「$\backsim$」というマークを使います。たとえば、さっきの例 3 の (1) のように、$\triangle$ABC と $\triangle$EFD が相似になっているときは、

$$\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{EFD}$$

と書いておけば、「$\triangle$ABC と $\triangle$EFD が相似になっている」と言ったことになるのです。念のために注意をしておきますが、この場合 $\triangle$ABC $\backsim$ $\triangle$DEF と書いてしまうと間違いになります。対応する点をそろえて書かないとダメですよね。

どんな証拠があれば 2 つの三角形は相似だと断言できるの？

「三角形の相似条件」とよばれているものを思い出しておくことにします。これは、2 つの三角形が相似なのかそうではないのか判断するとき、根拠となる事柄なのです。重要なことなので次にまとめておきます。

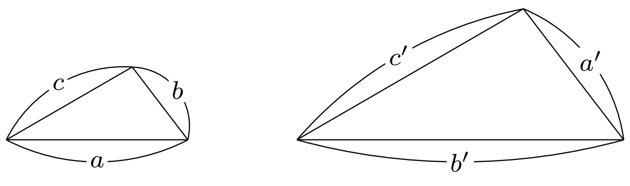
重要な事実：どんな証拠があれば 2 つの三角形は相似だと断言できる？

2 つの三角形があるとき、次のどれかが成り立っていればその 2 つの三角形は相似になっていると断言できます。

(1) 3 組の辺の比が全て等しくなっているとき

つまり、右の図のような 2 つの三角形で、

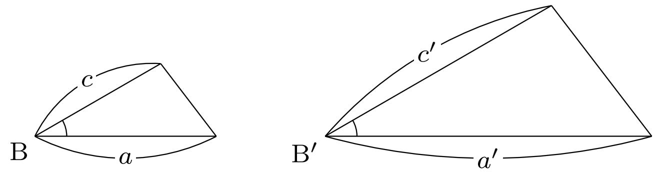
$$a : a' = b : b' = c : c'$$



となっていたら、この 2 つの三角形は相似であると断言して良いのです。

(2) 2 組の辺の比が等しくなっていて、その 2 組の辺の間にある角の大きさが等しくなっているとき

つまり、右の図のような 2 つの三角形で、例えば、



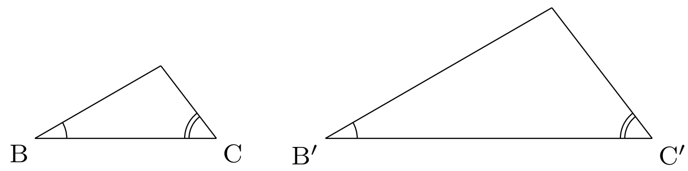
$$a : a' = c : c'$$

$$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{B}'$$

となっていたら、この 2 つの三角形は相似であると断言して良いのです。

(3) 2 組の角の大きさが等しくなっているとき

つまり、右の図のような 2 つの三角形で、例えば、



$$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{B}', \quad \angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{C}'$$

となっていたら、この 2 つの三角形は相似であると断言して良いのです。

どうでしたか？ちゃんと覚えていましたか？忘れてしまっていた人はここでしっかり思い出すようにしてください。

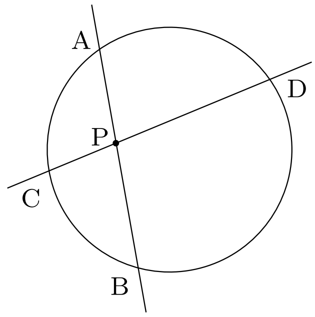
おさらい終わり

それではそろそろ本題に入ることにしましょう。私たちは円の学習をしているのでしたね。

2.8.2 円に2つの直線が交わると、相似な三角形が現れることがあるという話

例題20　（三角形の相似条件を証拠として使う証明問題にチャレンジしようその1）

右の図を見てください。まず、ある円があるとします。次に、この円に交わる直線を2本引きます。ただし、2つの直線は円の中で交わるようにに引くことにし、2本の直線の交点をPと呼ぶことにします。そして、片方の直線が円と交わる点をA、Bと呼ぶことにし、もう片方の直線が円と交わる点をC、Dと呼ぶことにします。このとき以下の問に答えなさい。

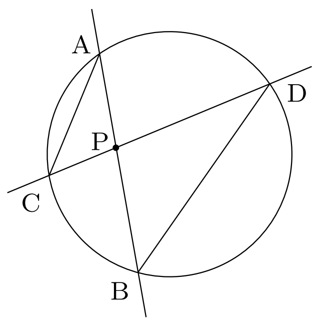


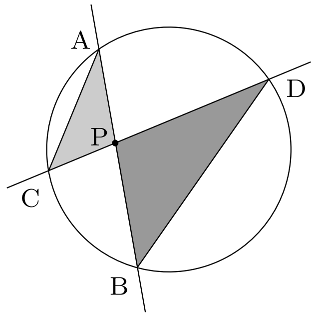
(1) 問題の図で、さらに点Aと点Cを結び、点Bと点Dを結びなさい。

(2) (1)で作った図には2つの三角形 $\triangle$ACP と $\triangle$DBP があらわれているはずです。実は驚くべきことに、$\triangle$ACP と $\triangle$DBP は相似であることを証明しなさい。

解答

(1) 点Aと点Cを結び、点Bと点Dを結ぶのですから右の図のようになりますね。





(2) 右の図を見てください。わかりやすくするために、△ACP と △DBP を灰色にしておきました。

△ACP と △DBP の大きさは違って見えますね。では形はどうでしょう。まぁ、問題には「相似であることを証明しなさい」と書いてあったのですから形はきっと同じなのでしょう。つまり、どうやら △ACP と △DBP は相似であるらしいので、あなたに証明してほしいという問題ですね。

証明にとりかかる前に、この図をしっかり観察してもう少し考えて見ます。この問題はまず初めに円があるというところから始まるお話でしたね。ということは、なにか円の性質が重要な働きをするのでしょうか？ところで、あなたはなにか役に立ちそうな円の性質を知っていますか？

というわけで、円の性質についていろいろ考える必要がありそうですが、その前にもう少し別の面からも探りを入れてみましょう。相似になるということを証明するのですから相似条件を使うはずです。つまり、「3 組の辺の比がそれぞれ等しい」とか、「2 組の辺の比とその間の角の大きさが等しい」とか、「2 組の角の大きさが等しい」という相似条件のうちのどれかを使うはずです。ところで、図をいくら見ても辺の長さの情報は何もありませんね。ということは、頼ることのできる相似条件は、「2 組の角の大きさが等しい」というやつだけですね。

このように考えてくると、きっと円の性質をうまく活用して、注目している 2 つの三角形では「2 組の角の大きさが等しくなっている」ということが判明すれば良さそうです。

でも、円の性質と言ってもいろいろありましたね。一体どのような性質を使えばよいのでしょうか。図を見ると、いろいろなところに「円周角」が出てきていますよね。ですからきっと、「円周角の定理」が活躍してくれるのでしょう。

では 10 分待ちます。まず、自分の力でこの灰色の 2 つの三角形が相似であることを証明してください。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・

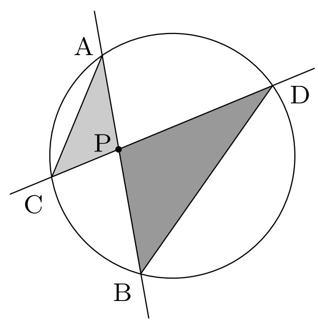
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・

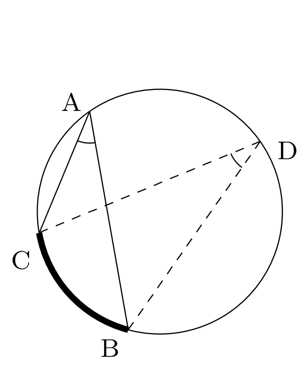
・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・



はい、10 分たちました。証明はできましたか？自分の頭を使ってしっかりと考えてくれた人のために、これから詳しく説明することにしましょう。さっきおさらいした「円周角の定理」がどのように役に立つのか教えることにします。図を見やすくするために、ここから先は 2 つの三角形を灰色にするのはやめます。

まず、弧 CD に注目してみましょう。実はこの問題の図には、弧 CD に対する円周角が 2 つ出てきています。どれだかわかりますか？



右の図を見てください。∠CAB と ∠BDC です。（この図では、注目して欲しいところだけを残してあります。また、注目してほしい弧 CD を太くなぞり、注目してほしい 2 つの円周角 ∠CAB と ∠BDC に角の大きさをあらわす記号をつけました。）ところで円周角の定理によれば、同じ弧に対する円周角の大きさはど

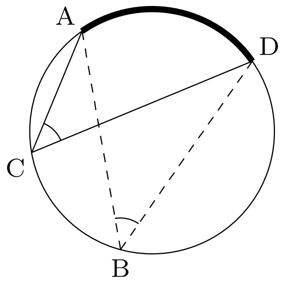
れも等しいのでしたね。ですから、

$$\angle \mathrm{CAB} = \angle \mathrm{BDC}$$

であると断言できますね。

今度は、弧 AD に注目してみましょう。実はこの問題の図には、弧 AD に対する円周角が 2 つ出てきています。どれだかわかりますか？

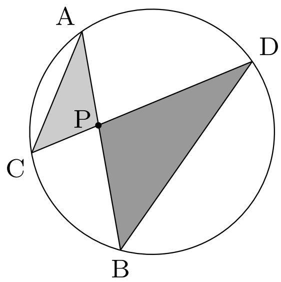
右の図を見てください。$\angle$ACD と $\angle$DBA です。(この図では、注目して欲しいところだけを残してあります。また、注目してほしい弧 AD を太くなぞり、注目してほしい 2 つの円周角 $\angle$ACD と $\angle$DBA に角の大きさをあらわす記号をつけました。）ところで円周角の定理によれば、同じ弧に対する円周角の大きさはどれも等しいのでしたね。ですから、



$$\angle \mathrm{ACD} = \angle \mathrm{DBA}$$

であると断言できますね。

これで証拠がそろいましたよね。「$\triangle$ACP と $\triangle$DBP で 2 組の角の大きさが等しい」という証拠が見つかったわけです。ですからあとは、証明を作文すればよいですね。順序良く、読んだ人にきちんと伝わるよに作文しましょう。例えば、次のように書けば良いのです。右の図を見ながら次の証明を読んでください。（この図では、注目している三角形を再び灰色にしておきました。）



（証明）

$\triangle$ACP と $\triangle$DBP において ←

「$\triangle$ACP と $\triangle$DBP に注目してください」という呼びかけ

$\angle$CAP と $\angle$BDP はどちらも弧 CB に対する円周角なので

$$\angle \mathrm{CAP} = \angle \mathrm{BDP} \cdots ①$$

が成り立つ。

また、$\angle$ACP と $\angle$DBP はどちらも弧 AD に対する円周角なので

$$\angle \mathrm{ACP} = \angle \mathrm{DBP} \cdots ②$$

が成り立つ。

①、②より、2 組の角の大きさがそれぞれ等しい。

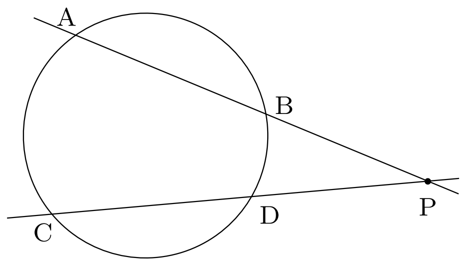
よって、

$$\triangle \mathrm{ACP} \backsim \triangle \mathrm{DBP}$$

（証明終わり）

問 31.　（三角形の相似条件を証拠として使う証明問題にチャレンジしようその 2）

右の図を見てください。まず、ある円があるとします。次に、この円に交わる直線を 2 本引きます。ただし、2 つの直線は円の外で交わるように引くことにし、2 本の直線の交点を P と呼ぶことにします。そして、片方の直線が円と交わる点を A、B と呼ぶことにし、もう片方の直線が円と交わる点を C、D と呼ぶことにします。このとき以下の問に答えなさい。

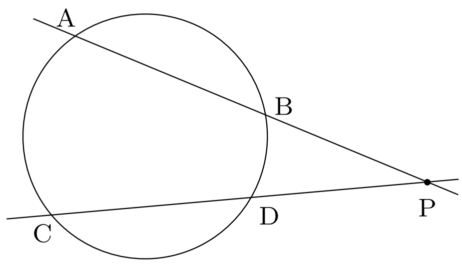


(1) 問題の図で、さらに点 A と点 D を結び、点 B と点 C を結びなさい。

(2) (1) で作った図には 2 つの三角形 $\triangle$ADP と $\triangle$CBP があらわれているはずです。実は驚くべきことに、$\triangle$ADP と $\triangle$CBP は相似であることを証明しなさい。

答えを見る

問 32. （三角形の相似条件を証拠として使う証明問題にチャレンジしようその 3）



右の図を見てください。まず、ある円があるとします。次に、この円に交わる直線を 2 本引きます。ただし、2 つの直線は円の外で交わるように引くことにし、2 本の直線の交点を P と呼ぶことにします。そして、片方の直線が円と交わる点を A、B と呼ぶことにし、もう片方の直線が円と交わる点を C、D と呼ぶことにします。このとき以下の問に答えなさい。

(1) 問題の図で、さらに点 A と点 C を結び、点 B と点 D を結びなさい。

(2) (1) で作った図には 2 つの三角形 △ACP と △DBP があらわれているはずです。実は驚くべきことに、△ACP と △DBP は相似であることを証明しなさい。

答えを見る

問 33. 円 O があり、円 O の円周上に 4 つの点 A、B、C、D がこの順に反時計回り（つまり時計の針の回転する向きとは反対周り）に並んでいるとします。また、さらに弧 AB と弧 BC の長さは等しくなっているとします。弦 AC と弦 BD は交わっているはずですが、交わった点を P と呼ぶことにします。以下の問に答えなさい。

(1) この問題をよく読んで、この問題の状況を図にしなさい。

(2) △BPC ∽ △BCD であることを証明しなさい。

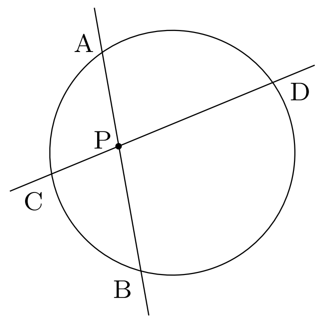
答えを見る

2.8.3 円に 2 つの直線が交わると相似な三角形が現れることがあるので、いろいろなところの長さがわかるかもしれないという話

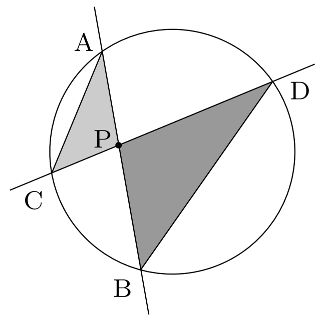
150 ページから 155 ページまでをきちんと学んだ人のための話をこれからします。

円に交わる 2 直線が円のなかで交わっていると・・・

右の図のように、円に交わる直線 AB と直線 CD が円の中の点 P で交わっているとします。



そしてさらに A と C を結び、B と D を結びます。右の図を見てください。そうすると △APC と △DPB が現れますね。（わかりやすくするために、その 2 つの三角形を灰色にしておきました。）例題 20 がきちんと理解出来た人は、



$$\triangle \mathrm{APC} \backsim \triangle \mathrm{DPB}$$

となっていることを証明できるはずです。（ここではもう証明はしません。）

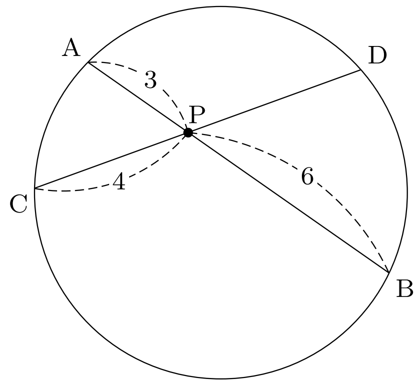
ところで、相似な三角形では対応する辺の長さの比はどこを比べても同じになっているのですよね。この 2 つの三角形では、PA に対応するのは PD で、PC に対応するのは PD ですよね。（ここ、勘違いする人多いんですよね。どの辺とどの辺が対応するのかよく気をつけてくださいね。）ですから、

$$\mathrm{PA} : \mathrm{PD} = \mathrm{PC} : \mathrm{PB}$$

が成り立っていると断言できますね。

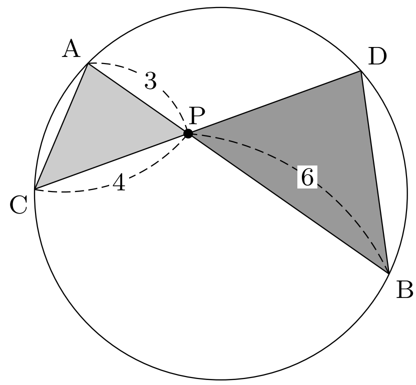
それではこの話が役に立つ問題を練習してみることにしましょう。

例題 21　右の図を見てください。ある円と直線 AB、直線 CD があり、2 つの直線は円の中の点 P で交わっています。この図のように、PA = 3、PB = 6、PC = 4 のとき、PD の長さを求めなさい。



解答

右の図を見てください。この例題の前に学んだことを思い出して見ましょう。たしか、この例題のように円に交わる 2 直線があると、相似な三角形が現れているのでしたね。どの三角形が相似なのかわかりやすくするために、この図では相似な三角形を灰色にしておきました。



ところで、相似な三角形では対応する辺の長さの比はどこを比べても同じになっているのですよね。この相似な 2 つの三角形では、PA に対応するのは PD で、PC に対応するのは PD です。（ここ、勘違いする人多いんですよね。どの辺とどの辺が対応するのか気をつけてくださいね。）というわけで、

$$3 : \mathrm{PD} = 4 : 6$$

が成り立っていると断言できるわけです。この式をもとに、PD の長さを求めることができますよね。例えば、比例の式では「内項の積と外項の積は等しい」ということをしっている人だったら、まず、

$$\mathrm{PD} \times 4 = 3 \times 6$$

とします。つまり、

$$4 \times \mathrm{PD} = 18$$

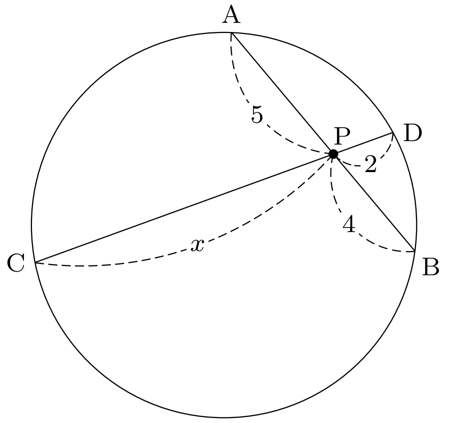
となるわけです。そうすると、次は、

$$\mathrm{PD} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

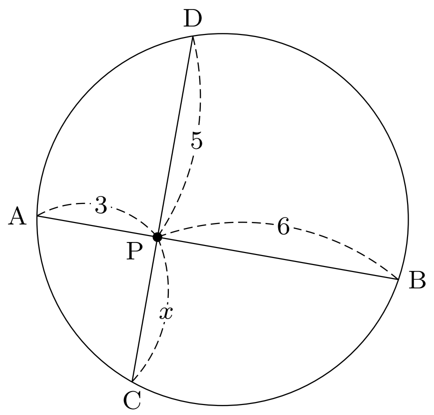
となり、この問題は解決ですね。

問 34. 次の図の x の値を求めなさい。

(1)

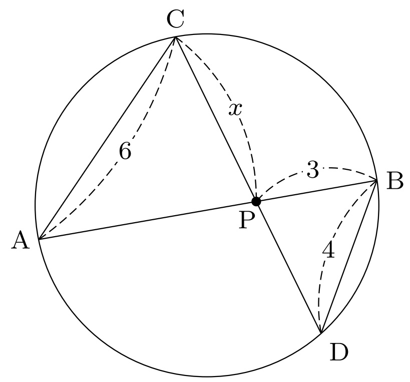


(2)



答えを見る

問 35. 右の図を見てください。ある円の 2 つの弦 AB、CD が円の中の点 P で交わっています。このとき以下の問に答えなさい。



(1) △PAC と △PDB は相似であることを証明しなさい。

(2) (1) で △PAC と △PDB は相似であることを証明しましたね。このとき、

（a）PB に対応するのはどこですか。

（b）PD に対応するのはどこですか。

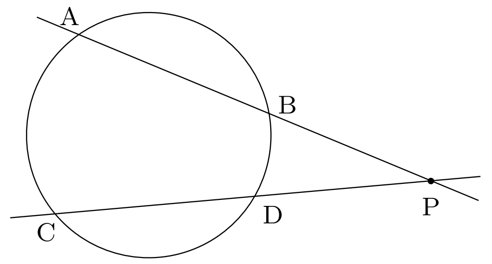
（c）BD に対応するのはどこですか。

(3) PC の長さを求めなさい。

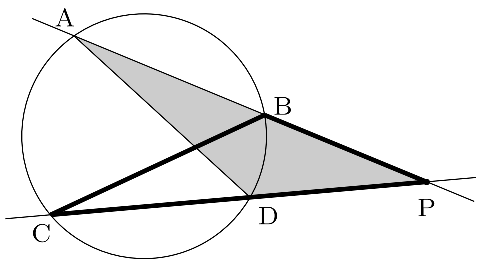
答えを見る

円に交わる 2 直線が円の外で交わっていると・・・

右の図のように、円に交わる直線 AB と直線 CD が円の外の点 P で交わっているとします。



そしてさらに A と D を結び、C と B を結びます。右の図を見てください。そうすると △ADP と △CBP が現れますね。（わかりやすくするために、△ADP は灰色にし、△CBP は太い線で描いておきました。）問 32 がきちんと理解出来た人は、



$$\triangle \mathrm{ADP} \backsim \triangle \mathrm{CBP}$$

となっていることを証明できるはずです。（ここではもう証明はしません。）

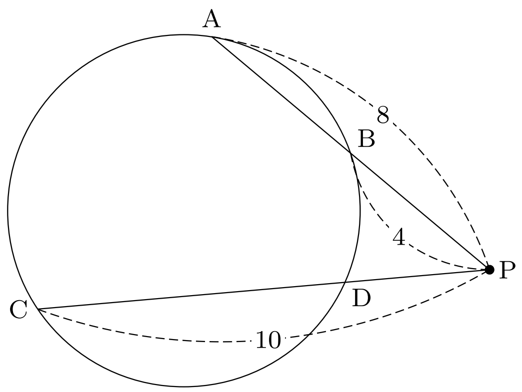
ところで、相似な三角形では対応する辺の長さの比はどこを比べても同じになっているのですよね。この 2 つの三角形では、PA に対応するのは PC で、PD に対応するのは PB ですよね。（ここ、勘違いする人多いんですよね。どの辺とどの辺が対応するのか気をつけてくださいね。）ですから、

$$\mathrm{PA} : \mathrm{PC} = \mathrm{PD} : \mathrm{PB}$$

が成り立っていると断言できますね。

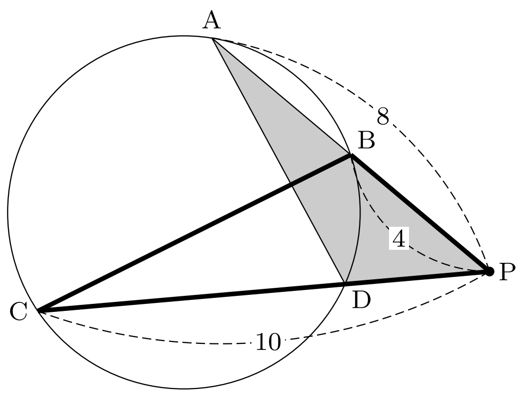
それではこの話が役に立つ問題を練習してみることにしましょう。

例題 22　右の図を見てください。ある円と直線 AB、直線 CD があり、2 つの直線は円の外の点 P で交わっています。この図のように、PA = 8、PB = 4、PC = 10 のとき、PD の長さを求めなさい。



解答

右の図を見てください。この例題の前に学んだことを思い出して見ましょう。たしか、この例題のように円に交わる 2 直線があると、相似な三角形が現れているのでしたね。どの三角形が相似なのかわかりやすくするために、この図では相似な三角形の片方を灰色にし、もう片方を太い線で描いておきました。



ところで、相似な三角形では対応する辺の長さの比はどこを比べても同じになっているのですよね。この相似な 2 つの三角形では、PA に対応するのは PC で、PD に対応するのは PB です。というわけで、

$$8 : 10 = \mathrm{PD} : 4$$

が成り立っていると断言できるわけです。この式をもとに、PD の長さを求めることができますよね。例えば、比例の式では「内項の積と外項の積は等しい」ということをしっている人だったら、まず、

$$10 \times \mathrm{PD} = 8 \times 4$$

とします。つまり、

$$10 \times \mathrm{PD} = 32$$

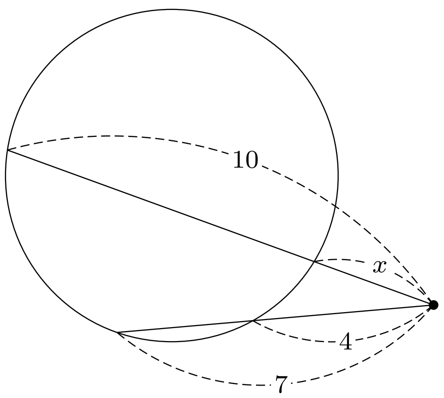
となるわけです。そうすると、次は、

$$\mathrm{PD} = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}$$

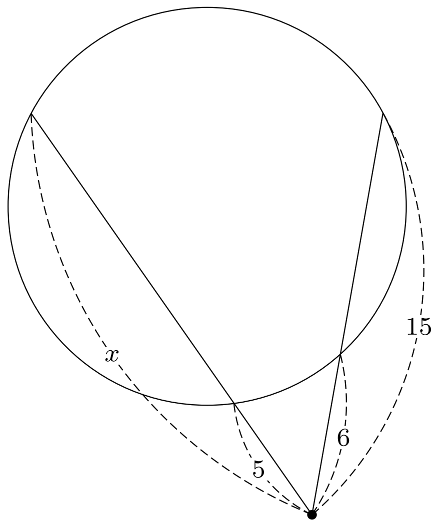
となり、この問題は解決ですね。

問 36. 次の図の x の値を求めなさい。

(1)



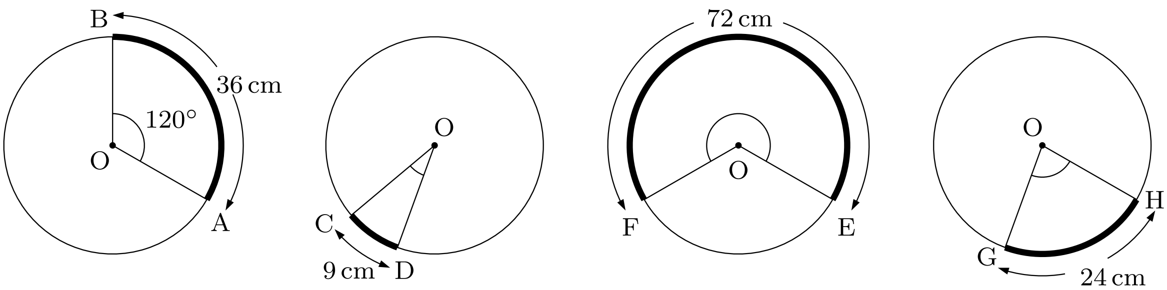
(2)



答えを見る

問の解答

問 1.



中心角の大きさと弧の長さは比例しています。ですから次のように計算することができます。

(1) $\overparen{\mathrm{CD}}$ の長さは $\overparen{\mathrm{AB}}$ の長さ何倍なのか求めてみます。すると

$$9 \div 36 = \frac{1}{4}\,\text{倍}$$

となります。ということは

$$\overparen{\mathrm{CD}}\ \text{に対する中心角の大きさ} = 120 \times \frac{1}{4} = 30^\circ$$

となるわけです。

(2) $\overparen{\mathrm{EF}}$ の長さは $\overparen{\mathrm{AB}}$ の長さ何倍なのか求めてみます。すると

$$72 \div 36 = 2\,\text{倍}$$

となります。ということは

$$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}\ \text{に対する中心角の大きさ} = 120 \times 2 = 240^\circ$$

となるわけです。

(3) $\overset{\frown}{\mathrm{GH}}$ の長さは $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の長さ何倍なのか求めてみます。すると

$$24 \div 36 = \frac{2}{3}\ \text{倍}$$

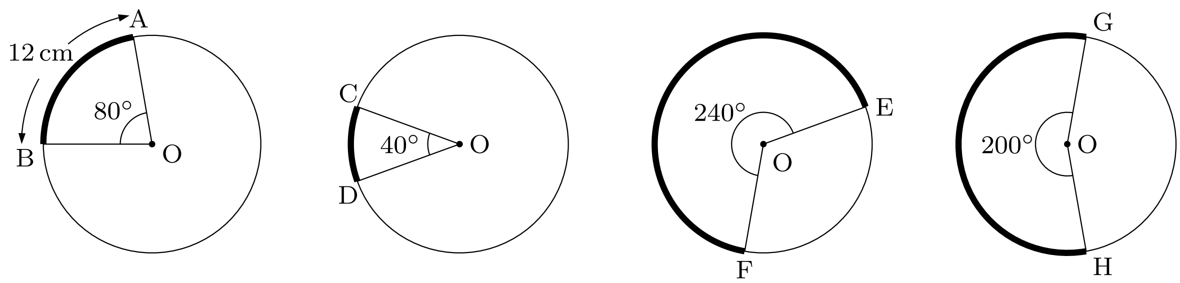
となります。ということは

$$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}\ \text{に対する中心角の大きさ} = 120\times = \frac{2}{3} = 80^\circ$$

となるわけです。

本文へ戻る

問 2.



中心角の大きさと弧の長さは比例しています。ですから次のように計算することができます。

(1) $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ 対する中心角の大きささは $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角の大きさの何倍なのか求めてみます。すると

$$40 \div 80 = \frac{1}{2}\ \text{倍}$$

となります。ということは

$$\overset{\frown}{\mathrm{CD}} = 12 \times \frac{1}{2} = 6\,\mathrm{cm}$$

となるわけです。

(2) $\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$ 対する中心角の大きささは $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角の大きさの何倍なのか求めてみます。すると

$$240 \div 80 = 3 \text{倍}$$

となります。ということは

$$\overset{\frown}{\mathrm{EF}} = 12 \times 3 = 36\,\mathrm{cm}$$

となるわけです。

(3) $\overset{\frown}{\mathrm{GH}}$ 対する中心角の大きささは $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角の大きさの何倍なのか求めてみます。すると

$$200 \div 80 = \frac{5}{2} \text{倍}$$

となります。ということは

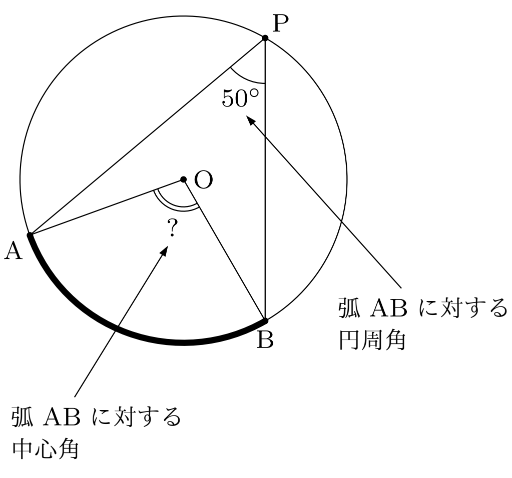
$$\overset{\frown}{\mathrm{GH}} = 12 \times \frac{5}{2} = 30\,\mathrm{cm}$$

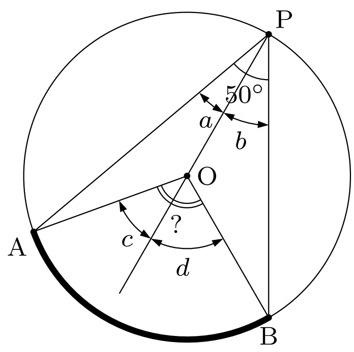
となるわけです。

本文へ戻る

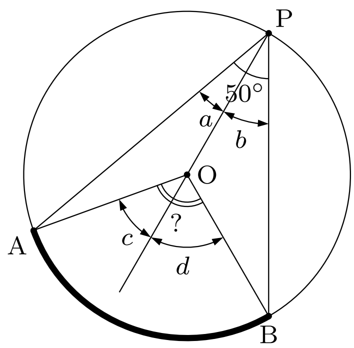
問 3. 例 1 の説明の続きを考えてもらう問題でした。

『右の図を見てください。円 O と弧 AB を 1 つ決め、弧 AB に対する円周角 ∠APB と弧 AB に対する中心角 ∠AOB を作ったところ円周角 ∠APB の大きさが 50° になったとします。このとき中心角 ∠AOB の大きさが何度になっているの調べるため、次に説明するようにまず、補助線をかいて考えることにしました。』ということでしたね。





『右の図を見てください。円周角ができている場所と円の中心をむすんだ線をすこし長めに描いてみることにしました。つまり、P と O を結ぶ線を少し長めに描いてみます。そうすると、この図の場合、円周角 ∠APB は今描いた線で 2 つの角に分割さます。図では分割されてできた 2 つの角をそれぞれ $\angle a$、$\angle b$ としてあります。また、同じように中心角 ∠AOB は今描いた線で 2 つの角に分割されます。図では分割されてできた 2 つの角をそれぞれ $\angle c$、$\angle d$ としてあります。それでは以下の問に答えていくことによって、中心角 ∠AOB の大きさを求めてください。』ということでした。



(1) 『50° の角を 2 つに分割したわけですから、$\angle a$ が 10° で、$\angle b$ が 40° ということも考えられますし、$\angle a$ が 20° で、$\angle b$ が 30° ということも考えられますし、$\angle a$ が 22° で、$\angle b$ が 28° ということも考えられますし $\cdots$ この他にも色々考えられますよね。ここでは、例えば $\angle a$ が 20° で、$\angle b$ が 30° になっている場合を考えてみます。』ということでした。

(a) 『△PAO は二等辺三角形であると断言してよいですか。もし、断言して良いとしたら、それはどうしてですか。理由を言いなさい。』という問題でした。

△PAO は二等辺三角形であると断言できます。

理由：O は円の中心で、P や A は円周上の点です。中心から円周上の点までの距離は一定ですから OA の長さと OP の長さは同じです。

(b) 『△PBO は二等辺三角形であると断言してよいですか。もし、断言して良いとしたら、それはどうしてですか。理由を言いなさい。』という問題でした。

△PBO は二等辺三角形であると断言できます。

理由：O は円の中心で、P や B は円周上の点です。中心から円周上の点まで

の距離は一定ですから OB の長さと OP の長さは同じです。

(c) 『二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しくなっているのでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle$PAO の大きさは何度ですか。』という問題でした。

$\angle$PAO の大きさは 20° です。

(d) 『二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しくなっているのでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle$PBO の大きさは何度ですか。』という問題でした。

$\angle$PBO の大きさは 30° です。

(e) 『「三角形の外角と内角の間にある深い関係」によると、「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっている」のでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle c$ の大きさは何度ですか。』という問題でした。

$\angle c$ の大きさは 40° です。

(f) 『「三角形の外角と内角の間にある深い関係」によると、「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっている」のでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle d$ の大きさは何度ですか。』という問題でした。

$\angle d$ の大きさは 60° です。

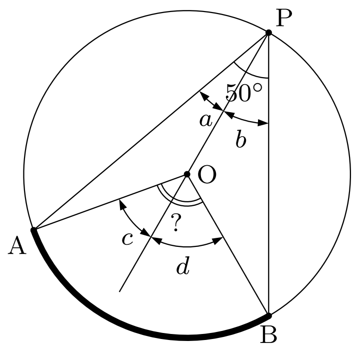
(g) 『中心角 $\angle$AOB の大きさを求めなさい。』という問題でした。

$\angle c$ の大きさと $\angle d$ の大きさを合わせれば良いわけですから

$$\angle \mathrm{AOB} = 40^\circ + 60^\circ = 100^\circ$$

です。

(2) 『$50°$ の角を 2 つに分割したわけですから、$\angle a$ が $10°$ で、$\angle b$ が $40°$ ということも考えられますし、$\angle a$ が $20°$ で、$\angle b$ が $30°$ ということも考えられますし、$\angle a$ が $22°$ で、$\angle b$ が $28°$ ということも考えられますし $\cdots$ この他にも色々考えられるのでしたよね。では今度は、例えば $\angle a$ が $34°$ で、$\angle b$ が $16°$ になっている場合を考えてみます。』ということでした。



(a) 『△PAO は二等辺三角形であると断言してよいですか。もし、断言して良いとしたら、それはどうしてですか。理由を言いなさい。』という問題でした。

△PAO は二等辺三角形であると断言できます。

理由：O は円の中心で、P や A は円周上の点です。中心から円周上の点までの距離は一定ですから OA の長さと OP の長さは同じです。

(b) 『△PBO は二等辺三角形であると断言してよいですか。もし、断言して良いとしたら、それはどうしてですか。理由を言いなさい。』という問題でした。

△PBO は二等辺三角形であると断言できます。

理由：O は円の中心で、P や B は円周上の点です。中心から円周上の点までの距離は一定ですから OB の長さと OP の長さは同じです。

(c) 『二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しくなっているのでしたね。このことを考えに入れて答えてください。∠PAO の大きさは何度ですか。』という問題でした。

∠PAO の大きさは $34°$ です。

(d) 『二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しくなっているのでしたね。このことを考えに入れて答えてください。∠PBO の大きさは何度ですか。』という問題でした。

∠PBO の大きさは 16° です。

(e) 『「三角形の外角と内角の間にある深い関係」によると、「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっている」のでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle c$ の大きさは何度ですか。』という問題でした。

$\angle c$ の大きさは 68° です。

(f) 『「三角形の外角と内角の間にある深い関係」によると、「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっている」のでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle d$ の大きさは何度ですか。』という問題でした。

$\angle d$ の大きさは 32° です。

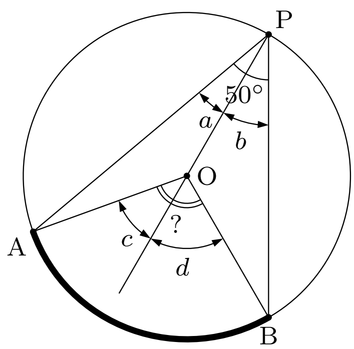
(g) 『中心角 ∠AOB の大きさを求めなさい。』という問題でした。

$\angle c$ の大きさと $\angle d$ の大きさを合わせれば良いわけですから

$$\angle \mathrm{AOB} = 68^\circ + 32^\circ = 100^\circ$$

です。

(3) 『50° の角を 2 つに分割したわけですから、$\angle a$ が 10° で、$\angle b$ が 40° ということも考えられますし、$\angle a$ が 20° で、$\angle b$ が 30° ということも考えられますし、$\angle a$ が 22° で、$\angle b$ が 28° ということも考えられますし $\cdots$ この他にも色々考えられるのでしたよね。では今度は、具体的な数値を使うなんてケチなことはやめて、



$\angle a$ が a° で、$\angle b$ が b° になっている場合を考えてみます。』ということでした。

(a) 『△PAO は二等辺三角形であると断言してよいですか。もし、断言して良い

としたら、それはどうしてですか。理由を言いなさい。』という問題でした。

△PAO は二等辺三角形であると断言できます。

理由：O は円の中心で、P や A は円周上の点です。中心から円周上の点までの距離は一定ですから OA の長さと OP の長さは同じです。

（b）『△PBO は二等辺三角形であると断言してよいですか。もし、断言して良いとしたら、それはどうしてですか。理由を言いなさい。』という問題でした。

△PBO は二等辺三角形であると断言できます。

理由：O は円の中心で、P や B は円周上の点です。中心から円周上の点までの距離は一定ですから OB の長さと OP の長さは同じです。

（c）『二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しくなっているのでしたね。このことを考えに入れて答えてください。∠PAO の大きさは何度ですか。』という問題でした。

∠PAO の大きさは $a°$ です。

（d）『二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しくなっているのでしたね。このことを考えに入れて答えてください。∠PBO の大きさは何度ですか。』という問題でした。

∠PBO の大きさは $b°$ です。

（e）『「三角形の外角と内角の間にある深い関係」によると、「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっている」のでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle c$ の大きさは何度ですか。』という問題でした。

$\angle c$ の大きさは $2a°$ です。

（f）『「三角形の外角と内角の間にある深い関係」によると、「どんな三角形でも、

外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっている」のでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle d$ の大きさは何度ですか。』という問題でした。

$\angle d$ の大きさは $2b^\circ$ です。

(g)『中心角 $\angle \mathrm{AOB}$ の大きさを求めなさい。』という問題でした。

$\angle c$ の大きさと $\angle d$ の大きさを合わせれば良いわけですから

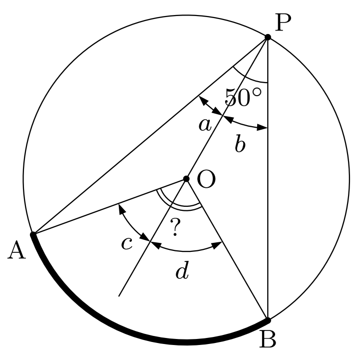
$$\angle \mathrm{AOB} = 2a^\circ + 2b^\circ = 2(a+b)^\circ$$

となります。ところで、$a+b$ は 50 になるに決まってますから

$$\angle \mathrm{AOB} = 2 \times 50^\circ = 100^\circ$$

ということがわかります。

(4)『右の図を見てください。ここまでしっかり考えることができた人に質問です。 50° の角を 2 つに分割したわけですから、$\angle a$ が 10° で、$\angle b$ が 40° ということも考えられますし、$\angle a$ が 20° で、$\angle b$ が 30° ということも考えられますし、$\angle a$ が 22° で、$\angle b$ が 28° ということも考えられますし $\cdots$



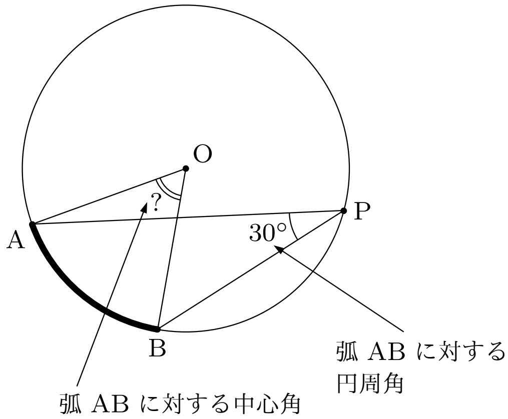
この他にも色々考えられるのですよね。でも、$\angle a$ と $\angle b$ が何度と何度になっていようが、(合わせて 50° になっているときは)中心角 $\angle \mathrm{AOB}$ の大きさは必ず 100° になると断言してよいですか。』という問題でした。

もちろん断言できますね。

本文へ戻る

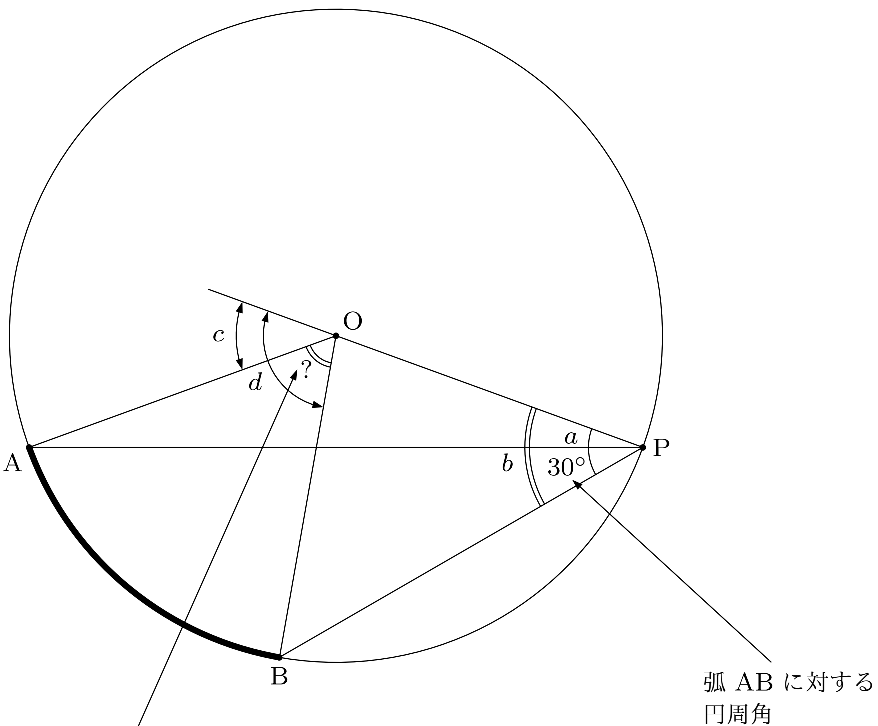
問 4.

『右の図を見てください。円 O と弧 AB を 1 つ決め、図のような場所に弧 AB に対する円周角 ∠APB と弧 AB に対する中心角 ∠AOB を作ったところ円周角 ∠APB の大きさが 30° になったとします。このとき中心角 ∠AOB の大きさは分かるのかどうか、以下の順で考えていくことによって結論を出す事にします。』ということでした。



念のための注意：今はまだ「円周角の定理」を使って答えを求めてはいけませんよね。だって、私たちはまだ「円周角の定理」を証明できていません。ですから、「円周角の定理」は本当なのかどうか確信がないのです。そもそも「円周角の定理」が本当なのかどうか探りを入れるため、こんな問を考えることにしているのです。

次の図を見てください。見やすくするために図を大きくしました。



『やはりこの時も例 1 や問 3 の方法を真似て、P と O を結ぶ線を少し長めに描いてみることにしました。そしてこの線を描くことによってできた角の名前を図のように、それぞれ $\angle a$、$\angle b$ $\angle c$、$\angle d$ としました。それでは以下の問に答えていくことによって、中心角 ∠AOB の大きさを求めてください。』ということでしたね。

(1) 『困ったことに $\angle a$ や $\angle b$ がそれぞれ何度なのかはわかりませんよね。しかし、 図をしっかり見ると分かると思いますが、$\angle b$ の大きさから $\angle a$ の大きさをひくと必ず何度になっいるはずですか。』という問題でした。

もちろん 30° ですね。

(2) 『△AOP は二等辺三角形であると断言してよいですか。もし、断言して良いとしたら、それはどうしてですか。理由を言いなさい。』という問題でした。

△AOP は二等辺三角形であると断言できます。

理由：O は円の中心で、P や A は円周上の点です。中心から円周上の点までの距離は一定ですから OA の長さと OP の長さは同じです。

(3) 『△BOP は二等辺三角形であると断言してよいですか。もし、断言して良いとしたら、それはどうしてですか。理由を言いなさい。』という問題でした。

△BOP は二等辺三角形であると断言できます。

理由：O は円の中心で、P や B は円周上の点です。中心から円周上の点までの距離は一定ですから OB の長さと OP の長さは同じです。

(4) 『二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しくなっているのでしたね。このことを考えに入れて答えてください。∠OAP の大きさは何度ですか。』という問題でした。

△AOP は OB と OP の長さが同じ二等辺三角形ですから ∠OAP の大きさと ∠OPA の大きさは同じです。ですから ∠OAP の大きさは a です。

(5) 『二等辺三角形では底角の大きさは必ず等しくなっているのでしたね。このことを

考えに入れて答えてください。$\angle$OBP の大きさは何度ですか。』という問題でした。

$\triangle$BOP は OB と OP の長さが同じ二等辺三角形ですから $\angle$OBP の大きさと $\angle$OPB の大きさは同じです。ですから $\angle$OBP の大きさは b です。

(6) 『「三角形の外角と内角の間にある深い関係」によると、「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっている」のでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle c$ の大きさは何度ですか。』という問題でした。

$\angle c$ は $\triangle$OAP の外角であることに注意しましょう。$\angle c$ の大きさは $2a$ ですね。

(7) 『「三角形の外角と内角の間にある深い関係」によると、「どんな三角形でも、外角は、それと隣あわない 2 つの内角の和に等しくなっている」のでしたね。このことを考えに入れて答えてください。$\angle d$ の大きさは何度ですか。』という問題でした。

$\angle d$ は $\triangle$OBP の外角であることに注意しましょう。$\angle d$ の大きさは $2b$ ですね。

(8) 『中心角 $\angle$AOB の大きさを求めなさい。』という問題でした。

$\angle d$ の大きさから $\angle c$ の大きさをひけば良いわけですから、

$$\angle \mathrm{AOB} = \angle d - \angle c = 2b - 2a = 2(b - a)$$

となっていることがわかります。ところでこの問題では $b - a$ は 30° に決まっています。ですから

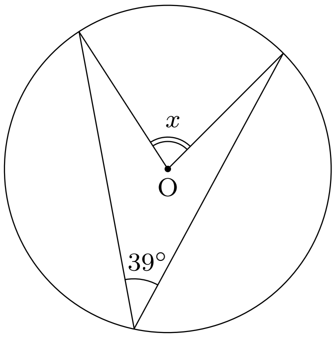
$$\angle \mathrm{AOB} == 2 \times 30^\circ = 60^\circ$$

ということになりますね。

本文へ戻る

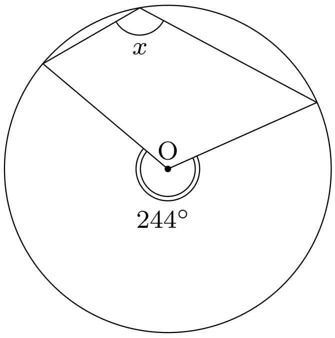
問 5. 例題 3 の解答がきちんと理解できた人のために答えだけ書いておきます。

(1)



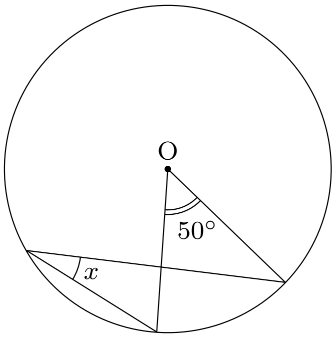
$x = 78°$ ですね。

(2)



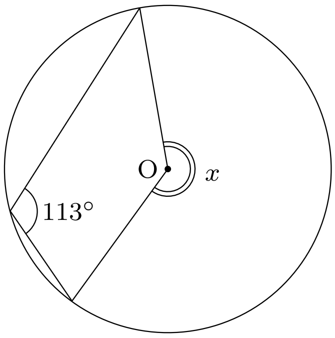
$x = 122°$ ですね。

(3)



$x = 25°$ ですね。

(4)



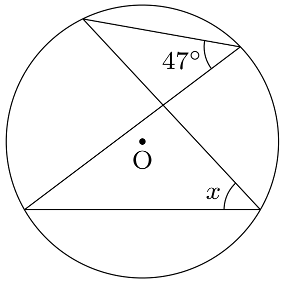
$x = 226°$ ですね。

本文へ戻る

問 6. 『次の図で点 O は円の中心です。$\angle x$ の大きさを求めなさい。』ということでした。

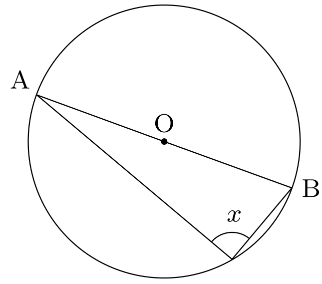
例題 3 やらい台 4 の解答がきちんと理解できた人のために答えだけ書いておきます。

(1)



$x = 47^\circ$ ですね。

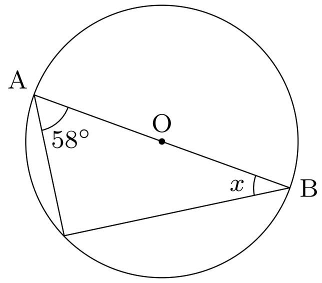
(2)



この図で AB は円 O の直径になっているとする

$x = 90^\circ$ ですね。

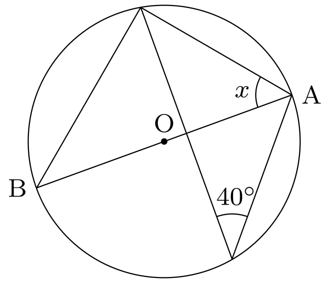
(3)



この図で AB は円 O の直径になっているとする

$x = 32^\circ$ ですね。

(4)

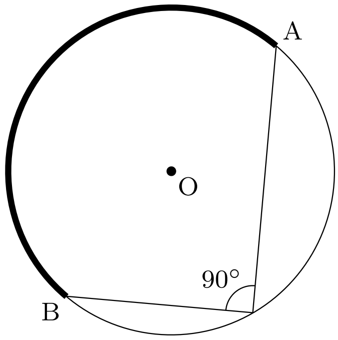


この図で AB は円 O の直径になっているとする

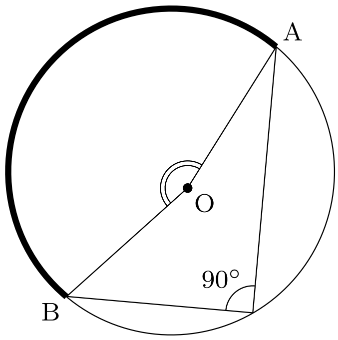
$x = 50^\circ$ ですね。

本文へ戻る

問 7. 『右の図のように、太くなぞられている $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角の大きさが 90° になっているとします。また、O はこの円の中心です。このとき以下の問に答えなさい。』ということでした。



(1) 『 $\overset{\frown}{AB}$ に対する中心角を図に書き込みなさい。そして円周角の定理を使って、$\overset{\frown}{AB}$ に対する中心角の大きさを求めなさい。』という問題でしたね。



右の図を見てください。$\overset{\frown}{AB}$ に対する中心角はこの図の ∠AOB（曲がった 2 本線」のマークがついているところ）ですね。そして、円周角の定理によると、中心角は円周角の 2 倍なので、$\overset{\frown}{AB}$ に対する中心角の大きさは 180° ということになりますね。

(2) 『A と B を結んで線分 AB を作ってください。この円の中心は線分 AB の上にあると断言できるでしょうか。』という問題でしたね。

さっき、∠AOB の大きさは 180° であることがわかりましたね。ということは、A、O、B はまっすぐ並んでいることになります。（さっきの図ではまっすぐ並ばずに O のところで折れ曲がっているように見えたかもしれませんが、実は図がゆがんでいたのですね。）ですから、もちろん、この円の中心は線分 AB の上にあると断言できますね。

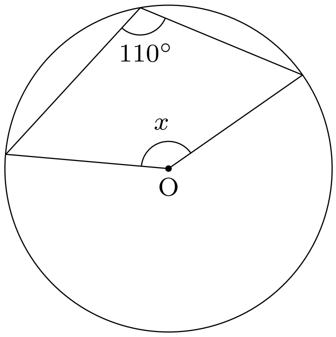
(3) 『線分 AB はこの円の直径であると断言できるでしょうか。』という問題でしたね。

A、O、B はまっすぐ並んでいるはずなのですから、線分 AB はこの円の直径であると断言できますね。

本文へ戻る

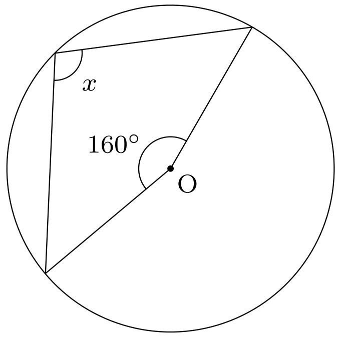
問 8. 『次の図で点 O は円の中心です。$\angle x$ の大きさを求めなさい。』ということでした。例題 3、例題 4、例題 5 としっかり学習してきた人のために答えだけ書いておきます。

(1)



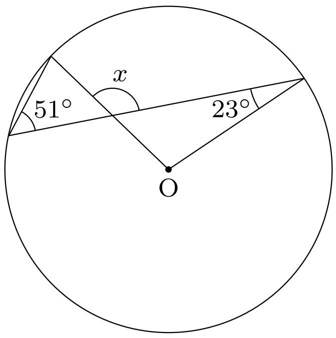
$x = 140°$ です。

(2)



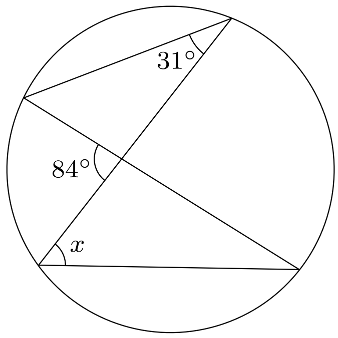
$x = 100°$ です。

(3)



$x = 125°$ です。

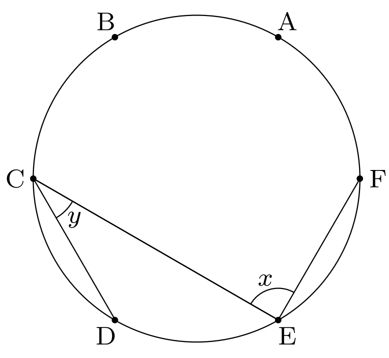
(4)



$x = 53°$ です。

本文へ戻る

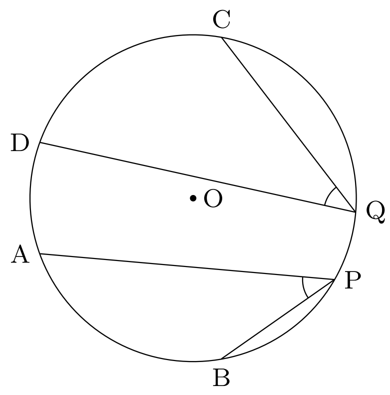
問 9. 『右の図を見てください。円の円周上に 6 つの点 A、B、C、D、E、F があります。この 6 つの点によって円周は 6 等分されているとします。この図の $\angle x$、$\angle y$ の大きさを求めなさい。』という問題でした。例題 6 の解答がきちんと理解できた人のために答えだけ書いておきます。



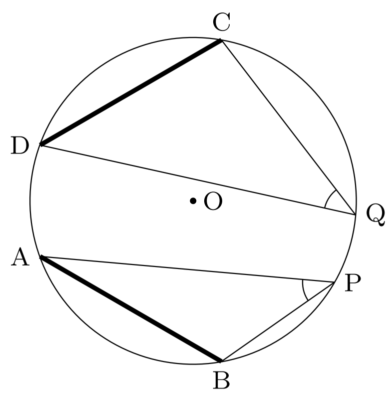
$\angle x$ の大きさは $90°$、$\angle y$ の大きさは $30°$ です。

本文へ戻る

問 10. 『まず右の図を見てください。ある円 O に 2 つの円周角があるとします。この図の ∠APB と ∠CQD のことです。



次は右の図を見てください。点 A と点 B をまっすぐ結んで弦 AB を作り、点 C と点 D をまっすぐ結んで弦 CD を作りました。

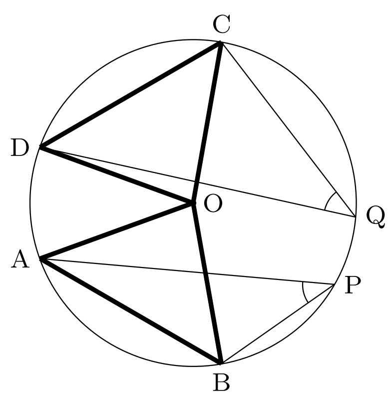


このときもし、円周角 ∠APB の大きさと円周角 ∠CQD の大きさが等しいくなっているということが判明したら、弦 AB と弦 CD の長さは等しいと断言して良いのでしょうか。きちんと証拠を示して説明しなさい。』という問題でした。

∠CQD の大きさが等しいくなっているということが判明したら、弦 AB と弦 CD の長さは等しいと断言できます。そのことをこれから証明します。

（証明）

右の図のように弦 AB、弦 CD の両端を円の中心 O と結ぶと、△ABO と △CDO が現れます。この 2 つの三角形が合同であるという証拠が見つかれば、弦 AB と弦 CD の長さは等しいと断言ますから、これから △ABO と △CDO が合同である証拠を探します。



△ABO と △CDO において、

円の中心から円周上の点までの距離は一定なので

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OC} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\mathrm{OB} = \mathrm{OD} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立っています。

円周角の定理より、

$\angle\mathrm{AOB}$ の大きさは円周角 $\angle\mathrm{APB}$ の大きさの 2 倍

$\angle\mathrm{COB}$ の大きさは円周角 $\angle\mathrm{CQD}$ の大きさの 2 倍

となっているわけですが、この問題ではもともと円周角 $\angle\mathrm{APB}$ の大きさと円周角 $\angle\mathrm{CQD}$ の大きさは等しいので、

$$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{COB} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

であることがわかります。①、②、③より、$\triangle\mathrm{ABO}$ と $\triangle\mathrm{CDO}$ では「2 組の辺の長さがそれぞれ等しく、その 2 組の辺の間にある角の大きさも等しい」ということになるので

$$\triangle\mathrm{ABO} \equiv \triangle\mathrm{CDO}$$

であると断言できます。合同な図形では対応している辺の長さは等しいはずなので、

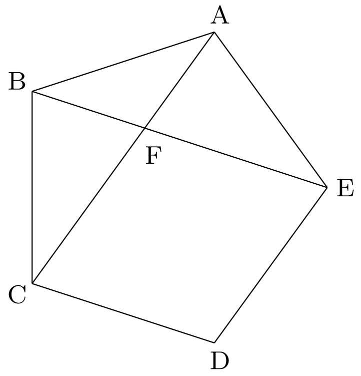
$$\mathrm{AB} = \mathrm{CD}$$

であると断言できます。

（証明おわり）

本文へ戻る

問 11. 『右の図を見てください。P さんはある日、正五角形 ABCDE をまず描き、次に、対角線 AC と対角線 BE を引いてみました。そして対角線 AC と対角線 BE の交点を F と呼ぶことにしました。このとき、正五角形 ABCDE の中に △ABF ができますが、P さんはこの図を見ているうちに △ABF は二等辺三角形なのではという気がしてきました。しかしいくら考えても P さんには「△ABF が二等辺三角形であるという証拠」を見つけることはできませんでした。そこで P さんの代わりに、あなたに考えてもらうことにします。』ということでした。



(1) 『ある三角形が二等辺三角形であるということを示すには、

その三角形では 2 つの辺の長さが等しくなっているという証拠を見つける

という方法と、

その三角形では 2 つの角の大きさが等しくなっているという証拠を見つける

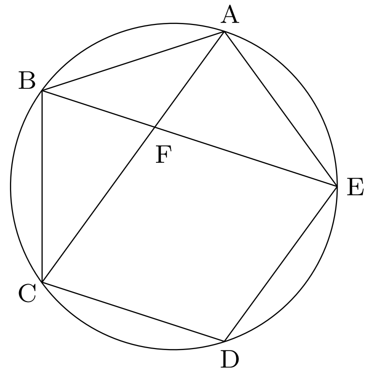
という方法がありますよね。△ABF が二等辺三角形であるということを証明する場合、あなたならどちらの方法を選びますか。』という問題でした。

どちらの方法も通用しますが、ここでは「その三角形では 2 つの角の大きさが等しくなっているという証拠を見つける」という歩法を選ぶことにします。

(2) 『△ABF は二等辺三角形であることを証明しなさい。』という問題でした。

（証明）

右の図のように、まず、正五角形 ABCDE の頂点がすべてピッタリ乗るような円を描くことにします。$\angle$BAF は $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に対する円周角になっていて、$\angle$FBA は $\overset{\frown}{\mathrm{EA}}$ に対する円周角になっていることに注意しておきましょう。



五角形 ABCDE は正五角形ですから、A、B、C、D、

E は円周を 5 等分しています。ですから特に、

$$\overset{\frown}{\mathrm{BC}} \text{ の長さと } \overset{\frown}{\mathrm{EA}} \text{ の長さは等しい} \cdots ①$$

と断言できます。

ここで前に学んだ「円周角の大きさと弧の長さの関係」を思い出してみましょう。たしか、「弧の長さが等しければ円周角の大きさは等しいと断言できる」という話でした。ということは、①より、

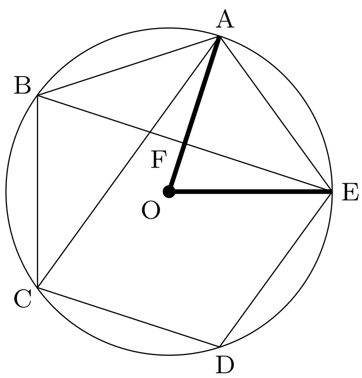
$$\angle\mathrm{BAF} \text{ の大きさと } \angle\mathrm{FBA} \text{ の大きさは等しい}$$

と断言できます。

これは △ABF では 2 つの角の大きさが等しいということを意味してるのですから、△ABF は二等辺三角形であると断言できます。

（証明おわり）

(3) 『ついでに ∠BFC の大きさを求めなさい。』という問題でした。



右の図のように $\overset{\frown}{\mathrm{AE}}$ の両端を円の中心 O と結んでみると、$\overset{\frown}{\mathrm{AE}}$ に対する中心角 ∠AOE が現れますね。

五角形 ABCDE は正五角形ですから、A、B、C、D、E は円周を 5 等分しています。ということは中心角 ∠AOE の大きさは 360° を 5 等分すれば求めることができます。つまり

$$\angle\mathrm{AOE} = 360 \div 5 = 72^\circ$$

ということです。

∠ABF は $\overset{\frown}{\mathrm{AE}}$ に対する円周角で、∠AOE（つまり 72° の角）は $\overset{\frown}{\mathrm{AE}}$ に対する中心角です。円周角の定理によると、円周角の大きさは中心角の大きさの半分なので

$$\angle\mathrm{ABF} = 72 \div 2 = 36^\circ$$

ということがわかります。

$\angle$BAF の大きさと $\angle$FBA の大きさは等しいということがわかっていますから

$$\angle \mathrm{BAF} = \angle \mathrm{ABF} = 36^\circ$$

ということになります。

$\angle$BFC は $\triangle$ABF の外角ですね。ところで「三角形の外角の大きさはそれととなり合わない内角の和に等しい」ということをかなり昔に学んでいますね。ということは

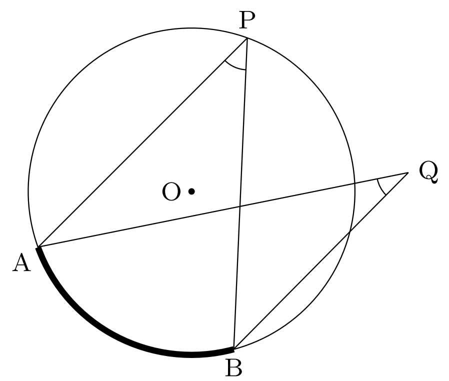
$$\angle \mathrm{BFC} = \angle \mathrm{BAF} + \angle \mathrm{ABF} = 36 + 36 = 72^\circ$$

ということがわかります。

本文へ戻る

問 12. この問の前の説明の続きを考えてもらう問題でした。

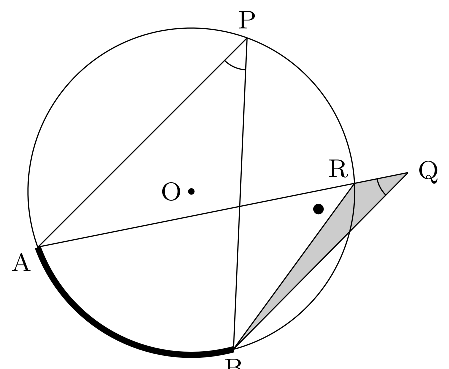
『右の図を見てください。この図の $\angle$AQB の大きさは $\angle$APB の大きさより小さいということをきちんと証明しようと思います。以下の文の空欄に正しい言葉、記号を記入して証明を完成しなさい。』ということでしたね。



$\angle$APB は弧 AB に対する円周角
$\angle$AQB は円の外にある点 Q と弧 AB の両端を結んでできる角

（証明）

右の図を見てください。AQ と円の交点を R と呼ぶことにします。また R と B を結びます。そして灰色にしておいた $\triangle$BQR に注目してくだ



さい。

この図で ● をつけた角、つまり ∠ARB は灰色

にしておいた △BQR の外角です。ですから、

$$\text{● をつけた角の大きさ} = \angle\text{AQB の大きさ} + \angle\boxed{\text{QBR}}\text{ の大きさ}$$

が成り立っています。この式は、「● をつけた角の大きさ」は「∠AQB の大きさ」より「∠ $\boxed{\text{QBR}}$ の大きさ」のぶんだけ大きいということを意味しています。ですから当然、

「● をつけた角の大きさ」は「∠AQB の大きさ」より大きい $\cdots$ ①

ということになります。

一方 ∠APB と ● をつけた角はどちらも $\overset{\frown}{\text{AB}}$ に対する $\boxed{\text{円周角}}$ です。ですから、円周角の定理によると、

「● をつけた角の大きさ」と「∠APB の大きさ」は等しい $\cdots$ ②

ということになります。

①、②より、

「∠APB の大きさ」は「∠AQB の大きさ」より大きい

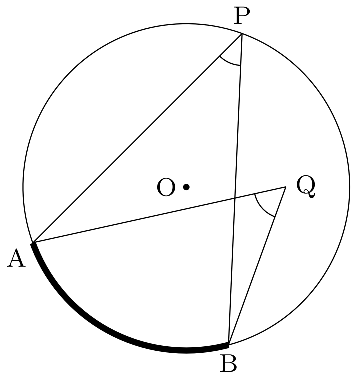
と断言できます。

（証明おわり）

本文へ戻る

問 13. この問の前の説明の続きを考えてもらう問題でした。

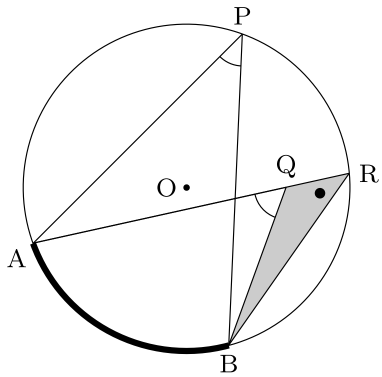
『右の図を見てください。この図の ∠AQB の大きさは ∠APB の大きさより大きいということをきちんと証明しようと思います。以下の文の空欄に正しい言葉、記号を記入して証明を完成しなさい。』ということでしたね。



∠APB は弧 AB に対する円周角
∠AQB は円の外にある点 Q と弧 AB の両端を結んでできる角

（証明）

右の図を見てください。AQ を Q の方へ延長した線と円の交点を R と呼ぶことにします。また R と B を結びます。そして灰色にしておいた △BQR に注目してください。



この図で ∠AQB は灰色にしておいた △BQR の外角です。ですから、

$$\angle \text{AQB の大きさ} = \bullet \text{ をつけた角の大きさ} + \angle\boxed{\text{RBQ}} \text{ の大きさ}$$

が成り立っています。この式は、「● をつけた角の大きさ」は「∠AQB の大きさ」より「∠ $\boxed{\text{RBQ}}$ の大きさ」のぶんだけ大きいということを意味しています。ですから当然、

「∠AQB の大きさ」は「● をつけた角の大きさ」」より大きい $\cdots$ ①

ということになります。

一方 ∠APB と ● をつけた角はどちらも $\overparen{\text{AB}}$ に対する $\boxed{\text{円周角}}$ です。ですから、円周角の定理によると、

「● をつけた角の大きさ」と「∠APB の大きさ」は等しい ···②

ということになります。

①、②より、

「∠AQB の大きさ」は「∠APB の大きさ」より大きい

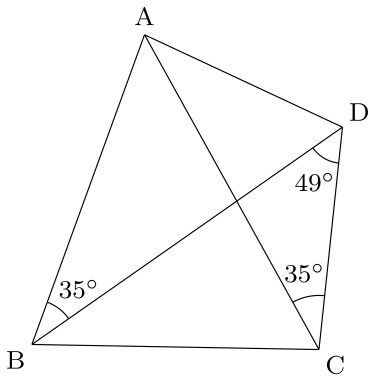
と断言できます。

（証明おわり）

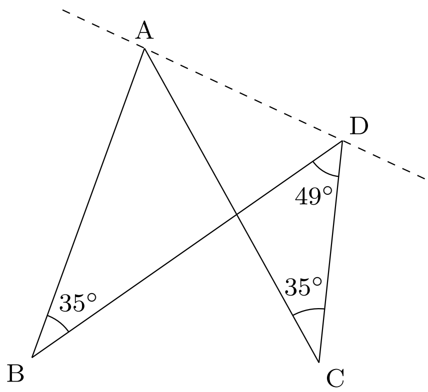
本文へ戻る

問 14. 「円周角の定理の逆」を活用する問題ですよね。

(1) 『右の図の四角形 ABCD の頂点 A、B、C、D がすべて乗るような円は存在するのでしょうか。わけをきちんとつけて答えなさい。』ということでした。



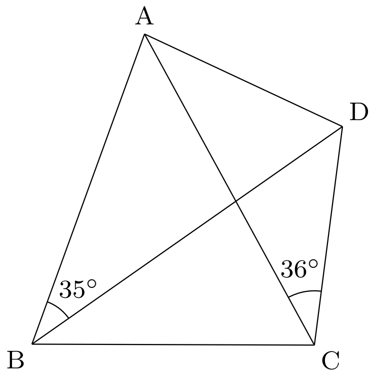
右の図を見てください。四角形 ABCD の頂点 A、B、C、D がすべて乗るような円は存在するのかどうか判定するため、必要な線だけを残した図を描いてみました。また判定するために必要な直線 AD を点線で描いておきました。



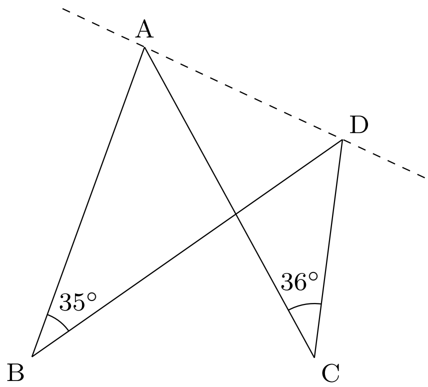
この図を見ればわかるように、点 B と点 C は直線 AD に関して同じ側にあります。そして、∠ABC と ∠ACD の大きさは同じですよね。ですから、4 点 A、B、C、D がすべて乗るよ

うな円は存在すると断言できます。

(2) 『右の図の四角形 ABCD の頂点 A、B、C、D がすべて乗るような円は存在するのでしょうか。わけをきちんとつけて答えなさい。』ということでしたね。



右の図を見てください。四角形 ABCD の頂点 A、B、C、D がすべて乗るような円は存在するのかどうか判定するため、必要な線だけを残した図を描いてみました。また判定するために必要な直線 AD を点線で描いておきました。

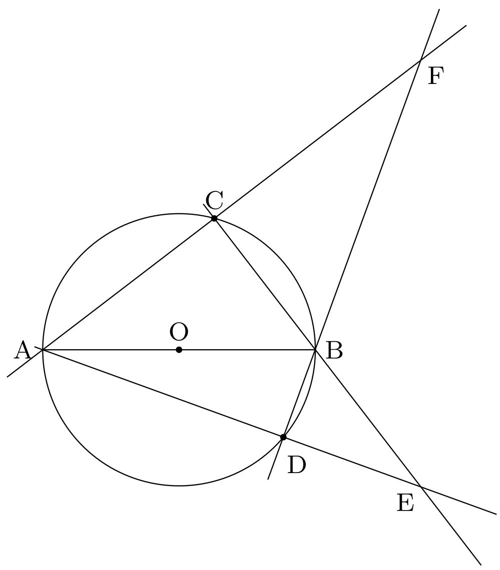


この図を見ればわかるように、点 B と点 C は直線 AD に関して同じ側にあります。そこまでは良いのですが、∠ABC と ∠ACD の大きさは違いますよね。ですから、4 点 A、B、C、D がすべて乗るような円は存在しないと断言できます。

本文へ戻る

問 15. 例題 11 がきちんと理解できたかどうか確認する問題でした。

『右の図を見てください。まず、円 O があり、直径 AB が描かれているとします。そして円 O の円周上に点 C と点 D を打ちます。ただし点 C と点 D は直径 AB に関して反対側にあるようにします。次に、直線 AD と直線 CB を描きます。すると、直線 AD と直線 CB はどこかで交わるので交点を E と呼ぶことにします。同じように、直線 AC と直線 DB を描きます。すると、直線 AC と直線 DB はどこかで交わるので交点を F と呼ぶことにします。このとき 4 点 C、D、E、F がすべて乗ってしまうような円が存在するということを証明しようと思います。以下の証明の空欄に正しい言葉、文、記号を記入して証明を完成しなさい。』ということでした t ね。



（証明）

AB は円 O の直径なので、弧 AB に対する中心角 ∠AOB の大きさは 180° です。円周角の定理によると円周角の大きさは中心角の大きさの半分なので、弧 AB に対する円周角 ∠ACB の大きさは 90° であると断言できます。よって隣にある角 ∠BCF の大きさは、

$$\angle \mathrm{BCF} = \boxed{90^\circ} \cdots ①$$

であると断言できます。

同じように考えると、AB は円 O の直径なので、∠ADB の大きさは $\boxed{90^\circ}$ であると断言できます。よって隣にある角 ∠BDE の大きさは、

$$\angle \mathrm{BDE} = \boxed{90^\circ} \cdots ②$$

であると断言できます。

今、図を見るとわかるように、点 C と点 D は直線 EF に関して $\boxed{\text{同じ}}$ 側にあります。そして①、②より、

$$\angle \mathrm{BCF} = \angle \boxed{\mathrm{BDE}}$$

が成り立っています。ですから、

4 点 C、D、E、F がすべて乗るような円が $\boxed{\text{存在}}$ する

と断言できます。

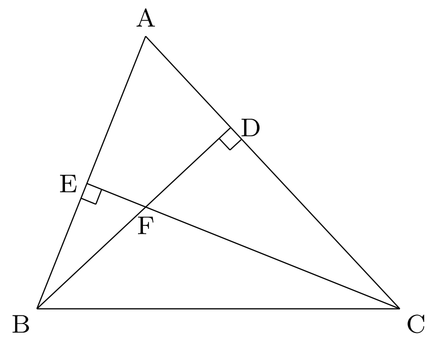
（証明おわり）

本文へ戻る

問 16. 『まず、△ABC があるとします。そして頂点 B から辺 AC へ垂直な線を伸ばしていき、辺 AC とぶつかった点を D と呼ぶことにします。また、同じように、頂点 C から辺 AB へ垂直な線を伸ばしていき、辺 AB とぶつかった点を E と呼ぶことにします。すると直線 BD と直線 CE はどこかで交わりますが、交わる点を F と呼ぶことにします。このとき以下の問に答えなさい。』ということでした。

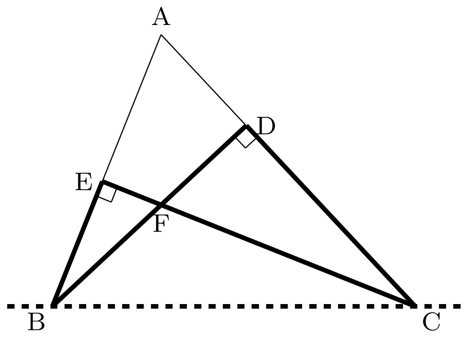
(1) 『問題の図をよく読んで、この問題の状況をあらわす図を描きなさい。』という問題でしたね。

例えば右の図のようになります。



(2) 『4 つの点 B、C、D、E がすべて乗るような円が存在することを証明しなさい。』という問題でした。

（証明）



右の図を見てください。注目してほしいところを太い線で描いておきました。

点 E と点 F は直線 BC に関して同じ側にあります。

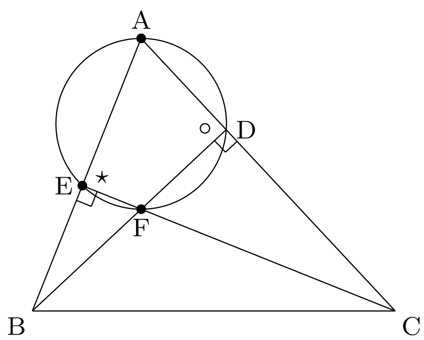
∠BED と ∠BCD の大きさは同じです。

ということは円周角の定理の逆により、4 つの点 B、C、D、E がすべて乗るような円が存在すると断言できます。

（証明終わり）

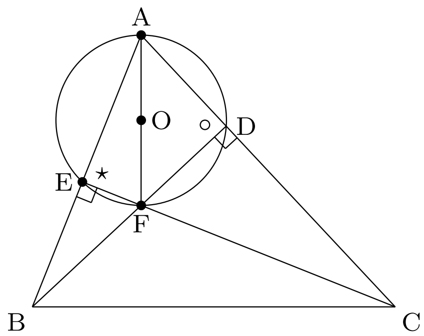
(3) 『4 つの点 A、E、D、F がすべて乗るような円が存在することを証明しなさい。』という問題でした。

（証明）



右の図を見てください。3 つの点を通る円だったら必ずあるということを以前（本文で）証明しました。ですから 3 点 A、E、F を通る円を描いてみました。この図では、円は点 D も通っているように見えますが今の所証拠はありません。

そこで、これから「3 点 A、E、F を通る円を描くと、その円は点 D も通ってしまう証拠」を見つけることにします。

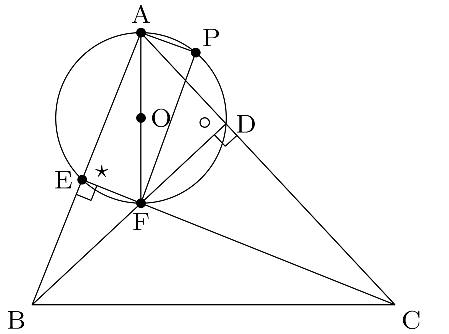


右の図を見てください。

∠AEF（⋆ のマークのついている角）は 90° ですから「A と F を結んでできる線分 AF の上にこの円の中心があり、AF はこの円の直径になる」ということになります。（このことも以前問 7 で

学びました。また、右の図では中心の名前を O としました。）

それではここで、この円周上に確実にある点 P を右の図のような位置に打ち、円周角 ∠APF を作ってみましょう。

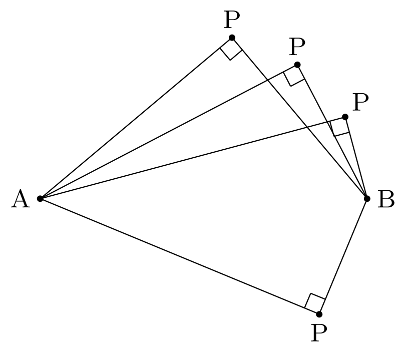


AF は円の直径ですから ∠APF の大きさは 90° です。また、この問題ではもともと ∠ADF（つまり ∘ のマークのついた角）は 90° です。つまり ∠APF と ∠ADF は同じ大きさということです。ですから、点 D もこの円周上にあると断言できますね。

（証明終わり）

本文へ戻る

問 17. 『平面の上にあらかじめ 2 つの点 A、B が決められているとします。そして、∠APB の大きさが 90° になるような点 P をすべて集めると何ができるのか考えることにします。以下の問に答えなさい。』ということでした。



(1) 『あなたは何ができると思いますか？予想を立てなさい。』という問題でしたね。

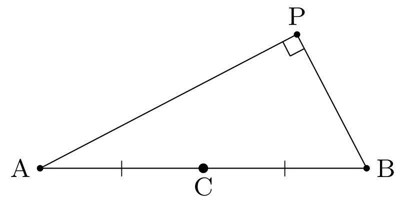
きっと円ができます。（正確に言うと、円から 2 点 A、B を取り除いた図形です。また、円の中心は点 A と点 B の中点であると思われます。）

(2) 『あなたが予想したことを証明しなさい。』という問題でしたね。

(1) で、「平面の上にあらかじめ 2 つの点 A、B が決められているとき、∠APB の大

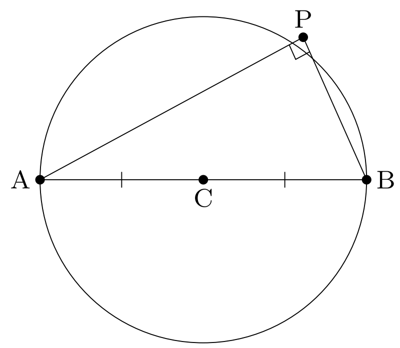
きさが 90° になるような点 P をすべて集めると、円ができ、円の中心は点 A と点 B の中点である」と予想しました。ではこの予想を証明してみることにしましょう。

（証明）



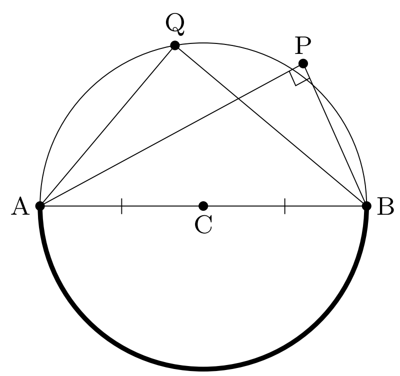
右の図を見てください。

点 P は ∠APB の大きさが 90° になるような点です。そして点 A と点 B の中点を打ち、その点を点 C と呼ぶことにしました。



ではここで、点 C を中心として、線分 AB が直径となる円を描いてみましょう。すると右の図のようになります。

念のため注意しておきますが、今の所点 P がこの円の円周上にあるという保証は何もありませんね。しかし私たちは、実は点Pはこの円の円周上にあるという証拠をこれから見つけようとしているわけです。

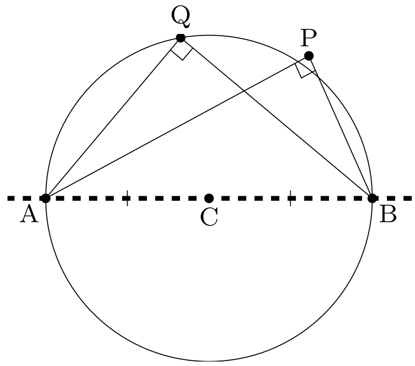


右の図を見てください。線分 AB が直径となる円の上に確実にある点を一つ決め、その点を Q と呼ぶことにしました。ただしここでは、点 Q を直径ＡＢの上側に取りました。どういうことかというと、点 P と点 Q を直線に関して同じ側になるようにしたのです。

円周角の定理によると、∠AQB の大きさは 90° であると断言できますね。（∠AQB は太く描かれている $\overparen{\mathrm{AB}}$ の円周角です。また、太

く描かれている $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の中心角は $180°$ です。そして、円周角の定理によると円周角の大きさは必ず中心角の大きさの半分なのでした。）

では右の図を見てください。



これまでに、

「∠AQB と ∠APB の大きさはどちらも $90°$」

であることがわかっています。

また、

「点 Q と点 P は直線 AB に関して同じ側にある」

わけです。

ということは、円周角の定理の逆によると、

4 点 A、B、Q、P は全て同じ円の上にある

と断言できますね。つまり、実は P も線分 AB が直径となる円の上にあるということが判明したのです。

ここまでの話をまとめると、

平面の上にあらかじめ 2 つの点 A、B が決められているとき、∠APB の大きさが $90°$ になるような点 P は、必ず、線分 AB が直径となる円の上にある

ということが判明したのです。

これとは逆に、円周角の定理によると、

平面の上にあらかじめ 2 つの点 A、B が決められているとき、線分 AB が直径となる円の上に点 P をとると、必ず ∠APB の大きさが $90°$ になる

わけです。

以上より、

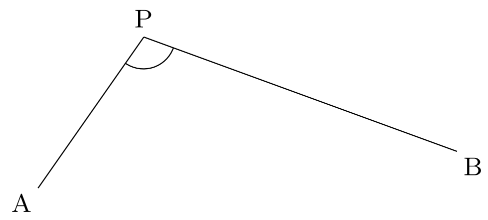
「平面の上にあらかじめ 2 つの点 A、B が決められているとき、∠APB の大きさが 90° になるような点 P をすべて集めると、円ができ、円の中心は点 A と点 B の中点である」

ということが証明されました。

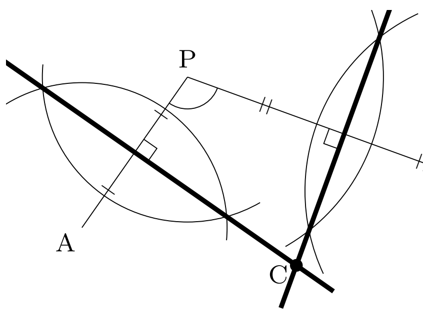
（証明おわり）

本文へ戻る

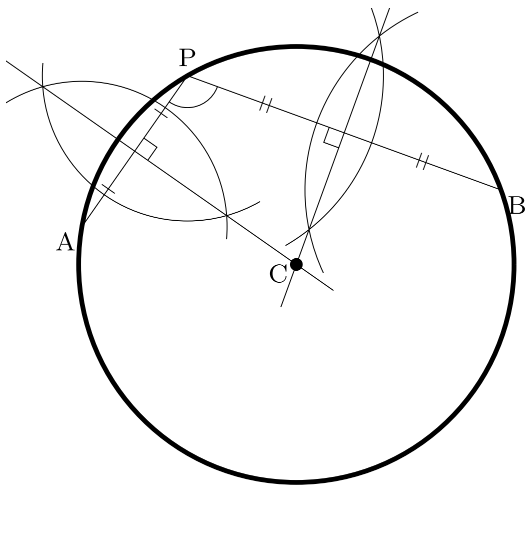
問 18. 『作図によって右の図のどこかに点 Q を打ち、∠APB の大きさと ∠AQB の大きさが等しくなるようにしなさい。』という問題でしたね。



コンパスと定規を使って、右の図のように線分 AP の垂直二等分線と線分 BP の垂直二等分線を描きます。そしてここでは 2 つの垂直二等分線の交点を C と呼ぶことにします。

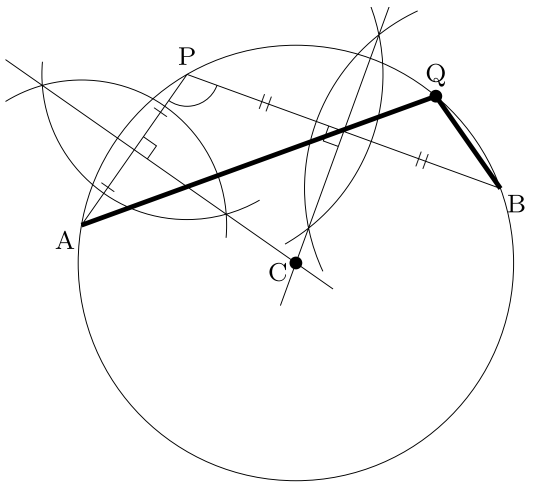


次に、コンパスを使って、点 C を中心にして点 P を通る円を描きます。すると右の図のように、その円は自動的に点 A と点 B も通過します。



今描いた円の円周上の好きな所に点 Q を打ちます。ただし、好きな所といっても直線 AB に関して P と同じ側でなくてはなりません。また、もちろん P とは違う場所にします。そして、A と Q を結び、B と Q を結びます。すると右の図のようになります。

これで完成ですね。∠AQB の大きさは ∠APB の大きさと同じなのです。

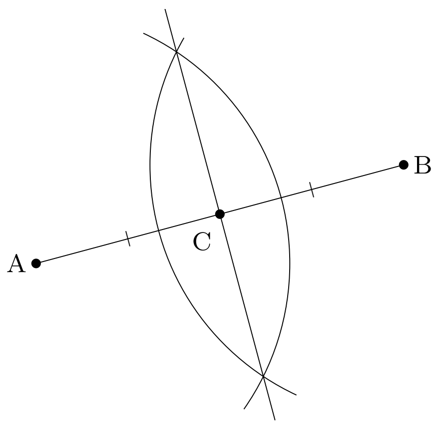


本文へ戻る

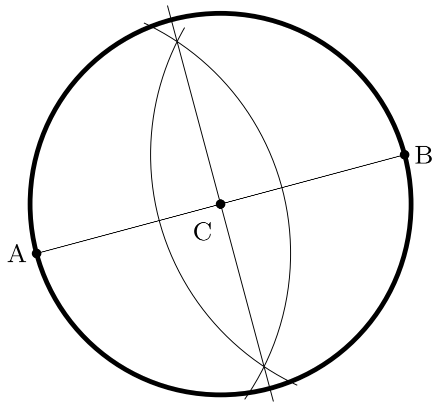
問 19.

『作図によって右の図のどこかに点 P を打ち、∠APB が直角になるようにしなさい。』という問題でしたね。

コンパスと定規を使って右の図のように、A と B の中点を見つけます。ここでは見つけた中点を C と呼ぶことにします。

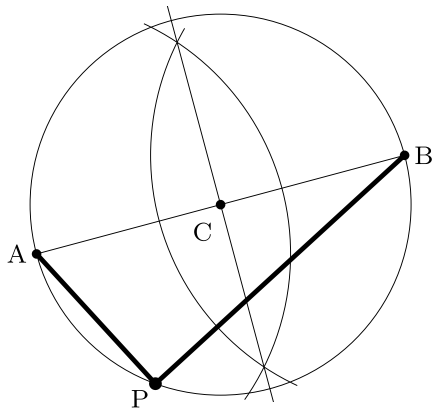


コンパスを使って、点 C を中心にして点 A を通る円を描きます。すると右の図のように、その円は点 B も通過します。



今描いた円の円周上の好きなところに点 P を打ちます。もちろん A や B とは違うところに打ちます。そして、A と P を結び、B と P を結びます。すると ∠APB ができます。

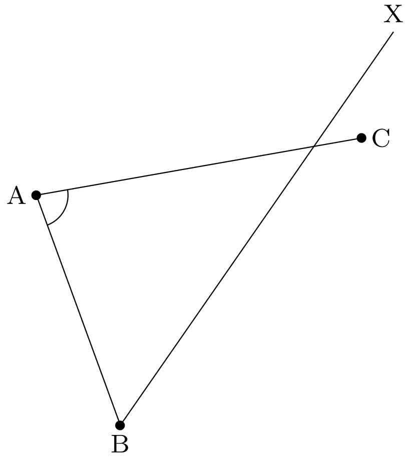
これで完成です。∠APB は直角になっているのです。



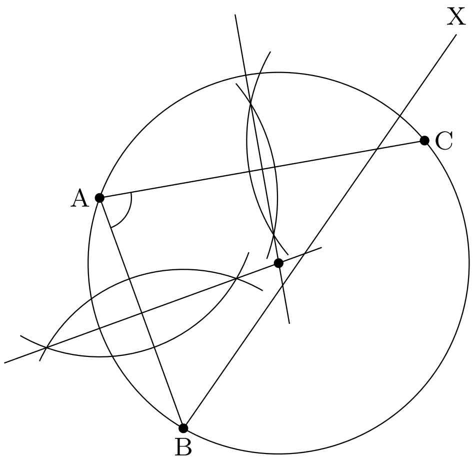
本文へ戻る

問 20. 例題 12 の解答が理解できているかどうか確認するための問題でした。

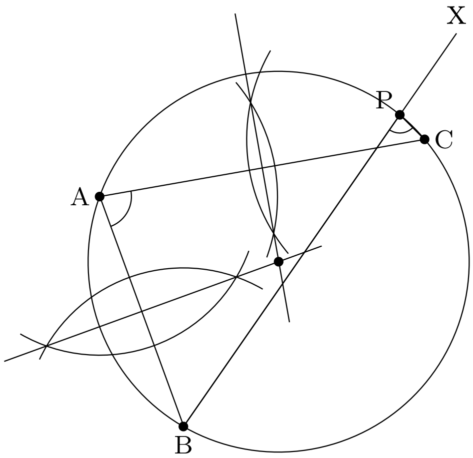
『右の図のように、∠BAC と半直線 BX があるとします。半直線 BX の上のどこかに点 P を打って、∠BPC を作ります。そのときにできる ∠BPC の大きさが ∠BAC の大きさと同じようになるように、作図によって点 P の場所を見つけてください。』ということでしたね。



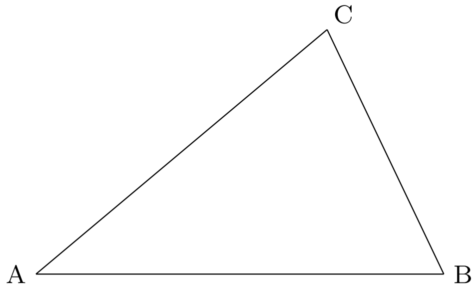
右の図を見てください。これはコンパスと定規を使って 3 つの点 A、B、C を全部通る円を作図した跡です。どのように作図したのか、もうおわかりですよね。これまでに何度か説明していますから。（どうしてもわかない人は、111 ページの手順 1 を復習してください。）



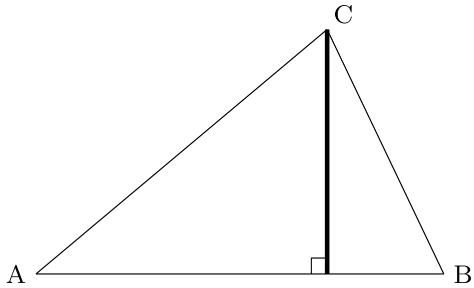
では右の図を見てください。今作図したばかりの円と半直線 BX はある点で交わっていますね。この図ではこの点の名前を P としました。そして、C と P を結んでみました。そうすると点 P のところに ∠BPC ができますね。円周角の性質を思い出してみれば、この ∠BPC の大きさは ∠BAP の大きさと同じですよね。これで、半直線 BX の上に点 P を決めて、∠BPC の大きさが ∠BAP と同じになるように作図をすることができましたね。



本文へ戻る



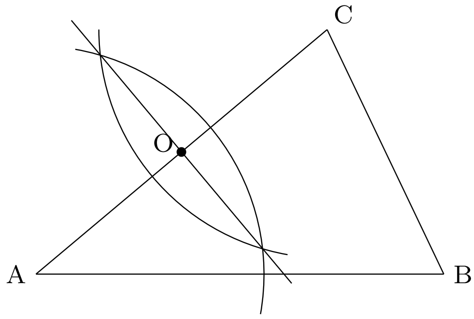
問 21. 『右の図を見てください。これからコンパスと定規を使って、この図の △ABC で、辺 AB を底辺としたときの高さをあらわす線分を作図しようと思います。実はもう、かなり昔、このような作図の方法は学んでいるのですが、ここではその時とは方法をかえて、「円周角の性質」を頼りにして作図をすることにします。どのように作図をすればよいですか。』という問題でした。



どうすれば良いのか考えるために、そうですねぇ、完成予想図を思い浮かべることにしましょうか。右の図を見てください。

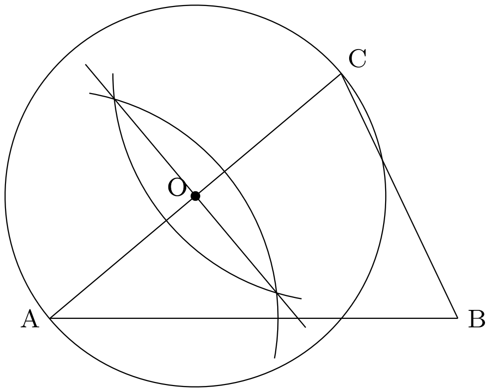
最後にこの図で太く描かれている直線が描ければ良いのですよね。というわけで、円周角の性質を利用して直角を作図するわけですから、AC が直径になるような円を作図すると良さそうですね。

では AC が直径になる円を作図することにしましょう。

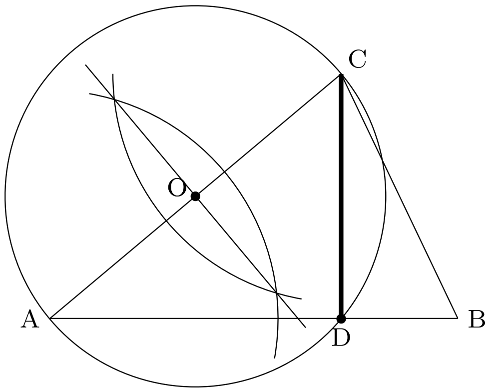


まず右の図を見てください。コンパスと定規を使って線分 AC の垂直二等分線を作図し、線分 AB と垂直二等分線の交点を O としました。そうすると、OA と OB の長さは等しくなっているわけです。

では次は右の図を見てください。OA と OB の長さは等しくなっているわけですから、コンパスの幅を OA に合わせ、コンパスの針を O にさし、くるっと 1 回転させると線分 AB が直径になる円が描けますよね。



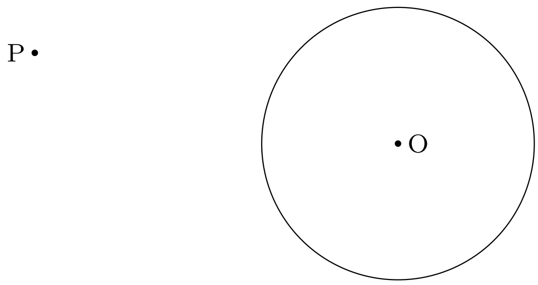
では最後に右の図を見てください。辺 AB と今描いたばかりの円の交点がありますよね。図ではこの点を D と呼ぶことにしました。そして点 C と点 D を通る直線を（この図ではわかりやすくするために太く）描いてみました。



円周角の性質を思い出すと、この図の $\angle$ADC の大きさは 90° のはずですね。ですからこれで、$\triangle$ABC の高さをあらわす線分を作図できたことになりますよね。

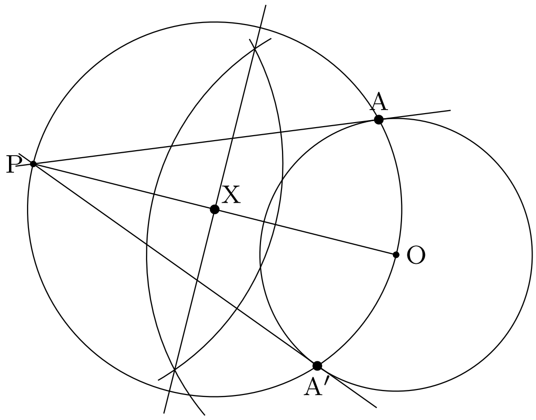
本文へ戻る

問 22. 『右の図を見てください。円 O と円の外にある点 P がありますね。コンパスと定規を使って、点 P から円 O への接線を作図しなさい。』という問題でした。



例題 14 の解答がしっかり理解でき人のためにあっさり説明します。

コンパスと定規で線分 OP の中点 X を探します。次にコンパスで X を中心として P を通る円を描きます。その円はもとから合った円と 2 つの場所で交わりますが、ここでは交点を A、A′ と名づけました。定規を使って P と A をとおる直線、P と A′ を通る直線を描けば「点 P から円 O への接線」が 2 本完成します。



本文へ戻る

問 23. 直角三角形の合同条件をちゃんと覚えているかどうか確認する問題でした。

『以下の文の中から正しい文を選びなさい。』ということでしたね。

① 2 つの直角三角形があるとします。このとき、斜辺の長さが等しく、1 組の鋭角の大きさが等しければ、この 2 つの直角三角形は合同であると断言できます。

② 2 つの直角三角形があるとします。このとき、斜辺の長さが等しければ、この 2 つの直角三角形は合同であると断言できます。

③ 2 つの直角三角形があるとします。このとき、斜辺の長さが等しく、斜辺以外の 1 組の辺の長さが等しければ、この 2 つの直角三角形は合同であると断言できます。

④ 2 つの直角三角形があるとします。このとき、1 組の鋭角の大きさが等しければ、この 2 つの直角三角形は合同であると断言できます。

⑤ 2 つの直角三角形があるとします。このとき、2 組の辺の長さが等しく、1 組の角の大きさが等しければ、この 2 つの直角三角形は合同であると断言できます。

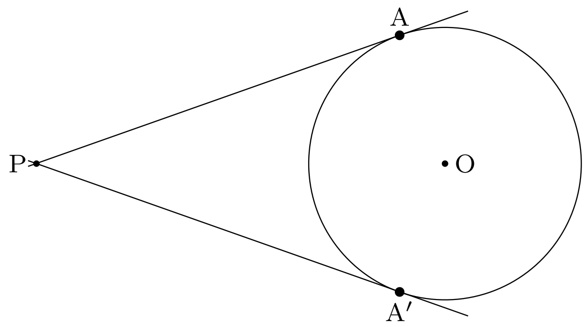
⑥ 2 つの直角三角形があるとします。このとき、2 組の角の大きさが等しく、斜辺以外の 1 組の辺の長さが等しければ、この 2 つの直角三角形は合同であると断言できます。

正しいのは、①、③ですね。

本文へ戻る

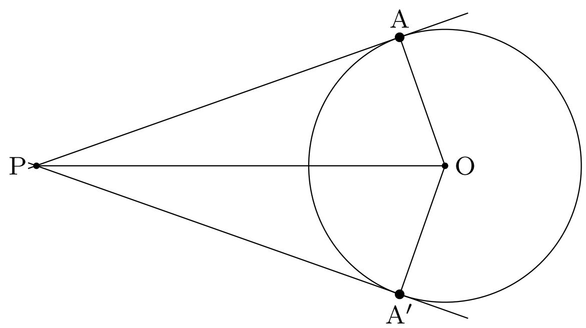
問 24. 例題 15 の解答が理解できているか確認する問題でした。

『右の図は、円 O の外にある点 P から円 O へ向けて、2 本の接線をひいたものです。この図では接点の名前をそれぞれ A、A′ としました。P から A までの長さ PA と P から A′ までの長さ PA′ は等しいことを証明しなさい。』ということでしたね。例題 15 の解答がきちんと理解できている人のため、数学の答案っぽい証明をあっさり描いておきます。



（証明）

O と A を結び、O と A′ を結びます。さらに P と O を結びます。すると 2 つの三角形 $\triangle$PAO と $\triangle$PA′O が現れます。



「円の接線」と、「円の中心と接点を結んでできる円の半径」は垂直なのですから、$\angle$PAO と $\angle$PA′O はどちらも 90° です。つまり

$\triangle$PAO と $\triangle$PA′O はどちらも直角三角形

ということになります。

直角三角形 $\triangle$PAO と直角三角形 $\triangle$PA′O において

$$\mathrm{PO} = \mathrm{PO}\ （共通） \qquad \cdots\cdots\cdots\ ①$$

$$\mathrm{AO} = \mathrm{A'O}\ （どちらも円 \textbf{O} の半径） \qquad \cdots\cdots\cdots\ ②$$

が成り立っています。①、②より、直角三角形 △PAO と直角三角形 △PA′O では「斜辺の長さが等しく、他の 1 辺の長さも等しい」ということになるので、

$$\triangle \mathrm{PAO} \equiv \triangle \mathrm{PA'O}$$

であると断言できます。合同な図形では対応している辺の長さは等しいので、

$$\mathrm{PA} = \mathrm{PA'}$$

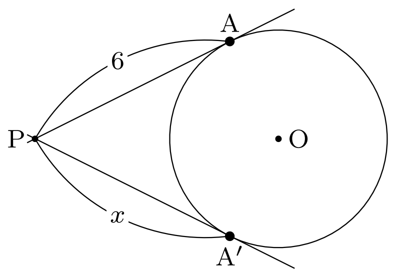
であると断言できます。

（証明おわり）

本文へ戻る

問 25. 『次の図の x の値を求めなさい。』ということでした。例題 16 の解答がきちんと理解出来た人のために答えだけ書いておきます。

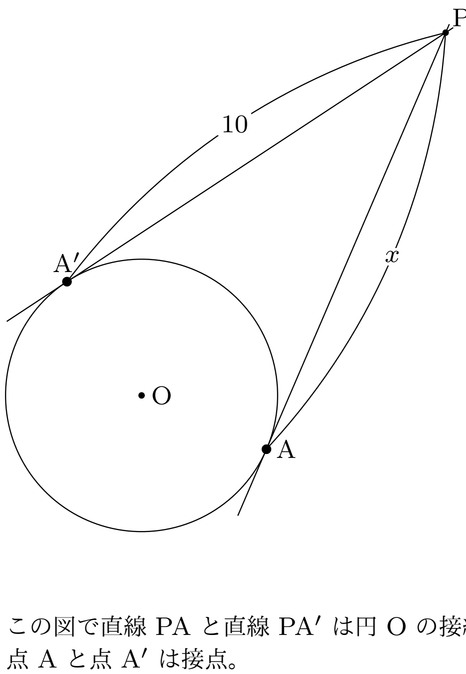
(1)



この図で直線 PA と直線 PA′ は円 O の接線。
点 A と点 A′ は接点。

$x = 6$

(2)



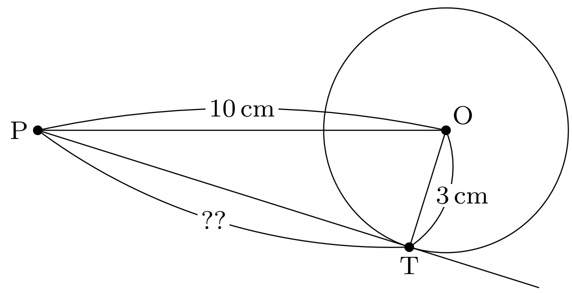
この図で直線 PA と直線 PA′ は円 O の接線。
点 A と点 A′ は接点。

$x = 10$

本文へ戻る

問 26. 『半径が 3 cm の円 O があるとします。この円の外部に点 P があり、P は円 O の中心から 10 cm 離れています。点 P から円 O へ接線を引き、接点を T とします。PT の長さを求めなさい。』ということでした。

この問題の図を描くと右のようになります。



△PAO があらわれていますが、この三角形は実は直角三角形です。(∠PAO の大きさは 90° ですよね。)ですから三平方の定理を使うことができます。すると

$$\mathrm{PT}^2 + 3^2 = 10^2$$

が成り立っているわけです。

この式は

$$\mathrm{PT}^2 + 9 = 100$$

さらに

$$\mathrm{PT}^2 = 91$$

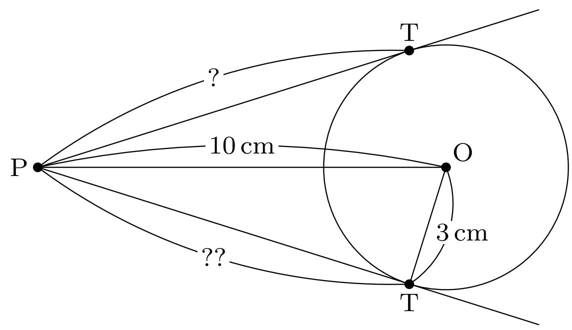
と変形できます。2 乗すると 91 になる数は $\sqrt{91}$ と $-\sqrt{91}$ ですが接線の長さがマイナスになることはないので

$$\mathrm{PT} = \sqrt{91}\,\mathrm{cm}$$

ということがわかります。

これで問題は解決ですが念のための注意です。

右の図のように、点 P から円 O へは 2 本接線を引くことができます。133 ページの「重要な事実 : 円の外から描いた 2 本の接線の長さにはなにか関係があるの?」では、「円の外にある点から円に向けて 2 本



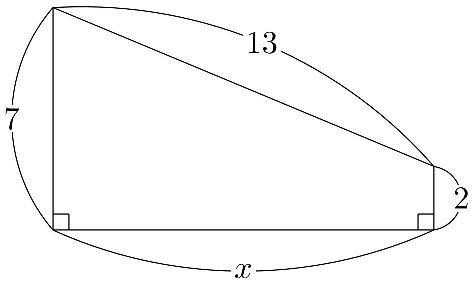
の接線をひくと、円の外にある点から円の

接点までの長さはどちらの接線でも同じであるということを学びましたね。ですから、この問題ではどちらの接線の長さも $\sqrt{91}\,\mathrm{cm}$ です。

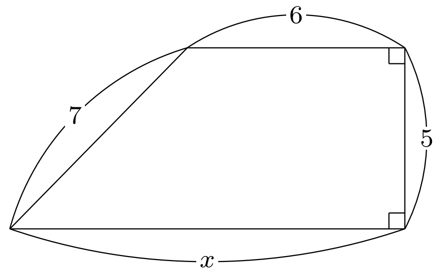
本文へ戻る

問 27. 『次の図の台形で x の値を求めなさい。』ということでした。

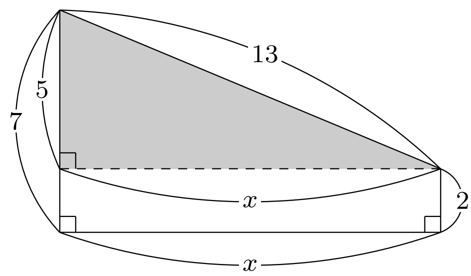
(1)



(2)



(1) 右の図の灰色の直角三角形で三平方の定理を使うと



$$x^2 + 5^2 = 13^2$$

が成り立つことがわかります。この式は、

$$x^2 + 25 = 169$$

さらに

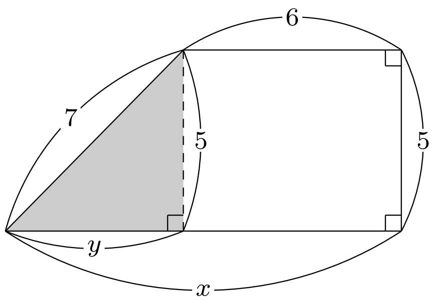
$$x^2 + 25 = 144$$

と変形できます。2 乗すると 144 となる数は 12 と −12 ですが、辺の長さがマイナスになることはないので

$$x = 12$$

であることがわかります。

(2) 右の図の灰色の直角三角形で三平方の定理を使うと



$$y^2 + 5^2 = 7^2$$

が成り立つことがわかります。この式は、

$$y^2 + 25 = 49$$

さらに

$$y^2 = 24$$

と変形できます。2 乗すると 24 となる数は $2\sqrt{6}$ と $-2\sqrt{6}$ ですが、辺の長さがマイナスになることはないので

$$y = 2\sqrt{6}$$

であることがわかります。そうすると

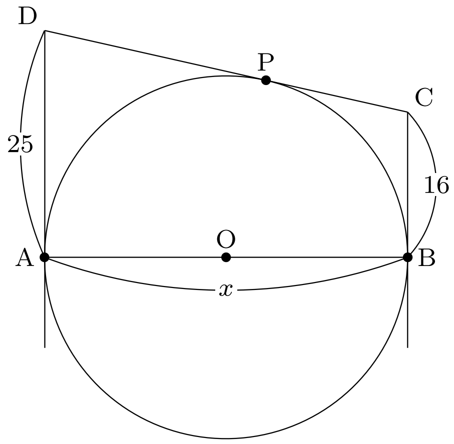
$$x = 6 + 2\sqrt{6}$$

であることがわかります。

本文へ戻る

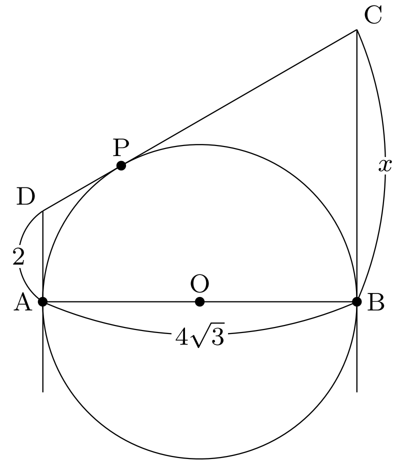
問 28. 『次の図で x の値を求めなさい。』ということでした。

(1)



AB は円 O の直径
DC、DA、CB は円 O の接線で、
それぞれ P、A、B で円 O と接し
ている

(2)



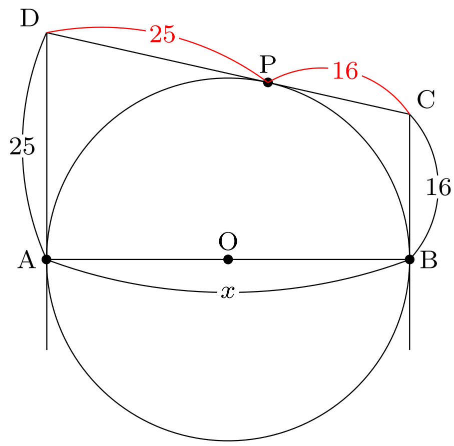
AB は円 O の直径
DC、DA、CB は円 O の接線で、
それぞれ P、A、B で円 O と接し
ている

(1) 右の図を見てください。円の外の点から円へ引いた接線の長さは同じですから DA と DP の長さは同じです。全く同じ理由で CB と CP の長さは同じです。ですから、

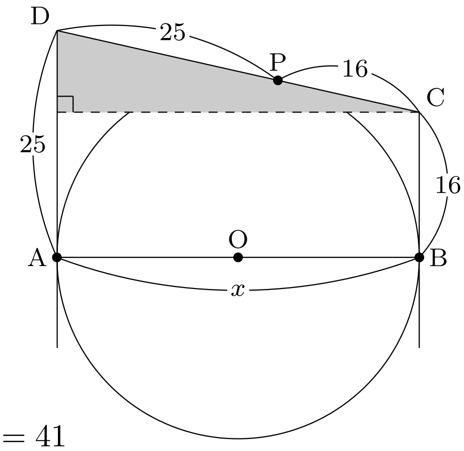
$$\mathrm{DP} = 25$$

$$\mathrm{CP} = 25$$

であることがわかります。



AB は円 O の直径
DC、DA、CB は円 O の接線で、
それぞれ P、A、B で円 O と接し
ている



AB は円 O の直径
DC、DA、CB は円 O の接線で、
それぞれ P、A、B で円 O と接している

右の図のように C から DA へ垂線をひくと、直角三角形が現れます。（この図では灰色になっています。）この直角三角形では

$$横の長さ = x$$

$$縦の長さ = 25 - 16 = 9$$

$$斜めの長さ = 25 + 16 = 41$$

ですから、三平方の定理を使うと

$$x^2 + 9^2 = 41^2$$

が成立っていることになります。

この式は

$$x^2 + 81 = 1681$$

さらに

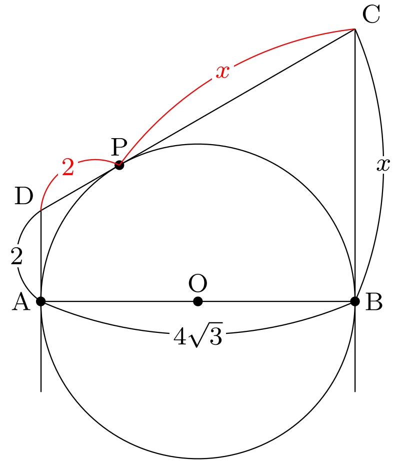
$$x^2 = 1600$$

と変形できます。2 乗すると 1600 になる数は 40 と -40 ですが、辺の長さがマイナスになることはありませんから

$$x = 40$$

であることがわかります。

(2) 右の図を見てください。円の外の点から円へ引いた接線の長さは同じですから DA と DP の長さは同じです。全く同じ理由で CB と CP の長さは同じです。ですから、



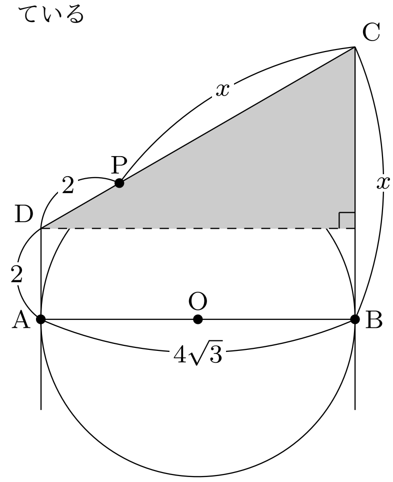
AB は円 O の直径
DC、DA、CB は円 O の接線で、それぞれ P、A、B で円 O と接している

$$\mathrm{DP} = 25$$

$$\mathrm{CP} = x$$

であることがわかります。

右の図のように D から CB へ垂線をひくと、直角三角形が現れます。（この図では灰色になっています。）この直角三角形では



AB は円 O の直径
DC、DA、CB は円 O の接線で、それぞれ P、A、B で円 O と接している

$$横の長さ = 4\sqrt{3}$$

$$縦の長さ = x - 2$$

$$斜めの長さ = x + 2$$

ですから、三平方の定理を使うと

$$\left(4\sqrt{3}\right)^2 + (x-2)^2 = (x+2)^2$$

が成立っていることになります。

この式は

$$48 + x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 4$$

さらに

$$-8x = -48$$

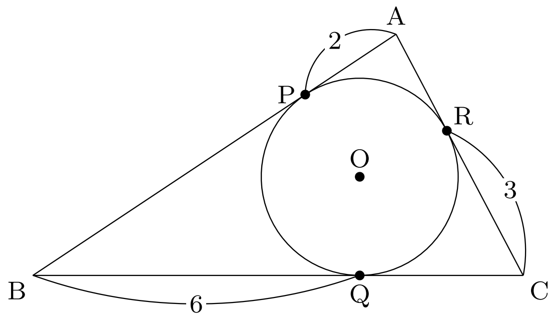
さらに

$$x = 6$$

と変形できます。

本文へ戻る

問 29. 『右の図を見てください。△ABC の内側に円 O が接触しています。（このようなとき、「円 O は △ABC に内接している」というのでしたね。） この図では接点の名前を P、Q、R としました。いま、AP = 2、BQ = 6、CR = 3 となっています。このとき、以下の問に答えなさい。』ということでした。



(1) 『BP、CQ、AR の長さをそれぞれ求めなさい。』という問題でした。

円の外の点から円へ引いた接線の長さは同じですから AP と AR の長さは同じです。全く同じ理由で BP と BQ の長さは同じ、CQ と CR の長さは同じということになります。ですから、

$$\mathrm{BP} = 6$$

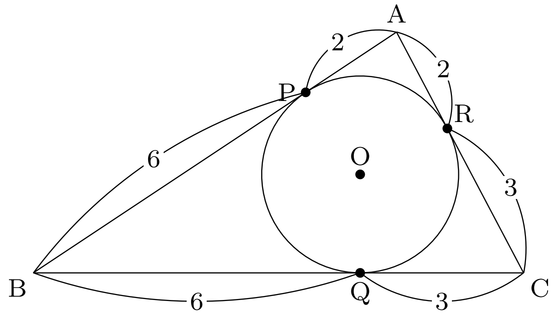
$$\mathrm{CQ} = 3$$

$$\mathrm{AR} = 2$$

ということがわかります。

(2) 『△ABC の周りの長さを求めなさい。』という問題でした。

右の図を見てください。(1) でわかった長さを図に書き込んでおきました。



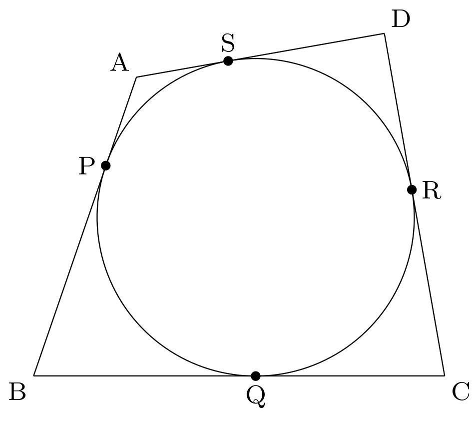
△ABC の周の長さを求めたいのですから、この図に記入されている長さをすべてたせばよいですよね。まぁ、何も気にしないで全部たしてもよいのですが、図をよく見ると同じ長さが 2 つずつ出てきていますよね。2、3、6 がどれも 2 つずつ出てきていますよね。ですから、

$$
\begin{aligned}
\triangle\mathrm{ABC}\text{ の周の長さ} &= 2 \times (2 + 3 + 6) \\
&= 2 \times 11 \\
&= 22
\end{aligned}
$$

と計算することができますね。

本文へ戻る

問 30. 『右の図を見てください。ある円が四角形 ABCD に P、Q、R、S で内接しています。このとき以下の問に答えなさい。』ということでした。



(1) 『AP と同じ長さのところを見つけなさい。』という問題でしたね。

円の外の点から円へ引いた接線の長さは同じですから、AP と同じ長さのところは AS です。

(2) 『BP と同じ長さのところを見つけなさい。』という問題でしたね。

円の外の点から円へ引いた接線の長さは同じですから、BP と同じ長さのところは BQ です。

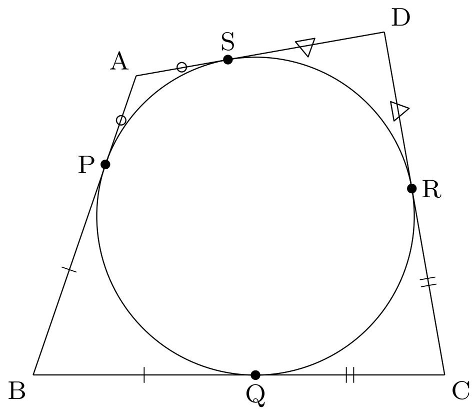
(3) 『DR と同じ長さのところを見つけなさい。』という問題でしたね。

円の外の点から円へ引いた接線の長さは同じですから、DR と同じ長さのところは DS です。

(4) 『CR と同じ長さのところを見つけなさい。』という問題でしたね。

円の外の点から円へ引いた接線の長さは同じですから、CR と同じ長さのところは CQ です。

(5) 『実は、四角形 ABCD がどんな四角形でも、この問題のように、ある円が四角形 ABCD に内接しているときは「AB の長さと DC の長さをたしたもの」と「AD の長さと BC の長さをたしたもの」は必ず等しくなります。どうしてなのか、わけをきちんと説明しなさい。』ということでした。



右の図を見てください。これまでわかったことを思い出して、同じ長さの線分には同じマークを付けてみました。

「AB の長さと DC の長さをたしたもの」は

○ のマークのついた線分 1 個

| のマークのついた線分 1 個

△ のマークのついた線分 1 個

|| のマークのついた線分 1 個

の合計になりますね。

「AD の長さと BC の長さをたしたもの」は

○ のマークのついた線分 1 個

△ のマークのついた線分 1 個

| のマークのついた線分 1 個

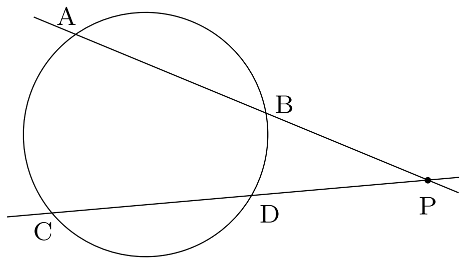
|| のマークのついた線分 1 個

の合計になりますね。

というわけで、「AB の長さと DC の長さをたしたもの」と「AD の長さと BC の長さをたしたもの」は同じになっていることがわかります。

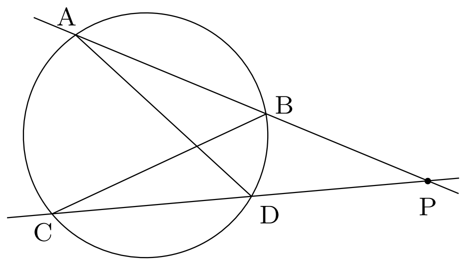
本文へ戻る

問 31. 『右の図を見てください。まず、ある円があるとします。次に、この円に交わる直線を 2 本引きます。ただし、2 つの直線は円の外で交わるように引くことにし、2 本の直線の交点を P と呼ぶことにします。そして、片方の直線が円と交わる点を A、B と呼ぶことにし、もう片方の直線が円と交わる点を C、D と呼ぶことにします。このとき以下の問に答えなさい。』ということでした。



(1) 『問題の図で、さらに点 A と点 D を結び、点 B と点 C を結びなさい。』という問題でしたね。

右の図のようになります。



(2) 『(1) で作った図には 2 つの三角形 △ADP と △CBP があらわれているはずです。実は驚くべきことに、△ADP と △CBP は相似であることを証明しなさい。』という問題でしたね。では証明してみることにしましょう。

（証明）

△ADP と △CBP において、∠APD と ∠CPB はぴったり重なっているので

$$\angle \mathrm{APD} = \angle \mathrm{CPB} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

が成り立っています。

∠PAD と ∠PCB はどちらも $\overparen{\mathrm{BD}}$ に対する円周角になっていて、円周角の定理によ

ると同じ弧に対する円周角の大きさは等しいので

$$\angle \mathrm{PAD} = \angle \mathrm{PCB} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立っています。

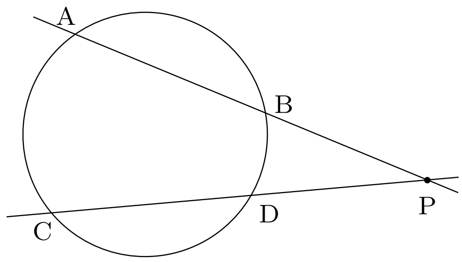
①、②より △ADP と △CBP では「2 組の角の大きさがそれぞれ等しくなっている」ということになるので、

$$\triangle \mathrm{ADP} \backsim \triangle \mathrm{CBP}$$

であると断言できます。

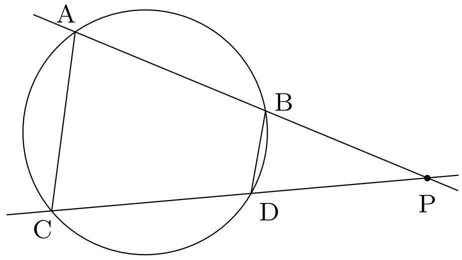
本文へ戻る

問 32. 『右の図を見てください。まず、ある円があるとします。次に、この円に交わる直線を 2 本引きます。ただし、2 つの直線は円の外で交わるように引くことにし、2 本の直線の交点を P と呼ぶことにします。そして、片方の直線が円と交わる点を A、B と呼ぶことにし、もう片方の直線が円と交わる点を C、D と呼ぶことにします。このとき以下の問に答えなさい。』ということでした。



(1) 『問題の図で、さらに点 A と点 C を結び、点 B と点 D を結びなさい。』という問題でしたね。

右の図のようになります。



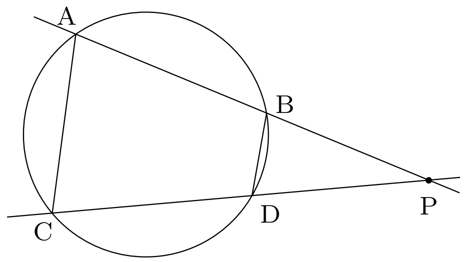
(2) 『(1) で作った図には 2 つの三角形 △ACP と △DBP があらわれているはずです。実は驚くべきことに、△ACP と △DBP は相似であることを証明しなさい。』という問題でしたね。

まず、念のため確認しておきます。この問題では「△ACP と △DBP は相似であ

ることを証明しなさい。」と言っているのであって、「△ACP と △BDP は相似であることを証明しなさい。」と言っているのです。違い、わかりますか？つまり、△ACP と相似になるのは △BDP ではなく、△DBP なのです。（△DBP を裏返せば △ACP と同じ向きになるわけです。）もう一度図をよく見て確認しておいてください。

では証明してみることにしますが、この問題は少し難しいかもしれません。そこで図をよく見ていろいろと悩んでみることにします。

では問題の図をもう一度見てください。



△ACP と △DBP が相似になるらしいのですから、△ACP の頂点 P は △DBP の頂点 P に対応していて、△ACP の頂点 C は △DBP の頂点 B に対応していることになります。ですから例えば、

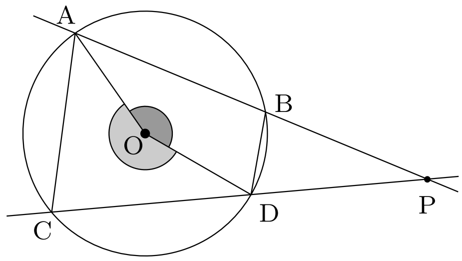
∠APC と ∠DPB の大きさが等しい

ということと、

∠ACP と ∠DBP の大きさが等しい

ということが判明すれば、△ACP と △DBP が相似であると断言できます。

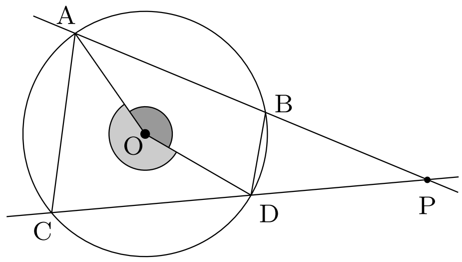
この方針で証明にチャレンジしようと思いますが、この図をいくら見ても、∠ACP と ∠DBP の大きさについて何か言えそうなことは見つかりません。なぜ何も見つからないのかというと、∠ACP と ∠DBP が遠く離れているからかもしれませんね。そこで知恵を絞ってみましょう。この問題には円が現れています。そして、A、B、C、D は円周上の点です。ですからどこかに線をひいて、中心角とか円周角というものを作ってみると良いかもしれませんね。



では右の図を見てください。とりあえず、円の中心と A を結び、円の中心と D を結んでみました。そうすると中心角や円周角が現れました。また、この図では円の中心を O と呼ぶことにしました。

円周角の定理によると、円周角の大きさは中心角の大きさの半分です。ですから、例えば ∠ACP の大きさは濃い灰色の方の ∠AOD の大きさの半分ですよね。また例えば、∠ABD の大きさはうすい灰色の方の ∠AOD の大きさの半分ですよね。あー。これはいいことを発見しました。これでなんとか証明できそうです。

（証明）



右の図を見てください。円の中心と A を結び、円の中心と B を結びます。そして円の中心を O と呼ぶことにします。

円周角の定理によると、

∠ACP の大きさは濃い灰色の方の ∠AOD の大きさの半分 ······· ①

∠ABD の大きさはうすい灰色の方の ∠AOD の大きさの半分 ······· ②

です。

またもちろん

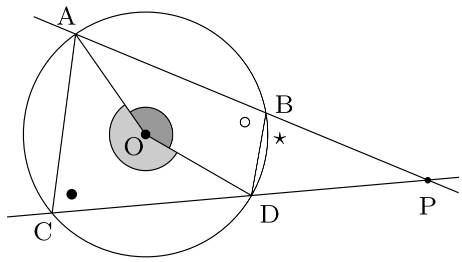
濃い灰色の方の ∠AOD の大きさと
うすい灰色の方の ∠AOD の大きさをたすと 360° ······· ③

です。

①、②、③より、

$$\angle \mathrm{ACP} \text{ の大きさと } \angle \mathrm{ABD} \text{ の大きさをたすと } 180^\circ \qquad \cdots\cdots ④$$

であることがわかります。



図をもう一度見てみましょう。ここまでで、図の ● のマークのついている角と ∘ マークのついている角をたすと 180° になることがわかったのです。

ところで、∘ マークのついている角と ⋆ のついている角をたしても当然 180° ですよね。つまり、

$$\angle \mathrm{ABD} \text{ の大きさと } \angle \mathrm{DBP} \text{ の大きさをたすと } 180^\circ \qquad \cdots\cdots ⑤$$

ですよね。ということは、∘ マークのついている角と ⋆ のついている角の大きさは同じはずです。つまり、④、⑤から

$$\angle \mathrm{ACB} \text{ の大きさと } \angle \mathrm{DBF} \text{ の大きさは同じ} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

ということがわかりました。

△ACP の ∠APC と △DBP の ∠DPB はもともとぴったり重なっています。ですから

$$\angle \mathrm{APC} \text{ の大きさと } \angle \mathrm{DPB} \text{ の大きさは同じ} \qquad \cdots\cdots ⑦$$

です。

これで目的達成です。⑥、⑦から、△ACP と △DBP では「2 組の角の大きさがそれぞれ等しい」ということがわかりました。ですから、

$$\triangle \mathrm{ACP} \backsim \triangle \mathrm{DBP}$$

であると断言できます。

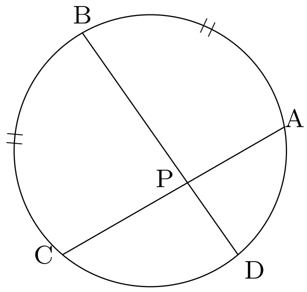
（証明おわり）

本文へ戻る

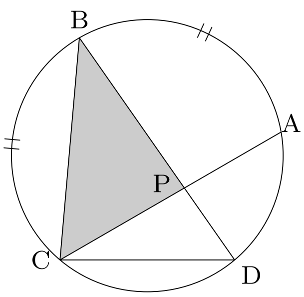
問 33. 『円 O があり、円 O の円周上に 4 つの点 A、B、C、D がこの順に反時計回り（つまり時計の針の回転する向きとは反対周り）に並んでいるとします。また、さらに弧 AB と弧 BC の長さは等しくなっているとします。弦 AC と弦 BD は交わっているはずですが、交わった点を P と呼ぶことにします。以下の問に答えなさい。』ということでした。

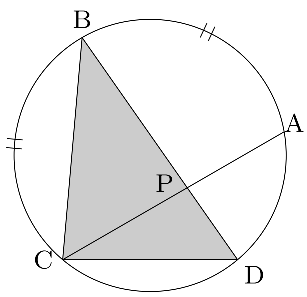
(1) 『この問題をよく読んで、この問題の状況を図にしなさい。』という問題でしたね。

例えば右の図のようになります。



(2) 『△BPC ∽ △BCD であることを証明しなさい。』という問題でした。考えやすくするために、2 つ図を作って、それぞれの三角形を灰色にしておきます。





（証明）

△BPC と △BCD において、

∠CBP と ∠DBC はもともとぴったり重なっているので

$$\angle CBP = \angle DBC \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

が成り立っています。

$\angle$BCP は $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角で、$\angle$BDC は $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に対する円周角です。そしてこの問題ではもともと $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ と $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の長さは同じですから円周角の定理により、

$$\angle \mathrm{BCP} = \angle \mathrm{BDC} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立っていることになります。

①、②より、△BPC と △BCD では「2 組の角の大きさがそれぞれ等しい」ということになるので

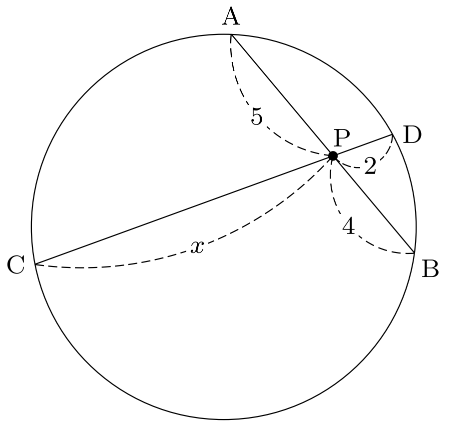
$$\triangle \mathrm{BPC} \backsim \triangle \mathrm{BCD}$$

であると断言できます。

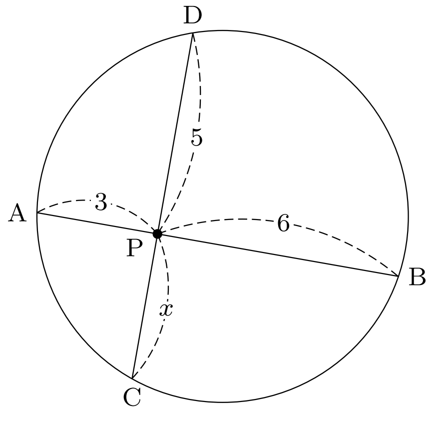
本文へ戻る

問 34. 『次の図の x の値を求めなさい。』ということでした。

(1)

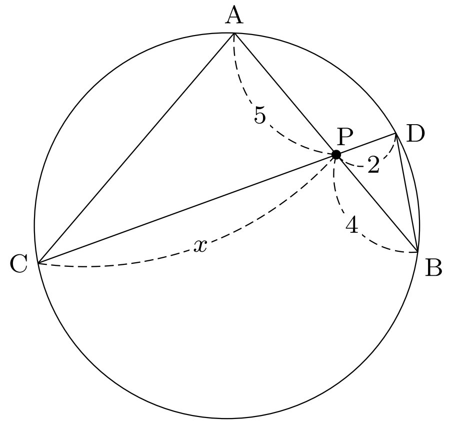


(2)



例題 21 の解答がしっかり理解出来た人のため、あっさり説明します。

(1) 右の図の △APC と △DPB は相似です。なぜかというと、∠APC と ∠DPC は等しく、∠CAP と ∠BDP は等しいからです。



相似な図形では対応する辺の比はどこでも同じです。ですから

$$x : 4 = 5 : 2$$

が成り立っています。この式は

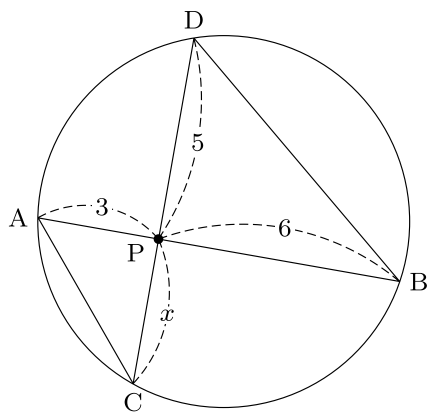
$$2x = 20$$

と変形でき、さらに

$$x = 10$$

であることがわかります。

(2) 右の図の △APC と △DPB は相似です。なぜかというと、∠APC と ∠DPC は等しく、∠CAP と ∠BDP は等しいからです。



相似な図形では対応する辺の比はどこでも同じです。ですから

$$x : 6 = 3 : 5$$

が成り立っています。この式は

$$5x = 18$$

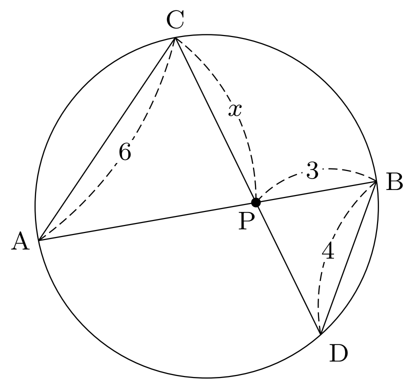
と変形でき、さらに

$$x = \frac{18}{5}$$

であることがわかります。

本文へ戻る

問 35. 『右の図を見てください。ある円の 2 つの弦 AB、CD が円の中の点 P で交わっています。このとき以下の問に答えなさい。』ということでした。



(1) 『△PAC と △PDB は相似であることを証明しなさい。』という問題でしたね。

（証明）

$\angle$ACP と $\angle$DBP はどちらも $\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ に対する円周角です。円周角の定理によると、同じ弧に対する円周角は等しいのですから

$$\angle \mathrm{ACP} = \angle \mathrm{DBP} \qquad \cdots\cdots\cdot \ ①$$

が成り立っています。

対頂角はどんなときでも大きさは同じですから

$$\angle \mathrm{APC} = \angle \mathrm{DPB} \qquad \cdots\cdots\cdot \ ②$$

が成り立っています。

①、②から △PAC と △PDB では「2 組の角の大きさがそれぞれ等しい」ということになるので

$$\triangle \mathrm{PAC} \backsim \triangle \mathrm{PDB}$$

であると断言できます。

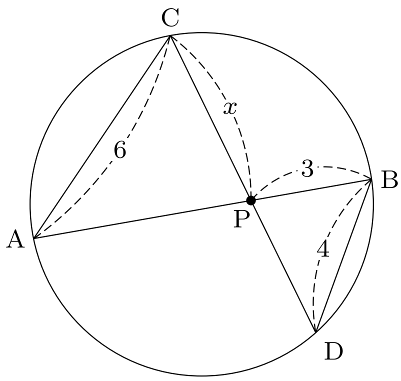
(2) (1) で △PAC と △PDB は相似であることを証明しましたね。このとき、

（a）PB に対応するのは PC です。

(b) PD に対応するのは PA です。

(c) BD に対応するのは CA です。

(3) 『PC の長さを求めなさい。』ということでした。



△PDB は相似であることが証明できていますね。相似な図形では対応している辺の長さの比はどこでも同じですから

$$x : 3 = 6 : 4$$

が成り立っています。この式は

$$4x = 18$$

と変形できますが、さらに

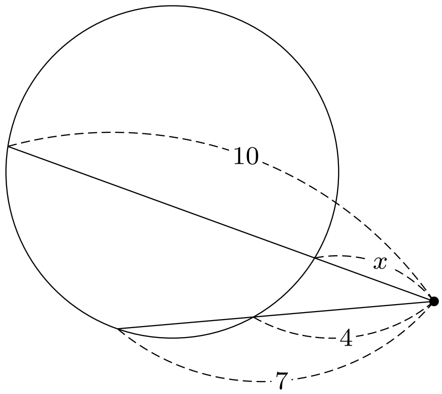
$$x = \frac{9}{2}$$

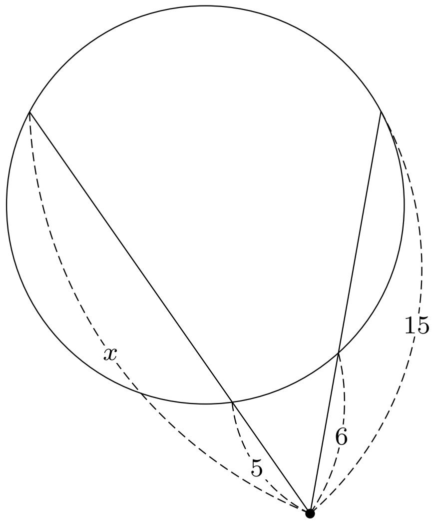
であることがわかります。つまり PC の長さは $\dfrac{9}{2}$ です。

本文へ戻る

問 36. 『次の図の x の値を求めなさい。』ということでした。

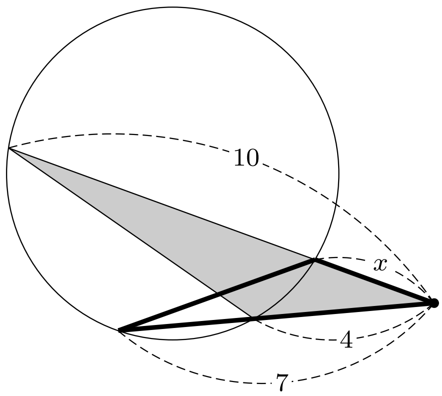
(1) (2)





例題 22 の解答がしっかり理解出来た人のため、あっさり説明します。

(1) 右の図で灰色の三角形と太い線で描かれた三角形は相似です。(2 組の角の大きさが等しくなっていますよね。)



相似な図形では対応している辺の長さの比はどこでも同じですから

$$x : 4 = 7 : 10$$

が成り立っています。この式は

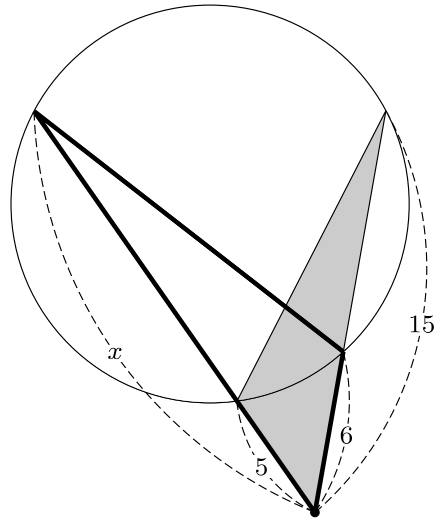
$$10x = 28$$

と変形できますが、さらに

$$x = \frac{14}{5}$$

であることがわかります。

(2) 右の図で灰色の三角形と太い線で描かれた三角形は相似です。(2 組の角の大きさが等しくなっていますよね。)



相似な図形では対応している辺の長さの比はどこでも同じですから

$$x : 15 = 6 : 5$$

が成り立っています。この式は

$$5x = 90$$

と変形できますが、さらに

$$x = 18$$

であることがわかります。

本文へ戻る