平方根

2015 年 2 月 9 日

目次

このテキストの使いかた

日頃の学習では・・・

- テキストをていねいに読んでいきましょう。

  このテキストは、きちんと言葉を使っててていねいな説明が書かれています。記号や数式が並んでいるだけの、意味不明のものではありません。ひとことひとこと言葉を大切にして、解き方ではなく考え方を学び取るようにしてください。そして、書いてあることに対して、「あーそういうことか」とか「えーよくわからない」とか「これ、ちがうんじゃないの？」といった反応をしてください。数学は自分の頭を使って考えていく科目ですから立ち止まって考えることがとても大切なのです。

- テスト直前に勉強を始めるのではなく、テストで力を発揮できるように前もって準備をしておきましょう。

  数学のように、自分の頭を使って「あーでもない、こーでもない」と考えながら学んでいく科目では、学習を始めてからしばらくの間はなかなか成果が出ない事があります。しかし少し我慢をして学習を続けていくうちに、あるとき、驚くような力が付いていることに気づくことがあります。 つまり、実力は初めのうちはゆっくり伸びていき、あとからぐんと伸びることが多いのです。

- 例題を学ぶときには、解答を読む前に、できればまず自分の力で解くことができるかどうか試してみましょう。

  数学の学習では、誰かから教わっただけのことよりも自分で悩んで考えたことの

ほうがよく身につきます。紙と筆記用具を使って実際に答案を書いてみてください。それができたらテキストの解答をていねいに読んで自分の考えと比べてみましょう。

- 例題の学習ができたら、この問題がテストに出ても自分の力だけで解けるかどうか想像してみましょう。そして心配なものには印を付けておきましょう。

  日頃から自分の実力をつかんでおくとテスト対策がしやすくなります。

- 問はもちろん、まず自分の力で解くことができるかどうか試してみてください。

  紙と筆記用具を使って実際に答案を書いてみてください。それができたらテキストの解答をていねいに読んで自分の考えと比べてみましょう。そうすれば理解が深まるでしょう。

- 問を解き終わって答え合わせをしたら、間違ったものには印を付けておきましょう。

  日頃から自分の実力をつかんでおくとテスト対策がしやすくなります。

- ひとつのひとつの節を読み終わったら、どんなことをその節で学んだのか思い出して「あらすじ」を言えるようにしておきましょう。紙と筆記用具を用意して、誰かにあらすじを伝えるにはどんなふうに説明すればよいか考え、文章を書いてみるととても効果があります。

  中学生に「今日は学校の数学の授業でどんなことを勉強したの？」と聞いてみると、「えーと、何だっけ、そうだ、傾きとか習った。」と断片的なことを言えたりすることはあるのですが、改めて、「へぇ、ところで傾きってなんなの？」と聞いてみると「えー、何だっけ、そうだ、なんか計算したり直線を描いてた。」ぐらいの答えしか返ってこないことが多いのです。専門用語を正しく言えるようになることも必要なことかもしれませんが、そんなことより大切なのは「どんなお話を学んだのか」ということです。数学は意味の無い記号操作を学ぶ科目ではなく、ちゃんとしたストーリーがあるものを学んでいるのです。ですから「お話のあらすじ」を理

解しておくことが大切なのです。

定期テスト対策では・・・

「日頃の学習」のところにも書いてありますが、数学のような科目は力がつくまでに時間のかかる科目です。テストに備えて十分な日数を確保しておきましょう。そして、「日頃の学習」で心配な例題や間違った問にちゃんと印を付けているとテスト対策が楽になります。

- テキストから試験範囲の例題や問を探して、印のついていないものがちゃんと解けるかどうか試してみましょう。
- 印を付けた例題や問を繰り返し復習して、テストに出ても大丈夫な問題を少しでも増やしておきましょう。

第1章

平方根

1.1　2乗するとほにゃららになる数

これからあなたにいくつか質問します。いっしょうけんめい考えて答えてください。

質問 1　「2 乗すると 16 になる数」をあるだけ全部見つけて答えてください。

さて、答えは分かりましたか。もしかして、「4 です。」って答えて安心していたりしませんか？正しい答えは「4 と -4」ですよ。この世の中には「マイナスの数」だってあるということを知ってますよね。

質問 2　「2 乗すると 9 になる数」をあるだけ全部見つけて答えてください。

今度はきっと大丈夫ですよね。答えは、「3 と -3」ですね。

質問 3　「2 乗すると 0 になる数」をあるだけ全部見つけて答えてください。

まさか、「困った。」って言ってたりしませんよね。答えは「0 だけ」ですね。

質問 4　「2 乗すると -16 になる数」をあるだけ全部見つけて答えてください。

今度はどうでしょうか。きっと、「今度こそ困った。」って言っている人、多いでしょうね。

質問 1 で、「2 乗すると 16 になる数」を探しました。そうすると、「4 と -4」が見つかったのでしたね。この質問 4 は、質問 1 と似ていますが、2 乗すると「16」ではなくて、「-16」になる数を探す問題です。質問 1 で見つけた数の 4 と -4 はどちらも 2 乗すると「16」にはなりますが「-16」にはなりませんね。ですから、4 や -4 以外の数から答えを探さなくてはなりません。でも、「そんなこといっても、いくら探しても見つからないよ。」なんて思ったりしませんか？

ところで、もし本当に「いくら探しても見つからない」のだとしたらそれはなぜなのでしょう。あなたが今日まで生きてきた経験をよく思い出して考えてみてほしいのですが、わけを考えるために次のような実験をしてみようと思います。どんな実験をするのかというと、数を何個か適当に用意して、それらを 2 乗してみるのです。

質問 4 のための実験　2 乗すると -16 になる数があるのかどうか探りを入れるために、5 個の数を適当に用意して 2 乗してみる実験をします。

ここでは 5 個の数として、

$$6、-7、0.3、-\frac{7}{5}、\frac{1}{3}$$

を用意します。別に、この 5 個の数でなくてもよいのですが、ここではこれからなるべく慎重な実験をしようと思っているので、プラスの数やマイナスの数、小数や分数を混ぜておきました。また、本当は 5 個なんてケチなことは言わずに、もっとたくさん数を用意して実験したいのですが、キリがないのでとりあえず 5 個の数で実験します。

では、これらの数をそれぞれ 2 乗してみましょう。

6 を 2 乗すると、$6^2 = 6 \times 6 = 36$ ですね。

-7 を 2 乗すると、$(-7)^2 = (-7) \times (-7) = 49$ ですね。

0.3 を 2 乗すると、$(0.3)^2 = (0.3) \times (0.3) = 0.09$ ですね。

$-\dfrac{7}{5}$ を 2 乗すると、$\left(-\dfrac{7}{5}\right)^2 = \left(-\dfrac{7}{5}\right) \times \left(-\dfrac{7}{5}\right) = \dfrac{49}{25}$ ですね。

$\dfrac{1}{3}$ を 2 乗すると、$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$ ですね。

それぞれの数を 2 乗した結果をよく見てください。もちろんどの数を 2 乗しても -16 にはなりませんでしたね。ですから、2 乗すると -16 になる数は今の所まだ見つかっていません。でも、この結果を見て、何か気がついたことはありませんか？ 2 乗した結果はどれも「プラスの数」になっていますよね。一度も「マイナスの数」になることはありませんでしたね。これは偶然でしょうか。少し考えて気付いた人も多いと思いますが、偶然ではないですよね。だって、2 乗する前の数がプラスでもマイナスでも、2 乗してしまうとプラスの数になるはずですよね。詳しく言うと、2 乗する前の数がプラスだったら、2 乗するとプラスとプラスをかけることになるので結果はプラスですし、2 乗する前の数がマイナスだったら、2 乗するとマイナスとマイナスをかけることになるので結果はプラスということですね。ということは結局、どんな数も 2 乗するとマイナスにはならないのですから、2 乗すると「マイナス 16」になる数なんてあるわけないですよね。

問 1.　次の問に答えなさい。

(1) 2 乗すると 49 になる数を全て見つけなさい。

(2) 2 乗すると $\dfrac{16}{81}$ になる数を全て見つけなさい。

(3) 2 乗すると -49 になる数を全て見つけなさい。

(4) 2 乗すると $-\dfrac{16}{81}$ になる数を全て見つけなさい。

(5) 2 乗すると 0.01 になる数を全て見つけなさい。

答えを見る

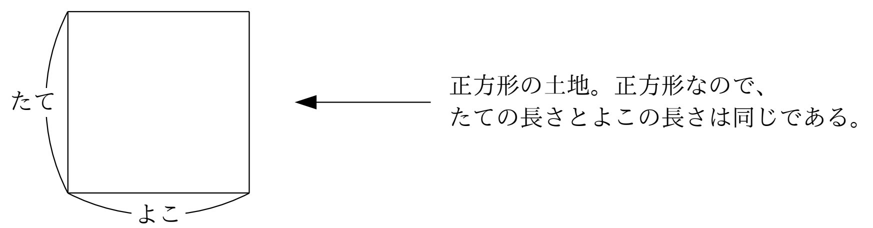
では質問を続けることにします。

質問 5　「2 乗すると 5 になる数」をあるだけ全部見つけて答えてください。

さて、今度はどうでしょうか。「今度こそ本当に困った。」って言っている人、多いはずです。そして困った果てに、「どうせそんな数ないよ。」って気楽に言ってたりしませんか？でも、深く考えもしないで、「ない」なんていってはいけませんよ。「ない」いうことと「見つけられない」ということは別なのですから。自分が見つけられないからといって、「ない」と答えてはダメですよね。本当に「ない」と思うのなら、証拠を見せなくてはいけません。

とは言っても、今まで生きてきた経験では、「2 乗すると 5 になる数」なんてものはなかったですよね。ですから、そんな数があるのだとしても簡単には見つからないのだと思われます。そこで次のようなことを考えてみようと思います。

まず、次の図のように、正方形の形をした土地があると思ってください。



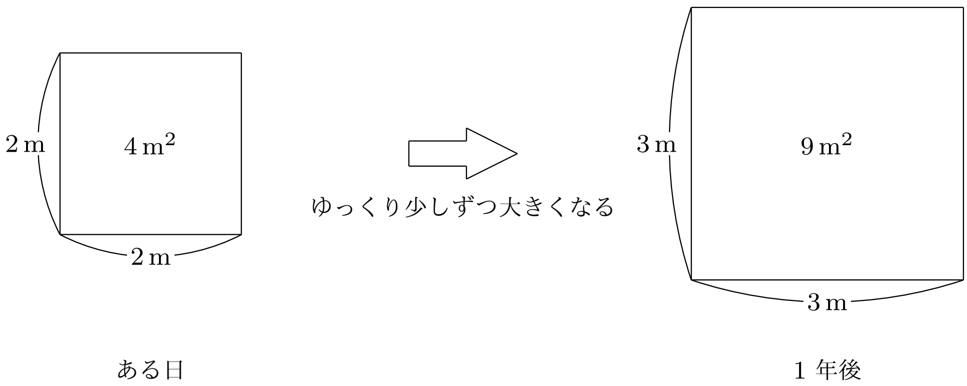
ところで、この土地の面積はどのように計算したらよいでしょうか。もちろん正方形の面積の計算の仕方は知っていますよね。「たての長さ」と「よこの長さ」をかければよいですよね。でも、正方形では「たての長さ」と「よこの長さ」は同じなので、「たての長さ」を 2 乗してもこの土地の面積を求めることができますね。

さて、実はこの土地はとても不思議な土地で、知らない間に、正方形の形のまま、少しずつゆっくり大きくなっていくとします。(「そんなことあるわけないじゃん。」

なんて言わないでくださいね。世の中には不思議なこともあるのです。）

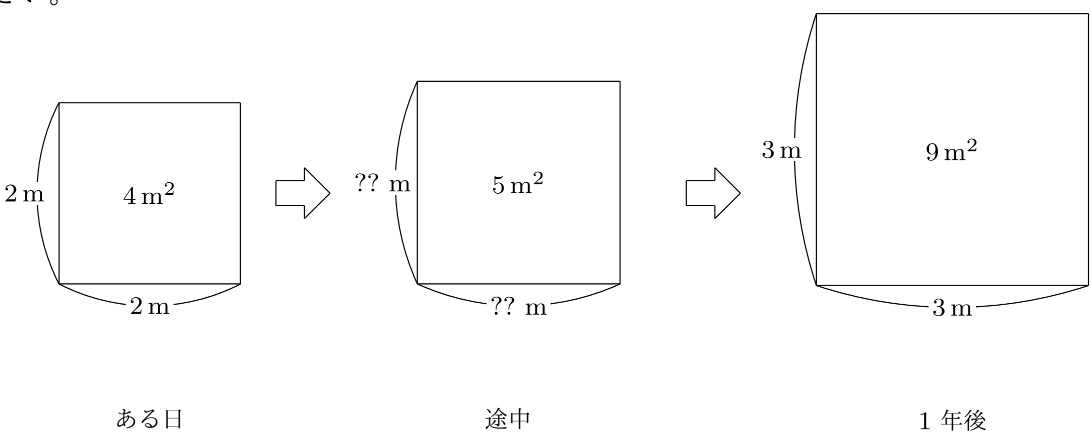
ある日、この土地は「たて」と「よこ」の長さが $2\,\mathrm{m}$ でした。ということは、この土地の面積は、2 という数を 2 乗して「$4\,\mathrm{m}^2$」ということになりますね。

1 年後、この土地は大きくなって、「たて」と「よこ」の長さが $3\,\mathrm{m}$ になっていました。ということは、この土地の面積は、3 という数を 2 乗して「$9\,\mathrm{m}^2$」になったということですね。念のため、次の図をよく見てください。



さて、ここであなたに考えてもらいたいことがあります。

この土地は、ゆっくり少しずつ大きくなるのでしたね。土地の面積はある日 $4\,\mathrm{m}^2$ で、1 年後には $9\,\mathrm{m}^2$ に増えていました。ということは、$4\,\mathrm{m}^2$ から $9\,\mathrm{m}^2$ へ増えていく途中で、面積が $5\,\mathrm{m}^2$ になっていたことがあったはずです。次の図を見てください。



では、この、「途中」の正方形（つまり面積が $5\,\mathrm{m}^2$ の正方形）の「たて」や「よこ」

の長さはいくつなのでしょう。

正方形の面積は「たて」の長さを 2 乗して求めることができるのですから、この「途中」の正方形の「たて」の長さを 2 乗すると 5 になるということですよね。これって、つまり、「いくつとはいえないんだけど、何かある数があって、その数を 2 乗すると 5 になる」ということになりませんか？このように考えると、とにかく、「2 乗すると 5 になる数がある」ということになりますよね。

しかし、この数はかなり微妙な数です。2 乗すると 4 になる数とか、2 乗すると 9 になる数だったら割と気楽に見つかりましたね。それはなぜかというと、今まであなたが生きてきた中で出会ったことのある数（つまり慣れ親しんできた数）の中から、2 乗すると 4 になる数とか、2 乗すると 9 になる数というものを見つけることができたからです。2 乗すると 5 になる数の場合にはそう簡単にはいきません。今まであなたが慣れ親しんできた数の中には、2 乗すると 5 になる数なんてなかったからです。しかしさっきの正方形の土地の話で分かるとおり、面積が 5 の正方形のたての長さやよこの長さを考えてみれば、2 乗すると 5 になる数はちゃんとあるということが分かります。でも、その数は、いくつとは気楽にいえないのです。そこで、困ってしまった昔の人は、2 乗すると 5 になる数のことを $\sqrt{5}$ と書くことに決めたのです。（本当はこの説明は「説明不足」なのですが、今はあまり細かいことは言わないようにしておきます。あとで、$\sqrt{\ }$ というマークについてきちんと説明することにします。）

さて、ここまで、平方根と呼ばれているものを学習するのに先立って、大切な前置きの話をしてきました。では、本題に入ることにしましょう。

1.2　平方根とは

これまで、「2 乗すると $\cdots$ になる数を全部見つけなさい」という話をしてきましたね。では「平方根」という言葉の意味を説明することにしましょう。

平方根ってなに？

a という数があるとします。2 乗すると a になる数のことを **a の平方根**といいます。

それでは、「a の平方根」という言葉の意味をきちんと理解してもらうため、いくつか例を紹介しましょう。

例 1　「〜の平方根」の例

(1)　16 の平方根

平方根という言葉の意味を思い出してみましょう。すると、16 の平方根とは、「2 乗すると 16 になる数」のことですね。そのような数をいっしょうけんめい探すと、4 と -4 が見つかるはずです。ですから、

$$16 \text{ の平方根は } 4 \text{ と } -4$$

ということになります。

(2)　$\dfrac{16}{25}$ の平方根

平方根という言葉の意味を思い出してみましょう。すると、$\dfrac{16}{25}$ の平方根とは、「2 乗すると $\dfrac{16}{25}$ になる数」のことですね。そのような数をいっしょうけんめい探すと、$\dfrac{4}{5}$ と $-\dfrac{4}{5}$ が見つかるはずです。ですから、

$$\frac{16}{25} \text{ の平方根は } \frac{4}{5} \text{ と } -\frac{4}{5}$$

ということになります。

(3)　0 の平方根

平方根という言葉の意味を思い出してみましょう。すると、0 の平方根とは、「2 乗すると 0 になる数」のことですね。そのような数をいっしょうけんめい探すと、ただ 1 つ、0 だけが見つかるはずです（(大丈夫ですよね。2 乗すると 0 になる数は 0 だけですよね。）ですから、

0 の平方根は 0 だけ

ということになります。

(4)　-16 の平方根

平方根という言葉の意味を思い出してみましょう。すると、-16 の平方根とは、「2 乗すると -16 になる数」のことですね。そのような数をいっしょうけんめい探しても見つかることはありません。なぜなら、どんな数も 2 乗すると絶対にマイナスにはならないからです。ですから、

-16 という数には平方根はない

ということになります。

問 2. 次の各問の文の空欄に正しい数、式、言葉を記入しなさい。

(1) 25 の平方根

平方根という言葉の意味を思い出してみましょう。すると、25 の平方根とは、「2 乗すると $\boxed{}$ になる数」のことですね。そのような数をいっしょうけんめい探すと、$\boxed{}$ と $\boxed{}$ が見つかるはずです。ですから、

25 の平方根は $\boxed{}$ と $\boxed{}$

ということになります。

(2) $\dfrac{9}{64}$ の平方根

平方根という言葉の意味を思い出してみましょう。すると、$\dfrac{9}{64}$ の平方根とは、「$\boxed{}$ 乗すると $\boxed{}$ になる数」のことですね。そのような数をいっしょうけんめい探すと、$\boxed{}$ と $\boxed{}$ が見つかるはずです。ですから、

$\dfrac{9}{64}$ の平方根は $\boxed{}$

ということになります。

(3) 4 の平方根

平方根という言葉の意味を思い出してみましょう。すると、4 の平方根とは、「$\boxed{}$ になる数」のことですね。そのような数をいっしょうけんめい探すと、$\boxed{}$ と $\boxed{}$ が見つかるはずです。ですから、

4 の平方根は $\boxed{}$ と $\boxed{}$

ということになります。

(4) -25 の平方根

平方根という言葉の意味を思い出してみましょう。すると、-25 の平方根とは、「$\boxed{}$ になる数」のことですね。そのような数をいっしょうけんめい探しても見つかることは $\boxed{}$ 。なぜなら、どんな数も 2 乗すると絶対にマイナスにはならないからです。ですから、

-25 という数には $\boxed{}$

ということになります。

答えを見る

問 3. 次の数の平方根を全て見つけなさい。

(1) 49 (2) $\dfrac{4}{25}$ (3) -49 (4) $-\dfrac{4}{25}$ (5) 0.01

答えを見る

では次に、$\sqrt{}$ というマークの使い方を説明することにしましょう。このマークですが、使い方を誤解して覚えてしまう人がとても多いのです。ですから、しっかり意味を考えて、正しく使い方を覚えるようにしてください。

$\sqrt{}$ というマークの使い方と読み方その 1

$\sqrt{a}$ と書いてあったら、これは、2 乗すると a になる数のうち、プラスのほうの数のことです。ただし、$\sqrt{0}$ と書いてあったら、これは 0 と同じ数です。

$\sqrt{a}$ は「ルート a」読みます。

この説明でわかってもらえるとよいのですが、さっきも言ったように、「誤解して覚えてしまう人がとても多い話」なので、例を使って詳しく学習することにします。

例 2　(1)　$\sqrt{16}$ とは

$\sqrt{16}$ という数の正体を説明どおりに考えてみましょう。すると次のようになりますよね。

「$\sqrt{16}$ とは、2 乗すると 16 になる数のうち、プラスのほうの数のこと」

ところで、2 乗すると 16 になる数は 4 と -4 ですよね。(2 つあるんですよね。) このうち、プラスのほうの数はもちろん 4 ですよね。ですから、

「$\sqrt{16}$ の正体は、4 である」

ということになりますね。

(2)　$\sqrt{\dfrac{4}{25}}$ とは

$\sqrt{\dfrac{4}{25}}$ という数の正体を説明どおりに考えてみましょう。すると次のようになりますよね。

「$\sqrt{\dfrac{4}{25}}$ とは、2 乗すると $\dfrac{4}{25}$ になる数のうち、プラスのほうの数のこと」

ところで、2 乗すると $\dfrac{4}{25}$ になる数をいっしょうけんめい探してみると、$\dfrac{2}{5}$ と $-\dfrac{2}{5}$ ですよね。(2 つあるんですよね。) このうち、プラスのほうの数はもちろん $\dfrac{4}{25}$ ですよね。ですから、

「$\sqrt{\dfrac{4}{25}}$ の正体は、$\dfrac{4}{25}$ である」

ということになりますね。

(3) $\sqrt{0}$ とは

$\sqrt{0}$ という数の正体を説明どおりに考えてみましょう。たしか、

「$\sqrt{0}$ とは、0 のことである」

と決めてあるのでしたね。

(4) $\sqrt{-16}$ とは

$\sqrt{-16}$ という数の正体を説明どおりに考えてみましょう。すると次のようになりますよね。

「$\sqrt{-16}$ とは、2 乗すると -16 になる数のうち、プラスのほうの数のこと」

ところで、2 乗すると -16 になる数っていったいいくつなのでしょう。たしかこのことについては 7 の質問 4 で詳しく考えましたね。その結果、「そんな数はない。なぜならどんな数を 2 乗してもマイナスになることはないから。」ということが分かりましたね。ですから.、

「$\sqrt{-16}$ という数はない」

ということになりますね。

(5) $\sqrt{5}$ とは

$\sqrt{5}$ という数の正体を説明どおりに考えてみましょう。すると次のようになりますよね。

「$\sqrt{5}$ とは、2 乗すると 5 になる数のうち、プラスのほうの数のこと」

ところで、「2 乗すると 5 になる数」っていったいいくつなのでしょう。たしかこのことについては、10 ページの質問 5 で詳しく考えましたね。その結果、「2 乗すると 5 になる数はちゃんとあるんだけど、慣れ親しんだ数ではないので気楽にいくつ

とは言えない。仕方がないからその数を $\sqrt{5}$ と書くことにした。」ということでしたよね。ですから、「$\sqrt{5}$ とは？」と聞かれても次のように答えるしかありません。

「$\sqrt{5}$ とは、2 乗すると 5 になる数のうち、プラスのほうの数である」

問 4. 次の各問の文の空欄に正しい数、式、言葉を記入しなさい。

(1) $\sqrt{49}$ とは

$\sqrt{49}$ という数の正体を 16 ページ「$\sqrt{\ }$ というマークの使い方と読み方その 1」の説明どおりに考えてみましょう。すると次のようになりますよね。

「$\sqrt{49}$ とは、2 乗すると $\boxed{}$ になる数のうち、$\boxed{}$ のほうの数のこと」

ところで、2 乗すると 49 になる数は $\boxed{}$ と $\boxed{}$ ですよね。（2 つあるんですよね。）このうち、プラスのほうの数はもちろん $\boxed{}$ ですよね。ですから、

$\sqrt{49}$ の正体は、$\boxed{}$ である

ということになりますね。

(2) $\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ とは

$\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ という数の正体を 16 ページ「$\sqrt{\ }$ というマークの使い方と読み方その 1」の説明どおりに考えてみましょう。すると次のようになりますよね。

「$\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ とは、2 乗すると $\boxed{}$ になる数のうち、$\boxed{}$ のほうの数のこと」

ところで、2 乗すると $\dfrac{9}{16}$ になる数は $\boxed{}$ と $\boxed{}$ ですよね。（2 つあるんですよね。）このうち、プラスのほうの数はもちろん $\boxed{}$ ですよね。ですから、

$\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ の正体は、$\boxed{}$ である

ということになりますね。

(3) $\sqrt{-49}$ とは

$\sqrt{-49}$ という数の正体を 16 ページ「$\sqrt{\ }$ というマークの使い方と読み方その 1」の説明どおりに考えてみましょう。すると次のようになりますよね。

「$\sqrt{-49}$ とは、2 乗すると $\boxed{\quad}$ になる数のうち、$\boxed{\qquad\quad}$ のほうの数のこと」

ところで、2 乗すると -49 になる数っていったいいくつなのでしょう。そんな数は $\boxed{\quad}$ ですよね。なぜならどんな数を 2 乗してもマイナスになることはないからですよね。というわけで.、

$$\sqrt{-49} \text{ という数は } \boxed{\quad}$$

ということになりますね。

(4) $\sqrt{2}$ とは

$\sqrt{2}$ という数の正体を 16 ページ「$\sqrt{\ }$ というマークの使い方と読み方その 1」の説明どおりに考えてみましょう。すると次のようになりますよね。

「$\sqrt{2}$ とは、$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$ のほうの数のこと」

ところで、「2 乗すると 2 になる数」っていったいいくつなのでしょう。よく考えてみると、「2 乗すると 2 になる数はちゃんとあるんだけど、慣れ親しんだ数ではないので気楽にいくつとは言えない。仕方がないからその数を $\boxed{\quad}$ と書くことにする。」のですよね。ですから、「$\sqrt{2}$ とは？」と聞かれても次のように答えるしかありません。

$\sqrt{2}$ とは、2 乗すると $\boxed{\quad}$ になる数のうち、$\boxed{\qquad\quad}$ のほうの数である

答えを見る

問 5. 次の数の正体をきちんと説明しなさい。またその数の正体が慣れ親しんでよく知っている数ならば、その数を答えなさい。

(1) $\sqrt{3}$　(2) $\sqrt{\dfrac{25}{81}}$　(3) $\sqrt{7}$　(4) $\sqrt{1}$　(5) $\sqrt{\dfrac{2}{7}}$

答えを見る

さて、ここまで、平方根という言の意味と $\sqrt{\ }$ というマークの使い方について学んできましたが、正しく理解してもらえたでしょうか。不安があるひとは、先に進まずに、もう一度じっくり説明や例を読み直してください。

さて、ここまでの学習で、あなたは、$\sqrt{\ }$ というマークを学んでしまいました。ということは、このマークのおかげで（せいで？）今までにお目にかかったことのない、微妙で怪しい数を知ってしまったことになるのです。未知の世界へようこそ」ということになりますね。

ではここで、$\sqrt{\ }$ というマークについて少し補足をすることにしましょう。

$\sqrt{\ }$ というマークの使い方と読み方その 2

$-\sqrt{a}$ と書いてあったら、これは、2 乗すると a になる数のうち、マイナスのほうの数のことです。$-\sqrt{a}$ は「マイナスルート a」読みます。

例 3　$-\sqrt{\bigstar}$ の例

(1)　$-\sqrt{16}$ とは

$-\sqrt{16}$ という数の正体を説明どおりに考えてみましょう。すると次のようになりますよね。

「$-\sqrt{16}$ とは、2 乗すると 16 になる数のうち、マイナスのほうの数のこと」

ところで、2 乗すると 16 になる数は 4 と -4 ですよね。(2 つあるんですよね。) このうち、マイナスのほうの数はもちろん -4 ですよね。ですから、

$$-\sqrt{16} \text{ の正体は、} -4 \text{ である}$$

ということになりますね。

(2)　$-\sqrt{5}$ とは

$-\sqrt{5}$ という数の正体を説明どおりに考えてみましょう。すると次のようになりますよね。

「$-\sqrt{5}$ とは、2 乗すると 5 になる数のうち、マイナスのほうの数のこと」

ところで、「2 乗すると 5 になる数はちゃんとあるんだけど、慣れ親しんだ数ではないので気楽にいくつとは言えない。」ということでしたよね。ですから、「$-\sqrt{5}$ とは？」と聞かれても次のように答えるしかありません。

$-\sqrt{5}$ とは、2 乗すると 5 になる数のうち、マイナスのほうの数である

問 6. 次の各問の文の空欄に正しい数、式、言葉を記入しなさい。

(1)　$-\sqrt{49}$ とは

$-\sqrt{49}$ という数の正体を 20 ページの「$\sqrt{}$ というマークの使い方と読み方その 2」の説明どおりに考えてみましょう。すると次のようになりますよね。

「$-\sqrt{49}$ とは、2 乗すると $\boxed{}$ になる数のうち、$\boxed{}$ のほうの数のこと」

ところで、2 乗すると 49 になる数は $\boxed{}$ と $\boxed{}$ ですよね。（2 つあるんですよね。）このうち、マイナスのほうの数はもちろん $\boxed{}$ ですよね。ですから、

$-\sqrt{49}$ の正体は、$\boxed{}$ である

ということになりますね。

(2)　$-\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ とは

$-\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ という数の正体を 20 ページの「$\sqrt{}$ というマークの使い方と読み方その 2」の説明どおりに考えてみましょう。すると次のようになりますよね。

「$-\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ とは、2 乗すると $\boxed{}$ になる数のうち、$\boxed{}$ のほうの数のこと」

ところで、2 乗すると $\dfrac{9}{16}$ になる数は $\boxed{}$ と $\boxed{}$ ですよね。（2 つあるんですよね。）このうち、マイナスのほうの数はもちろん $\boxed{}$ ですよね。ですから、

$$-\sqrt{\frac{9}{16}} \text{ の正体は、} \boxed{} \text{ である}$$

ということになりますね。

(3) $-\sqrt{2}$ とは

$-\sqrt{2}$ という数の正体を 20 ページの「$\sqrt{\ }$ というマークの使い方と読み方その 2」の説明どおりに考えてみましょう。すると次のようになりますよね。

「$-\sqrt{2}$ とは、$\boxed{}$ のほうの数のこと」

ところで、「2 乗すると 2 になる数」っていったいいくつなのでしょう。よく考えてみると、「2 乗すると 2 になる数はちゃんとあるんだけど、慣れ親しんだ数ではないので気楽にいくつとは言えない。」のですよね。ですから、「$-\sqrt{2}$ とは？」と聞かれても次のように答えるしかありません。

$-\sqrt{2}$ とは、2 乗すると $\boxed{}$ になる数のうち、$\boxed{}$ のほうの数である

答えを見る

問 7. 次の数の正体をきちんと説明しなさい。またその数の正体が慣れ親しんでよく知っている数ならば、その数を答えなさい。

(1) $-\sqrt{3}$　(2) $-\sqrt{25}$　(3) $-\sqrt{\frac{2}{7}}$　(4) $-\sqrt{\frac{9}{16}}$　(5) $-\sqrt{0.01}$

答えを見る

では、ここまでの学習したことがきちんと理解できているか試すために、少しややこしい問題を考えることにしましょう。

例題 1　次の数は、実は慣れ親しんでよく知っている数をわざわざ $\sqrt{\ }$ のマークを使って見かけを難しくしたものです。これらの数の正体を見抜いてください。

(1) $\sqrt{5^2}$　(2) $\sqrt{(-5)^2}$

(3) $-\sqrt{5^2}$　(4) $-\sqrt{(-5)^2}$

解答

(1) まず、$\sqrt{\ }$ のマークの中に書いてある 5^2 という数のことを考えてみましょう。5^2 って 25 と同じですよね。ですから、

$$\sqrt{5^2} = \sqrt{25}$$

ということですよね。ここで、$\sqrt{25}$ という数の正体を言葉を使って説明してみると、

「$\sqrt{25}$ とは、2 乗すると 25 になる数のうち、プラスのほうの数のこと」

ということになりますよね。2 乗すると 25 になる数は 5 と -5 ですが、このうちプラスのほうの数はもちろん 5 です。ですから、$\sqrt{25}$ って 5 ですね。このように考えてきた人は、次のように計算を進めて、$\sqrt{5^2}$ の正体を見つけることができます。

$$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$$

(2) まず、$\sqrt{\ }$ のマークの中に書いてある $(-5)^2$ という数のことを考えてみましょう。$(-5)^2$ って 25 と同じですよね。ですから、

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25}$$

ということですよね。ここで、$\sqrt{25}$ という数の正体を言葉を使って説明してみると、

「$\sqrt{25}$ とは、2 乗すると 25 になる数のうち、プラスのほうの数のこと」

ということになりますよね。2 乗すると 25 になる数は 5 と -5 ですが、このうちプラスのほうの数はもちろん 5 です。ですから、$\sqrt{25}$ って 5 ですね。このように考えてきた人は、次のように計算を進めて、$\sqrt{(-5)^2}$ の正体を見つけることができます。

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

(3) まず、$\sqrt{}$ のマークの中に書いてある 5^2 という数のことを考えてみましょう。5^2 って 25 と同じですよね。ですから、

$$-\sqrt{5^2} = -\sqrt{25}$$

ということですよね。ここで、$-\sqrt{25}$ という数の正体を言葉を使って説明してみると、

「$-\sqrt{25}$ とは、2 乗すると 25 になる数のうち、マイナスのほうの数のこと」

ということになりますよね。2 乗すると 25 になる数は 5 と -5 ですが、このうちマイナスのほうの数はもちろん -5 です。ですから、$-\sqrt{25}$ って -5 ですね。このように考えてきた人は、次のように計算を進めて、 $-\sqrt{5^2}$ の正体を見つけることができます。

$$-\sqrt{5^2} = -\sqrt{25} = -5$$

(4) まず、$\sqrt{}$ のマークの中に書いてある $(-5)^2$ という数のことを考えてみましょう。$(-5)^2$ って 25 と同じですよね。ですから、

$$-\sqrt{(-5)^2} = -\sqrt{25}$$

ということですよね。ここで、$-\sqrt{25}$ という数の正体を言葉を使って説明してみると、

「$-\sqrt{25}$ とは、2 乗すると 25 になる数のうち、マイナスのほうの数のこと」

ということになりますよね。2 乗すると 25 になる数は 5 と -5 ですが、このうちマイナスのほうの数はもちろん -5 です。ですから、$-\sqrt{25}$ って -5 ですね。このように考えてきた人は、次のように計算を進めて、 $-\sqrt{(-5)^2}$ の正体を見つけることができます。

$$-\sqrt{(-5)^2} = -\sqrt{25} = -5$$

問 8. 次の数は、実は慣れ親しんでよく知っている数をわざわざ $\sqrt{\ }$ のマークを使って見かけを難しくしたものです。これらの数の正体を見抜きなさい。

(1) $\sqrt{7^2}$　(2) $\sqrt{(-7)^2}$　(3) $\sqrt{36}$　(4) $-\sqrt{81}$

(5) $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$　(6) $\sqrt{1}$　(7) $-\sqrt{1}$　(8) $-\sqrt{7^2}$

答えを見る

これで、$\sqrt{\ }$ のマークの意味と使い方についての練習が終わりました。そこで、もう一度復習も兼ねて、「平方根」という言葉の使い方を練習することにします。（平方根という言葉の意味を忘れてしまったり、まだ言えない人はまず、13 ページを開いて、必ず「平方根」という言葉の意味を復習してからこの先を読んでください。）

例題 2　次の問に答えなさい。

(1)　49 の平方根を全て見つけなさい。

(2)　2 の平方根を全て見つけなさい。

(3)　$\dfrac{5}{7}$ の平方根を全て見つけなさい。

(4)　$\dfrac{4}{25}$ の平方根を全て見つけなさい。

解答

(1) 平方根という言葉の意味を思い出してみると、

49 の平方根とは 2 乗すると 49 になる数のこと

ですよね。そういう数をいっしょうけんめい探してみると、2 つの数が見つかりますね。そうです、7 と -7 です。ですから、

49 の平方根は 7 と -7

ですね。

(2) 平方根という言葉の意味を思い出してみると、

2 の平方根とは 2 乗すると 2 になる数のこと

ですよね。まさか、今さら、「そんな数あるわけないじゃん。」なんていっていたりしませんよね。「2 乗すると 2 になる数」ってちゃんとあるのでしたよね。でも、いくつとは気楽に言えない微妙な数なのでしたね。そこで、仕方なく昔の人が発明したマークを使って、

$$\sqrt{2} \text{ と } -\sqrt{2}$$

と書くことにしたのでしたよね。

(3) (1) と (2) が理解できている人にはもうくどい説明はいらないはずです。$\dfrac{5}{7}$ の平方根は、

$$\sqrt{\frac{5}{7}} \text{ と } -\sqrt{\frac{5}{7}}$$

ですね。

(4) まさか、「$\dfrac{4}{25}$ の平方根は、$\sqrt{\dfrac{4}{25}}$ と $-\sqrt{\dfrac{4}{25}}$ です。」なんて答えて安心していたりしませんよね。ちゃんと、2 乗すると $\dfrac{4}{25}$ になる数を探してくださいね。だって、そもそも、

$$\frac{4}{25} \text{ の平方根とは 2 乗すると } \frac{4}{25} \text{ になる数のこと}$$

なのですから。このような数をいっしょうけんめい探してみると、$\dfrac{2}{5}$ と $-\dfrac{2}{5}$ が見つかりますね。つまり、

$$\frac{4}{25} \text{ の平方根は } \frac{2}{5} \text{ と } -\frac{2}{5}$$

ですね。

念のための注意

「$\frac{4}{25}$ の平方根は、$\sqrt{\frac{4}{25}}$ と $-\sqrt{\frac{4}{25}}$ です。」と答えて安心している人は、$\sqrt{}$ のマークを頼っただけで安心してしまった人です。$\sqrt{}$ のマークの意味と使いかたをよく思い出してくださいね。ちゃんと思い出せた人は、「$\sqrt{\frac{4}{25}}$ とは、2 乗すると $\frac{4}{25}$ になる数のうちのプラスのほう」ということが分かるはずです。だから、よぉく考えてみれば、「$\sqrt{\frac{4}{25}}$ って $\frac{2}{5}$ だ。」って分かりますね。また、$\sqrt{}$ のマークの意味と使いかたをちゃんと思い出せた人は、「$-\sqrt{\frac{4}{25}}$ とは、2 乗すると $\frac{4}{25}$ になる数のうちマイナスのほう」ということも分かるはずです。ですから、よぉく考えてみれば、「$-\sqrt{\frac{4}{25}}$ って $-\frac{2}{5}$ だ。」ということになるわけです。
このように考えを進めれば、初めいい加減に考えてしまっても正しい答えにたどり着くことができます。

問 9. 次の数の平方根を全て見つけなさい。

(1) 5　(2) 64　(3) 100　(4) $\frac{3}{5}$
(5) 6　(6) 25　(7) 400　(8) 0.49

答えを見る

1.3 $\sqrt{}$ のマークがついている数を 2 乗するとどんなことが起こる？

これまで、平方根という言葉の意味と、$\sqrt{}$ のマークの使い方について詳しく学んできました。ここで簡単に思い出しておくと、

「$\sqrt{a}$ とは、2 乗すると a になる数のうち、プラスのほうの数のこと」

ということと、

「$-\sqrt{a}$ とは、2 乗すると a になる数のうち、マイナスのほうの数のこと」

ということを学んだのでしたね。これはとても重要なことですから、絶対に忘れないようにしてください。

では、これから、$\sqrt{\ }$ のマークがついている数を 2 乗する話をしていきます。

例 4　$\sqrt{\ }$ のマークがついている数を 2 乗してみると $\cdots$

(1)　$\sqrt{3}$ を 2 乗するとどうなる？

$\sqrt{3}$ とは、2 乗すると 3 になる数のうち、プラスのほうの数のことですよね。だったらとにかく、$\sqrt{3}$ を 2 乗すると 3 になるに決まってますよね。つまり、

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

となるわけですね。

(2)　$-\sqrt{3}$ を 2 乗するとどうなる？

$-\sqrt{3}$ とは、2 乗すると 3 になる数のうち、マイナスのほうの数のことですよね。だったらとにかく、$-\sqrt{3}$ を 2 乗すると 3 になるに決まってますよね。つまり、

$$\left(-\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

となるわけですね。

(3)　$\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ を 2 乗するとどうなる？

$\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ とは、2 乗すると $\dfrac{2}{5}$ になる数のうち、プラスのほうの数のことですよね。だったらとにかく、$\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ を 2 乗すると $\dfrac{2}{5}$ になるに決まってますよね。つまり、

$$\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = \frac{2}{5}$$

となるわけですね。

問 10.　次の数を求めなさい。

(1) $\left(\sqrt{7}\right)^2$　　(2) $\left(-\sqrt{15}\right)^2$　　(3) $\left(\sqrt{0.7}\right)^2$　　(4) $\left(\sqrt{9}\right)^2$

(5) $\left(\sqrt{\dfrac{3}{8}}\right)^2$ (6) $\left(\sqrt{\dfrac{9}{16}}\right)^2$ (7) $\left(\sqrt{0.01}\right)^2$ (8) $\left(-\sqrt{6}\right)^2$

答えを見る

1.4 $\sqrt{}$ のマークがついている数の大小を比べるには

これまでにあなたは、$\sqrt{}$ のマークがついている怪しくて微妙な数にたくさん出会いましたね。例えば、$\sqrt{5}$ という数は「2 乗すると 5 になる数のうちプラスのもの」のことです。しかし、このように考えているだけでは、$\sqrt{5}$ ってどのぐらいの大きさの数なのかよく分からないですよね。例えば、$\sqrt{5}$ という数と 3 という数ってどっちが大きいのでしょうか。ここではこれから、「どっちが大きいのか」ということと「だいたいどのぐらいの数なのか」ということを考えていくことにします。そこで、次のようなことに注目することにします。

注目することその 1 $\sqrt{}$ のマークがついている数は怪しくて微妙な数です。しかし、その数を 2 乗すると $\sqrt{}$ のマークがなくなって慣れ親しんだ数になります。例えば、$\sqrt{5}$ という数を 2 乗してみると、

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$$

となって、$\sqrt{}$ のマークのない分かりやすい数に変わります。

注目することその 2 2 つのプラスの数 a、b があるとします。このとき、a と b の大小関係は、a^2 と b^2 の大小関係と一致します。つまり、「a と b ではどちらのほうが大きいのか？」ということを考えるときに、そのまま a と b を比べてもよいし、そのまま比べる代わりにそれぞれを 2 乗してから a^2 と b^2 を比べてもよいのです。

例えば、「5 と 7 ではどちらのほうが大きい？」ということを考えるときに（5 と 7 のような分かりやすい数ですからもちろんどっちが大きいのかすぐ分かりますが、仮にどうしても分からない場合は）5 と 7 をそれぞれ 2 乗して 25 と 49 を作って「25 と 49 ではどちらのほうが大きい？」ということを考えてもよいということで

す。そして、「25 より 49 のほうが大きい」ということが分かったら、「2 乗する前の 5 と 7 では、5 より 7 のほうが大きかったはずだ」と判断してよいということです。

この 2 つのことに注目すると、$\sqrt{\ }$ のマークのついている数でもどっちが大きいのか判定できるようになります。例を使って説明することにしましょう。

例 5　$\sqrt{\ }$ のマークのついている数の大小を判断するにはその 1

(1)　$\sqrt{15}$ と $\sqrt{21}$ ではどちらが大きい？

$\sqrt{15}$ と $\sqrt{21}$ はどちらも $\sqrt{\ }$ のマークがついているとてもわかりにくい数です。そこで、さっき学んだ「注目することその 1」と「注目することその 2」をうまく活用して考えることにします。

まず、「注目することその 2」を活用してみます。このとき、今気にしている 2 つの数が、両方ともプラスなのかどうか確認しておかなくてはなりません。だって、「注目することその 2」はプラスの数が 2 つあるときの話でしたよね。

$\sqrt{15}$ とは、2 乗すると 15 になる数のうちプラスのもの

ですよね。また、

$\sqrt{21}$ とは、2 乗すると 21 になる数のうちプラスのもの

ですよね。ですから、とにかく $\sqrt{15}$ と $\sqrt{21}$ はどちらもプラスの数ですね。これで安心して「注目することその 2」を活用できます。それによると、「2 つのプラスの数の大小をそのまま比べられないんだったら、それぞれを 2 乗した数で比べればいいじゃん」ということでしたね。では、$\sqrt{15}$ と $\sqrt{21}$ をそれぞれ 2 乗してみましょう。すると、

$$\left(\sqrt{15}\right)^2 = 15$$

$$\left(\sqrt{21}\right)^2 = 21$$

となりますよね。(「注目することその 1」に書いてあったように、$\sqrt{\ }$ のマークの

ない数になりましたね。）

というわけで、$\sqrt{15}$ と $\sqrt{21}$ をそのまま比べる代わりに、15 と 21 を比べればよいわけです。15 と 21 では、どちらが大きいのかすぐ分かりますよね。もちろん 21 ですね。ということは、2 乗する前では、$\sqrt{21}$ のほうが $\sqrt{15}$ より大きかったということになりますね。これで解決です。

念のため、不等号を使って答えを書いておくと、

$$\sqrt{15} < \sqrt{21}$$

ということです。

(2) 5 と $\sqrt{26}$ ではどちらが大きい？

5 は分かりやすい数ですが、$\sqrt{26}$ は $\sqrt{}$ のマークがついているとてもわかりにくい数です。そこで、さっき学んだ「注目することその 1」と「注目することその 2」をうまく活用して考えることにします。

まず、「注目することその 2」を活用してみます。このとき、今気にしている 2 つの数が、両方ともプラスなのかどうか確認しておかなくてはなりません。だって、「注目することその 2」はプラスの数が 2 つあるときの話でしたよね。

5 はどう考えてもプラスの数

ですよね。また、

$\sqrt{26}$ とは、2 乗すると 26 になる数のうちプラスのもの

ですよね。ですから、とにかく 5 と $\sqrt{26}$ はどちらもプラスの数ですね。これで安心して「注目することその 2」を活用できます。それによると、「2 つのプラスの数の大小をそのまま比べられないんだったら、それぞれを 2 乗した数で比べればいいじゃん」ということでしたね。では、5 と $\sqrt{26}$ をそれぞれ 2 乗してみましょう。す

ると、

$$(5)^2 = 25$$

$$\left(\sqrt{26}\right)^2 = 26$$

となりますよね。(「注目することその 1」に書いてあったように、$\sqrt{\ }$ のマークのない数になりましたね。)

というわけで、5 と $\sqrt{26}$ をそのまま比べる代わりに、25 と 26 を比べればよいわけです。25 と 26 では、どちらが大きいのかすぐ分かりますよね。もちろん 26 ですね。ということは、2 乗する前では、$\sqrt{26}$ のほうが 5 より大きかったということになりますね。これで解決です。

念のため、不等号を使って答えを書いておくと、

$$5 < \sqrt{26}$$

ということです。

問 11. 次の各組の数の大小を調べ、不等号を使って答えなさい。

(1) $\sqrt{13}$、$\sqrt{15}$　(2) 4、$\sqrt{21}$　(3) 5、$\sqrt{23}$

答えを見る

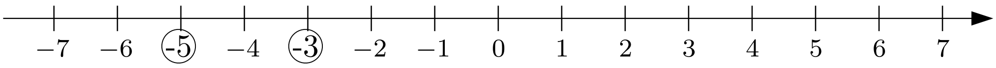
もう少し、2 つの数の大小を比べる練習をしましょう。ですが、ここでまずおさらいの質問です。

おさらいの質問 1　$-\dfrac{247}{7}$ と 34 はどちらが大きいですか？

大丈夫ですよね。こたえ、一瞬で分かりますよね。「マイナス」の数より「プラスの数」のほうが大きいですよね。ですから答えは、「34 のほうが $-\dfrac{247}{7}$ より大きい」ですね。

おさらいの質問 2　-3 と -5 はどちらが大きいですか？

マイナスの数どうしの大小を考えるときは、念のため数直線を描くと安心できますよね。次の図を見てください。



数直線では、右のほうへ行けば行くほど大きい数が並んでいるのですよね。ですから、-3 のほうが -5 より大きいですね。

おさらいはここまでにして本題に戻りましょう。

例 6 $\sqrt{\ }$ のマークのついている数の大小を判断するにはその 2

(1) $\sqrt{15}$ と $-\sqrt{21}$ ではどちらが大きい？

もうおわかりだと思いますが、 $\sqrt{15}$ はプラスの数で $-\sqrt{21}$ はマイナスの数ですね。プラスの数はマイナスの数より大きいのですから、$\sqrt{15}$ のほうが $-\sqrt{21}$ より大きいですよね。これで解決です。

念のため、不等号を使って答えを書いておくと、

$$-\sqrt{21} < \sqrt{15}$$

ということです。

(2) -5 と $-\sqrt{26}$ ではどちらが大きい？

-5 は分かりやすい数ですが、$-\sqrt{26}$ は $\sqrt{\ }$ のマークがついているとてもわかりにくい数です。そこで、、29 ページで学んだ「注目することその 1」と「注目することその 2」をうまく活用して考えたいと思います。しかしちょっと困ったことがあります。「注目することその 2」はプラスの数が 2 つあるときの話でしたよね。今考えようとしている 2 つの数はマイナスの数です。ですから、「注目することその 2」をただちに頼ることはできません。そこで一旦、マイナスのマークが付いていることは忘れることにして、5 と $\sqrt{26}$ ではどちらが大きいのか考えてみます。

「注目することその 2」によると、「2 つのプラスの数の大小をそのまま比べられないんだったら、それぞれを 2 乗した数で比べればいいじゃん」ということでしたね。では、5 と $\sqrt{26}$ をそれぞれ 2 乗してみましょう。すると、

$$(5)^2 = 25$$

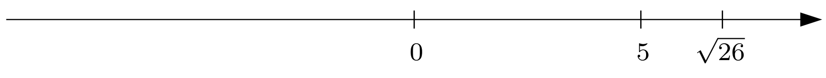
$$\left(\sqrt{26}\right)^2 = 26$$

となりますよね。(「注目することその 1」に書いてあったように、$\sqrt{\ }$ のマークのない数になりましたね。)

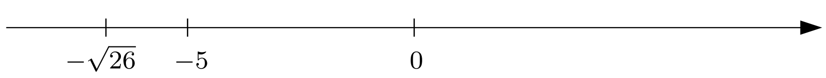
というわけで、5 と $\sqrt{26}$ をそのまま比べる代わりに、25 と 26 を比べればよいわけです。25 と 26 では、どちらが大きいのかすぐ分かりますよね。もちろん 26 ですね。ということは、2 乗する前では、$\sqrt{26}$ のほうが 5 より大きかったということになりますね。

では、今出た結論をもとに、-5 と $-\sqrt{26}$ ではどちらが大きいのか数直線で考えることにしましょう。

まず、プラスの数である 5 とプラスの数である $\sqrt{26}$ では、$\sqrt{26}$ のほうが大きいということが分かったのですから、数直線の上では $\sqrt{26}$ のほうが 5 より右にあることになります。ですから、0 からの距離は、$\sqrt{26}$ のほうが 5 より遠いことになります。次の図を見てください。



そうすると、2 つのマイナスの数 -5 と $-\sqrt{26}$ では、0 からの距離は、$-\sqrt{26}$ のほうが -5 より遠いということになります。次の図を見てください。



ということは、-5 のほうが $-\sqrt{26}$ より右にあることになるので、-5 のほうが $-\sqrt{26}$ より大きいということになります。これで解決ですね。

念のため、不等号を使って答えを書いておくと、

$$-\sqrt{26} < -5$$

ということです。

問 12. 次の各組の数の大小を調べ、不等号を使って答えなさい。

(1) $\sqrt{13}$、$-\sqrt{15}$　(2) -4、$-\sqrt{21}$　(3) -5、$\sqrt{23}$

答えを見る

問 13. 次の各組の数の大小を調べ、不等号を使って答えなさい。

(1) $\sqrt{24}$、$\sqrt{22}$　(2) 3、$-\sqrt{8}$　(3) -5、$-\sqrt{24}$

(4) $\sqrt{0.01}$、0.1　(5) $-\sqrt{12}$、$-\sqrt{17}$　(6) 2、3、$\sqrt{5}$

答えを見る

さて、ここまでの話、理解してもらえたでしょうか。あなたはここまでの学習で、いくつかの数があるとき、その中に $\sqrt{}$ のマークのついた数が混ざっていても、どの数が大きいのか判定できるようになったわけです。ここまでの経験をもとにして、今度はさらに、$\sqrt{}$ のマークのついた数のおよその値について考えることにしましょう。

例 7　$\sqrt{5}$ ってだいたいどらくらいの数なのでしょうか？

そんなこと言われても $\cdots$ って思っていませんか？大丈夫です。そんなあなたでも、次のことなら分かるはずです。いくつか質問をするので考えてください。

質問 1　1 と $\sqrt{5}$ はどちらが大きいですか？

質問 2　2 と $\sqrt{5}$ はどちらが大きいですか？

質問 3　3 と $\sqrt{5}$ はどちらが大きいですか？

質問 4　4 と $\sqrt{5}$ はどちらが大きいですか？

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・

以下、永遠に質問は続く。

では質問 1 から順に考えることにしましょう。

質問 1 の答え　1 と $\sqrt{5}$ はどちらもプラスの数です。こういうときは、それぞれの数を 2 乗して比べればよいのでしたね。

$$1^2 = 1$$

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$$

となります。1 より 5 の方が大きいわけですから、2 乗する前の 1 と $\sqrt{5}$ では、$\sqrt{5}$ のほうが大きいということですよね。

質問 2 の答え　2 と $\sqrt{5}$ はどちらもプラスの数です。こういうときは、それぞれの数を 2 乗して比べればよいのでしたね。

$$2^2 = 4$$

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$$

となります。4 より 5 の方が大きいわけですから、2 乗する前の 2 と $\sqrt{5}$ では、$\sqrt{5}$ のほうが大きいということですよね。

質問 3 の答え　3 と $\sqrt{5}$ はどちらもプラスの数です。こういうときは、それぞれの数を 2 乗して比べればよいのでしたね。

$$3^2 = 9$$

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$$

となります。9 より 5 の方が小さいわけですから、2 乗する前の 3 と $\sqrt{5}$ では、$\sqrt{5}$ のほうが小さいということですよね。

ここまでの質問に答えることができれば、この先の質問に答える意味はないですよね。（どうしてか分かりますか？）ですから、質問 4 以後の質問について考えるの

はやめにします。

ここまで、質問 1 から質問 3 までを考えてきた人は、次のことがわかったはずです。

$1 < \sqrt{5}$　(つまり $\sqrt{5}$ は 1 より大きい)

$2 < \sqrt{5}$　(つまり $\sqrt{5}$ は 2 より大きい)

$\sqrt{5} < 3$　(つまり $\sqrt{5}$ は 3 より小さい)

ということは、$\sqrt{5}$ は、2.□□□$\cdots$(にいてんナントカナントカナントカ $\cdots$) という数であるということですよね。

ここまでの話を整理しておきましょう。

$\sqrt{5}$ ってだいたいどれくらいの数なのかを知りたかったわけです。2 と $\sqrt{5}$ を比べると $\sqrt{5}$ のほうが大きいということが分かりました。また、3 と $\sqrt{5}$ を比べると $\sqrt{5}$ のほうが小さいということが分かりました。(2 つの数の大小を比べるとき、プラスの数どうしだったら 2 乗して大小を比べてもよいというテクニックを使うのでしたね。) その結果、$\sqrt{5}$ は 2 と 3 の間にある数だということが分かったのです。

このようにして、$\sqrt{5}$ という数の 1 の位は 2 であることがわかりました。ではさらに、$\sqrt{5}$ という数の小数第 1 位を知りたいときはどうすればよいでしょう。10 分待ちます。考えてみてください。

・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・

・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・

はい、10 分たちました。自分でちゃんと考えてくれましたか？ $\sqrt{5}$ という数の 1 の位をどうやって発見したか理解できている人はもうおわかりですね。そうです、小数第 1 位を

知りたいのですから、$\sqrt{5}$ と 2.1 ではどっちが大きいのか調べたり、$\sqrt{5}$ と 2.2 でどっちが大きいかの調べたり、$\sqrt{5}$ と 2.3 ではどっちが大きいのか調べたり、$\sqrt{5}$ と 2.4 ではどっちが大きいのか調べたり、$\sqrt{5}$ と 2.5 ではどっちが大きいのか調べたり $\cdots$ としていけばよいですよね。もちろんそのとき、「2 乗して比べる」というテクニックを使います。では調べてみることにします。

$\sqrt{5}$ と 2.1 はどっちが大きい？　$\sqrt{5}$ と 2.1 はどちらもプラスの数なのでそれぞれ 2 乗して比べることにします。2 乗してみると、

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$$

$$(2.1)^2 = 4.41$$

$$\begin{array}{rrrr} & & 2. & 1 \\ \times) & & 2. & 1 \\ \hline & & 2 & 1 \\ & 4 & 2 & \\ \hline & 4. & 4 & 1 \end{array}$$

となります。（めんどうですが、2.1 の 2 乗は右のように筆算で計算することになります。）

5 のほうが 4.41 より大きいわけですから、2 乗する前の $\sqrt{5}$ と 2.1 では、$\sqrt{5}$ のほうが大きいということになります。つまり、

$$2.1 < \sqrt{5}$$

ということです。

$\sqrt{5}$ と 2.2 はどっちが大きい？　$\sqrt{5}$ と 2.2 はどちらもプラスの数なのでそれぞれ 2 乗して比べることにします。2 乗してみると、

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$$

$$(2.2)^2 = 4.84$$

$$\begin{array}{rrrr} & & 2. & 2 \\ \times) & & 2. & 2 \\ \hline & & 4 & 4 \\ & 4 & 4 & \\ \hline & 4. & 8 & 4 \end{array}$$

となります。（めんどうですが、2.2 の 2 乗は右のように筆算で計算することになります。）

5 のほうが 4.84 より大きいわけですから、2 乗する前の $\sqrt{5}$ と 2.2 では、$\sqrt{5}$ のほうが大きいということになります。つまり、

$$2.2 < \sqrt{5}$$

ということです。

$\sqrt{5}$ と 2.3 はどっちが大きい？ $\sqrt{5}$ と 2.2 はどちらもプラスの数なのでそれぞれ 2 乗して比べることにします。2 乗してみると、

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$$

$$(2.3)^2 = 5.29$$

$$\begin{array}{r} 2.3 \\ \times)\ 2.3 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 5.29 \end{array}$$

となります。（めんどうですが、2.3 の 2 乗は右のように筆算で計算することになります。）

5 のほうが 5.29 より小さいわけですから、2 乗する前の $\sqrt{5}$ と 2.3 では、$\sqrt{5}$ のほうが小さいということになります。つまり、

$$\sqrt{5} < 2.3$$

ということです。

これでケリがつきましたね。$\sqrt{5}$ という数の小数第 1 位が分かったはずです。$\sqrt{5}$ は 2.2 よりは大きく 2.3 よりは小さいのですから、

$$\sqrt{5} = 2.2\square\square\cdots$$

であることになりますね。

このように考えていけば、さらに $\sqrt{5}$ という数の小数第 2 位、小数第 3 位 $\cdots$ を調べていくこともできますね。それはあなたにまかせることにします。

問 14. 次の問に答えなさい。

(1) $\sqrt{2}$ という数のおよその値を小数第 1 位まで調べなさい。

(2) $\sqrt{3}$ という数のおよその値を小数第 2 位まで調べなさい。

答えを見る

1.5　素因数分解

本題に入る前に、いくつか言葉のおさらいをします。あなたは「自然数」という言葉や「整数」という言葉の意味を正しく覚えていますか？

おさらい　「自然数」、「整数」とは

自然数 とは、人間が物を数えるときに使う数のことでしたね。

普通、物を数えるときには、「1 個、2 個、3 個、4 個 $\cdots$」と数えますね。ですから、1、2、3、4、5、6、7 $\cdots$ のような数を自然数と呼んでいるわけです。

少し補足をしておきましょう。原始時代の人のことを想像してみてください。ほら穴に住み、狩をして生活を支えていたころの人類を思い浮かべてほしいのです。彼らは、どんな数を知っていたのでしょうか。あなたとは違い、学校で小数や分数を習ったりはしません。当然マイナスの数とか、$\sqrt{2}$ のような数も知らなかったでしょう。では、彼らは数というものを何も知らなかったのでしょうか？

今となってははっきりしたことは言えませんが、きっと、狩をしてえられた獲物を数えるとか、人の数を数えるというように、ものを数えるということはしていたのではないでしょうか。そう考えると、人類が出会った最初の数は「物を数えるときに使う数」だということになりそうですね。人が生きていくうえで、「物を数える」ということは極めて自然な行為です。そのようにして自然に使うようになった数を今私たちは「自然数」と呼ぶことにしているのです。

このような、物を数えるときに自然に使う 1、2、3、4、5、6、7 $\cdots$ のような数に

比べると、0 という数はかなり高級で気のきいた数です。いま、高度に文明の発達している時代に生きているあなたは、0 という数は「何にもない」という意味の数であることを知っていますよね。でも、ちょっと想像してみてください。原始時代の人は、物が何もないときに、わざわざ、「0 個」なんて数えたでしょうか？物が何もないときには「数える」なんてことはしないですよね。（あなただって、物が何もないなら、普通は数える気にならないですよね。）ですから、原始時代の人は 0 なんて数は知らなかったのだと思われます。ちなみに、0 という数は、原始時代からはるか後に、インドの人によって発見されたといわれています。

整数とは、次のような数のことです。

$$\cdots\ -7、-6、-5、-4、-3、-2、-1、0、1、2、3、4\ \cdots$$

整数にはプラスの数だけではなく、0 やマイナスの数も含まれていることに注意してくださいね。

おさらいおわり

では本題に入りましょう。

これから当面（この「素因数分解」という単元が終わるまで）、扱う数は自然数だけにします。ですから、分数とか、$\sqrt{\ }$ のマークのついた数は出てきません。自然数だけの世界の話を学ぶわけです。

ではまず、あなたに 1 つ専門用語を学んでもらうことにします。

素数ってなに？

1 とその数（つまり自分自身）以外では割り切れない数を**素数**といいます。ただし、1 は素数の仲間には入れません。

「どういうこと？」って思った人のために、いくつか例を使って説明することにします。

例 8　この数って素数なの？

(1)　7 は素数でしょうか？

7 という数を順番に 1、2、3、4 $\cdots$ でそれぞれ割ってみて、割り切れるかどうか調べます。

- $7 \div 1 = 7$ となります。つまり、7 は 1 で割り切れます。
- $7 \div 2 = 3$ あまり 1 となります。つまり、7 は 2 で割り切れません。
- $7 \div 3 = 2$ あまり 1 となります。つまり、7 は 3 で割り切れません。
- $7 \div 4 = 1$ あまり 3 となります。つまり、7 は 4 で割り切れません。
- $7 \div 5 = 1$ あまり 2 となります。つまり、7 は 5 で割り切れません。
- $7 \div 6 = 1$ あまり 1 となります。つまり、7 は 6 で割り切れません。
- $7 \div 7 = 1$ となります。つまり、7 は 7 で割り切れます。

以上の調査で、7 は「1」と「自分自身である 7」では割り切れますが、それら以外の数では割り切れないということが分かりました。ですから、7 は素数ですね。

(2)　6 は素数でしょうか？

6 という数を順番に 1、2、3、4 $\cdots$ でそれぞれ割ってみて、割り切れるかどうか調べます。

- $6 \div 1 = 6$ となります。つまり、6 は 1 で割り切れます。
- $6 \div 2 = 3$ となります。つまり、6 は 2 で割り切れます。

これでケリがつきました。素数とは、「1」と「自分自身」以外では割り切れない数のことですよね。でも今、6 は「1」でもなく「自分自身である 6」でもない 2 で割り切れてしまいました。ですから、7 は素数ではありませんね。

問 15. 次の問に答えなさい。

(1) 1 は素数ですか？　(2) 2 は素数ですか？　(3) 3 は素数ですか？

(4) 4 は素数ですか？　(5) 5 は素数ですか？　(6) 8 は素数ですか？

(7) 9 は素数ですか？　(8) 10 は素数ですか？　(9) 11 は素数ですか？
(10) 12 は素数ですか？　(11) 13 は素数ですか？　(12) 14 は素数ですか？

答えを見る

問 16. 50 より小さい自然数の中から素数を全部見つけなさい。 答えを見る

さて、素数とはどんな数なのかわかってもらえたでしょうか。もし、あなたが、「約数」という言葉の意味を知っているとしたら、「素数」という言葉の意味を次のように言いなおすこともできますね。

「素数とは、1 とその数（つまり自分自身) 以外には約数がない数のことである。」

次に、「自然数」の世界を、「かけ算」と「わり算」の立場から眺めてみようと思います。いきなり、重要な事実を紹介してしまいましょう。

重要な事実：素数がもとになって自然数の世界ができている

1 以外のどんな自然数も、適切な素数を必要な個数だけ用意してそれらをかけるとつくることができる。

「何を言っているのかわからない」なんていっている人もいるかもしれませんね。例を使って説明することにしましょう。

例 9　この数、どんな素数をかければ作れるのかな？

(1)　196 という自然数のことを考えてみます。

実は、 196 は 2 という素数を 2 個、 7 という素数を 2 個かけると作ることができます。

さて、これ、本当でしょうか？

まず、念のため確認しておきますが、2 や 7 は素数ですよね。では、2 という素数

を 2 個、 7 という素数を 2 個かけて計算してみます。すると、例えば、

$$2 \times 2 \times 7 \times 7 = 4 \times 49 = 196$$

のように計算できますね。ちゃんと 196 になりました。

このように、196 という自然数は適切な素数を必要な個数かけると作ることができるわけです。

(2) 30 という自然数のことを考えてみます。

実は、 30 は 2 という素数を 1 個、 3 という素数を 1 個、 5 という素数を 1 個かけると作ることができます。

さて、これ、本当でしょうか？

まず、念のため確認しておきますが、2 や 3 や 5 は素数ですよね。では、2 という素数を 1 個、 3 という素数を 1 個、5 という素数を 1 個かけて計算してみます。すると、例えば、

$$2 \times 3 \times 5 = 6 \times 5 = 30$$

のように計算できますね。ちゃんと 30 になりました。

このように、30 という自然数は適切な素数を必要な個数かけると作ることができるわけです。

(3) 3780 という自然数のことを考えてみます。

実は、 3780 は 2 という素数を 2 個、 3 という素数を 3 個、 5 という素数を 1 個、5 という素数を 1 個かけると作ることができます。

さて、これ、本当でしょうか？

まず、念のため確認しておきますが、2 や 3 や 5 や 7 は素数ですよね。では、2 という素数を 2 個、 3 という素数を 3 個、5 という素数を 1 個、7 という素数を 1 個

かけて計算してみます。つまり、

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$$

を計算するわけです。計算はあなたにおまかせします。ちゃんと計算してくださいね。どうですか、ちゃんと 3780 になりましたか。3780 にならなかった人は、計算ミスをしたはずです。ミスをした人は、もう一度丁寧に計算してください。ちゃんと 3780 になるのを確認できた人だけ次を読みましょう。

3780 という自然数は適切な素数を必要な個数かけると作ることができるわけです。

以上、たった 3 つの自然数について考えただけですが、どういうことなのかわかってもらえたと思います。1 以外のどんな自然数も、適切な素数を必要な個数かけてできているのです。ですから、かけ算の立場から見ると、素数は「もとになる部品」の役割を果たしているのです。

さっきの例では、いろいろな自然数が、どんな素数をかけてできているのか初めに教えてしまっていましたね。ではこれから、様々な自然数が、どんな素数をかけてできているのかあなたが見つける練習をしましょう。

例 10　この自然数って、どんな素数を何個かけてできているのかな？

(1)　28 はどんな素数を何個かけてできているのでしょうか。

あまり難しく考えずに、「思いつき」に頼って考えてみます。

たしか、九九（くく) で、「しひちにじゅうはち」って習いましたよね。ですから、28 は 4 と 7 をかけてできているはずですね。つまり、

$$28 = 4 \times 7$$

となっているわけです。

ところで、7 は素数ですが 4 は素数ではありませんね。ですからもっと悩む必要があります。素数ではない「4」ですが、九九（くく）で「ににんがし」って習いまし

たよね。つまり、4 って 2×2 と同じなんですよね。ということは、さっきの式の、4 の所を 2×2 に取り替えることができます。そうすると、

$$28 = 4 \times 7 = 2 \times 2 \times 7$$

となりますね。

これで 2 と 7 しか出てこなくなりました。2 も 7 も素数なのでこれで出来上がりですね。以上の調査から、

28 は 2 という素数を 2 個、7 という素数を 1 個かけてできている

ということがわかりました。

(2)　42 はどんな素数を何個かけてできているのでしょうか。

今度もあまり難しく考えずに、「思いつき」に頼って考えてみます。

たしか、九九（くく) で、「ろくひちしじゅうに」って習いましたよね。ですから、42 は 6 と 7 をかけてできているはずですね。つまり、

$$42 = 6 \times 7$$

となっているわけです。

ところで、7 は素数ですが 6 は素数ではありませんね。ですからもっと悩む必要があります。素数ではない「4」ですが、九九（くく）で「にさんがろく」って習いましたよね。つまり、6 って 2×3 と同じなんですよね。ということは、さっきの式の、6 の所を 2×3 に取り替えることができます。そうすると、

$$42 = 6 \times 7 = 2 \times 3 \times 7$$

となりますね。

これで 2 と 3 と 7 しか出てこなくなりました。2 も 3 も 7 も素数なのでこれで出来上がりですね。以上の調査から、

42 は 2 という素数を 1 個、3 という素数を 1 個、7 という素数を 1 個かけてできている

ということがわかりました。

(3)　140 はどんな素数を何個かけてできているのでしょうか。

今度もあまり難しく考えずに、「思いつき」に頼って考えてみてもよいのですが、そろそろあなたに「技」を身につけて欲しいので、「ある方針」に従って考えることにします。その方針とは、

「140 を小さい素数から順にわってみて、割り切れたら次へ進む」

という方針です。

頭の中が「？？」となった人もいるかも知れませんね。実際にやって説明することにします。

140 を小さい素数から順にわっていくわけですが、1 番小さい素数って「2」ですよね。というわけで、140 が「2」で割り切れるか試します。$140 \div 2 = 70$ なので、

$$140 = 2 \times 70$$

となっていることがわかります。140 が「2」という素数で割り切れたので次へ進みます。

次は「今のわりざんの答えになっている数」に対して、同じことを試していくのです。つまり、今のわり算では、わり算の答えは 70 でしたから、70 という数を小さい素数から順に割っていき、割り切れたらまた次へ進むのです。ではやってみます。一番小さい素数は「2」ですから、70 が「2」で割り切れるか試します。$70 \div 2 = 35$ なので、70 を 2×35 に取り替えることができます。すると、

$$140 = 2 \times 70 = 2 \times 2 \times 35$$

となっていることがわかります。70 が「2」という素数で割り切れたので次へ進みます。

次も「今のわりざんの答えになっている数」に対して、同じことを試していくのです。つまり、今のわり算では、わり算の答えは 35 でしたから、35 という数を小さい素数から順に割っていき、割り切れたらまた次へ進むのです。ではやってみます。一番小さい素数は「2」ですから、35 が「2」で割り切れるか試します。これ、割り切れれないですよね。割り切れなかったので次に小さい素数である「3」で割り切れるか試しますがやはり割り切れませんよね。割り切れなかったので次に小さい素数である「5」で割り切れるか試します．すると、$35 \div 5 = 7$ なので、35 を 5×7 に取り替えることができます。すると、

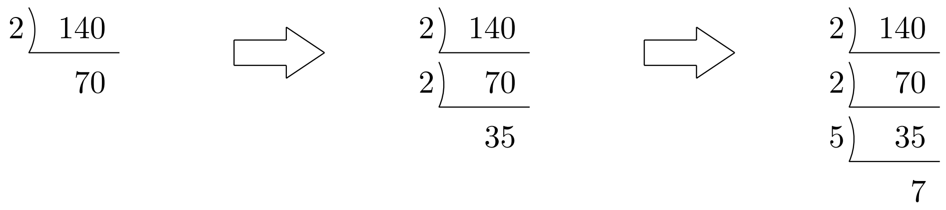
$$140 = 2 \times 70 = 2 \times 2 \times 35 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$$

となっていることがわかります。35 が「5」という素数で割り切れたので次へ進みます。次も「今のわりざんの答えになっている数」に対して、同じことを試していくのです。つまり、今のわり算では、わり算の答えは 7 でしたから、7 という数を小さい素数から順に割っていき、割り切れたらまた次へ進むのです。しかし実はもうそんなことをする必要はありません。7 は素数だからです。実際、さっきの式を見れば、もうすでに 140 という数が素数だけをかけてできた式であらわされています。以上の調査から、

> 140 は 2 という素数を 2 個、5 という素数を 1 個、7 という素数を 1 個かけてできている

ということがわかりました。

どうですか？「小さい素数から順にわっていく」という意味、わかってもらえたでしょうか。この計算法をもう一度次にまとめておきます。このような計算をするとき、次のような「縦書きのわり算のマークをひっくり返したマーク」を使って計算していくと便利なのです。



140 を小さい素数で割っていく。するとまず 2 で割り切れた。わり算の答えである 70 は素数でないから次へ進む。

70 を小さい素数で割っていく。するとまず 2 で割り切れた。わり算の答えである 35 は素数でないから次へ進む。

35 を小さい素数で割っていく。するとまず 5 で割り切れた。わり算の答えである 7 は素数なのでこれで終わり。

このような計算をすると、

$$140 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7$$

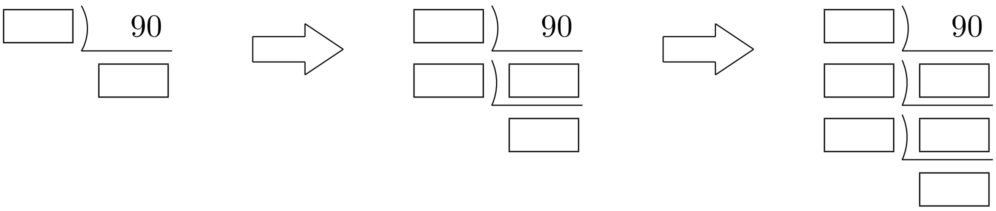
となっていること、つまり、

> 140 は 2 という素数を 2 個、5 という素数を 1 個、7 という素数を 1 個かけてできている

ということがわかるのです。

問 17. 例 10 の説明がきちんと理解できた人のための問題です。

90 はどんな素数を何個かけてできているのか調べるために、次のような計算をします。空欄に正しい数を書きなさい。



この計算から、

$$90 = \boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{}$$

であること、つまり、

90 は $\boxed{}$ という素数を $\boxed{}$ 個、$\boxed{}$ という素数を $\boxed{}$ 個、
$\boxed{}$ という素数を $\boxed{}$ 個かけてできている

ということがわかりました。 答えを見る

ここまで、ある自然数がどんな素数を何個かけてできているのか調べる練習をしてきました。ではここで、あなたに専門用語を 1 つ覚えてもらうことにします。

素因数分解ってなに？

ある自然数を**素因数分解する**というのは、その自然数がどんな素数を何個かけてできているのか調べることです。また、そのときに出てくる素数を、その自然数の**素因数**といいます。

例 11　例 10 に出てきた数の素因数分解

(1)　28 の素因数分解

例 10 で、

28 は 2 という素数を 2 個、7 という素数を 1 個かけてできている

ということを調べましたね。ですから 28 の素因数分解は、

$$28 = 2 \times 2 \times 7$$

ということです。「ナントカ乗」を使うのが好きな人は、

$$28 = 2^2 \times 7$$

と答えてもかまいません。

(2)　42 の素因数分解

例 10 で、

42 は 2 という素数を 1 個、3 という素数を 1 個、7 という素数を 1 個かけてできている

ということを調べましたね。ですから 42 の素因数分解は、

$$42 = 2 \times 3 \times 7$$

ということです。

(3)　140 の素因数分解

例 10 で、

140 は 2 という素数を 2 個、5 という素数を 1 個、7 という素数を 1 個かけてできている

ということを調べましたね。ですから 140 の素因数分解は、

$$140 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7$$

ということです。「ナントカ乗」を使うのが好きな人は、

$$140 = 2^3 \times 5 \times 7$$

と答えてもかまいません。

問 18. 次の数を素因数分解しなさい。

(1) 50	(2) 66	(3) 52	(4) 121	(5) 84
(6) 143	(7) 350	(8) 693	(9) 245	(10) 243

答えを見る

知っていると役に立つ豆知識

(1) ある自然数の 1 の位が偶数だったら、その自然数は 2 で割り切れます。

(2) ある自然数の各位の数字を全部たしてできる数が 3 で割り切れれば、もとの自然数自身も 3 で割り切れます。

例えば、513 という自然数のことを考えてみます。各位の数字 5、1、3 をたしてみると 9 ですよね。そして 9 は 3 で割り切れますよね。不思議なことに、こんなときはもとの自然数も 3 で割り切れるのです。本当ですよ。$513 \div 3$ を計算してみてください。ちゃんと割り切れるでしょ。($513 \div 3$ の答えは 171 あまり 0 ですよね。)

(3) ある自然数の下 2 ケタ、つまり十の位と一の位だけを見てできる数が 4 で割り切れれば、もとの自然数自身も 4 で割り切れます。

例えば、524 という自然数のことを考えてみます。下 2 ケタだけ見てできる数は 24 ですよね。そして 24 は 4 で割り切れますよね。不思議なことに、こんなときはもとの自然数も 4 で割り切れるのです。本当ですよ。$524 \div 4$ を計算してみてください。ちゃんと割り切れるでしょ。($524 \div 4$ の答えは 131 あまり 0 ですよね。)

(4) ある自然数の下 1 ケタ、つまり一の位が 0 または 5 であれば、その自然数は 5 で割り切れます。

例えば、8215 という自然数のことを考えてみます。下 1 ケタだけ見てできる数は 5 ですよね。不思議なことに、こんなときはもとの自然数も 5 で割り切れるのです。本当ですよ。$8215 \div 5$ を計算してみてください。ちゃんと割り切れるでしょ。($8245 \div 5$ の答えは 1643 あまり 0 ですよね。)

これらのことを知っていると、素因数分解や平方根の計算をするときに助かることがあります。

ではこれから、素因数分解を利用して少し難しい問題をいくつか解くことにしましょう。

例題 3　(大きい数の自然数の平方根を見つけるときに、素因数分解が役に立つという話)

324 の平方根を求めなさい。

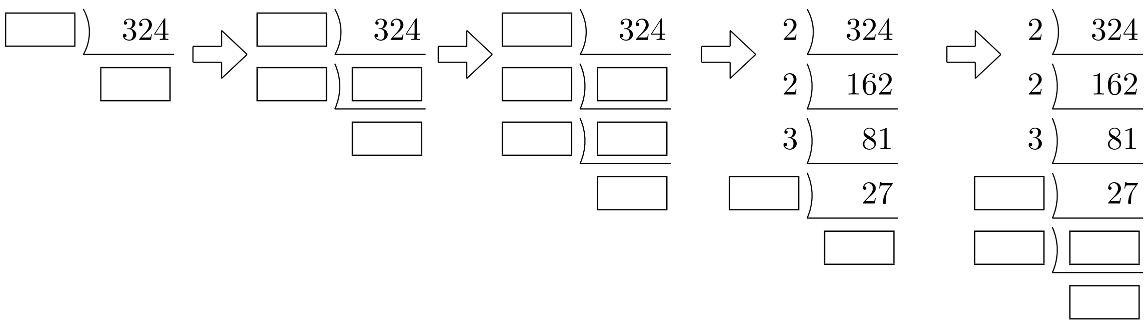
解答

久しぶりに、「平方根」という言葉が出てきました。「平方根って何だったか覚えていますよね。忘れてしまった人は、このテキストを初めから全部復習してくださいね。そのまま先を読んでも理解できないかもしれません。では、ちゃんと「平方根」ってなんだったか覚えている人だけ先に進むことにしましょう。

324 の平方根って、2 乗すると 324 になる数のことですよね。というわけで、これから、2 乗すると 324 になる数を全て見つけなくてはいけません。

324 って、結構大きい数ですよね。2 乗して 49 になる数とかだったらすぐに見つけられますよね。（もちろん 7 と -7 ですよ。）でも、324 の場合、結構大きい数なので、そんな簡単に見つけられないですよね。そんなときに素因数分解が役に立つのです。どういうことかこれから説明します。

まず、324 を素因数分解してみます。次の穴埋めをやってみてください。



間違わずに計算できた人は、この計算から、324 の素因数分解は、

$$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

となることがわかったはずです。つまり、

「324 は 2 という素数を 2 個、3 という素数を 4 個かけてできている」

ということがわかりました。

では次に、素因数分解して出てきたそれぞれの素数の個数を半分にしてみましょう。（今の場合は、2 という素数は 1 個、3 という素数は 2 個にすればよいですね。）そしてそれらを全部かけ算して計算してください。すると、

$$2 \times 3 \times 3 = 18$$

となりますよね。実は、今出てきた 18 は 324 の平方根になっているのです。そして、324 のもう 1 つの平方根は -18 なのです。

念のため 18 と -18 が 324 の平方根になっているということを計算で確かめてください。つまり、18 と -18 は 2 乗すると本当に 324 になるのか自分で計算して確かめてください。

問 19. 次の数の平方根を求めなさい。

(1) 9　(2) 16　(3) 25　(4) 36　(5) 144

(6) 225　(7) 784　(8) 2　(9) 1764　(10) 121

答えを見る

例題 4　（何かある自然数の 2 乗になっている数の特徴を考えてみよう）

63 という自然数についてこれから考えることにします。以下の問に答えなさい。

(1) 63 は何かある自然数の 2 乗になっていますか？（つまり、何かある自然数を 2 乗して 63 を作ることはできるのでしょうか？）

(2) (1) で「なっていない」と答えた人への問題です。63 に何かある自然数をかけて別の自然数を作ることにします。そのようにしてできる自然数が、何かある自然数の 2 乗になっているようにできるでしょうか。

解答

(1) 答えをいきなり言ってしまうと、どんな自然数を 2 乗しても 63 にはなりません。本当です。これから証拠を見せます。そのために、1 という自然数から小さい順に 2 乗していくことにします。

1 を 2 乗してみます。すると $1^2 = 1$ となり 63 にはなりません。

2 を 2 乗してみます。すると $2^2 = 4$ となり 63 にはなりません。

3 を 2 乗してみます。すると $3^2 = 9$ となり 63 にはなりません。

4 を 2 乗してみます。すると $4^2 = 16$ となり 63 にはなりません。

5 を 2 乗してみます。すると $5^2 = 25$ となり 63 にはなりません。

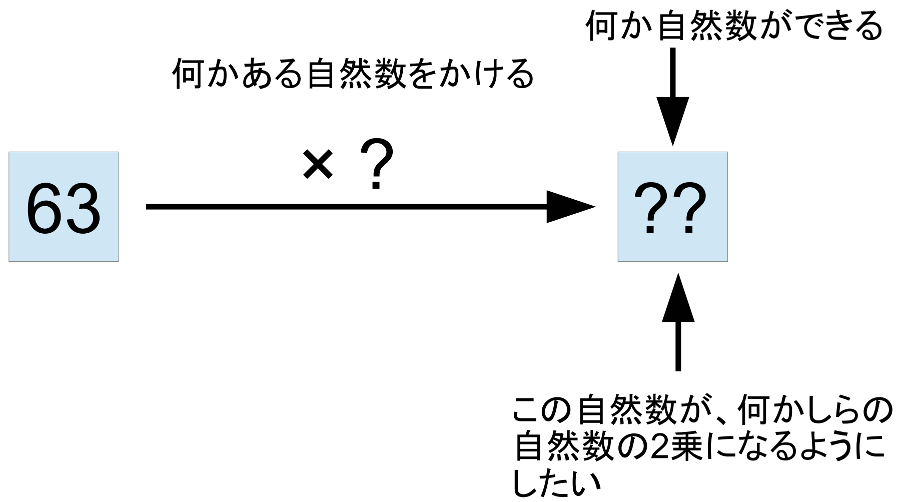
6 を 2 乗してみます。すると $6^2 = 36$ となり 63 にはなりません。

7 を 2 乗してみます。すると $7^2 = 49$ となり 63 にはなりません。

8 を 2 乗してみます。すると $8^2 = 64$ となり 63 にはなりません。

2 乗した結果が 63 より大きくなってしまいました。この先 9、10、11$\cdots$ などを 2 乗していっても、結果はどんどん大きい数になっていくのですから。この先いくら調べていっても 2 乗して 63 になることはありませんね。これで証拠を見せることができました。

(2) (1) をきちんと考えた人は、「63 はある自然数の 2 乗にはなっていない」ということがわかりましたね。というわけで (2) を解くことにしますが、問題の意味はわかっていますか？もう一度問題をよく読んでください。念のため、問題の意味を次に図解しておきます。



問題の意味が正しく理解できた人には答えをいきなり教えてしまいましょう。実は 7 をかけるとよいのです。でも、「本当に 7 でいいの？」と思った人いますよね。そんな人はまともな人です。そんなまともな人のためにこれから本当に 7 でよいのか

確認してみることにします。

右のように、真面目に 63 に 7 をかけてみると 441 ができることがわかるはずです。そして、実は 441 は 21 という数の 2 乗になっているのです。「これまた本当？」って思った人は自分でちゃんと計算して確かめてください。ちゃんと $21^2 = 21 \times 21 = 441$ ってなるでしょ。

$$\begin{array}{rr} & 63 \\ \times) & 7 \\ \hline & 441 \end{array}$$

ですからこの問題の答えは、「7 をかければよい。そうすると 21 の 2 乗になる。」ということです。これ以上説明するのはめんどうなので、これで説明を終わりにしたいのですが、実は深刻なことが 2 つあります。

その 1 つは、「7 という数、どうやって見つけたんだよ。それを教えてくれなければ自分じゃ解けないよ。」ということです。

2 つ目は、「7 のほかに、うまく行く自然数はないの？もしあるんなら、7 だけ答えてもダメじゃん。」ということです。

全くその通りですね。この 2 つの疑問に答えないと、こういう問題を一人で解けるようにはならないですよね。それではまじめに考えることにしましょう。そのために、まずあなたに悩んでもらいたいことがあります。これは非常に重要なことなのです。コレから学んでいく「秘密の仕掛け」が理解できないと 7 を見つけることはできないからです。

あなたに悩んで欲しいこと

1、4、9、16、25、49、64、81、100、121、144、169、196、225、256 はどれも何かしらの自然数の 2 乗になっている数です。そこで次のことを悩んでください。

a. それぞれの数は、どんな数の 2 乗になっているのか調べてください。

b. それぞれの数を素因数分解してください。そして、素因数分解した結果をよく見て、何か特徴があるのか必死に考えてください。つまり、「何かしらの自然数の 2 乗になっている自然数」の素因数分解には、何か特徴があるのか考えてください。

では 1 時間待つことにします。

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

はい、1 時間たちました。まさか 5 分だけ考えてあきらめたりしていませんよね。数学では、「じっくり観察する」ということが大切なんですよ。では、しっかり 1 時間悩んだ人のために説明することにしましょう。

あなたに悩んで欲しいことの答え

a. それぞれ、「1 は 1 の 2 乗」、「4 は 2 の 2 乗」、「9 は 3 の 2 乗」、「16 は 4 の 2 乗」、「25 は 5 の 2 乗」、「36 は 6 の 2 乗」、「49 は 7 の 2 乗」、「64 は 8 の 2 乗」、「81 は 9 の 2 乗」、「100 は 10 の 2 乗」、「121 は 11 の 2 乗」、「144 は 12 の 2 乗」、「169 は 13 の 2 乗」、「196 は 14 の 2 乗」、「225 は 25 の 2 乗」、「256 は 16 の 2 乗」ですよね。

b. 144 と 225 を例にして説明します。

144 と 225 を素因数分解してみます。すると、

$$144 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{2\text{ が 4 個}} \times \underbrace{3 \times 3}_{3\text{ が 2 個}} = 2^4 \times 3^2$$

$$225 = \underbrace{3 \times 3}_{3\text{ が 2 個}} \times \underbrace{5 \times 5}_{5\text{ が 2 個}} = 3^2 \times 5^2$$

となりますよね。（あなたの計算とあっていますか？自分でもちゃんと素因数分解してくださいね。）

ではこの素因数分解の結果をよく観察して、何か特徴がないか考えてみましょう。特に、「素因数分解した結果の中に、同じ素数が何個出てきているか」ということに注目してください。

144 の素因数分解を見ると、2 という素数が 4 個、3 という素数が 2 個出てきています。2 という素数も 3 という素数も偶数個出てきているわけです。

225 の素因数分解を見ると、3 という素数が 2 個、5 という素数が 2 個出てきています。3 という素数も 5 という素数も偶数個出てきているわけです。

あなたが本当にさっき 1 時間悩んだなら、144 と 225 以外の数も素因数分解してあるはずです。その結果をよく見てください。その数の素因数分解を見ても、必ず、その素数も「偶数個」出てきていませんか？つまり、次のようになっているのです。

重要な事実：何かしらの自然数の 2 乗になっている自然数の素因数分解

何かしらの自然数の 2 乗になっている自然数を素因数分解すると、その素因数分解の中に現れるそれぞれの素数の個数は、どの素数も必ず偶数個である。

これは重要なことですから、どうしてこんなことになるのか説明しておきましょう。

例えば 144 ですが、144 って 12 の 2 乗でしたよね。ところで 12 を素因数分解すると、

$$12 = \underbrace{2 \times 2}_{2\text{ が }2\text{ 個}} \times \underbrace{3}_{3\text{ が }1\text{ 個}} = 2^2 \times 3$$

となっているわけです。つまり、12 という数は 2 という素数を 2 個。3 という素数を 1 個かけてできています。今の所、2 は偶数個ですが、3 は奇数個です

ね。しかし、144 のことを考えてみると、144 は 12 を 2 乗してできているのですよね。だとしたら、144 の素因数分解に出てくるそれぞれの素数の個数は、12 の素因数分解に出てくるそれぞれの素数の個数の 2 倍になり、それって必ず偶数個になるってことですよね。実際、144 の素因数分解を 12 の素因数分解をもとにして考えてみると、

$$\begin{aligned}144 &= 12 \times 12\\ &= (\underbrace{2 \times 2}_{2\text{ が }2\text{ 個}} \times \underbrace{3}_{3\text{ が }1\text{ 個}}) \times (\underbrace{2 \times 2}_{2\text{ が }2\text{ 個}} \times \underbrace{3}_{3\text{ が }1\text{ 個}})\\ &= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{2\text{ が }4\text{ 個}} \times \underbrace{3 \times 3}_{3\text{ が }2\text{ 個}}\end{aligned}$$

となるわけです。この計算からも、144 の素因数分解に出てくるそれぞれの素数の個数は、12 の素因数分解に出てくるそれぞれの素数の個数の 2 倍になるため、必ずどの素数も偶数個になるということがわかると思います。

これで、あなたに悩んで欲しいことの説明は終わりにして、本題に戻ります。「あれっ、どんな問題を考えていたっけ？」なんていっていたりしませんよね。「63 に何かある自然数をかけると何かしらの自然数の 2 乗になるらしいけど、何をかければいいの？」って問題でしたね。

この問題は、さっき学んだ重要な事実を活用すると、、次のように解くことができるのです。

まず、63 を素因数分解します。すると、

$$63 = \underbrace{3 \times 3}_{3\text{ が }2\text{ 個}} \times \underbrace{7}_{7\text{ が }1\text{ 個}} = 3^2 \times 7$$

となっていることがわかります。（自分でちゃんと 63 を素因数分解して確かめてくださいね。）この結果を良く見れば、63 は「何かしらの自然数の 2 乗」にはなっていないということがはっきりしますね。だって、重要な事実を思い出してみてください。何かしらの自然数の 2 乗になっている数は素因数分解したときに各素数が

偶数個になっているわけですよね。しかしこの素因数分解の中で 7 は 1 個、つまり奇数個なのです。

ところでこの素因数分解では、3 は偶数個現れています。ということは、もし 63 にある自然数をかけて何かしらの自然数の 2 乗になっている数を作りたければ、63 の素因数分解を見ながら、どの素数も偶数個になるように、たりていない素数ををかければよいですよね。この素因数分解では、3 は偶数個現れています。そして、7 は 1 個なのでしたね。ですから 7 を 1 個かけると 3 も 7 も偶数個になるわけです。これで、「7 という数、どうやって見つけんだよ。」という疑問は解決しましたね。

話はこれで終わりではありません。もう 1 つ疑問がありましたね。それは「7 のほかに、うまく行く自然数はないの？」という疑問です。さっきの「7 という数、どうやって見つけたんだよ。」の説明が理解できている人はもうおわかりですよね。63 の素因数分解を見て、どの素数も偶数個になるようにたりない素数をかけていけば、必ず何かしらの自然数の 2 乗になっている数になるんですよね。だったら例えば、「7 を 3 個かけてもとからあった 1 個の 7 とあわせて合計 4 個にする」とか、「3 もさらに 2 個かけて、もともとあった 2 個の 3 と合わせて合計 4 個にし、7 は 1 個だけかけてもとからあった 1 個の 7 と合わせて合計 2 個にする」とかでもよいわけです。もちろん他に、「2 はもともとないけど 2 を 4 個かけてみる」などいくらでも方法はありますよね。

問 20. 次の問に答えなさい。

(1) 108 にできるだけ小さい自然数をかけて、その結果を何かしらの自然数の 2 乗になっている数にしたいと思います。どんな自然数をかければよいですか？またその結果作られる数は、どんな自然数の 2 乗になっていますか？

(2) 216 をできるだけ小さい自然数でわって、その結果を何かしらの自然数の 2 乗になっている数にしたいと思います。どんな自然数でわればよいですか？またその結果作られる数は、どんな自然数の 2 乗になっていますか？

答えを見る

1.6　数の種類

あなたはこれまで、平方根という言葉や、$\sqrt{\ }$ のマークを学んだおかげであなたは微妙で怪しい数をたくさん知ってしまいました。つまり、あなたの「数の世界」は広がったのです。そこで、あなたが生まれてから今日までに知ってしまった数について整理してみたいと思います。

40 ページの「おさらい」のところで、「自然数」と「整数」という言葉についておさらいしました。忘れてしまった人はもう一度 40 ページを開いて説明を読んで欲しいのですが、念のため、ここでもう一度簡単に説明しておきましょう。

<u>自然数</u> とは、1、2、3、4、5、6、7、8$\cdots$ のような数のことでしたね。

また、

<u>整数</u> とは、$\cdots -4$、-3、-2、-1、0, 1、2、3、4、5、6、7、8$\cdots$ のような数のことでしたね。

もちろんあなたは、「自然数」や整数」ではない数も知っていますよね。例えば、0.71 とか、$\dfrac{3}{5}$ とか、$-\dfrac{13}{4}$ とか、$\sqrt{3}$ とか、$-\sqrt{17}$ とか、0.333$\cdots$ とか、π なんて数も知ってますよね。

ではこれから、このような数も考えに入れて、全ての数を 2 つの種類に分けようと思います。そのためにはまず、次のことに注意してください。

重要な事実：1 つの数でも見かけはいろいろ

どんな数も見かけを色々に変えることができる。

どういうことかわかりますか？これは、あなたは知っているはずのことなのですが、念のため説明しましょう。

例えば $\dfrac{3}{4}$ という数は $\dfrac{6}{8}$ とか $\dfrac{9}{12}$ とか 0.75 などに見かけを変えることができますよね。

また例えば、-0.5 という数は $-\dfrac{1}{2}$ とか $-\dfrac{5}{10}$ などに見かけを変えることができますね。

もう少し他の例もあげることにします。例えば、$-\dfrac{3}{5}$ という数ですが、$\dfrac{-3}{5}$ とか $\dfrac{3}{-5}$ に見かけを変えることができますね。

また例えば、$\sqrt{16}$ という数は 4 に見かけを変えることができますよね。

例を挙げるのはここまでにしておきますが、今いくつかの例で見たように、1 つの数でもいろいろな見かけがあるということに注意しておいてください。

では、数を 2 つの種類に分ける話に入ります。数学では数を「有理数」と呼ばれるものと「無理数」と呼ばれるのものにわけて考えることがあるのです。

ではまず、有理数について説明しましょう。

有理数

2 つの整数 a と b を使って、見かけを $\dfrac{a}{b}$ の形にすることができる数のことを**有理数**と呼びます。もちろん b として 0 を使うことができないのはおわかりですね。（小学校でも、「ゼロぶんのナントカ」という分数はないということを習いましたよね。）

ところでこの説明わかってもらえたでしょうか。「どういうことかよくわからないー」っていう人もいるでしょう。そこで、例を挙げて説明することにしましょう。

例 12　有理数の例

(1) $\dfrac{3}{5}$ という数は有理数です。どうしてなのかというと、$\dfrac{3}{5}$ という数はもう初めから（つまり見かけを変えなくても）、2 つの整数 3 と 5 を使って $\dfrac{a}{b}$ の形になっているからです。

(2) $-\dfrac{7}{4}$ という数は有理数です。どうしてなのか順を追って説明します。まず、$-\dfrac{7}{4}$ という数は見かけを $\dfrac{-7}{4}$ に変えることができますね。そうすると、この数は、2 つの整数 -7 と 4 を使って $\dfrac{a}{b}$ の形になっているわけですね。ですから $-\dfrac{7}{4}$ という数は有理数なのです。

(3) -1.2 という数は有理数です。どうしてなのか順を追って説明します。まず、-1.2

という数は見かけを $\dfrac{-12}{10}$ とか $\dfrac{-6}{5}$ に変えることができますね。例えば見かけを $\dfrac{-6}{5}$ に変えたとしましょう。そうすると、この数は、2 つの整数 -6 と 5 を使って $\dfrac{a}{b}$ の形になっているわけですね。ですから -1.2 という数は有理数なのです。

(4) 8 という数は有理数です。どうしてなのか順を追って説明します。まず、 8 という数は見かけを $\dfrac{8}{1}$ とか $\dfrac{16}{2}$ に変えることができますね。例えば見かけを $\dfrac{8}{1}$ に変えたとしましょう。そうすると、この数は、2 つの整数 8 と 1 を使って $\dfrac{a}{b}$ の形になっているわけですね。ですから 8 という数は有理数なのです。

(5) $\sqrt{16}$ という数は有理数です。どうしてなのか順を追って説明します。まず、 $\sqrt{16}$ という数は見かけを 4 に変えることができますね。そしてさらに、見かけを例えば $\dfrac{4}{1}$ に変えることができますね。そうすると、この数は、2 つの整数 4 と 1 を使って $\dfrac{a}{b}$ の形になっているわけですね。ですから $\sqrt{16}$ という数は有理数なのです。

(6) $0.222\cdots$ という数は有理数です。どうしてなのか順を追って説明します。まず、$0.222\cdots$ という数は見かけを $\dfrac{2}{9}$ に変えることができます。本当ですよ。$2 \div 9$ を計算してみてください。このわり算をしてみると、ちゃんと $0.222\cdots$ になりますから。そうすると、この数は、2 つの整数 2 と 9 を使って $\dfrac{a}{b}$ の形になっているわけですね。ですから $0.222\cdots$ という数は有理数なのです。

では次に、無理数について説明しましょう。

無理数

どんなにがんばっても、絶対に、2 つの整数 a と b を使って、見かけを $\dfrac{a}{b}$ の形にできない数のことを**無理数**と呼びます。（言い換えると、有理数ではない数を無理数と呼んでいることになります。）では例を挙げることにしましょう。

例 13　無理数の例

(1) $\sqrt{2}$ という数は無理数です。

もしかして、「 $\sqrt{2}$ って有理数じゃぁないの？だって $\dfrac{\sqrt{2}}{1}$ って見かけを変えられる

からちゃんと $\dfrac{a}{b}$ の形になるじゃん。」って思った人はいませんか。残念ですがこの考えはダメなのです。$\dfrac{\sqrt{2}}{1}$ という分数では、分母の 1 は整数ですが、分子の $\sqrt{2}$ は整数ではありません。ですから、2 つの整数を使って $\dfrac{a}{b}$ の形にしたことにはならないのです。「でもまだ考える余地があるんじゃないの？今の考えはダメだけど、もっとがんばって考えれば 2 つの整数「ナントカ」と「ほにゃらら」が見つかって、$\sqrt{2}$ の見かけをを、$\dfrac{\text{ほにゃらら}}{\text{ナントカ}}$ に変えれれるかもしれないじゃん。1 回考えてダメだからといってあきらめちゃダメだよ。」と思った人はいませんか。おっしゃるとおりです。もっとがんばれば、もしかするとうまくいくかもしれないですよね。でも、昔の人がさんざん悩んで考えた結果、「$\sqrt{2}$ という数はどんなにがんばっても、絶対に、2 つの整数 a、b を使って $\dfrac{a}{b}$ の形に見かけを変えることはできない。」ということが証明されてしまったのです。ですから、$\sqrt{2}$ は無理数です。（ここでは残念ながらその証明をお見せするわけには行きません。少し難しいですから。）

(2)　円周率と呼ばれている数 π は無理数です。

π って $3.141592\cdots$ という数ですね。この数は、昔の人の努力によって、「どんなにがんばっても、絶対に、2 つの整数 a、b を使って $\dfrac{a}{b}$ の形に見かけを変えることはできない。」ということが証明されてしまったのです。ですから π は無理数です。（ここでは残念ながらその証明をお見せするわけには行きません。かなり難しいですから。）

さて、ここまで数の種類について考え、数を 2 つの種類に分けました。有理数と呼ばれている数の仲間と、無理数と呼ばれている数の仲間に分けてみたのです。では、次の問で、あなた自身の力で有理数と無理数を見分ける練習をしてください。

問 21.　次の数は有理数であるのか無理数であるのか見分けてください。

(1) -8	(2) 5.21	(3) $\sqrt{5}$	(4) $\sqrt{36}$
(5) $-\dfrac{4}{5}$	(6) $-\sqrt{3}$	(7) 2π	(8) $0.333\cdots$

答えを見る

1.7 $\sqrt{}$ のマークのついている数の計算

1.7.1 $\sqrt{}$ のマークのついている数のかけ算とわり算

おさらいの質問

$\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ という数について考えることにします。以下の文の空欄に正しい数や語句を記入してください。

(1) $\sqrt{2}$ とは 2 乗すると $\boxed{}$ になる数のうち、$\boxed{}$ のほうの数のことです。

(2) $\sqrt{3}$ とは 2 乗すると $\boxed{}$ になる数のうち、$\boxed{}$ のほうの数のことです。

おさらいの質問おわり

さて、ここまでは大丈夫ですよね。ではさらに質問です。

質問 ある人が、「2 と 3 をかけると 6 になりますよね。だから $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ をかけると $\sqrt{6}$ になると思うのだけど $\cdots$」と言いました。この人の言っていることは正しいのでしょうか？

さて、あなたの考えはどうでしょうか？まさか、証拠もなく「この人の考えは正しいよ。正しいに決まっているじゃん。」なんて言っていたりしませんか？だって、よく考えてみてくださいね。$\sqrt{2}$ にしても $\sqrt{3}$ にしても $\sqrt{6}$ にしてもかなり微妙で、怪しく、難しい数ですよね。例えば、$\sqrt{2}$ という数ですが、「2 乗すると 2 になる数のうちプラスのほうの数」としか説明できない数ですよね。$\sqrt{3}$ や $\sqrt{6}$ もそんなふうにしか説明できない数ですね。ですから、そんな数どうしをかけ算するとどうなってしまうのか、気楽に答えが言えるわけないですよね。

というわけで、この人の考えが正しいのかどうか次の例題で真剣に考えることにします。

例題 5 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ と $\sqrt{6}$ は同じ数なのかどうか調べてください。ちゃんと証明もすること。

解答

まず、そもそも $\sqrt{6}$ って何なのか思い出してみましょう。$\sqrt{6}$ とは、「2 乗すると 6 になる数のうちプラスのほうの数」でしたね。つまり、

- 2 乗すると 6 になる。
- プラスの数である。

という 2 つの条件のとおりになっている数が $\sqrt{6}$ なのですね。

ところで今ここに、「正体のよくわからない数」があるとします。そして、あなたは、この数が $\sqrt{6}$ と同じ数なのかどうか悩んでいるとします。でも、あなたは、$\sqrt{6}$ とは、「2 乗すると 6 になる数のうちプラスのほうの数」、つまり、

- 2 乗すると 6 になる。
- プラスの数である。

という 2 つの条件のとおりになっている数であるということを知っているわけです。だったら、この「正体のよくわからない数」が $\sqrt{6}$ と同じ数なのかどうか判定するには、「その数は 2 乗すると 6 になるのか」ということと、「その数はプラスの数なのか」ということを調べてみればよいですね。もし、この「正体のよくわからない数」が、この 2 つの条件をクリアするなら、「正体のわからない数」の正体は $\sqrt{6}$ であるということになりますよね。つまり、$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ という数がこの 2 つの条件をクリアできれば、$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ と $\sqrt{6}$ は同じ数であると断言できるわけです。では調べてみることにしましょう。

- まず、$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ を 2 乗すると 6 になるかどうか調べます。

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2} \times \sqrt{3}\right)^2 &= \left(\sqrt{2} \times \sqrt{3}\right) \times \left(\sqrt{2} \times \sqrt{3}\right) \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^2 \times \left(\sqrt{3}\right)^2 \\ &= 2 \times 3 \\ &= 6\end{aligned}$$

この計算、大丈夫ですよね。というわけで、めでたく $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ を 2 乗すると 6 に

なるということがわかりました。

- 次は、$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ という数はプラスの数なのか調べます。そこで、$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ の中にある $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ の正体を思い出すことにします。

  たしか、$\sqrt{2}$ ってそもそも、「2 乗すると 2 になる数のうちプラスのほうの数」ですよね。だったら当然、$\sqrt{2}$ はプラスの数ですね。

  同じように考えると、$\sqrt{3}$ はプラスの数ということがわかりますね。

  ところで、プラスの数とプラスの数をかけると必ずプラスの数ができるのですよね。ですから、$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ という数はプラスの数ということになりますね。

これでめでたく、$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ は

- 2 乗すると 6 になる。
- プラスの数である。

という 2 つの条件のとおりになっている数であることがわかりました。つまり、$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ と $\sqrt{6}$ は同じ数であることが証明されたのです。

問 22. 例題 5 がきちんと理解できた人のための問題です。

例題 5 の解答と同じように考えて、$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ と $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ は同じ数であるということを証明しなさい。

答えを見る

例題 5 と問 22 がきちんと理解できた人は、一般に次のことが成り立っているということが想像できると思います。

重要な事実：$\sqrt{\ }$ のマークの入っている数のかけ算とわり算

a と b は両方ともプラスの数とします。このとき、

① $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ と $\sqrt{ab}$ は同じ数です。

② $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ と $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ は同じ数です。（ただし、この場合、b は 0 ではいけません。）

本当はこの「重要な事実」をきちんと証明するべきですが、例題 5 や問 22 と全く同じ

ようにして証明ができるので、あなたにおまかせします。

それでは、この「重要な事実」をいろいろな計算に役立ててみようと思います。

例題 6　次の式を計算して、見かけをできるだけマシにしなさい。

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$　(2) $\sqrt{3}\times\sqrt{5}$　(3) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$　(4) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{8}}$

解答

(1) この例題の前に学んだ「重要な事実の①」によると $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$ と $\sqrt{3\times 12}$ は同じ数ですね。つまり、

$$\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{3\times 12}$$

と見かけを変えることができます。ところで、3×12 って 36 になるのですから、さらに、

$$\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{3\times 12}=\sqrt{36}$$

となります。ところで $\sqrt{36}$ って「2 乗すると 36 になる数のうちのプラスのほうの数」なのですよね。ですから、はっきり言って $\sqrt{36}$ って 6 のことですね。というわけで、

$$\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{3\times 12}=\sqrt{36}=6$$

と見かけを変えることができるわけです。

(2) (1) の解答が理解できた人にはもうくどい説明は必要ないでしょう。あっさり計算をお見せします。次のように見かけを変えていくことができます。

$$\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{3\times 5}=\sqrt{15}$$

これでかなり見かけがマシになりましたね。

(3) この例題の前に学んだ「重要な事実の②」によると $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$ と $\sqrt{\dfrac{125}{5}}$ は同じ数ですね。つまり、

$$\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{125}{5}}$$

と見かけを変えることができます。ところで、$\dfrac{125}{5}$ って 25 と同じですよね。ですから、さらに、

$$\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = \sqrt{25}$$

ところで $\sqrt{25}$ って「2 乗すると 25 になる数のうちのプラスのほうの数」なのですよね。ですから、はっきり言って $\sqrt{25}$ って 5 のことですね。というわけで、

$$\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = \sqrt{25} = 5$$

と見かけを変えることができるわけです。

(4) (3) の解答が理解できた人にはもうくどい説明は必要ないでしょう。あっさり計算をお見せします。次のように見かけを変えていくことができます。

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{12}{8}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

これでかなり見かけがマシになりましたね。

問 23. 次の数の見かけをできるだけマシにしなさい。

(1) $\sqrt{6} \times \sqrt{7}$　(2) $\sqrt{18} \times \sqrt{2}$　(3) $\sqrt{30} \div \sqrt{5}$

(4) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$　(5) $\sqrt{80} \div \left(-\sqrt{5}\right)$　(6) $\left(-\sqrt{2}\right) \times \sqrt{8}$

答えを見る

次の話に進む前におさらいをします。

おさらいの質問

次の数を $\sqrt{\ }$ のマークを使ってくどく見かけを変えてください。

(1) 2　(2) 3　(3) 4　(4) 5

答え

きっと大丈夫だったと思いますが、念のために答えを書いておきます。

(1) $2=\sqrt{4}$　(2) $3=\sqrt{9}$　(3) $4=\sqrt{16}$　(4) $5=\sqrt{25}$

のように見かけをくどくできますね。

おさらいの質問と答えおわり

では話を進めます。

例題 7　（$\square\sqrt{\triangle}$ という数の見かけを $\sqrt{\bigstar}$ という形に変える話）

$7\sqrt{2}$ という数について考えることにします。この数は、もちろん、7 という数と $\sqrt{2}$ という数をかけてできている数ですね。ところで、$7\sqrt{2}$ という数の見かけを $\sqrt{\bigstar}$ という形に変えることはできるでしょうか。

解答

この例題の前の「おさらい」をきちんと考えた人は、7 と $\sqrt{49}$ が同じ数であるのはおわかりですね。ということは、

$$7\sqrt{2}=\sqrt{49}\times\sqrt{2}$$

と見かけを変えることができますね。ここで、「重要な事実の①」を思い出してみましょう。すると、$\sqrt{49}\times\sqrt{2}$ と $\sqrt{49\times 2}$ は同じ数であるということがわかりますね。ですから、

$$7\sqrt{2}=\sqrt{49}\times\sqrt{2}=\sqrt{49\times 2}=\sqrt{98}$$

と見かけを変えることができるわけです。これで問題の要求どおりになりました。

問 24. 次の数の見かけを $\sqrt{\bigstar}$ という形に変えなさい。

(1) $3\sqrt{2}$　(2) $2\sqrt{7}$　(3) $5\sqrt{3}$　(4) $6\sqrt{5}$

答えを見る

例題 7 では、$\square\sqrt{\triangle}$ という数の見かけを $\sqrt{\bigstar}$ という形に変える練習をしました。こんなことができるということは、逆に、$\sqrt{\bigstar}$ という数の見かけを $\square\sqrt{\triangle}$ という形に変える

こともできることもあるかもしれませんね。次の例題で練習することにしましょう。

例題 8 （$\sqrt{★}$ という数の見かけを $\square\sqrt{\triangle}$ という形に変える話）

次の数の見かけを $\square\sqrt{\triangle}$ という形に変えることができるかどうか考えなさい。

(1) $\sqrt{18}$ (2) $\sqrt{108}$ (3) $\sqrt{7200}$ (4) $\sqrt{120}$

解答

(1) まず、$\sqrt{18}$ という数の $\sqrt{\ }$ のマークの中に書いてある 18 について少し分析してみます。18 って、例えば 6 と 3 をかけてできていると考えられますね。また例えば、18 って 9 と 2 をかけてできていると考えてもよいですね。あっ、いいことに気付きました。18 って 9 と 2 をかけてできていると考えるととても都合が良さそうです。特に 9 って数が「なかなかいけている数」ですよね。あなたもそう思いませんか？何？まだ話が見えないですって？では説明しましょう。今、$18 = 9 \times 2$ って思うことにしたのですよね。ですから、

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2}$$

ということですね。ここで「重要な事実の①」を思い出してみましょう。すると、$\sqrt{9 \times 2}$ と $\sqrt{9} \times \sqrt{2}$ って同じ数ですよね。ですから、

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2}$$

とできますね。ラッキーなことに $\sqrt{9}$ が出てきました。（というより、$\sqrt{9}$ が出てくるように、$18 = 9 \times 2$ と思うことにしたんですけどね。）どうラッキーなのかというと、$\sqrt{9}$ って 3 同じ数ですよね。ということは、

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

とできるわけです。これで目的は達成できましたね。

(2) (1) のまねをして、$\sqrt{\ }$ のマークの中に書いてある 108 のことだけをまず考えてみ

ましょう。つまり、108 は何と何をかけてできているのか分析するわけです。(1) の 18 と比べると、108 は大きい数なのでちょっと難しいですね。でも、がんばってみると「108 は 2 と 54 をかけてできている」とか、「108 は 3 と 36 をかけてできている」とか、「108 は 4 と 27 をかけてできている」ということがわかりますね。そうすると、あっ、この中に、いい線いってるのがあるじゃないですか。「108 は 3 と 36 をかけてできている」というやつと、「108 は 4 と 27 をかけてできている」というやつのことですよ。あなたもそう思いませんか？だって、「108 は 3 と 36 をかけてできている」というやつでは 36 という数がすばらしいですし、「108 は 4 と 27 をかけてできている」というやつでは 4 という数がすばらしいですよね。というわけで、2 つもよいアイデアが出てきたのですが、どちらにしましょうか。まぁ、こういうときは両方とも試してみましょう。

初めに「108 は 3 と 36 をかけてできている」というアイデアを使ってみます。するとまず、

$$\sqrt{108} = \sqrt{3 \times 36}$$

となりますね。ここで。ここで「重要な事実の①」を思い出してみましょう。すると、$\sqrt{3 \times 36}$ と $\sqrt{3} \times \sqrt{36}$ って同じ数ですよね。ですから、

$$\sqrt{108} = \sqrt{3 \times 36} = \sqrt{3} \times \sqrt{36}$$

とできますね。ラッキーなことに $\sqrt{36}$ が出てきました。（というより、$\sqrt{36}$ が出てくるように、$108 = 3 \times 36$ と思うことにしたんですけどね。）どうラッキーなのかというと、$\sqrt{36}$ って 6 と同じ数ですよね。ということは、

$$\sqrt{108} = \sqrt{3 \times 36} = \sqrt{3} \times \sqrt{36} = \sqrt{3} \times 6 = 6\sqrt{3}$$

とできるわけです。これで $\sqrt{108}$ という数の見かけを $\square\sqrt{\triangle}$ という形に変えることができました。

今度は「108 は 4 と 54 をかけてできている」というアイデアを使ってみます。す

るとまず、

$$\sqrt{108} = \sqrt{4 \times 27}$$

となりますね。ここで。ここで「重要な事実の①」を思い出してみましょう。すると、$\sqrt{4 \times 27}$ と $\sqrt{4} \times \sqrt{27}$ って同じ数ですよね。ですから、

$$\sqrt{108} = \sqrt{4 \times 27} = \sqrt{4} \times \sqrt{27}$$

とできますね。ラッキーなことに $\sqrt{4}$ が出てきました。（というより、$\sqrt{4}$ が出てくるように、$108 = 4 \times 27$ と思うことにしたんですけどね。）どうラッキーなのかというと、$\sqrt{4}$ って 2 と同じ数ですよね。ということは、

$$\sqrt{108} = \sqrt{4 \times 27} = \sqrt{4} \times \sqrt{27} = 2 \times \sqrt{27} = 2\sqrt{27}$$

とできるわけです。これで $\sqrt{108}$ という数の見かけを $\square\sqrt{\triangle}$ という形に変えることができました。

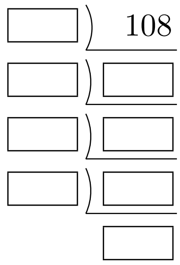
さて、2 通りの答えが得られました。$\sqrt{108}$ は、見かけを $6\sqrt{3}$ に変えることもできるし、$2\sqrt{27}$ に変えることもできるということがわかりましたね。でも、どっちの答えがマシなのでしょう。

実は、数学では、多くの場合、$\sqrt{\ }$ のマークの中に書いてある数が小さいほうがよいとされます。今、$6\sqrt{3}$ という答えと $2\sqrt{27}$ という答えが得られているます。どちらも正しい計算をして得られた結果なのですが、$\sqrt{\ }$ のマーク中に書いてある数が小さいのは $6\sqrt{3}$ のほうですね。ですから、$6\sqrt{3}$ がよい答えということになります。というわけで、この問題では、「108 は 3 と 36 をかけてできている」ということを見抜くことが重要なわけです。「えー、そんなこと私には無理。108 って結構大きい数だもん。もっと数が大きくなったらどうするの・・・」って思った人もいるかも白ませんね。そんな人のために、「奥の手」を教えることにしましょう。素因数分解って覚えていますよね。（忘れてしまった人は、今すぐ 40 ページから始まる「素因数分解」の単元を全部復習してください。このまま先に進んでも理解でき

ないかもしれません。）　実は、こんなとき、素因数分解がとても役に立つのです。

ではまず、108を素因数分解してみましょう。

右の穴埋めをやってみてください。



この計算が正しくできた人は、108の素因数分解は、

$$108 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

となっていることがわかったはずです。つまり、「108は2という素数を2個、3という素数を3個かけてできている」のです。

次は、この素因数分解の結果をよく見て、同じ素数を次々にペアにしていきましょう。あるだけ全部ペアにしていってください。（違う素数をペアにしてはいけません。）次のようになりますね。

$$108 = \underbrace{2 \times 2}_{\text{ペア}} \times \underbrace{3 \times 3}_{\text{ペア}} \times 3$$

相手がいないので
ペアにできない

このように、108という数では、2のペアが1つ、3のペアが1つでき、3が1個あまります。

次はペアになった所のかけ算をします。すると、

$$108 = \underbrace{2 \times 2}_{\text{ペア}} \times \underbrace{3 \times 3}_{\text{ペア}} \times 3$$

$$= \underbrace{4 \times 9}_{\text{計算する}} \times 3$$

$$= 36 \times 3$$

となります。

そうすると、108 を素因数分解してペアにすることのできる素数を全てかけると、108 は「ラッキーな数 36」と、「あまり物の数 3」をかけてできているということがわかるのです。

このように、素因数分解を利用して、まず $108 = 36 \times 3$ となっていることがわかると、

$$\sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = \sqrt{36} \times \sqrt{3} = 6 \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

と計算することができますね。

(3) $\sqrt{7200}$ をという数の見かけを $\square\sqrt{\triangle}$ という形に変えたいのですね。

$$\begin{array}{r|r} 2 & 7200 \\ \hline 2 & 3600 \\ \hline 2 & 1800 \\ \hline 2 & 900 \\ \hline 2 & 450 \\ \hline 3 & 225 \\ \hline 3 & 75 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array}$$

7200 は結構大きい数なので、(2) の解答で説明した「奥の手」を使うことにします。まず、7200 を素因数分解するわけですよね。右の計算を見てください。このような計算をすると、

$$7200 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$$

となっていることがわかるのですよね。（つまり、7200 は 2 という素数をを 5 個、3 という素数を 2 個、5 という素数を 2 個かけてできていることがわかりました。）

次は、この素因数分解をよく見て、同じ素数を次々に、あるだけ全部ペアにしていくのでしたね。すると、

$$7200 = \underbrace{2 \times 2}_{\text{ペア}} \times \underbrace{2 \times 2}_{\text{ペア}} \times 2 \times \underbrace{3 \times 3}_{\text{ペア}} \times \underbrace{5 \times 5}_{\text{ペア}}$$

相手がいないので
ペアにできない

となります。

(2) の解答の説明では、次にペアになっている素数を全部かけて計算してしまったのですが、実を言うとそこまでする必要はありません。手抜きができるのです。次

の計算を見てください。67 ページで学んだ「重要な事実の①」を使うと、

$$\begin{aligned}\sqrt{7200} &= \sqrt{2\times2\times2\times2\times2\times3\times3\times5\times5}\\ &= \underbrace{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}_{\text{ペア}}\times\underbrace{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}_{\text{ペア}}\times\sqrt{2}\times\underbrace{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}_{\text{ペア}}\times\underbrace{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}_{\text{ペア}}\end{aligned}$$

相手がいないので
ペアにできない

としてよいですよね。ところで、$\underbrace{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}_{\text{ペア}}$とか、$\underbrace{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}_{\text{ペア}}$のように、ペアの印がついているところのかけ算をすると、$\sqrt{\ }$ のマークはなくなりますよね。だって、例えば $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ は 2 になりますし、$\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ は 3 になりますよね。そうすると、

$$\begin{aligned}\sqrt{7200} &= \sqrt{2\times2\times2\times2\times2\times3\times3\times5\times5}\\ &= \underbrace{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}_{\text{ペア}}\times\underbrace{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}_{\text{ペア}}\times\sqrt{2}\times\underbrace{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}_{\text{ペア}}\times\underbrace{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}_{\text{ペア}}\\ &= 2\times2\times\sqrt{2}\times3\times5\\ &= 2\times2\times3\times5\times\sqrt{2}\end{aligned}$$

相手がいないので
ペアにできない

とできるわけです。ここまで来れば、あとは $\sqrt{\ }$ のマークのついていないところのかけ算をすればよいのです。$2\times2\times3\times5$ を計算すると 60 になるので、結局、

$$\sqrt{7200} = 60\sqrt{2}$$

ということになりますね。

(4) $\sqrt{120}$ をという数の見かけを $\square\sqrt{\triangle}$ という形に変えたいのですね。(3) の解答がちゃんと理解できた人のために、あっさりと説明することにしましょう。

「奥の手」を使うことにします。まず、120 を素因数分解するわけですよね。右の計算を見てください。このような計算をすると、

$$\begin{array}{r|r} 2 & 120 \\ \hline 2 & 60 \\ \hline 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

となっていることがわかるのですよね。

次はペアを作るのでしたね。すると、

$$120 = \underbrace{2 \times 2}_{\text{ペア}} \times 2 \times 3 \times 5$$

相手がいないので
ペアにできない

となります。ですから、

$$\begin{aligned} \sqrt{120} &= \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5} \\ &= \underbrace{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}_{\text{ペア}} \times \sqrt{2 \times 3 \times 5} \\ &= 2 \times \sqrt{30} \\ &= 2\sqrt{30} \end{aligned}$$

とできますね。

問 25. 次の数の見かけを $\square\sqrt{\triangle}$ という形に変えなさい。ただし、$\sqrt{}$ のマークの中の数をできるだけ小さくすること。

(1) $\sqrt{24}$	(2) $\sqrt{27}$	(3) $\sqrt{28}$	(4) $\sqrt{48}$	(5) $\sqrt{60}$
(6) $\sqrt{63}$	(7) $\sqrt{68}$	(8) $\sqrt{84}$	(9) $\sqrt{90}$	(10) $\sqrt{112}$
(11) $\sqrt{150}$	(12) $\sqrt{162}$	(13) $\sqrt{432}$	(14) $\sqrt{675}$	(15) $\sqrt{864}$

答えを見る

例題 9　（67 ページで学んだ「重要な事実の②」、つまり、$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ と $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ は同じ数であるということを利用するとこんな変形だってできるという話）

次の数の見かけをマシにしなさい。

(1) $\sqrt{\dfrac{5}{36}}$　　(2) $\sqrt{0.03}$

解答

(1) $\sqrt{\ }$ のマークの中に $\dfrac{5}{36}$ なんて分数が書いてあります。でも、この $\dfrac{5}{36}$ という分数ですが結構ラッキーな数ですよね。だって、36 って 6 の 2 乗ですからね。どういうことかというと、次のような変形ができるのです。

まず、67 ページの「重要な事実の②」で学んだように、一般に $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ と $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ は同じ数なのですから、

$$\sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{36}}$$

ですよね。そうすると、分母に $\sqrt{36}$ という数が出てきました。ところで、この数の正体って 6 ですよね。だって、$\sqrt{36}$ って、2 乗すると 36 になる数のうちプラスのほうの数のことなのですから。そうすると、

$$\sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

と見かけを変えることができますね。つまり、$\sqrt{\dfrac{5}{36}}$ という数の見かけを変えて、分数の分母には $\sqrt{\ }$ のマークがついていないようにしたのです。

(2) $\sqrt{\ }$ のマークの中に 0.03 なんて数が書いてあります。こういうの、結構困りますよね。でも、0.3 ではなくてよかったですよね、どうして？と思った人はいますか？ 0.3 は分数にすると $\dfrac{3}{10}$ ですが、0.03 は分数にすると $\dfrac{3}{100}$ ですよね。$\dfrac{3}{10}$ はとても不都合な数なのですが、$\dfrac{3}{100}$ はとてもラッキーなのです。もっと詳しく言うと、10 は困るのですが、100 はとてもラッキーなのです。だって、100 は 10 の 2 乗ですから。話、見えてきましたよね。このことに気付くと、(1) の問題と同じように考えていくことができますよね。それではやってみましょう。

0.03 は $\dfrac{3}{100}$ と同じ数なので、

$$\sqrt{0.03} = \sqrt{\frac{3}{100}}$$

ですよね。ところで、67 ページで学んだ「重要な事実の②」によれば、一般に $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ と $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ は同じ数なのですから、

$$\sqrt{0.03} = \sqrt{\frac{3}{100}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{100}}$$

ですよね。そうすると、分母に $\sqrt{100}$ という数が出てきました。ところで、この数の正体って 10 ですよね。だって、$\sqrt{100}$ って、2 乗すると 10 になる数のうちプラスのほうの数のことなのですから。そうすると、

$$\sqrt{0.03} = \sqrt{\frac{3}{100}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{3}}{10}$$

と見かけを変えることができますね。つまり、$\sqrt{0.03}$ という数の見かけを変えて、分数の分母には $\sqrt{\ }$ のマークがついていないようにしたのです。

問 26. 例題 9 が理解できた人のための問題です。例題 9 の解答のまねをして、次の数の見かけをマシにしなさい。

(1) $\sqrt{\dfrac{3}{16}}$ (2) $\sqrt{0.07}$ (3) $\sqrt{\dfrac{10}{49}}$ (4) $\sqrt{0.21}$

答えを見る

例題 10 （67 ページで学んだ「重要な事実の①」、つまり、$\sqrt{a}\sqrt{b}$ と $\sqrt{ab}$ は同じ数であるということと、例題 8 で学んだテクニックを使って答えの見かけをマシにする練習）

次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt{15} \times \sqrt{10}$ (2) $\sqrt{18} \times \sqrt{12}$

解答

(1) こういう問題では、計算していく手順は人によっていろいろと違っています。そこ

でこれから、2 人の人の計算法を紹介します。

ある人の計算法　67 ページで学んだ「重要な事実の①」、つまり、「$\sqrt{a}\sqrt{b}$ と $\sqrt{ab}$ は同じ数である」ということを思い出してみると、

$$\sqrt{15}\times\sqrt{10}=\sqrt{15\times 10}=\sqrt{150}$$

と計算を進めることができます。次に、例題 8 で学んだテクニックを使って $\sqrt{150}$ を $\square\sqrt{\triangle}$ の形にしていきます。そのために、$\sqrt{}$ のマークの中の数 150 を素因数分解してみます。右のような計算をすると、

$$\begin{array}{r|r} 2 & 150 \\ \hline 3 & 75 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$$150=2\times 3\times 5\times 5$$

であることがわかります。というわけで、この素因数分解の結果を利用すると、

$$\begin{aligned}\sqrt{150}&=\sqrt{2\times 3\times 5\times 5}\\&=\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\underbrace{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}_{\text{ペア}}\\&=\sqrt{2\times 3}\times 5\\&=\sqrt{6}\times 5\\&=5\sqrt{6}\end{aligned}$$

となるわけです。

別の人の計算法　67 ページで学んだ「重要な事実の①」、つまり、「$\sqrt{a}\sqrt{b}$ と $\sqrt{ab}$ は同じ数である」ということをいきなり使ってしまうと $\sqrt{}$ のマークの中に書いてある数が大きくなってしまい大変です。そこでまず、それぞれ $\sqrt{15}$ と $\sqrt{10}$ の見かけをマシにします。

ではまず $\sqrt{15}$ の見かけをマシにします。$15=3\times 5$ なのですから、67 ページで学んだ「重要な事実の①」、つまり、「$\sqrt{ab}$ と $\sqrt{a}\sqrt{b}$ は同じ数である」とい

うことを使うと、

$$\sqrt{15} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{3} \times \sqrt{5}$$

とできます。

次に $\sqrt{10}$ の見かけをマシにします。$10 = 2 \times 5$ なのですから、67 ページで学んだ「重要な事実の①」、つまり、「$\sqrt{ab}$ と $\sqrt{a}\sqrt{b}$ は同じ数である」ということをここでも使うと、

$$\sqrt{10} = \sqrt{2 \times 5} = \sqrt{2} \times \sqrt{5}$$

とできます。

よって、

$$\begin{aligned}
\sqrt{15} \times \sqrt{10} &= \left(\sqrt{3} \times \sqrt{5}\right) \times \left(\sqrt{2} \times \sqrt{5}\right) \\
&= \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \underbrace{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}_{\text{ペア}} \\
&= \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times 5 \\
&= \sqrt{2 \times 3} \times 5 \\
&= \sqrt{6} \times 5 \\
&= 5\sqrt{6}
\end{aligned}$$

と計算することができます。

(2) $\sqrt{18} \times \sqrt{12}$ を計算する問題ですね。 こういう問題では、計算していく手順は人によっていろいろと違っています。ここでは、(1) の解答の中に出てきた「別の人の計算法」を真似してみることにします。(1) の解答は理解できていると思うので、あっさり説明することにしましょう。

まず $\sqrt{18}$ と $\sqrt{12}$ ですが、それぞれ、

$$\begin{aligned}\sqrt{18} &= \sqrt{2\times 3\times 3}\\ &= \sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\\ &= \sqrt{2}\times 3\\ &= 3\sqrt{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{12} &= \sqrt{2\times 2\times 3}\\ &= \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\\ &= 2\times\sqrt{3}\\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

と見かけを変えることができます。すると、

$$\begin{aligned}\sqrt{18}\times\sqrt{12} &= 3\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}\\ &= 3\times\sqrt{2}\times 2\times\sqrt{3}\\ &= 3\times 2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\\ &= 6\times\sqrt{6}\\ &= 6\sqrt{6}\end{aligned}$$

とできるわけです。

問 27. 例題 10 がきちんと理解できた人のための問題です。例題 10 の解答のまねをして、次の計算をし、答えの見かけをマシにしなさい。

(1) $\sqrt{27}\times\sqrt{32}$　(2) $2\sqrt{14}\times\sqrt{35}$　(3) $\sqrt{12}\times\sqrt{8}$　(4) $3\sqrt{10}\times\sqrt{15}$

答えを見る

以上、例題 6 から例題 10 まで、67 ページで学んだ「重要な事実の①、②」を利用する練習をしてきました。もう一度例題 6 から例題 10 までをよく復習して、どんな計算ができるようになったのか頭の中を整理しておいてください。

それではこれから、もう 1 つ大事な計算法を学ぶことにします。そこで、あなたに思い

出して欲しいことがあります。それは、

> 分数の分母と分子に同じ数をかけるともととは違う見かけの分数ができるが、見かけが変わっただけで正体は変わっていない

ということです。例えば、$\dfrac{3}{5}$ という分数の分母と分子に 7 をかけると $\dfrac{21}{35}$ に見かけが変わりますが、正体は何も変わっていませんね。つまり、$\dfrac{3}{5}$ とと $\dfrac{21}{35}$ は同じ数ですよね。こういう考えを使うと、次の例題のような計算をすることができるのです。

例題 11　（分母に $\sqrt{\ }$ のマークがついている数がある分数の見かけを変えて、分母から $\sqrt{\ }$ のマークがなくなるようにできるという話）

次の数の見かけを変えて。分母から $\sqrt{\ }$ のマークがなくなるようにしなさい。

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$　　(2) $\dfrac{10}{\sqrt{5}}$　　(3) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{48}}$

解答

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ という分数の分母には $\sqrt{7}$ という「$\sqrt{\ }$ のマークのついた数」がありますね。ここで思い出して欲しいのは、

> 分数の分母と分子に同じ数をかけるともととは違う見かけの分数ができるが、見かけが変わっただけで正体は変わっていない

ということと、

> $\sqrt{7}$ と $\sqrt{7}$ をかけると 7 になる

ということです。こんなことを思い出した人は、$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ という分数の分母と分子に $\sqrt{7}$ をかけてみると、とても良いことが起こりそうな予感がしますよね。では分母と分子に $\sqrt{7}$ をかけてみることにします。するとまず、

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}$$

となるわけですが、さっき思い出したように、$\sqrt{7}$ と $\sqrt{7}$ をかけると 7 になるので

すから、さらに、

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

と計算を進めることができます。これで、分母から $\sqrt{\ }$ のマークのついている数はなくなりました。

(2) (1) の解答が理解出来た人のため、今度はあっさり説明していきます。$\dfrac{10}{\sqrt{5}}$ という分数の分母には $\sqrt{5}$ という「$\sqrt{\ }$ のマークのついた数」があります。そこで、(1) の解答と同じ手を使うことにします。そうすると、

$$\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5}$$

と計算を進めることができますね。でも、これで安心してはいけません、だって、10 と 5 って相性がよいのでさらに約分できますよね。ですから、

$$\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{10 \times \sqrt{5}}{5} = \frac{\overset{2}{\cancel{10}} \times \sqrt{5}}{\underset{1}{\cancel{5}}} = 2\sqrt{5}$$

とできるわけですね。

(3) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{48}}$ という分数の分母には $\sqrt{48}$ という「$\sqrt{\ }$ のマークのついた数」があります。そこで、(1) や (2) と同じように考えると、分母と分子に $\sqrt{48}$ をかけてみたくなります。もちろんそれで何も問題はありませんが、$\sqrt{48}$ って、$\sqrt{\ }$ のマークの中に結構大きい数が書いてありますよね。そこで、少し工夫をしたいと思います。

まず、$\sqrt{48}$ という数を少し分析してみることにします。$\sqrt{\ }$ のマークの中に結構大きい数が書いてあるので、見かけを $\square\sqrt{\triangle}$ という形に直せないのか考えてみましょう。(こういうことは前に詳しく学習しましたね。) そうすると、例えば 48 は 16×3 と同じだと気付いた人は、

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

とできますね。

ですから、この問題の数 $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{48}}$ ですが、まず

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{48}} = \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$$

と見かけを変えることができますね。

このようにしておくと、分母にある $\sqrt{\ }$ のマークのついた数は $\sqrt{48}$ から $\sqrt{3}$ は変わり、$\sqrt{\ }$ のマークの中にある数は小さくなるわけです。これで準備ができました。それではこれから、分母と分子に同じ数をかけて、見かけを変えていきましょう。分母にある「$\sqrt{\ }$ のマークのついた数」は $\sqrt{3}$ ですから、分母と分子に $\sqrt{3}$ をかければよいですよね。すると、

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{48}} = \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{3\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{4\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{3\times\sqrt{6}}{4\times 3}$$

となります。でも、これで終わりではありませんね。まだ約分できますよね。すると、

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{48}} = \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{3\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{4\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{3\times\sqrt{6}}{4\times 3} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}\times\sqrt{6}}{4\times\underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

とできますね。

問 28. 例題 11 がきちんと理解できた人のための問題です。次の数の見かけを変えて、分母から $\sqrt{\ }$ のマークのついた数がなくなるようにしなさい。

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$　(2) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$　(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$　(4) $\dfrac{4}{\sqrt{18}}$

(5) $\dfrac{6}{\sqrt{8}}$　(6) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$　(7) $\dfrac{9}{\sqrt{12}}$　(8) $\dfrac{42}{\sqrt{63}}$

答えを見る

問 29. 次の計算をしなさい。ただし、答えの数の分母には $\sqrt{\ }$ のマークがついている数がないようにすること。

(1) $\sqrt{2} \div \sqrt{7}$　　(2) $\sqrt{27} \div 2\sqrt{6}$

(3) $7\sqrt{2} \div \left(-\sqrt{63}\right)$　　(4) $\sqrt{80} \div \sqrt{15}$

答えを見る

1.7.2 $\sqrt{\ }$ のマークのついている数のたし算とひき算

おさらいの質問　$\sqrt{9}$ という数と $\sqrt{16}$ という数について考えることにします。以下の文の空欄に正しい数や語句を記入しなさい。

(1) $\sqrt{9}$ とは、2 乗すると $\boxed{}$ になる数のうち、$\boxed{}$ のほうの数のことです。ですから、よく考えてみると $\sqrt{9}$ という数の正体は $\boxed{}$ です。

(2) $\sqrt{16}$ とは、2 乗すると $\boxed{}$ になる数のうち、$\boxed{}$ のほうの数のことです。ですから、よく考えてみると $\sqrt{9}$ という数の正体は $\boxed{}$ です。

大丈夫ですよね。ではあなたにさらに質問です。

質問　ある人が、「9 と 16 をたすと 25 になりますよね。だから $\sqrt{9}$ と $\sqrt{16}$ をたすと $\sqrt{25}$ になると思うのだけど $\cdots$」と言いました。あなたは、この人の考えは正しいと思いますか？

では 10 分待ちます。しっかり悩んでください。

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

・・・・・・・・・・・・・・・・

はい 10 分たちました。結論は出ましたか？まさか、深く考えもしないで「どうせ正しいに決まっているよ。」なんて思っていたりしないですよね。

では、答えを教えることにします。ちゃんと 10 分真剣に悩んだ人だけ答えを読んでください。

実は、この人の考えは、間違っているのです。

「えー、うそでしょ。9 たす 16 は 25 なんだから、やっぱり、$\sqrt{9}$ たす $\sqrt{16}$ は $\sqrt{25}$ になるよ。」なんてまだ思っている人もそうでない人も、どういうことなのかきちんと考えてみることにしましょう。

この人は、「$\sqrt{9}$ と $\sqrt{16}$ をたすと $\sqrt{25}$ になる」と思ったのですね。でも、ちょっと考えてみると、$\sqrt{9}$ って 3 ですし、$\sqrt{16}$ って 4 ですし、$\sqrt{25}$ って 5 ですよね。あなたは、「3 と 4 をたしても 5 にはならない」ってわかりますよね。ほら、この人の考えが間違っていたこと、わかりましたね。

以上の話から、次のような大事なことがわかりました。

重要な事実：$\sqrt{\ }$ のマークのついた数どうしのたし算

$\sqrt{a}$ と $\sqrt{b}$ をたしてできる数は $\sqrt{a+b}$ とは違う数である。

よく、

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{2+3}=\sqrt{5}$$

なんて計算してしまう人がいるのですが、これ、間違いということですね。十分気をつけてください。

では、$\sqrt{\ }$ のマークのついた数どうしのたし算ができるのはどんなときなのでしょう。このことを考えるため、まずおさらいをします。

おさらい 1　分配法則

小学校で学んだ大事な話のおさらいです。□、△、◯ という 3 つの数があるとしま

す。このとき、

$$\square \times \bigcirc + \triangle \times \bigcirc$$

という計算をしてできたものと、

$$(\square + \triangle) \times \bigcirc$$

という計算をしてできたものは必ず同じになるのでしたね。この事実を分配法則と呼んでいるのですよね。

おさらい 2　分配法則を使うことができる計算

(1)　$6 \times 57 + 4 \times 57$ という計算をしようと思います。

この計算には、たし算とかけ算が混ざっています。そんなときは、かけ算から先に計算するのでしたね。でも、先に 6×57 とか 4×57 というかけ算するの、ちょっとめんどうですね。何か工夫はないでしょうか。$6 \times 57 + 4 \times 57$ という式をよく見ると、

$$\square \times \bigcirc + \triangle \times \bigcirc$$

という形をしていますよね。（$\bigcirc$ のところは 57 ですよね。）ということは、分配法則によると、 $6 \times 57 + 4 \times 57$ という計算をする代わりに、

$$(6 + 4) \times 57$$

を計算すればよいことになります。そうすると、まず、かっこの中を計算すればよいので、

$$(6 + 4) \times 57 = 10 \times 57$$

とできますね。10 という数が出てきました。これはラッキーです。だって、10 をかけるのって簡単ですから。以上のように考えると、結局、分配法則を頼ると、

$$6 \times 57 + 4 \times 57 = (6 + 4) \times 57 = 10 \times 57 = 570$$

と計算できるということですね。

(2) $3a + 5a$ を計算しようと思います。

「なーんだ、こんなの簡単じゃん。」と思った人も、このあとの説明をちゃんと読んでください。

$3a + 5a$ という式は、もともと、$3 \times a + 5 \times a$ という式のことですよね。ところで、$3 \times a + 5 \times a$ という式は

$$\square \times \bigcirc + \triangle \times \bigcirc$$

という形をしていますよね。($\bigcirc$ のところは a ですよね。）ということは、分配法則によると、 $3 \times a + 5 \times a$ という計算をする代わりに、

$$(3 + 5) \times a$$

を計算すればよいことになります。そうすると、まず、かっこの中を計算すればよいので、

$$(3 + 5) \times a = 8 \times a = 8a$$

とできますね。以上、$3a + 5a$ を計算すると、なぜ $8a$ になるのか詳しくおさらいしました。分配法則が重要な役割を果たしていることがわかってもらえたと思います。

それではこれから $\sqrt{\ }$ のマークがついている数の入っている式で分配法則を使う練習をします。

例題 12　分配法則を使って次の式を計算し、見かけをマシにしなさい。

(1) $2\sqrt{5} + \sqrt{5}$　　(2) $2\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$　　(3) $3\sqrt{7} - 4\sqrt{7}$

解答

(1) $2\sqrt{5} + \sqrt{5}$ という式は、$2 \times \sqrt{5} + 1 \times \sqrt{5}$ という式でかけ算のマーク「×」を省略して書いた式ですよね。(特に $\sqrt{5}$ は $1 \times \sqrt{5}$ と思うことができるということに注

意してください。）そして、$2 \times \sqrt{5} + 1 \times \sqrt{5}$ という式は分配法則を使うことのできる形、つまり、

$$\square \times \bigcirc + \triangle \times \bigcirc$$

という形をしていますよね。（$\bigcirc$ のところは $\sqrt{5}$ ですよね。）ということは、分配法則によると、 $2 \times \sqrt{5} + 1 \times \sqrt{5}$ という計算をする代わりに、

$$(2+1) \times \sqrt{5}$$

を計算すればよいことになります。そうすると、まず、かっこの中を計算すればよいので、

$$(2+1) \times \sqrt{5} = 3 \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

とできますね。以上、$2\sqrt{5} + \sqrt{5}$ を計算すると、$3\sqrt{5}$ になるということを詳しく説明しました。分配法則が重要な役割を果たしていることがわかってもらえたと思います。

(2) (1) の説明が理解できた人のためにあっさり説明することにしましょう。

$2\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$ という式は、$2 \times \sqrt{3} + 7 \times \sqrt{3}$ という式のことですよね。そして、$2 \times \sqrt{3} + 7 \times \sqrt{3}$ という式は分配法則を使うことのできる形をしていますね。ですから、

$$2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} + 7 \times \sqrt{3} = (2+7) \times \sqrt{3} = 9 \times \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

と計算できますね。

(3) (1) の説明が理解できた人のためにあっさり説明することにしましょう。

$3\sqrt{7} - 4\sqrt{7}$ という式は、$3 \times \sqrt{3} - 4 \times \sqrt{7}$ という式のことですよね。そして、$3 \times \sqrt{7} - 4 \times \sqrt{7}$ という式は分配法則を使うことのできる形をしていますね。です

から、

$$3\sqrt{7}-4\sqrt{7}=3\times\sqrt{7}-4\times\sqrt{7}=(3-4)\times\sqrt{7}=-1\times\sqrt{7}=-\sqrt{7}$$

と計算できますね。

問 30. 分配法則を使って次の式を計算し、見かけをマシにしなさい。

(1) $4\sqrt{5}+5\sqrt{5}$　(2) $\sqrt{2}+3\sqrt{2}$　(3) $7\sqrt{3}-2\sqrt{3}$

(4) $8\sqrt{7}-9\sqrt{7}$　(5) $\sqrt{10}-4\sqrt{10}$　(6) $2\sqrt{2}-5\sqrt{2}-3\sqrt{2}$

答えを見る

では、話を先に進めることにしますが、その前におさらいしたいことがあります。

おさらいの質問　次の式は見かけをマシにできるかどうか考えてください。

(1) $7x+5x$　(2) $7x+5y$　(3) $3x+6y+2x-4y$

式の形をよく見て考えてください。では 3 分待ちます。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

はい、3 分たちました。答えを教えることにしましょう。

おさらいの質問の答え

(1) マシにすることができますよね。

$7x+5x$ という式は、もともと、$7\times x+5\times x$ という式のことですよね。ところで、$7\times x+5\times x$ という式は

$$\square\times\bigcirc+\triangle\times\bigcirc$$

という形をしていますよね。($\bigcirc$ のところは x ですよね。) ということは、分配法則によると、 $7\times x+5\times x$ という計算をする代わりに、

$$(7+5)\times x$$

を計算すればよいことになります。そうすると、まず、かっこの中を計算すればよいので、

$$(7+5)\times x = 12\times x = 12x$$

とできますね。

(2)　マシにすることはできませんよね。

$7x+5y$ という式は、もともと、$7\times x+5\times y$ という式のことですよね。そして、$7\times x+5\times y$ という式は

$$\square\times\bigcirc+\triangle\times\bigcirc$$

という形をしていませんね。（$\bigcirc$ のところが一致しませんね。）ということは、分配法則を使うことができないわけです。

(3)　マシにすることができますよね。

(1) と (2) の解答がきちんと理解できた人のためにあっさり説明します。

$3x+6y+2x-4y$ という式は、式の中の部品の順番を少し変えて、$3x+2x+6y-4y$ と見かけを変えることができますね。そうすると、前半の 2 つの部品 $3x+6y$ と後半の 2 つの部品 $6y-4y$ にはそれぞれ分配法則を使うことができますよね。ですから、

$$\begin{aligned}
&3x+6y+2x-4y \\
&=3x+2x+6y-4y && \text{部品の順番を変える} \\
&=3\times x+2\times x+6\times y-4\times y \\
&=(3+2)\times x+(6-4)\times x && \text{分配法則を使う} \\
&=5\times x+2\times y \\
&=5x+2y
\end{aligned}$$

と計算を進めて見かけをマシにできますよね。

おさらいの質問と答えおわり

以上のおさらいの質問が理解できた人は本題に入ることにしましょう。

例題 13 次の式は見かけをマシにできるかどうか考えてください。

(1) $7\sqrt{2}+5\sqrt{2}$ (2) $7\sqrt{2}+5\sqrt{3}$

解答

(1) マシにすることができますよね。

$7\sqrt{2}+5\sqrt{2}$ という式は、もともと、$7\times\sqrt{2}+5\times\sqrt{2}x$ という式のことですよね。ところで、$7\times\sqrt{2}+5\times\sqrt{2}$ という式は

$$\square\times\bigcirc+\triangle\times\bigcirc$$

という形をしていますよね。（$\bigcirc$ のところは $\sqrt{2}$ ですよね。）ということは、分配法則によると、 $7\times\sqrt{2}+5\times\sqrt{2}$ という計算をする代わりに、

$$(7+5)\times\sqrt{2}$$

を計算すればよいことになります。そうすると、まず、かっこの中を計算すればよいので、

$$(7+5)\times\sqrt{2}=12\times\sqrt{2}=12\sqrt{2}$$

とできますね。

(2) マシにすることはできませんよね。

$7\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ という式は、もともと、$7\times\sqrt{2}+5\times\sqrt{3}$ という式のことですよね。そして、$7\times\sqrt{2}+5\times\sqrt{3}$ という式は

$$\square\times\bigcirc+\triangle\times\bigcirc$$

という形をしていませんね（($\bigcirc$ のところが一致しませんね。）ということは、分配法則を使うことができないわけです。

例題 14　次の式の見かけをマシにしなさい。

(1)　$3\sqrt{2}+\sqrt{6}-2\sqrt{2}-4\sqrt{6}$　　(2)　$5\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}+7$

解答

前の例題の前の「おさらいの質問」とさっきの例題 13 が正しく理解できているあなたには、もうくどい説明は必要ないですよね。あっさり説明することにします。

(1)

$$
\begin{aligned}
&3\sqrt{2}+\sqrt{6}-2\sqrt{2}-4\sqrt{6} && \text{部品の順番を変える}\\
&=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\sqrt{6}-4\sqrt{6}\\
&=3\times\sqrt{2}-2\times\sqrt{2}+1\times\sqrt{6}-4\times\sqrt{6} && \text{分配法則を使う}\\
&=(3-2)\times\sqrt{2}+(1-4)\times\sqrt{6}\\
&=1\times\sqrt{2}-3\times\sqrt{6}\\
&=\sqrt{2}-3\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

と計算を進めて見かけをマシにできますよね。

(2)

$$
\begin{aligned}
&5\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}+7 && \text{部品の順番を変える}\\
&=5\sqrt{3}-2\sqrt{3}-1+7\\
&=5\times\sqrt{3}-2\times\sqrt{3}-1+7 && \text{分配法則を使う}\\
&=(5-2)\times\sqrt{3}-1+7\\
&=3\times\sqrt{3}+6\\
&=3\sqrt{3}+6
\end{aligned}
$$

と計算を進めて見かけをマシにできますよね。

問 31. 次の式の見かけをマシにしなさい。

(1) $3\sqrt{5}-2\sqrt{3}-6\sqrt{5}$　　(2) $2\sqrt{2}-3+4\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{6}+2\sqrt{10}-4\sqrt{10}+3\sqrt{6}$　　(4) $-3\sqrt{2}+8-2\sqrt{2}-3$

答えを見る

例題 15 （ちょっと見ただけではもうマシにできそうになくても、よく考えるとまだマシにできることもあるかもしれないという話その 1）

次の式の見かけをマシにできるかどうか考えて、マシにできる場合はマシにしなさい。

(1) $4\sqrt{12}+2\sqrt{27}$　　(2) $3\sqrt{8}-\sqrt{50}$

解答

(1) $4\sqrt{12}+2\sqrt{27}$ という式を見て、「$\sqrt{12}$ と $\sqrt{27}$ は違う数だから分配法則は使えない。、だからもうマシにはできない。」って思った人もいるかもしれませんね。しかし、実はマシにできるのです。

以前、$\sqrt{\bigstar}$ という形をしている数を $\square\sqrt{\triangle}$ という形へ見かけを変える練習をしましたね。（71 ページの例題 8 ですよ。忘れてしまった人はすぐに復習してください。このまま先に進んでも理解できないかもしれません。）そこで、$\sqrt{12}$ と $\sqrt{27}$ の見かけを変えられるか考えてみると、それぞれ、

$$\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{27}=\sqrt{9\times 3}=\sqrt{9}\times\sqrt{3}=3\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

ってできますよね。（つまり、$\sqrt{12}$ って $2\sqrt{3}$ と同じで、$\sqrt{27}$ って $3\sqrt{3}$ と同じということですね。）ですから、この問題の式は、とりあえず、

$$\begin{aligned}4\sqrt{12}+2\sqrt{27}&=4\times 2\sqrt{3}+2\times 3\sqrt{3}\\&=8\sqrt{3}+6\sqrt{3}\end{aligned}$$

と計算を進めることができますね。今出来た式をよく見ると、$8\sqrt{3}$ という部品と $6\sqrt{3}$ という部品では $\sqrt{3}$ が共通になっているので分配法則が使える形ではありま

せんか。そうすると、さらに、

$$\begin{aligned}&8\sqrt{3}+6\sqrt{3}\\=&(8+6)\times\sqrt{3}\\=&14\times\sqrt{3}\\=&14\sqrt{3}\end{aligned}$$

と計算を進めることができますね。

(2) (1) の解答がきちんと理解できた人のためにあっさり説明することにします。

この問題の式の中に出ている $\sqrt{8}$ と $\sqrt{50}$ の見かけを変えられるか考えてみると、それぞれ、

$$\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}=2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{50}=\sqrt{25\times 2}=\sqrt{25}\times\sqrt{2}=5\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

ってできますよね。（つまり、$\sqrt{8}$ って $2\sqrt{2}$ と同じで、$\sqrt{50}$ って $5\sqrt{2}$ と同じということですね。）そうすると、

$$\begin{aligned}3\sqrt{8}-\sqrt{50}&=3\times 2\sqrt{2}-5\sqrt{2}\\&=6\sqrt{2}-5\sqrt{2}\\&=(6-5)\times\sqrt{2}\\&=1\times\sqrt{2}\\&=\sqrt{2}\end{aligned}$$

と計算を進めることができますね。

問 32. 次の式の見かけをマシにできるかどうか考えて、マシにできる場合はマシにしなさい。

(1) $\sqrt{18}-4\sqrt{2}$　　(2) $\sqrt{45}+\sqrt{20}$

(3) $\sqrt{8}-\sqrt{98}+\sqrt{16}$　　(4) $2\sqrt{18}+4\sqrt{2}$

(5) $\sqrt{63}-2\sqrt{28}$　　(6) $3\sqrt{12}-\sqrt{75}+\sqrt{48}$

答えを見る

例題 16　（ちょっと見ただけではもうマシにできそうになくても、よく考えるとまだマシにできることもあるかもしれないという話その 2）

次の式の見かけをマシにできるかどうか考えて、マシにできる場合はマシにしなさい。

(1)　$5\sqrt{2}+\dfrac{4}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\sqrt{12}-\dfrac{9}{\sqrt{3}}$

解答

(1) $5\sqrt{2}+\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ という式を見ると、このままではどうしようもなさそうですね。分配法則だって、このままでは使えませんね。でももう少しよく考えてみましょう。前に、「分母から $\sqrt{\ }$ のマークをなくす練習」をしましたよね。（83 ページの例題 11 ですよ。忘れてしまった人はすぐに復習してください。このまま先に進んでも理解できないかもしれません。）この手を使うと、何かよいことが起きるかもしれません。だって、この問題の式の中には、$\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ という部品があるのですから。そこでまず、この手を使って、$\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ という部品の見かけを変えてみます。すると、

$$\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{4\times\sqrt{2}}{2}=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\times\sqrt{2}}{\underset{1}{\cancel{2}}}=2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

となりますよね。（大丈夫ですよね。）おや、これはラッキーです。「ナントカルート 2」という数になりました。この数、$5\sqrt{2}$ と相性がよいではないですか。そうすると、この問題の式は、

$$\begin{aligned}5\sqrt{2}+\frac{4}{\sqrt{2}}&=5\sqrt{2}+2\sqrt{2}\\&=(5+2)\times\sqrt{2}\\&=7\sqrt{2}\end{aligned}$$

と計算を進めることができますね。

(2) (1) の解答がきちんと理解できた人のためにあっさり説明します。

まず、$\dfrac{9}{\sqrt{3}}$ という部品の見かけを変えてみます。すると、

$$\frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{9 \times \sqrt{3}}{3} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}} \times \sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 3 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

となりますよね。（大丈夫ですよね。）でもこれ、まだラッキーな感じがしませんね。困りました。あっ、でも、$\sqrt{12}$ も見かけを変えられそうですね。そうです、$\sqrt{12}$ を $\square\sqrt{\triangle}$ の形にしてみるのです。すると、

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

となりますよね。あー、これはラッキーです。$\dfrac{9}{\sqrt{3}}$ と $\sqrt{12}$ はどちらも「ナントカルート 3」という数になりました。そうすると、この問題の式は、

$$\begin{aligned} \sqrt{12} - \frac{9}{\sqrt{3}} &= 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} \\ &= (2 - 3) \times \sqrt{3} \\ &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

と計算を進めることができますね。

問 33. 次の式の見かけをマシにできるかどうか考えて、マシにできる場合はマシにしなさい。

(1) $\sqrt{8} + \dfrac{4}{\sqrt{2}}$

(2) $\dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} - \sqrt{40}$

(4) $2\sqrt{60} - \sqrt{\dfrac{5}{3}}$

(5) $\sqrt{\dfrac{2}{7}} + \sqrt{56}$

(6) $\sqrt{3} + \sqrt{27} - \dfrac{12}{\sqrt{3}}$

答えを見る

1.7.3 $\sqrt{\ }$ のマークのついている数のいろいろな計算

これまで、65 ページから始まる 1.7.1 では $\sqrt{\ }$ のマークの付いている数のかけ算とわり算について学び、86 ページから始まる 1.7.2 では $\sqrt{\ }$ のマークの付いている数のたし算とひき算について学びました。そこでこれから、これまでに学んだことを応用する計算を練習します。

例題 17 次の式の見かけをかっこがなくなるように変えなさい。

(1) $\sqrt{5}\left(2+\sqrt{2}\right)$ (2) $\sqrt{7}\left(\sqrt{14}+3\right)$ (3) $\sqrt{3}\left(\sqrt{27}-\sqrt{2}\right)$

解答

この例題の式はどれも $\bigcirc \times (\triangle + \square)$ という形をしています。ですから、分配法則を使えば、$\bigcirc \times \triangle + \bigcirc \times \square$ という形になってかっこがなくなりますね。

(1)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{5}\left(2+\sqrt{2}\right) &= \sqrt{5}\times 2+\sqrt{5}\times\sqrt{2} \\
&= 2\times\sqrt{5}+\sqrt{5}\times\sqrt{2} \\
&= 2\sqrt{5}+\sqrt{10}
\end{aligned}
$$

とできますね。

(2) 分配法則を使うと、とりあえず、

$$\sqrt{7}\left(\sqrt{14}+3\right) = \sqrt{7}\times\sqrt{14}+\sqrt{7}\times 3$$

となりますよね。そうするとこの先、$\sqrt{7}\times\sqrt{14}$ と $\sqrt{7}\times 3$ を計算することになるわけですが、$\sqrt{7}\times\sqrt{14}$ の計算が少し難しそうな感じがするのでこの部品だけここで別に計算してみます。あなたは $\sqrt{14}$ と $\sqrt{7}\times\sqrt{2}$ は同じ数であるのはわかりますよね。そうすると、

$$\sqrt{7}\times\sqrt{14} = \sqrt{7}\times\left(\sqrt{7}\times\sqrt{2}\right) = \sqrt{7}\times\sqrt{7}\times\sqrt{2} = 7\times\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

とできますね。この結果を利用することにして、問題の式の計算に戻りましょう。

すると、

$$\begin{aligned}\sqrt{7}\left(\sqrt{14}+3\right) &= \sqrt{7}\times\sqrt{14}+\sqrt{7}\times 3\\ &= 7\sqrt{2}+3\sqrt{7}\end{aligned}$$

とできますね。

(3) 分配法則を使うと、とりあえず、

$$\sqrt{3}\left(\sqrt{27}-\sqrt{2}\right) = \sqrt{3}\times\sqrt{27}-\sqrt{3}\times\sqrt{2}$$

となりますよね。そうするとこの先、$\sqrt{3}\times\sqrt{27}$ と $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ を計算することになるわけです。$\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ はどうせ $\sqrt{6}$ になるってすぐわかりますよね。でも、$\sqrt{3}\times\sqrt{27}$ の計算が少し難しそうな感じがするのでこの部品だけここで別に計算してみます。あなたは $\sqrt{27}$ と $3\sqrt{3}$ は同じ数であるのはわかりますよね。そうすると、

$$\sqrt{3}\times\sqrt{27}=\sqrt{3}\times 3\sqrt{3}=\sqrt{3}\times\left(3\times\sqrt{3}\right)=3\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3\times 3=9$$

とできますね。この結果を利用することにして、問題の式の計算に戻りましょう。

すると、

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\left(\sqrt{27}-\sqrt{2}\right) &= \sqrt{3}\times\sqrt{27}-\sqrt{3}\times\sqrt{2}\\ &= 9-\sqrt{6}\end{aligned}$$

とできますね。

それではこれから、もう少し難しい計算の練習をします。ですがその前におさらいの質問があります。（注意：これからする話は、「式の展開」の学習が終わっている人のためのものです。）

おさらいの質問

(1)　$(5+7)\times(3+4)$ の計算結果と $5\times3+5\times4+7\times3+7\times4$ の計算結果は同

じになると思いますか？それとも違うと思いますか？計算はしないで、2 つの式の形をじっと見るだけで答えてください。

(2) 4 つの数 a、b、c、d があるとします。a、b、c、d がどんな数だとしても、$(a+b)\times(c+d)$ の計算結果と $a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$ の計算結果は同じになると思いますか？それとも違うこともあると思いますか？

(3) 3 つの数 $\bigstar$、$\square$、$\triangle$ があるとします。$\bigstar$、$\square$、$\triangle$ がどんな数であっても、$(\bigstar+\square)\times(\bigstar+\triangle)$ と $\bigstar^2+(\square+\triangle)\times\bigstar+\square\times\triangle$ の計算結果は同じになると思いますか？それとも違うこともあると思いますか？

質問は以上です。この 3 つの質問に答えられない人は、このまま先に進むと大変です。質問に答えられなかった人は、まず「式の展開」についてよく復習してからこの先を読むようにしてください。

おさらいの質問の答え　まず、「式の展開」で学んだことを思い出しておくことにします。

重要な事実：$(\bigstar+\square)(\blacklozenge+\triangle)$ という形の式を展開すると結果はどうなる？

$(\bigstar+\square)(\blacklozenge+\triangle)$ という形の式を展開していくと最後は $\bigstar\blacklozenge+\bigstar\triangle+\square\blacklozenge+\square\triangle$ という式になります。

つまり、

$$(\bigstar+\square)(\blacklozenge+\triangle)=\overset{\textcircled{1}}{\bigstar\blacklozenge}+\overset{\textcircled{2}}{\bigstar\triangle}+\underset{\textcircled{3}}{\square\blacklozenge}+\underset{\textcircled{4}}{\square\triangle}$$

のように、① で結ばれる 2 つのものをかけ、② で結ばれる 2 つのものをかけ、③ で結ばれる 2 つのものをかけ、④ で結ばれる 2 つのものをかけ、そのようにしてできた 4 つの部品をたせばよいのです。

この「重要な事実」は、$(\bigstar+\square)(\blacklozenge+\triangle)$ という式に分配法則を繰り返し使うと納得できる話でしたね。では、おさらいの質問の答えを述べることにします。

(1) 今思い出してもらった「重要な事実」をよく見れば、$(5+7)\times(3+4)$ の計算

結果と $5 \times 3 + 5 \times 4 + 7 \times 3 + 7 \times 4$ の計算結果は同じになるということがわかりますね。

(2)　今思い出してもらった「重要な事実」をよく見れば、a、b、c、d がどんな数だとしても、$(a+b) \times (c+d)$ の計算結果と $a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$ の計算結果は同じになるということがわかりますね。

(3)　今思い出してもらった「重要な事実」によると、まず、

$$(\bigstar + \square) \times (\bigstar + \triangle) = \overset{\text{①}}{\bigstar^2} + \bigstar \overset{\text{②}}{\times} \triangle + \square \underset{\text{③}}{\times} \bigstar + \square \underset{\text{④}}{\times} \triangle$$

となりますよね。そして、②と③は分配法則を使って仲間にすることができるので、さらに、

$$\overset{\text{①}}{\bigstar^2} + \bigstar \overset{\text{②}}{\times} \triangle + \square \underset{\text{③}}{\times} \bigstar + \square \underset{\text{④}}{\times} \triangle = \bigstar^2 + (\square + \triangle) \times \bigstar + \square \times \triangle$$

となりますよね。

というわけで、★、□、△ がどんな数であっても、$(\bigstar + \square) \times (\bigstar + \triangle)$ と $\bigstar^2 + (\square + \triangle) \times \bigstar + \square \times \triangle$ の計算結果は同じになるということがわかりますね。

おさらいの質問と答えおわり

それでは、以上のおさらいがきちんと理解できている人は本題に入ることにしましょう。

例題 18　次の式の見かけをかっこがなくなるように変えなさい。

(1)　$\left(\sqrt{2}+3\right)\left(\sqrt{5}+4\right)$　　(2)　$\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-5\right)$

(3)　$\left(\sqrt{2}-3\right)^2$　　(4)　$\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$

解答

まず、念のため確認しておきたいことがあります。

おさらいの質問の (1) では、$(5+7)\times(3+4)$ の計算結果と $5\times3+5\times4+7\times3+7\times4$ の計算結果は同じになるということをおさらいしました。ところで、計算結果が同じになるからといって、 $(5+7)\times(3+4)$ をわざわざ $5\times3+5\times4+7\times3+7\times4$ にしてから計算する人はほとんどいないでしょう。かっこの中を計算することができるので、素直に $(5+7)\times(3+4)$ を計算したほうが楽だからです。しかし、この例題の (1) の $\left(\sqrt{2}+3\right)\left(\sqrt{5}+4\right)$ という式はどうでしょうか。かっこの中は計算を進めることができませんね。ですから、かっこがなくなるようにこの式の見かけをマシにしたければ、「展開」という計算法に頼ることになるのです。

(1) さっきおさらいした重要な事実のように展開をすると、

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}+3\right)\left(\sqrt{5}+4\right) &= \sqrt{2}\times\sqrt{5}+\sqrt{2}\times4+3\times\sqrt{5}+3\times4\\ &= \sqrt{10}+4\sqrt{2}+3\sqrt{5}+12\end{aligned}$$

とできますね。

(2) さっきおさらいした重要な事実のように展開をすると、

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-5\right) &= \left(\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{3}\times(-5)+2\times\sqrt{3}+2\times(-5)\\ &= 3-5\sqrt{3}+2\sqrt{3}-10\\ &= -7-3\sqrt{3}\end{aligned}$$

とできますね

もしあなたが、おさらいの質問の (3) の答えが理解できていれば、

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-5\right) &= \left(\sqrt{3}\right)^2+(2-5)\times\sqrt{3}+2\times(-5)\\ &= 3-3\sqrt{3}-10\\ &= -7-3\sqrt{3}\end{aligned}$$

と計算することもできますね。

(3) $\left(\sqrt{2}-3\right)^2$ って $\left(\sqrt{2}-3\right)\times\left(\sqrt{2}-3\right)$ のことですよね。だったら、さっきおさらいした重要な事実のように展開をすると、

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}-3\right)^2 &= \left(\sqrt{2}-3\right)\left(\sqrt{2}-3\right)\\ &= \left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}\times(-3)+(-3)\times\sqrt{2}+(-3)^2\\ &= 2-3\sqrt{2}-3\sqrt{2}+9\\ &= 11-6\sqrt{2}\end{aligned}$$

とできますね。

もしあなたが、おさらいの質問の (3) の答えが理解できていれば、

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}-3\right)^2 &= \left(\sqrt{2}-3\right)\left(\sqrt{2}-3\right)\\ &= \left(\sqrt{2}\right)^2+(-3-3)\times\sqrt{2}+(-3)^2\\ &= 2-6\times\sqrt{2}+9\\ &= 11-6\sqrt{2}\end{aligned}$$

と計算することもできますね。

(4) さっきおさらいした重要な事実のように展開をすると、

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right) &= \left(\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{5}\times\sqrt{2}+(-\sqrt{2})\times\sqrt{5}+(-\sqrt{2})\times\sqrt{2}\\ &= 5+\sqrt{10}-\sqrt{10}-2\\ &= 3\end{aligned}$$

とできますね。

もしあなたが、おさらいの質問の (3) の答えが理解できていれば、

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right) &= \left(\sqrt{5}\right)^2+\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)\times\sqrt{5}+(-\sqrt{2})\times\sqrt{2}\\ &= 5+0\times\sqrt{5}-\sqrt{10}-2\\ &= 3\end{aligned}$$

と計算することもできますね。

そしてさらに、もしあなたが、展開の公式、

$$(\bigstar+\triangle)(\bigstar-\triangle)=\bigstar^2-\triangle^2$$

を使いこなすことができるなら、

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right) &= \left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\\ &= 5-2\\ &= 3\end{aligned}$$

と計算することもできますね。

問 34. 次の式の見かけをかっこがなくなるように変えなさい。

(1) $\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{6}-2\right)$ (2) $\left(\sqrt{2}-7\right)\left(\sqrt{2}-8\right)$

(3) $\left(3\sqrt{2}-1\right)^2$ (4) $\left(\sqrt{7}-3\right)\left(\sqrt{7}+3\right)$

(5) $\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)+\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)$ (6) $\left(\sqrt{7}-4\right)\left(\sqrt{7}+4\right)+\left(\sqrt{7}-3\right)^2$

答えを見る

問の解答

問 1. 2 乗すると「ほにゃらら」になる数を探す練習でしたね。

(1) 2 乗すると 49 になる数は 7 と -7 です。

(2) 2 乗すると $\dfrac{16}{81}$ になる数は $\dfrac{4}{9}$ と $-\dfrac{4}{9}$ です。

(3) 2 乗すると -49 になる数はありません。どんな数を 2 乗してもマイナスになることはないからです。

(4) 2 乗すると $-\dfrac{16}{81}$ になる数はありません。どんな数を 2 乗してもマイナスになることはないからです。。

(5) 2 乗すると 0.01 になる数は 0.1 と -0.1 です。

本文へ戻る

問 2. 平方根という言葉の意味をしっかり思い出して空欄に正しい言葉や数を記入する問題でしたね。

(1) 25 の平方根

平方根という言葉の意味を思い出してみましょう。すると、25 の平方根とは、「2 乗すると $\boxed{25}$ になる数」のことですね。そのような数をいっしょうけんめい探すと、$\boxed{5}$ と $\boxed{-5}$ が見つかるはずです。ですから、

$$25\text{ の平方根は }\boxed{5}\text{ と }\boxed{-5}$$

ということになります。

(2) $\dfrac{9}{64}$ の平方根

平方根という言葉の意味を思い出してみましょう。すると、$\dfrac{9}{64}$ の平方根とは、「$\boxed{2}$ 乗すると $\boxed{\dfrac{9}{64}}$ になる数」のことですね。そのような数をいっしょうけんめい探すと、$\boxed{\dfrac{3}{8}}$ と $\boxed{-\dfrac{3}{8}}$ が見つかるはずです。ですから、

$$\frac{9}{64} \text{ の平方根は } \boxed{\frac{3}{8} \text{ と } -\frac{3}{8}}$$

ということになります。

(3) 4 の平方根

平方根という言葉の意味を思い出してみましょう。すると、4 の平方根とは、「$\boxed{2 \text{ 乗すると } 4}$ になる数」のことですね。そのような数をいっしょうけんめい探すと、$\boxed{2}$ と $\boxed{-2}$ が見つかるはずです。ですから、

$$4 \text{ の平方根は } \boxed{2} \text{ と } \boxed{-2}$$

ということになります。

(4) -25 の平方根

平方根という言葉の意味を思い出してみましょう。すると、-25 の平方根とは、「$\boxed{2 \text{ 乗すると } -25}$ になる数」のことですね。そのような数をいっしょうけんめい探しても見つかることは $\boxed{\text{ありません}}$ 。なぜなら、どんな数も 2 乗すると絶対にマイナスにはならないからです。ですから、

$$-25 \text{ という数には } \boxed{\text{平方根はない}}$$

ということになります。

本文へ戻る

問 3. 平方根とは何の事だったか正確に思い出してその意味の通りの数を全て見つける問題でしたね。

(1) 49 の平方根とは、「2 乗すると 49 になる数」のことですね。そのような数をいっしょうけんめい探すと、7 と -7 が見つかるはずです。ですから、

49 の平方根は 7 と -7

ということになります。

(2) $\dfrac{4}{25}$ の平方根とは、「2 乗すると $\dfrac{4}{25}$ になる数」のことですね。そのような数をいっしょうけんめい探すと、$\dfrac{2}{5}$ と $-\dfrac{2}{5}$ が見つかるはずです。ですから、

$\dfrac{4}{25}$ の平方根は $\dfrac{2}{5}$ と $-\dfrac{2}{5}$

ということになります。

(3) -49 の平方根とは、「2 乗すると -49 になる数」のことですね。そのような数をいっしょうけんめい探しても見つかることはありません。なぜなら、どんな数も 2 乗すると絶対にマイナスにはならないからです。ですから、

-49 という数には平方根はない

ということになります。

(4) $-\dfrac{4}{25}$ とは、「2 乗すると $-\dfrac{4}{25}$ になる数」のことですね。そのような数をいっしょうけんめい探しても見つかることはありません。なぜなら、どんな数も 2 乗すると絶対にマイナスにはならないからです。ですから、

$-\dfrac{4}{25}$ という数には平方根はない

ということになります。

(5) 0.01 の平方根とは、「2 乗すると 0.01 になる数」のことですね。そのような数をいっしょうけんめい探すと、0.1 と -0.1 が見つかるはずです。ですから、

$$0.01 \text{ の平方根は } 0.1 \text{ と } -0.1$$

ということになります。

本文へ戻る

問 4. $\sqrt{\ }$ というマークの使い方についての問題でしたね。

(1) $\sqrt{49}$ とは

$\sqrt{49}$ という数の正体を 16 ページ「$\sqrt{\ }$ というマークの使い方と読み方その 1」の説明どおりに考えてみましょう。すると次のようになりますよね。

「$\sqrt{49}$ とは、2 乗すると $\boxed{49}$ になる数のうち、$\boxed{\text{プラス}}$ のほうの数のこと」

ところで、2 乗すると 49 になる数は $\boxed{7}$ と $\boxed{-7}$ ですよね。(2 つあるんですよね。) このうち、プラスのほうの数はもちろん $\boxed{7}$ ですよね。ですから、

$$\sqrt{49} \text{ の正体は、} \boxed{7} \text{ である}$$

ということになりますね。

(2) $\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ とは

$\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ という数の正体を 16 ページ「$\sqrt{\ }$ というマークの使い方と読み方その 1」の説明どおりに考えてみましょう。すると次のようになりますよね。

「$\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ とは、2 乗すると $\boxed{\dfrac{9}{16}}$ になる数のうち、$\boxed{\text{プラス}}$ のほうの数のこと」

ところで、2 乗すると $\dfrac{9}{16}$ になる数は $\boxed{\dfrac{3}{4}}$ と $\boxed{-\dfrac{3}{4}}$ ですよね。(2 つあるんですよね。) このうち、プラスのほうの数はもちろん $\boxed{\dfrac{3}{4}}$ ですよね。ですから、

$$\sqrt{\frac{9}{16}} \text{ の正体は、} \boxed{\frac{3}{4}} \text{ である}$$

ということになりますね。

(3) $\sqrt{-49}$ とは

$\sqrt{-49}$ という数の正体を 16 ページ「$\sqrt{\ }$ というマークの使い方と読み方その 1」の説明どおりに考えてみましょう。すると次のようになりますよね。

「$\sqrt{-49}$ とは、2 乗すると $\boxed{-49}$ になる数のうち、$\boxed{\text{プラス}}$ のほうの数のこと」

ところで、2 乗すると -49 になる数っていったいいくつなのでしょう。そんな数は $\boxed{\text{ない}}$ ですよね。なぜならどんな数を 2 乗してもマイナスになることはないからですよね。というわけで、

$\sqrt{-49}$ という数は $\boxed{\text{ない}}$

ということになりますね。

(4) $\sqrt{2}$ とは

$\sqrt{2}$ という数の正体を 16 ページ「$\sqrt{\ }$ というマークの使い方と読み方その 1」の説明どおりに考えてみましょう。すると次のようになりますよね。

「$\sqrt{2}$ とは、$\boxed{\text{2 乗すると 2 になる}}$ のほうの数のこと」

ところで、「2 乗すると 2 になる数」っていったいいくつなのでしょう。よく考えてみると、「2 乗すると 2 になる数はちゃんとあるんだけど、慣れ親しんだ数ではないので気楽にいくつとは言えない。仕方がないからその数を $\boxed{\sqrt{2}}$ と書くことにする。」のですよね。ですから、「$\sqrt{2}$ とは？」と聞かれても次のように答えるしかありません。

$\sqrt{2}$ とは、2 乗すると $\boxed{2}$ になる数のうち、$\boxed{\text{プラス}}$ のほうの数である

本文へ戻る

問 5. $\sqrt{\ }$ というマークのついている数の正体をきちんと説明し、またその数の正体が慣れ親しんでよく知っている数ならば、その数を答える問題でしたね。

(1) $\sqrt{35}$ とは、2 乗すると 3 になる数のうち、プラスのほうの数です。

2 乗すると 3 になるプラスの数はちゃんとありますが、慣れ親しんだ数ではないので気楽にいくつとは言えません。仕方がないからその数を $\sqrt{3}$ と書くことにしてあるのです。

(2) $\sqrt{\dfrac{25}{81}}$ とは、2 乗すると $\dfrac{25}{81}$ になる数のうち、プラスのほうの数です。

ですから、$\sqrt{\dfrac{25}{81}}$ の正体は、$\dfrac{5}{9}$ です。

(3) $\sqrt{7}$ とは、2 乗すると 7 になる数のうち、プラスのほうの数です。

2 乗すると 7 になるプラスの数はちゃんとありますが、慣れ親しんだ数ではないので気楽にいくつとは言えません。仕方がないからその数を $\sqrt{7}$ と書くことにしてあるのです。

(4) $\sqrt{1}$ とは、2 乗すると 1 になる数のうち、プラスのほうの数です。

ですから、$\sqrt{1}$ の正体は、1 です。

(5) $\sqrt{\dfrac{2}{7}}$ とは、2 乗すると $\dfrac{2}{7}$ になる数のうち、プラスのほうの数です。

2 乗すると $\dfrac{2}{7}$ になるプラスの数はちゃんとありますが、慣れ親しんだ数ではないので気楽にいくつとは言えません。仕方がないからその数を $\sqrt{\dfrac{2}{7}}$ と書くことにしてあるのです。

本文へ戻る

問 6. $-\sqrt{\ }$ というマークの使い方についての問題でしたね。

(1) $-\sqrt{49}$ とは

$-\sqrt{49}$ という数の正体を 20 ページの「$\sqrt{\ }$ というマークの使い方と読み方その 2」

の説明どおりに考えてみましょう。すると次のようになりますよね。

「$-\sqrt{49}$ とは、2 乗すると $\boxed{49}$ になる数のうち、$\boxed{\text{マイナス}}$ のほうの数のこと」

ところで、2 乗すると 49 になる数は $\boxed{7}$ と $\boxed{-7}$ ですよね。(2 つあるんですよね。) このうち、マイナスのほうの数はもちろん $\boxed{-7}$ ですよね。ですから、

$$-\sqrt{49} \text{ の正体は、} \boxed{-7} \text{ である}$$

ということになりますね。

(2) $-\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ とは

$-\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ という数の正体を 20 ページの「$\sqrt{\ }$ というマークの使い方と読み方その 2」の説明どおりに考えてみましょう。すると次のようになりますよね。

「$-\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ とは、2 乗すると $\boxed{\dfrac{9}{16}}$ になる数のうち、$\boxed{\text{マイナス}}$ のほうの数のこと」

ところで、2 乗すると $\dfrac{9}{16}$ になる数は $\boxed{\dfrac{3}{4}}$ と $\boxed{-\dfrac{3}{4}}$ ですよね。(2 つあるんですよね。) このうち、マイナスのほうの数はもちろん $\boxed{-\dfrac{3}{4}}$ ですよね。ですから、

$$-\sqrt{\dfrac{9}{16}} \text{ の正体は、} \boxed{-\dfrac{3}{4}} \text{ である}$$

ということになりますね。

(3) $-\sqrt{2}$ とは

$-\sqrt{2}$ という数の正体を 20 ページの「$\sqrt{\ }$ というマークの使い方と読み方その 2」の説明どおりに考えてみましょう。すると次のようになりますよね。

「$-\sqrt{2}$ とは、$\boxed{\text{2 乗すると 2 になる数のうちマイナス}}$ のほうの数のこと」

ところで、「2 乗すると 2 になる数」っていったいいくつなのでしょう。よく考えてみると、「2 乗すると 2 になる数はちゃんとあるんだけど、慣れ親しんだ数では

ないので気楽にいくつとは言えない。」のですよね。ですから、「$-\sqrt{2}$ とは？」と聞かれても次のように答えるしかありません。

$-\sqrt{2}$ とは、2 乗すると $\boxed{2}$ になる数のうち、$\boxed{\text{マイナス}}$ のほうの数である

本文へ戻る

問 7. $-\sqrt{\ }$ というマークのついている数の正体をきちんと説明し、またその数の正体が慣れ親しんでよく知っている数ならば、その数を答える問題でしたね。

(1) $-\sqrt{3}$ とは、2 乗すると 3 になる数のうち、マイナスのほうの数です。

2 乗すると 3 になるマイナスの数はちゃんとありますが、慣れ親しんだ数ではないので気楽にいくつとは言えません。仕方がないからその数を $-\sqrt{3}$ と書くことにしてあるのです。

(2) $-\sqrt{25}$ とは、2 乗すると 25 になる数のうち、マイナスのほうの数です。

ですから、$-\sqrt{25}$ の正体は、-5 です。

(3) $-\sqrt{\dfrac{2}{7}}$ とは、2 乗すると $\dfrac{2}{7}$ になる数のうち、マイナスのほうの数です。

2 乗すると $\dfrac{2}{7}$ になるマイナスの数はちゃんとありますが、慣れ親しんだ数ではないので気楽にいくつとは言えません。仕方がないからその数を $-\sqrt{\dfrac{2}{7}}$ と書くことにしてあるのです。

(4) $-\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ とは、2 乗すると $\dfrac{9}{16}$ になる数のうち、マイナスのほうの数です。

ですから、$-\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ の正体は、$-\dfrac{3}{4}$ です。

(5) $-\sqrt{0.01}$ とは、2 乗すると 0.01 になる数のうち、マイナスのほうの数です。

ですから、$-\sqrt{0.01}$ の正体は、-0.1 です。

本文へ戻る

問 8. 慣れ親しんでよく知っている数がわざわざ $\sqrt{\ }$ のマークを使って見かけを難しく書いてあるのですが、その数の正体を見抜く問題でしたね。

(1) $\sqrt{7^2}$

まず、$\sqrt{\ }$ のマークの中に書いてある 7^2 という数のことを考えてみましょう。7^2 って 49 と同じですよね。ですから、

$$\sqrt{7^2} = \sqrt{49}$$

ということですよね。ここで、$\sqrt{49}$ という数の正体を言葉を使って説明してみると、

「$\sqrt{49}$ とは、2 乗すると 49 になる数のうち、プラスのほうの数のこと」

ということになりますよね。2 乗すると 49 になる数は 7 と -7 ですが、このうちプラスのほうの数はもちろん 7 です。ですから、$\sqrt{49}$ って 7 ですね。このように考えてきた人は、次のように計算を進めて、$\sqrt{7^2}$ の正体を見つけることができます。

$$\sqrt{7^2} = \sqrt{49} = 7$$

(2) $\sqrt{(-7)^2}$

まず、$\sqrt{\ }$ のマークの中に書いてある $(-7)^2$ という数のことを考えてみましょう。$(-7)^2$ って 49 と同じですよね。ですから、

$$\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49}$$

ということですよね。ここで、$\sqrt{49}$ という数の正体を言葉を使って説明してみると、

「$\sqrt{49}$ とは、2 乗すると 49 になる数のうち、プラスのほうの数のこと」

ということになりますよね。2 乗すると 49 になる数は 7 と -7 ですが、このうちプラスのほうの数はもちろん 7 です。ですから、$\sqrt{49}$ って 7 ですね。このように考えてきた人は、次のように計算を進めて、 $\sqrt{(-7)^2}$ の正体を見つけることができます。

$$\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$$

(3) $\sqrt{36}$

$\sqrt{36}$ という数の正体を言葉を使って説明してみると、

「$\sqrt{36}$ とは、2 乗すると 36 になる数のうち、プラスのほうの数のこと」

ということになりますよね。2 乗すると 36 になる数は 6 と -6 ですが、このうちプラスのほうの数はもちろん 6 です。つまり、

$$\sqrt{36} = 6$$

ですね。

(4) $-\sqrt{81}$

$-\sqrt{81}$ という数の正体を言葉を使って説明してみると、

「$-\sqrt{81}$ とは、2 乗すると 81 になる数のうち、マイナスのほうの数のこと」

ということになりますよね。2 乗すると 81 になる数は 9 と -9 ですが、このうちマイナスのほうの数はもちろん -9 です。つまり、

$$-\sqrt{81} = -9$$

ですね。

(5) $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$

$\sqrt{\dfrac{4}{9}}$ という数の正体を言葉を使って説明してみると、

「$\sqrt{\dfrac{4}{9}}$ とは、2 乗すると $\dfrac{4}{9}$ になる数のうち、プラスのほうの数のこと」

ということになりますよね。2 乗すると $\dfrac{4}{9}$ になる数は $\dfrac{2}{3}$ と $-\dfrac{2}{3}$ ですが、このうちプラスのほうの数はもちろん $\dfrac{2}{3}$ です。つまり、

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

ですね。

(6) $\sqrt{1}$

$\sqrt{1}$ という数の正体を言葉を使って説明してみると、

「$\sqrt{1}$ とは、2 乗すると 1 になる数のうち、プラスのほうの数のこと」

ということになりますよね。2 乗すると 1 になる数は 1 と -1 ですが、このうちプラスのほうの数はもちろん 1 です。つまり、

$$\sqrt{1} = 1$$

ですね。

(7) $-\sqrt{1}$

$-\sqrt{1}$ という数の正体を言葉を使って説明してみると、

「$-\sqrt{1}$ とは、2 乗すると 1 になる数のうち、マイナスのほうの数のこと」

ということになりますよね。2 乗すると 1 になる数は 1 と -1 ですが、このうちマイナスのほうの数はもちろん -1 です。つまり、

$$-\sqrt{1} = -1$$

ですね。

(8) $-\sqrt{7^2}$

まず、$\sqrt{}$ のマークの中に書いてある 7^2 という数のことを考えてみましょう。7^2 って 49 と同じですよね。ですから、

$$-\sqrt{7^2} = -\sqrt{49}$$

ということですよね。ここで、$-\sqrt{49}$ という数の正体を言葉を使って説明してみると、

「$-\sqrt{49}$ とは、2 乗すると 49 になる数のうち、マイナスのほうの数のこと」

ということになりますよね。2 乗すると 49 になる数は 7 と -7 ですが、このうちマイナスのほうの数はもちろん -7 です。ですから、$-\sqrt{49}$ って -7 ですね。このように考えてきた人は、次のように計算を進めて、 $-\sqrt{7^2}$ の正体を見つけることができます。

$$-\sqrt{7^2} = -\sqrt{49} = -7$$

本文へ戻る

問 9.

(1) 5 の平方根とは 2 乗すると 5 になる数のことです。ですから、

5 の平方根は $\sqrt{5}$ と $-\sqrt{5}$

です。

(2) 64 の平方根とは 2 乗すると 64 になる数のことです。ですから、

$$64 \text{ の平方根は } 8 \text{ と } -8$$

です。

(3) 100 の平方根とは 2 乗すると 100 になる数のことです。ですから、

$$100 \text{ の平方根は } 10 \text{ と } -10$$

です。

(4) $\dfrac{3}{5}$ の平方根とは 2 乗すると $\dfrac{3}{5}$ になる数のことです。ですから、

$$\frac{3}{5} \text{ の平方根は } \sqrt{\frac{3}{5}} \text{ と } -\sqrt{\frac{3}{5}}$$

です。

(5) 6 の平方根とは 2 乗すると 6 になる数のことです。ですから、

$$6 \text{ の平方根は } \sqrt{6} \text{ と } -\sqrt{6}$$

です。

(6) 25 の平方根とは 2 乗すると 25 になる数のことです。ですから、

$$25 \text{ の平方根は } 5 \text{ と } -5$$

です。

(7) 400 の平方根とは 2 乗すると 400 になる数のことです。ですから、

$$400 \text{ の平方根は } 20 \text{ と } -20$$

です。

(8) 0.49 の平方根とは 2 乗すると 0.49 になる数のことです。ですから、

$$0.49 \text{ の平方根は } 0.7 \text{ と } -0.7$$

です。

本文へ戻る

問 10. $\sqrt{}$ のマークがついている数を 2 乗してみるとどうなるか考える問題でしたね。

(1) $\left(\sqrt{7}\right)^2$

$\sqrt{7}$ とは、「2 乗すると 7 になる数のうちプラスのほうの数」のことですよね。だったらとにかく、$\sqrt{7}$ を 2 乗すると 7 になるに決まってますよね。つまり、

$$\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$$

となるわけですね。

(2) $\left(-\sqrt{15}\right)^2$

$-\sqrt{15}$ とは、「2 乗すると 15 になる数のうちマイナスのほうの数」のことですよね。だったらとにかく、$-\sqrt{15}$ を 2 乗すると 15 になるに決まってますよね。つまり、

$$\left(-\sqrt{15}\right)^2 = 15$$

となるわけですね。

(3) $\left(\sqrt{0.7}\right)^2$

$\sqrt{0.7}$ とは、「2 乗すると 0.7 になる数のうちプラスのほうの数」のことですよね。だったらとにかく、$\sqrt{0.7}$ を 2 乗すると 0.7 になるに決まってますよね。つまり、

$$\left(\sqrt{0.7}\right)^2 = 0.7$$

となるわけですね。

(4) $\left(\sqrt{9}\right)^2$

$\sqrt{9}$ とは、「2 乗すると 9 になる数のうちプラスのほうの数」のことですよね。だっ

たらとにかく、$\sqrt{9}$ を 2 乗すると 9 になるに決まってますよね。つまり、

$$\left(\sqrt{9}\right)^2 = 9$$

となるわけですね。

(5) $\left(\sqrt{\dfrac{3}{8}}\right)^2$

$\sqrt{\dfrac{3}{8}}$ とは、「2 乗すると $\dfrac{3}{8}$ になる数のうちプラスのほうの数」のことですよね。
だったらとにかく、$\sqrt{\dfrac{3}{8}}$ を 2 乗すると $\dfrac{3}{8}$ になるに決まってますよね。つまり、

$$\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

となるわけですね。

(6) $\left(\sqrt{\dfrac{9}{16}}\right)^2$

$\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ とは、「2 乗すると $\dfrac{9}{16}$ になる数のうちプラスのほうの数」のことですよね。
だったらとにかく、$\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ を 2 乗すると $\dfrac{9}{16}$ になるに決まってますよね。つまり、

$$\left(\sqrt{\frac{9}{16}}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

となるわけですね。

(7) $\left(\sqrt{0.01}\right)^2$

$\sqrt{0.01}$ とは、「2 乗すると 0.01 になる数のうちプラスのほうの数」のことですよね。

だったらとにかく、$\sqrt{0.01}$ を 2 乗すると 0.01 になるに決まってますよね。つまり、

$$\left(\sqrt{0.01}\right)^2 = 0.01$$

となるわけですね。

(8) $\left(-\sqrt{6}\right)^2$

$-\sqrt{6}$ とは、「2 乗すると 6 になる数のうちマイナスのほうの数」のことですよね。だったらとにかく、$-\sqrt{6}$ を 2 乗すると 6 になるに決まってますよね。つまり、

$$\left(-\sqrt{6}\right)^2 = 6$$

となるわけですね。

本文へ戻る

問 11. 各組の数の大小を調べ、不等号を使って答える問題でしたね。

(1) $\sqrt{13}$、$\sqrt{15}$

$\sqrt{13}$ と $\sqrt{15}$ はどちらも $\sqrt{\ }$ のマークがついているとてもわかりにくい数です。そこで、29 ページで学んだ「注目することその 1」と「注目することその 2」をうまく活用して考えることにします。

まず、「注目することその 2」を活用してみます。このとき、今気にしている 2 つの数が、両方ともプラスなのかどうか確認しておかなくてはなりません。だって、「注目することその 2」はプラスの数が 2 つあるときの話でしたよね。

$\sqrt{13}$ とは、2 乗すると 13 になる数のうちプラスのもの

ですよね。また、

$\sqrt{15}$ とは、2 乗すると 15 になる数のうちプラスのもの

ですよね。ですから、とにかく $\sqrt{13}$ と $\sqrt{15}$ はどちらもプラスの数ですね。これで安心して「注目することその 2」を活用できます。それによると、「2 つのプラスの数の大小をそのまま比べられないんだったら、それぞれを 2 乗した数で比べればいいじゃん」ということでしたね。では、$\sqrt{13}$ と $\sqrt{15}$ をそれぞれ 2 乗してみましょ

う。すると、

$$\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$$

$$\left(\sqrt{15}\right)^2 = 15$$

となりますよね。(「注目することその 1」に書いてあったように、$\sqrt{\ }$ のマークのない数になりましたね。)

というわけで、$\sqrt{13}$ と $\sqrt{15}$ をそのまま比べる代わりに、13 と 15 を比べればよいわけです。13 と 15 では、どちらが大きいのかすぐ分かりますよね。もちろん 15 ですね。ということは、2 乗する前では、$\sqrt{15}$ のほうが $\sqrt{135}$ より大きかったということになりますね。これで解決です。

不等号を使って答えを書いておくと、

$$\sqrt{13} < \sqrt{15}$$

ということです。

(2) 4、 $\sqrt{21}$

4 は分かりやすい数ですが、$\sqrt{21}$ は $\sqrt{\ }$ のマークがついているとてもわかりにくい数です。そこで、29 ページで学んだ「注目することその 1」と「注目することその 2」をうまく活用して考えることにします。

まず、「注目することその 2」を活用してみます。このとき、今気にしている 2 つの数が、両方ともプラスなのかどうか確認しておかなくてはなりません。だって、「注目することその 2」はプラスの数が 2 つあるときの話でしたよね。

4 はどう考えてもプラスの数

ですよね。また、

$\sqrt{21}$ とは、2 乗すると 21 になる数のうちプラスのもの

ですよね。ですから、とにかく 4 と $\sqrt{21}$ はどちらもプラスの数ですね。これで安心して「注目することその 2」を活用できます。それによると、「2 つのプラスの数の大小をそのまま比べられないんだったら、それぞれを 2 乗した数で比べればいいじゃん」ということでしたね。では、4 と $\sqrt{21}$ をそれぞれ 2 乗してみましょう。すると、

$$(4)^2 = 16$$

$$\left(\sqrt{21}\right)^2 = 21$$

となりますよね。(「注目することその 1」に書いてあったように、$\sqrt{\ }$ のマークのない数になりましたね。)

というわけで、4 と $\sqrt{21}$ をそのまま比べる代わりに、16 と 21 を比べればよいわけです。16 と 21 では、どちらが大きいのかすぐ分かりますよね。もちろん 21 ですね。ということは、2 乗する前では、$\sqrt{21}$ のほうが 4 より大きかったということになりますね。これで解決です。

不等号を使って答えを書いておくと、

$$4 < \sqrt{21}$$

ということです。

(3) 5、 $\sqrt{23}$

5 は分かりやすい数ですが、$\sqrt{23}$ は $\sqrt{\ }$ のマークがついているとてもわかりにくい数です。そこで、29 ページで学んだ「注目することその 1」と「注目することその 2」をうまく活用して考えることにします。

まず、「注目することその 2」を活用してみます。このとき、今気にしている 2 つの数が、両方ともプラスなのかどうか確認しておかなくてはなりません。だって、「注目することその 2」はプラスの数が 2 つあるときの話でしたよね。

5 はどう考えてもプラスの数

ですよね。また、

$\sqrt{23}$ とは、2 乗すると 23 になる数のうちプラスのもの

ですよね。ですから、とにかく 5 と $\sqrt{23}$ はどちらもプラスの数ですね。これで安心して「注目することその 2」を活用できます。それによると、「2 つのプラスの数の大小をそのまま比べられないんだったら、それぞれを 2 乗した数で比べればいいじゃん」ということでしたね。では、5 と $\sqrt{23}$ をそれぞれ 2 乗してみましょう。すると、

$$(5)^2 = 25$$

$$\left(\sqrt{23}\right)^2 = 23$$

となりますよね。(「注目することその 1」に書いてあったように、$\sqrt{\ }$ のマークのない数になりましたね。)

というわけで、5 と $\sqrt{23}$ をそのまま比べる代わりに、25 と 23 を比べればよいわけです。25 と 23 では、どちらが大きいのかすぐ分かりますよね。もちろん 25 ですね。ということは、2 乗する前では、5 のほうが $\sqrt{23}$ より大きかったということになりますね。これで解決です。

不等号を使って答えを書いておくと、

$$\sqrt{21} < 5$$

ということです。

本文へ戻る

問 12. 各組の数の大小を調べ、不等号を使って答える問題でしたね。

(1) $\sqrt{13}$、 $-\sqrt{15}$

もうおわかりだと思いますが、 $\sqrt{13}$ はプラスの数で $-\sqrt{15}$ はマイナスの数です

ね。プラスの数はマイナスの数より大きいのですから、$\sqrt{13}$ のほうが $-\sqrt{15}$ より大きいですよね。これで解決です。

不等号を使って答えを書いておくと、

$$-\sqrt{15} < \sqrt{13}$$

ということです。

(2) -4、 $-\sqrt{21}$

-4 は分かりやすい数ですが、$-\sqrt{21}$ は $\sqrt{\ }$ のマークがついているとてもわかりにくい数です。そこで、、29 ページで学んだ「注目することその 1」と「注目することその 2」をうまく活用して考えたいと思います。しかしちょっと困ったことがあります。「注目することその 2」はプラスの数が 2 つあるときの話でしたよね。今考えようとしている 2 つの数はマイナスの数です。ですから、「注目することその 2」をただちに頼ることはできません。そこで一旦、マイナスのマークが付いていることは忘れることにして、4 と $\sqrt{21}$ ではどちらが大きいのか考えてみます。

「注目することその 2」によると、「2 つのプラスの数の大小をそのまま比べられないんだったら、それぞれを 2 乗した数で比べればいいじゃん」ということでしたね。では、4 と $\sqrt{21}$ をそれぞれ 2 乗してみましょう。すると、

$$(4)^2 = 16$$
$$\left(\sqrt{21}\right)^2 = 21$$

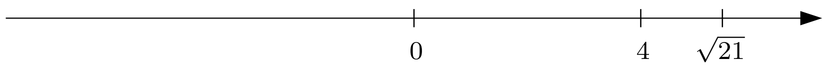
となりますよね。(「注目することその 1」に書いてあったように、$\sqrt{\ }$ のマークのない数になりましたね。)

というわけで、4 と $\sqrt{21}$ をそのまま比べる代わりに、16 と 21 を比べればよいわけです。16 と 21 では、どちらが大きいのかすぐ分かりますよね。もちろん 21 ですね。ということは、2 乗する前では、$\sqrt{21}$ のほうが 4 より大きかったということに

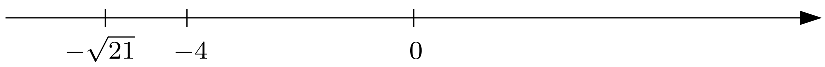
なりますね。

では、今出た結論をもとに、-4 と $-\sqrt{21}$ ではどちらが大きいのか数直線で考えることにしましょう。

まず、プラスの数である 4 とプラスの数である $\sqrt{21}$ では、$\sqrt{21}$ のほうが大きいということが分かったのですから、数直線の上では $\sqrt{21}$ のほうが 4 より右にあることになります。ですから、0 からの距離は、$\sqrt{21}$ のほうが 4 より遠いことになります。次の図を見てください。



そうすると、2 つのマイナスの数 -4 と $-\sqrt{21}$ では、0 からの距離は、$-\sqrt{21}$ のほうが -4 より遠いということになります。次の図を見てください。



ということは、-4 のほうが $-\sqrt{21}$ より右にあることになるので、-4 のほうが $-\sqrt{21}$ より大きいということになります。これで解決ですね。

不等号を使って答えを書いておくと、

$$-\sqrt{21} < -4$$

ということです。

(3) -5、 $\sqrt{23}$

-5 は分かりやすい数ですが、$-\sqrt{23}$ は $\sqrt{\ }$ のマークがついているとてもわかりにくい数です。そこで、、29 ページで学んだ「注目することその 1」と「注目することその 2」をうまく活用して考えたいと思います。しかしちょっと困ったことがあります。「注目することその 2」はプラスの数が 2 つあるときの話でしたよね。今

考えようとしている 2 つの数はマイナスの数です。ですから、「注目することその 2」をただちに頼ることはできません。そこで一旦、マイナスのマークが付いていることは忘れることにして、5 と $\sqrt{23}$ ではどちらが大きいのか考えてみます。

「注目することその 2」によると、「2 つのプラスの数の大小をそのまま比べられないんだったら、それぞれを 2 乗した数で比べればいいじゃん」ということでしたね。では、5 と $\sqrt{23}$ をそれぞれ 2 乗してみましょう。すると、

$$(5)^2 = 25$$

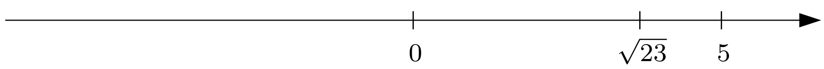
$$\left(\sqrt{23}\right)^2 = 23$$

となりますよね。(「注目することその 1」に書いてあったように、$\sqrt{\ }$ のマークのない数になりましたね。)

というわけで、5 と $\sqrt{23}$ をそのまま比べる代わりに、25 と 23 を比べればよいわけです。25 と 23 では、どちらが大きいのかすぐ分かりますよね。もちろん 25 ですね。ということは、2 乗する前では、5 のほうが $\sqrt{23}$ より大きかったということになりますね。

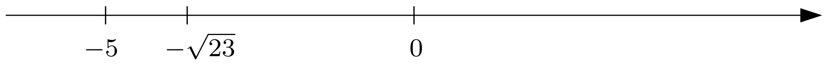
では、今出た結論をもとに、-5 と $-\sqrt{23}$ ではどちらが大きいのか数直線で考えることにしましょう。

まず、プラスの数である 5 とプラスの数である $\sqrt{23}$ では、5 のほうが大きいということが分かったのですから、数直線の上では 5 のほうが $\sqrt{23}$ より右にあることになります。ですから、0 からの距離は、5 のほうが $\sqrt{23}$ より遠いことになります。次の図を見てください。



そうすると、2 つのマイナスの数 -5 と $-\sqrt{23}$ では、0 からの距離は、-5 のほうが

$-\sqrt{23}$ より遠いということになります。次の図を見てください。



ということは、$-\sqrt{23}$ のほうが -5 より右にあることになるので、$-\sqrt{23}$ のほうが -5 より大きいということになります。これで解決ですね。

不等号を使って答えを書いておくと、

$$-5 < -\sqrt{26}$$

ということです。

本文へ戻る

問 13. 各組の数の大小を調べ、不等号を使って答えるのでしたね。例 6 や問 12 の説明がよく理解できた人にはくどい説明は必要ないでしょう。答えだけ書いておきます。（実はこの問題には 1 つだけ等号で答えなくてはならない問題が含まれています。）

(1) $\sqrt{22} < \sqrt{24}$　(2) $-\sqrt{8} < 3$　(3) $-5 < -\sqrt{24}$

(4) $\sqrt{0.01} = 0.1$　(5) $-\sqrt{17} < -\sqrt{12}$　(6) $2 < \sqrt{5} < 3$

本文へ戻る

問 14. $\sqrt{}$ のマークのついた数のおよその値について考える問題でしたね。

(1) 『$\sqrt{2}$ という数のおよその値を小数第 1 位まで調べなさい。』ということでした。

- $\sqrt{2}$ という数の 1 の位を調べます。

  1 と $\sqrt{2}$ はどちらが大きい？

  どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

$$1^2 = 1$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

となります。1 より 2 の方が大きいわけですから、2 乗する前の 1 と $\sqrt{2}$ では、$\sqrt{2}$ のほうが大きいということですよね。

不等号を使って書くと、

$$1 < \sqrt{2}$$

ということです。

<u>2 と $\sqrt{2}$ はどちらが大きい？</u>

2 と $\sqrt{2}$ はどちらが大きいか考えてみましょう。どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

$$2^2 = 4$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

となります。2 は 4 より小さいわけですから、2 乗する前の 2 と $\sqrt{2}$ では、$\sqrt{2}$ のほうが小さいということですよね。

不等号を使って書くと、

$$\sqrt{2} < 2$$

ということです。

ここまでの調査で、

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

であることがわかったのですから、$\sqrt{2}$ は、1.□□□$\cdots$（いちてんナントカナントカナントカ $\cdots$）という数であるということになります。つまり、$\sqrt{2}$ という数の 1 の位は 1 であることがわかりました。

- $\sqrt{2}$ という数の小数第 1 位を調べます。

  <u>1.1 と $\sqrt{2}$ はどちらが大きい？</u>

どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

$$1.1^2 = 1.21$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

となります。1.21 より 2 の方が大きいわけですから、2 乗する前の 1.1 と $\sqrt{2}$ では、$\sqrt{2}$ のほうが大きいということですよね。

不等号を使って書くと、

$$1.1 < \sqrt{2}$$

ということです。

<u>1.2 と $\sqrt{2}$ はどちらが大きい？</u>

どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

$$1.2^2 = 1.44$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

となります。1.21 より 2 の方が大きいわけですから、2 乗する前の 1.2 と $\sqrt{2}$ では、$\sqrt{2}$ のほうが大きいということですよね。

不等号を使って書くと、

$$1.2 < \sqrt{2}$$

ということです。

<u>1.3 と $\sqrt{2}$ はどちらが大きい？</u>

どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

$$1.3^2 = 1.69$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

となります。1.69 より 2 の方が大きいわけですから、2 乗する前の 1.3 と $\sqrt{2}$ では、$\sqrt{2}$ のほうが大きいということですよね。

不等号を使って書くと、

$$1.3 < \sqrt{2}$$

ということです。

1.4 と $\sqrt{2}$ はどちらが大きい？

どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

$$1.4^2 = 1.96$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

となります。1.96 より 2 の方が大きいわけですから、2 乗する前の 1.4 と $\sqrt{2}$ では、$\sqrt{2}$ のほうが大きいということですよね。

不等号を使って書くと、

$$1.4 < \sqrt{2}$$

ということです。

1.5 と $\sqrt{2}$ はどちらが大きい？

どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

$$1.5^2 = 2.25$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

となります。2.25 より 2 の方が小さいわけですから、2 乗する前の 1.5 と $\sqrt{2}$ では、$\sqrt{2}$ のほうが小さいということですよね。

不等号を使って書くと、

$$\sqrt{2} < 1.5$$

ということです。

ここまでの調査で、

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$$

であることがわかったのですから、$\sqrt{2}$ は、1.4□□□…（いちてんよんナントカナントカナントカ…）という数であるということになります。つまり、$\sqrt{2}$ という数の小数第一位は 4 であることがわかりました。

(2) 『$\sqrt{3}$ という数のおよその値を小数第 2 位まで調べなさい。』ということでした。

- $\sqrt{3}$ という数の 1 の位を調べます。

  <u>1 と $\sqrt{3}$ はどちらが大きい？</u>

  どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

  $$1^2 = 1$$
  $$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

  となります。1 より 3 の方が大きいわけですから、2 乗する前の 1 と $\sqrt{3}$ では、$\sqrt{3}$ のほうが大きいということですよね。

  不等号を使って書くと、

  $$1 < \sqrt{3}$$

  ということです。

  <u>2 と $\sqrt{3}$ はどちらが大きい？</u>

  どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

  $$2^2 = 4$$
  $$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

となります。4 より 3 の方が小さいわけですから、2 乗する前の 2 と $\sqrt{3}$ では、$\sqrt{3}$ のほうが小さいということですよね。

不等号を使って書くと、

$$\sqrt{3} < 2$$

ということです。

ここまでの調査で、

$$1 < \sqrt{3} < 2$$

であることがわかったのですから、$\sqrt{3}$ は、1.□□□···（いちてんナントカナントカナントカ ···）という数であるということになります。つまり、$\sqrt{3}$ という数の 1 の位は 1 であることがわかりました。

- $\sqrt{3}$ という数の小数第 1 位を調べます。

  1.1 と $\sqrt{3}$ はどちらが大きい？

  どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

$$1.1^2 = 1.21$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

となります。1.21 より 3 の方が大きいわけですから、2 乗する前の 1.1 と $\sqrt{3}$ では、$\sqrt{3}$ のほうが大きいということですよね。

不等号を使って書くと、

$$1.1 < \sqrt{3}$$

ということです。

1.2 と $\sqrt{3}$ はどちらが大きい？

どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

$$1.2^2 = 1.44$$

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

となります。1.21 より 3 の方が大きいわけですから、2 乗する前の 1.2 と $\sqrt{3}$ では、$\sqrt{3}$ のほうが大きいということですよね。

不等号を使って書くと、

$$1.2 < \sqrt{3}$$

ということです。

1.3 と $\sqrt{3}$ はどちらが大きい？

どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

$$1.3^2 = 1.69$$

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

となります。1.69 より 3 の方が大きいわけですから、2 乗する前の 1.3 と $\sqrt{3}$ では、$\sqrt{3}$ のほうが大きいということですよね。

不等号を使って書くと、

$$1.3 < \sqrt{3}$$

ということです。

1.4 と $\sqrt{3}$ はどちらが大きい？

どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

$$1.4^2 = 1.96$$

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

となります。1.96 より 3 の方が大きいわけですから、2 乗する前の 1.4 と $\sqrt{3}$ では、$\sqrt{3}$ のほうが大きいということですよね。

不等号を使って書くと、

$$1.4 < \sqrt{3}$$

ということです。

1.5 と $\sqrt{3}$ はどちらが大きい？

どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

$$1.5^2 = 2.25$$

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

となります。2.25 より 3 の方が大きいわけですから、2 乗する前の 1.5 と $\sqrt{3}$ では、$\sqrt{3}$ のほうが大きいということですよね。

不等号を使って書くと、

$$1.5 < \sqrt{3}$$

ということです。

1.6 と $\sqrt{3}$ はどちらが大きい？

どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

$$1.6^2 = 2.56$$

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

となります。2.565 より 3 の方が大きいわけですから、2 乗する前の 1.6 と $\sqrt{3}$ では、$\sqrt{3}$ のほうが大きいということですよね。

不等号を使って書くと、

$$1.6 < \sqrt{3}$$

ということです。

<u>1.7 と $\sqrt{3}$ はどちらが大きい？</u>

どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

$$1.7^2 = 2.89$$

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

となります。2.89 より 3 の方が大きいわけですから、2 乗する前の 1.7 と $\sqrt{3}$ では、$\sqrt{3}$ のほうが大きいということですよね。

不等号を使って書くと、

$$1.7 < \sqrt{3}$$

ということです。

<u>1.8 と $\sqrt{3}$ はどちらが大きい？</u>

どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

$$1.8^2 = 3.24$$

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

となります。3.24 より 3 の方が小さいわけですから、2 乗する前の 1.8 と $\sqrt{3}$ では、$\sqrt{3}$ のほうが小さいということですよね。

不等号を使って書くと、

$$\sqrt{3} < 1.8$$

ということです。

ここまでの調査で、

$$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$$

であることがわかったのですから、$\sqrt{3}$ は、1.7□□□ $\cdots$（いちてんななナント

カナントカナントカ $\cdots$）という数であるということになります。つまり、$\sqrt{3}$ という数の小数第一位は 7 であることがわかりました。

- $\sqrt{3}$ という数の小数第二位を調べます。

<u>1.71 と $\sqrt{3}$ はどちらが大きい？</u>

どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

$$1.71^2 = 2.9241$$

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

となります。2.9241 より 3 の方が大きいわけですから、2 乗する前の 1.71 と $\sqrt{3}$ では、$\sqrt{3}$ のほうが大きいということですよね。

不等号を使って書くと、

$$1.71 < \sqrt{3}$$

ということです。

<u>1.72 と $\sqrt{3}$ はどちらが大きい？</u>

どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

$$1.72^2 = 2.9584$$

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

となります。2.9584 より 3 の方が大きいわけですから、2 乗する前の 1.72 と $\sqrt{3}$ では、$\sqrt{3}$ のほうが大きいということですよね。

不等号を使って書くと、

$$1.72 < \sqrt{3}$$

ということです。

<u>1.73 と $\sqrt{3}$ はどちらが大きい？</u>

どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

$$1.73^2 = 2.9929$$
$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

となります。2.9929 より 3 の方が大きいわけですから、2 乗する前の 1.73 と $\sqrt{3}$ では、$\sqrt{3}$ のほうが大きいということですよね。

不等号を使って書くと、

$$1.73 < \sqrt{3}$$

ということです。

<u>1.74 と $\sqrt{3}$ はどちらが大きい？</u>

どちらもプラスの数ですから 2 乗して比べるテクニックが使えます。

$$1.74^2 = 3.0276$$
$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

となります。3.0276 より 3 の方が小さいわけですから、2 乗する前の 1.74 と $\sqrt{3}$ では、$\sqrt{3}$ のほうが小さいということですよね。

不等号を使って書くと、

$$\sqrt{3} < 1.74$$

ということです。

ここまでの調査で、

$$1.73 < \sqrt{3} < 1.74$$

であることがわかったのですから、$\sqrt{3}$ は、1.73□□□ $\cdots$（いちてんななさんナントカナントカナントカ $\cdots$）という数であるということになります。つまり、$\sqrt{3}$ という数の小数第第二位は 3 であることがわかりました。 本文へ戻る

問 15. 素数かどうかを判定する問題でしたね。41 ページの「素数ってなに？」の説明と 41 ページの例 8 の説明がきちんと理解出来た人のために、答えだけ書いておきます。

(1) 1 は素数ではありません。

(2) 2 は素数です。

(3) 3 は素数です。

(4) 4 は素数ですはありません。

(5) 5 は素数です。

(6) 8 は素数ではありません。

(7) 9 は素数ではありません。

(8) 10 は素数ではありません。

(9) 11 は素数です。

(10) 12 は素数ではありません。

(11) 13 は素数です。

(12) 14 は素数ではありません。

本文へ戻る

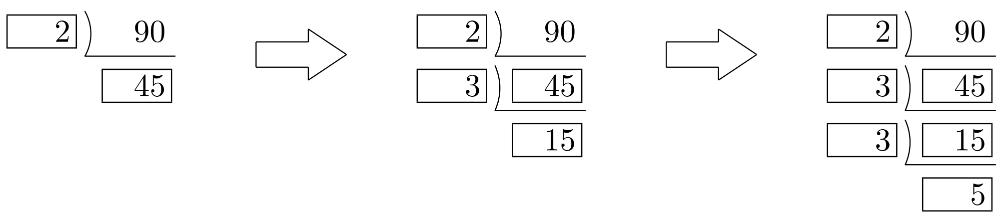
問 16. 50 より小さい素数を全てさがすと

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$$

となります。

本文へ戻る

問 17. 『90 はどんな素数を何個かけてできているのか調べるために、次のような計算をします。空欄に正しい数を書きなさい。』という問題でしたね。



この計算から、

$$90 = \boxed{2} \times \boxed{3} \times \boxed{3} \times \boxed{5}$$

であること、つまり、

90 は $\boxed{2}$ という素数を $\boxed{1}$ 個、$\boxed{3}$ という素数を $\boxed{2}$ 個、
$\boxed{5}$ という素数を $\boxed{1}$ 個かけてできている

ということがわかりました。

本文へ戻る

問 18. 素因数分解をする問題でしたね。素因数分解の仕方は、例**??**、例 10、例**??**で詳しく学んでいます。ですからここでは答えだけ書いておきます。

(1) $50 = 2 \times 5^2$

(2) $66 = 2 \times 3 \times 11$

(3) $52 = 2^2 \times 13$

(4) $121 = 11^2$

(5) $84 = 2^2 \times 3 \times 7$

(6) $143 = 11 \times 13$

(7) $350 = 2 \times 5^2 \times 7$

(8) $693 = 3^2 \times 7 \times 11$

(9) $245 = 5 \times 7^2$

(10) $243 = 3^5$

本文へ戻る

問 19. ある数 a の平方根とは、二乗すると a になる数のことでしたね。a が小さい数の時は、わりと簡単に平方根を見つけることができますが、a が大きい数の時は、素因数分解を利用したりすると平方根を見つけられることがあるのでした。どうすればよいのかもうお分かりだと思いますが、忘れてしまった人は、例題 3 の解答を読んでください。

(1) 9 の平方根とは、2 乗すると 9 になる数のことです。ですから、

$$9 \text{ の平方根は } 3 \text{ と } -3$$

です。

(2) 16 の平方根とは、2 乗すると 16 になる数のことです。ですから、

16 の平方根は 4 と -4

です。

(3) 25 の平方根とは、2 乗すると 25 になる数のことです。ですから、

25 の平方根は 5 と -5

です。

(4) 36 の平方根とは、2 乗すると 36 になる数のことです。ですから、

36 の平方根は 6 と -6

です。

(5) 144 の平方根とは、2 乗すると 144 になる数のことです。144 は少し大きい数なので、すぐには見つけられない人もいるかもしれません。そんな時は素因数分解を活用すればよいのでしたね。

では右を見てください。これは 144 の素因数分解を求めている計算です。

$$\begin{array}{r|r} 2 & 144 \\ \hline 2 & 72 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

この結果を見ると、144 は

144 は 2 という素数を 4 個、3 という素数を 2 個かけてできている

ということがわかります。平方根を探すには素数の数を半分にして、

2 という素数を 2 個、3 という素数を 1 個かける

と良いのでしたね。計算してみると

$$2^2 \times 3 = 12$$

となるわけですから、144 の平方根として 12 が見つかりました。もちろん、144 のもうひとつの平方根は -12 ですね。

というわけで、

$$144 \text{ の平方根は } 12 \text{ と } -12$$

です。（念のため\$ 12 や -12 を 2 乗して 144 になるかどうか確認してみてください。）

(6) 225 の平方根とは、2 乗すると 225 になる数のことです。225 は少し大きい数なので、すぐには見つけられない人もいるかもしれません。そんな時は素因数分解を活用すればよいのでしたね。

では右を見てください。これは 225 の素因数分解を求めている計算です。

$$\begin{array}{r|r} 3 & 225 \\ \hline 3 & 75 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array}$$

この結果を見ると、225 は

225 は 3 という素数を 2 個、5 という素数を 2 個かけてできている

ということがわかります。平方根を探すには素数の数を半分にして、

3 という素数を 1 個、5 という素数を 1 個かける

と良いのでしたね。計算してみると

$$3 \times 5 = 15$$

となるわけですから、225 の平方根として 15 が見つかりました。もちろん、225 のもうひとつの平方根は -15 ですね。

というわけで、

$$225 \text{ の平方根は } 15 \text{ と } -15$$

です。（念のため $ 15 や -15 を 2 乗して 225 になるかどうか確認してみてください。）

(7) 784 の平方根とは、2 乗すると 784 になる数のことです。784 は結構大きい数なので、すぐには見つけられる人は少ないでしょう。そこで素因数分解を活用することにします。

では右を見てください。これは 784 の素因数分解を求めている計算です。

$$\begin{array}{r|r}2 & 784 \\ \hline 2 & 392 \\ \hline 2 & 196 \\ \hline 2 & 98 \\ \hline 7 & 49 \\ \hline & 7\end{array}$$

この結果を見ると、784 は

784 は 2 という素数を 4 個、7 という素数を 2 個かけてできている

ということがわかります。平方根を探すには素数の数を半分にして、

2 という素数を 2 個、7 という素数を 1 個かける

と良いのでしたね。計算してみると

$$2^2 \times 7 = 28$$

となるわけですから、784 の平方根として 28 が見つかりました。もちろん、784 のもうひとつの平方根は -28 ですね。

というわけで、

784 の平方根は 28 と -28

です。（念のため $ 28 や -28 を 2 乗して 784 になるかどうか確認してみてください。）

(8) 2 の平方根とは、2 乗すると 2 になる数のことです。慣れ親しんだ数の中には「2 乗すると 2 になる数」なんてありませんが、そういう数はちゃんとあるのでしたね。そこで、$\sqrt{\ }$ のマークを使うことにしたのでした。というわけで、こんな時は

$$2\text{ の平方根は }\sqrt{2}\text{ と }-\sqrt{2}$$

と答えるしかないのでしたね。

(9) 1764 の平方根とは、2 乗すると 1764 になる数のことです。1764 は結構大きい数なので、すぐには見つけられる人は少ないでしょう。そこで素因数分解を活用することにします。

では右を見てください。これは 1764 の素因数分解を求めている計算です。

$$\begin{array}{r|r} 2 & 1764 \\ \hline 2 & 882 \\ \hline 3 & 441 \\ \hline 3 & 147 \\ \hline 7 & 49 \\ \hline & 7 \end{array}$$

この結果を見ると、1764 は

1764 は 2 という素数

を 2 個、3 という素数を 2 個、7 という素数を 2 個かけてできている

ということがわかります。平方根を探すには素数の数を半分にして、

2 という素数を 1 個、3 という素数を 1 個、7 という素数を 1 個かける

と良いのでしたね。計算してみると

$$2 \times 3 \times 7 = 42$$

となるわけですから、1764 の平方根として 42 が見つかりました。もちろん、1764 のもうひとつの平方根は -42 ですね。

というわけで、

$$1764\text{ の平方根は }42\text{ と }-42$$

です。（念のため \$ 42 や -42 を 2 乗して 1764 になるかどうか確認してみてください。）

(10) 121 の平方根とは、2 乗すると 121 になる数のことです。121 は少し大きい数なので、すぐには見つけられない人もいるかもしれません。そんな時は素因数分解を活用すればよいのでしたね。

では右を見てください。これは 121 の素因数分解を求めている計算です。あー、この結果を見ると、もうくどくどと考える必要はないですよね。

$$
\begin{array}{r|l}
11 & 121 \\ \hline
 & 11
\end{array}
$$

121 の平方根は 11 と -11

です。

本文へ戻る

問 20. 『何かしらの自然数の 2 乗になっている自然数を素因数分解すると、その素因数分解の中に現れるそれぞれの素数の個数は、どの素数も必ず偶数個である。』という重要な事実を学びましたね。（このことについて不安がある人は、まずもう一度、例題 4 の解答を読み直してしっかり自分の頭で考えてください。）

(1) 『108 にできるだけ小さい自然数をかけて、その結果を何かしらの自然数の 2 乗になっている数にしたいと思います。どんな自然数をかければよいですか？またその結果作られる数は、どんな自然数の 2 乗になっていますか？』という問題でしたね。

108 という自然数がどんな素数をいくつかけてできているか調べるために素因数分解してみます。すると右のようになります。これを見ると、

$$
\begin{array}{r|r}
2 & 108 \\ \hline
2 & 54 \\ \hline
3 & 27 \\ \hline
3 & 9 \\ \hline
 & 3
\end{array}
$$

108 には 2 という素数が偶数個、3 という素数が奇数個入っている

ということがわかります。

ということは、108 にできるだけ小さい自然数をかけて、その結果を何かしらの自然数の 2 乗になっている数にするには 3 を 1 個だけかけるのが良いですね。

そうすると、

$$\begin{aligned} 108 \times 3 &= (2^2 \times 3^3) \times 3 \\ &= 2^2 \times 3^4 \\ &= (2^1 \times 3^2)^2 \\ &= 18^2 \end{aligned}$$

となるわけです。

以上で、

> 108 にできるだけ小さい自然数をかけて、その結果を何かしらの自然数の 2 乗になっている数にするには 3 を 1 個だけかけるのが良い。その結果作られる数は 18 という自然数の 2 乗になる。

ということがわかりました。

(2) 『216 をできるだけ小さい自然数でわって、その結果を何かしらの自然数の 2 乗になっている数にしたいと思います。どんな自然数でわればよいですか？またその結果作られる数は、どんな自然数の 2 乗になっていますか？』という問題でしたね。

216 という自然数がどんな素数をいくつかけてできているか調べるために素因数分解してみます。すると右のようになります。これを見ると、

$$\begin{array}{r|r} 2 & 216 \\ \hline 2 & 108 \\ \hline 2 & 54 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

> 216 には 2 という素数が奇数個、3 という素数が奇数個入っている

ということがわかります。

ということは、216 をできるだけ小さい自然数でわって、その結果を何かしらの自然数の 2 乗になっている数にするには、2 を 1 個、3 を 1 個減らすことをたくらめば良いので、2×3 つまり 6 でわれば良いですね。

そうすると、

$$
\begin{aligned}
216 \div 6 &= (2^3 \times 3^3) \div (2 \times 3) \\
&= \frac{2^3 \times 3^3}{2 \times 3} \\
&= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \times 2 \times 2 \times \overset{1}{\cancel{3}} \times 3 \times 3}{\underset{1}{\cancel{2}} \times \underset{1}{\cancel{3}}} \\
&= 2^2 \times 3^2 \\
&= (2^1 \times 3^1)^2 \\
&= 6^2
\end{aligned}
$$

となるわけです。

以上で、

> 216 をできるだけ小さい自然数でわって、その結果を何かしらの自然数の 2 乗になっている数にするには 6 で割れば良い。その結果作られる数は 6 という自然数の 2 乗になる。

ということがわかりました。

本文へ戻る

問 21. 有理数であるのか無理数であるのか見分ける問題でしたね。

(1) -8 という数は有理数です。どうしてなのか順を追って説明します。まず、 -8 という数は見かけを $\dfrac{-8}{1}$ に変えることができますね。そうすると、この数は、2 つの整数 -8 と 1 を使って $\dfrac{a}{b}$ の形になっているわけですね。ですから -8 という数は有理数なのです。

(2) 5.21 という数は有理数です。どうしてなのか順を追って説明します。まず、 5.21 という数は見かけを $\dfrac{521}{100}$ に変えることができますね。そうすると、この数は、2 つの整数 521 と 1 を使って $\dfrac{a}{b}$ の形になっているわけですね。ですから 5.21 とい

う数は有理数なのです。

(3) $\sqrt{5}$ という数は無理数です。実は昔の人がさんざん悩んで考えた結果、「$\sqrt{5}$ という数はどんなにがんばっても、絶対に、2 つの整数 a、b を使って $\dfrac{a}{b}$ の形に見かけを変えることはできない。」ということが証明されてしまったのです。ですから、$\sqrt{5}$ は無理数です。（ここでは残念ながらその証明をお見せするわけには行きません。少し難しいですから。）

(4) $\sqrt{36}$ という数は有理数です。どうしてなのか順を追って説明します。まず、$\sqrt{36}$ という数は 6 と同じ数なので見かけを $\dfrac{6}{1}$ に変えることができますね。そうすると、この数は、2 つの整数 6 と 1 を使って $\dfrac{a}{b}$ の形になっているわけですね。ですから $\sqrt{36}$ という数は有理数なのです。

(5) $-\dfrac{4}{5}$ という数は有理数です。どうしてなのか順を追って説明します。まず、$-\dfrac{4}{5}$ という数は見かけを $\dfrac{-4}{5}$ に変えることができますね。そうすると、この数は、2 つの整数 -4 と 5 を使って $\dfrac{a}{b}$ の形になっているわけですね。ですから $-\dfrac{4}{5}$ という数は有理数なのです。

(6) $-\sqrt{3}$ という数は無理数です。実は昔の人がさんざん悩んで考えた結果、「$-\sqrt{3}$ という数はどんなにがんばっても、絶対に、2 つの整数 a、b を使って $\dfrac{a}{b}$ の形に見かけを変えることはできない。」ということが証明されてしまったのです。ですから、$-\sqrt{3}$ は無理数です。（ここでは残念ながらその証明をお見せするわけには行きません。少し難しいですから。）

(7) 2π は無理数です。

この数は、昔の人の努力によって、「どんなにがんばっても、絶対に、2 つの整数 a、b を使って $\dfrac{a}{b}$ の形に見かけを変えることはできない。」ということが証明されてしまったのです。ですから 2π は無理数です。（ここでは残念ながらその証明をお見せするわけには行きません。かなり難しいですから。）

(8) $0.333\cdots$ という数は有理数です。どうしてなのか順を追って説明します。まず、$0.333\cdots$ という数は見かけを $\dfrac{1}{3}$ に変えることができますね。（本当ですよ。筆算で、$1 \div 3$ を計算してみてください。）そうすると、この数は、2 つの整数 1 と 3 を

使って $\dfrac{a}{b}$ の形になっているわけですね。ですから $0.333\cdots$ という数は有理数なのです。

本文へ戻る

問 22. 『例題 5 の解答と同じように考えて、$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ と $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ は同じ数であるということを証明しなさい。』という問題でしたね。

（証明）

まず、そもそも $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ って何なのか思い出してみましょう。$\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ とは、「2 乗すると $\dfrac{3}{5}$ になる数のうちプラスのほうの数」でしたね。つまり、

- 2 乗すると $\dfrac{3}{5}$ になる。
- プラスの数である。

という 2 つの条件のとおりになっている数が $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ なのですね。

ところで今ここに、「正体のよくわからない数」があるとします。そして、あなたは、この数が $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ と同じ数なのかどうか悩んでいるとします。でも、あなたは、$\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ とは、「2 乗すると $\dfrac{3}{5}$ になる数のうちプラスのほうの数」、つまり、

- 2 乗すると $\dfrac{3}{5}$ になる。
- プラスの数である。

という 2 つの条件のとおりになっている数であるということを知っているわけです。だったら、この「正体のよくわからない数」が $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ と同じ数なのかどうか判定するには、「その数は 2 乗すると $\dfrac{3}{5}$ になるのか」ということと、「その数はプラスの数なのか」ということを調べてみればよいですね。もし、この「正体のよくわからない数」が、この 2 つの条件をクリアするなら、「正体のわからない数」の正体は $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ であるということになりますよね。ですから、$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ という数がこの 2 つの条件をクリアできれば、$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ と $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ は同じ数であると断言できるわけです。では調べてみることにしましょう。

- まず、$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ を 2 乗すると $\dfrac{3}{5}$ になるかどうか調べます。

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

  この計算、大丈夫ですよね。というわけで、めでたく $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ を 2 乗すると $\dfrac{3}{5}$ になるということがわかりました。

- 次は、$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ という数はプラスの数なのか調べます。そこで、$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ の中にある $\sqrt{3}$ と $\sqrt{5}$ の正体を思い出すことにします。

  たしか、$\sqrt{3}$ ってそもそも、「2 乗すると 3 になる数のうちプラスのほうの数」ですよね。だったら当然、$\sqrt{3}$ はプラスの数ですね。

  同じように考えると、$\sqrt{5}$ はプラスの数ということがわかりますね。

  ところで、「プラスの数」分の「プラスの数」を作ると必ずプラスの数ができるのですよね。ですから、$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ という数はプラスの数ということになりますね。

これでめでたく、$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ は

- 2 乗すると $\dfrac{3}{5}$ になる。
- プラスの数である。

という 2 つの条件のとおりになっている数であることがわかりました。つまり、$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ と $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ は同じ数であることが証明されたのです。

本文へ戻る

問 23. 『次の数の見かけをできるだけマシにしなさい。』という問題でした。

たしか私たちは

- $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ と $\sqrt{ab}$ は同じ数である。

- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ と $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ は同じ数である。（ただし、この場合、b は 0 ではいけません。）

ということを学んだのでしたね。ですから次のように計算を進めることができます。

(1) $\sqrt{6} \times \sqrt{7} = \sqrt{6 \times 7} = \sqrt{42}$

(2) $\sqrt{18} \times \sqrt{2} = \sqrt{18 \times 2} = \sqrt{36} = 6$

(3) $\sqrt{30} \div \sqrt{5} = \dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{30}{5}} = \sqrt{6}$

(4) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$

(5) $\sqrt{80} \div \left(-\sqrt{5}\right) = -\dfrac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = -\sqrt{\dfrac{80}{5}} = -\sqrt{16} = -4$

(6) $\left(-\sqrt{2}\right) \times \sqrt{8} = -\sqrt{2 \times 8} = -\sqrt{16} = -4$

本文へ戻る

問 24. 数の見かけを $\sqrt{\bigstar}$ という形に変える問題でしたね。

(1) $3\sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{18}$

(2) $2\sqrt{7} = 2 \times \sqrt{7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{28}$

(3) $5\sqrt{3} = 5 \times \sqrt{3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{75}$

(4) $6\sqrt{5} = 6 \times \sqrt{5} = \sqrt{36} \times \sqrt{5} = \sqrt{36 \times 5} = \sqrt{180}$

本文へ戻る

問 25. 『次の数の見かけを $\square\sqrt{\triangle}$ という形に変えなさい。ただし、$\sqrt{}$ のマークの中の数をできるだけ小さくすること。』という問題でしたね。考え方は例題 8 の解答で詳しく学んでいるのでここではあっさり説明します。

(1) $\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{4} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

(2) $\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

(4) $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

(5) $\sqrt{60} = \sqrt{4 \times 15} = \sqrt{4} \times \sqrt{15} = 2\sqrt{15}$

(6) $\sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = \sqrt{9} \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$

(7) $\sqrt{68}$

$\sqrt{}$ のマークの中の数が結構大きいので、奥の手を使うことにします。

まず、68 を素因数分解するわけですよね。右の計算を見てください。68 は 2 という素数をを 2 個、17 という素数を 1 個かけてできていることがわかりますね。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 68 \\ \hline 2 & 34 \\ \hline & 17 \end{array}$$

次は、この素因数分解をよく見て、同じ素数を次々に、あるだけ全部ペアにしていくのでした。つまり、

$$\begin{aligned} \sqrt{68} &= \sqrt{2 \times 2 \times 17} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{17} \\ &= 2\sqrt{17} \end{aligned}$$

と計算できます。

(8) $\sqrt{84}$

$\sqrt{}$ のマークの中の数が結構大きいので、奥の手を使うことにします。

まず、84 を素因数分解するわけですよね。右の計算を見てください。84 は 2 という素数をを 2 個、3 という素数をを 1 個、7 という素数を 1 個かけてできていることがわかりますね。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 84 \\ \hline 2 & 42 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array}$$

次は、この素因数分解をよく見て、同じ素数を次々に、あるだけ全部

ペアにしていくのでした。つまり、

$$\begin{aligned}\sqrt{84} &= \sqrt{2\times 2\times 3\times 7}\\ &= \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}\\ &= 2\sqrt{21}\end{aligned}$$

と計算できます。

(9) $\sqrt{90}$

$\sqrt{\ }$ のマークの中の数が結構大きいので、奥の手を使うことにします。

まず、90 を素因数分解するわけですよね。右の計算を見てください。90 は 2 という素数をを 1 個、3 という素数をを 2 個、5 という素数を 1 個かけてできていることがわかりますね。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & \ \ 5 \end{array}$$

次は、この素因数分解をよく見て、同じ素数を次々に、あるだけ全部ペアにしていくのでした。つまり、

$$\begin{aligned}\sqrt{90} &= \sqrt{2\times 3\times 3\times 5}\\ &= \sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}\\ &= 3\sqrt{10}\end{aligned}$$

と計算できます。

(10) $\sqrt{112}$

$\sqrt{\ }$ のマークの中の数が結構大きいので、奥の手を使うことにします。

まず、90 を素因数分解するわけですよね。右の計算を見てください。90 は 2 という素数をを 4 個、7 という素数をを 1 個かけてできていることがわかりますね。

$$\begin{array}{r|r} 2 & 112 \\ \hline 2 & 56 \\ \hline 2 & 28 \\ \hline 2 & 14 \\ \hline & 7 \end{array}$$

次は、この素因数分解をよく見て、同じ素数を次々に、あるだけ全部

ペアにしていくのでした。つまり、

$$
\begin{aligned}
\sqrt{112} &= \sqrt{2\times2\times2\times2\times7}\\
&= \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{7}\\
&= 2\times2\times\sqrt{7}\\
&= 4\sqrt{7}
\end{aligned}
$$

と計算できます。

(11) $\sqrt{150}$

$\sqrt{\ }$ のマークの中の数が結構大きいので、奥の手を使うことにします。

まず、150 を素因数分解するわけですよね。右の計算を見てください。150 は 2 という素数をを 1 個、3 という素数をを 1 個、5 という素数をを 2 個かけてできていることがわかりますね。

$$
\begin{array}{r|r}
2 & 150 \\ \hline
3 & 75 \\ \hline
5 & 25 \\ \hline
 & 5
\end{array}
$$

次は、この素因数分解をよく見て、同じ素数を次々に、あるだけ全部ペアにしていくのでした。つまり、

$$
\begin{aligned}
\sqrt{150} &= \sqrt{2\times3\times5\times5}\\
&= \sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\\
&= 5\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

と計算できます。

(12) $\sqrt{162}$

$\sqrt{\ }$ のマークの中の数が結構大きいので、奥の手を使うことにします。

まず、162 を素因数分解するわけですよね。右の計算を見てください。162 は 2 という素数をを 1 個、3 という素数をを 4 個かけてできていることがわかりますね。

$$
\begin{array}{r|r}
2 & 162 \\ \hline
3 & 81 \\ \hline
3 & 27 \\ \hline
3 & 9 \\ \hline
 & 3
\end{array}
$$

次は、この素因数分解をよく見て、同じ素数を次々に、あるだけ全部

ペアにしていくのでした。つまり、

$$\begin{aligned}\sqrt{162} &= \sqrt{2\times3\times3\times3\times3}\\ &= \sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\\ &= \sqrt{2}\times3\times3\\ &= 9\sqrt{2}\end{aligned}$$

と計算できます。

(13) $\sqrt{432}$

$\sqrt{}$ のマークの中の数が結構大きいので、奥の手を使うことにします。

まず、432 を素因数分解するわけですよね。右の計算を見てください。432 は 2 という素数をを 4 個、3 という素数をを 3 個かけてできていることがわかりますね。

$$\begin{array}{r|r} 2 & 432 \\ \hline 2 & 216 \\ \hline 2 & 108 \\ \hline 2 & 54 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

次は、この素因数分解をよく見て、同じ素数を次々に、あるだけ全部ペアにしていくのでした。つまり、

$$\begin{aligned}\sqrt{432} &= \sqrt{2\times2\times2\times2\times3\times3\times3}\\ &= \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\\ &= 2\times2\times3\times\sqrt{3}\\ &= 12\sqrt{3}\end{aligned}$$

と計算できます。

(14) $\sqrt{675}$

$\sqrt{}$ のマークの中の数が結構大きいので、奥の手を使うことにします。

まず、675 を素因数分解するわけですよね。右の計算を見てください。432 は 3 という素数をを 3 個、5 という素数をを 2 個かけてできていることがわかりますね。

$$\begin{array}{r|r} 3 & 675 \\ \hline 3 & 225 \\ \hline 3 & 75 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array}$$

次は、この素因数分解をよく見て、同じ素数を次々に、あるだけ全部ペアにしていくのでした。つまり、

$$\begin{aligned}\sqrt{675} &= \sqrt{3\times 3\times 3\times 5\times 5}\\ &= \sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\\ &= 3\times\sqrt{3}\times 5\\ &= 15\sqrt{3}\end{aligned}$$

と計算できます。

(15) $\sqrt{864}$

$\sqrt{}$ のマークの中の数が結構大きいので、奥の手を使うことにします。

まず、864 を素因数分解するわけですよね。右の計算を見てください。864 は 2 という素数をを 5 個、3 という素数をを 3 個かけてできていることがわかりますね。

$$\begin{array}{r|r} 2 & 864 \\ \hline 2 & 432 \\ \hline 2 & 216 \\ \hline 2 & 108 \\ \hline 2 & 54 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

次は、この素因数分解をよく見て、同じ素数を次々に、あるだけ全部ペアにしていくのでした。つまり、

$$\begin{aligned}\sqrt{864} &= \sqrt{2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 3\times 3\times 3}\\ &= \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\\ &= 2\times 2\times\sqrt{2}\times 3\times\sqrt{3}\\ &= 12\sqrt{6}\end{aligned}$$

と計算できます。

本文へ戻る

問 26. 例題 9 の解答のまねをして数の見かけをマシにする問題でしたね。
$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ と $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ は同じ数であるということが利用できる計算です。
9 の解答がきちんと理解出来た人のため、簡単に計算式だけを書いておきます。

(1) $\sqrt{\dfrac{3}{16}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{16}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(2) $\sqrt{0.07} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{100}} = \dfrac{\sqrt{7}}{10}$

(3) $\sqrt{\dfrac{10}{49}} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{49}} = \dfrac{\sqrt{10}}{7}$

(4) $\sqrt{0.21} = \dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{100}} = \dfrac{\sqrt{21}}{10}$

本文へ戻る

問 27. 例題 10 の解答のまねをして、計算をし、答えの見かけをマシにする問題でしたね。

こういう問題では、計算していく手順は人によっていろいろと違っています。ここでは、例題 10 の (1) の解答の中に出てきた「別の人の計算法」を真似してみることにします。

(1) $\sqrt{27} \times \sqrt{32}$ の計算

まず $\sqrt{27}$ と $\sqrt{32}$ ですが、それぞれ、

$$\sqrt{27} = 3\sqrt{3},$$

$$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

と見かけを変えることができます。（大丈夫ですよね。）すると、

$$\begin{aligned}\sqrt{27} \times \sqrt{32} &= 3\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} \\ &= 12\sqrt{6}\end{aligned}$$

とできるわけです。

(2) $2\sqrt{14} \times \sqrt{35}$ の計算

まず $\sqrt{14}$ と $\sqrt{35}$ ですが、それぞれ、

$$\sqrt{14} = \sqrt{2} \times \sqrt{7},$$

$$\sqrt{35} = \sqrt{5} \times \sqrt{7}$$

と見かけを変えることができます。（大丈夫ですよね。）すると、

$$\begin{aligned} 2\sqrt{14} \times \sqrt{35} &= 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{7} \times \sqrt{5} \times \sqrt{7} \\ &= 2 \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} \\ &= 2 \times 7 \times \sqrt{10} \\ &= 14\sqrt{10} \end{aligned}$$

とできるわけです。

(3) $\sqrt{12} \times \sqrt{8}$ の計算

まず $\sqrt{12}$ と $\sqrt{8}$ ですが、それぞれ、

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3},$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

と見かけを変えることができます。（大丈夫ですよね。）すると、

$$\begin{aligned} \sqrt{12} \times \sqrt{8} &= 2 \times \sqrt{3} \times 2 \times \sqrt{2} \\ &= 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

とできるわけです。

(4) $3\sqrt{10} \times \sqrt{15}$ の計算

まず $\sqrt{10}$ と $\sqrt{15}$ ですが、それぞれ、

$$\sqrt{10} = \sqrt{2} \times \sqrt{5},$$

$$\sqrt{15} = \sqrt{3} \times \sqrt{5}$$

と見かけを変えることができます。（大丈夫ですよね。）すると、

$$\begin{aligned}3\sqrt{10} \times \sqrt{15} &= 3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} \\ &= 3 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \\ &= 3 \times 5 \times \sqrt{6} \\ &= 15\sqrt{6}\end{aligned}$$

とできるわけです。

本文へ戻る

問 28. 例題 11 がきちんと理解できた人のための問題です。

数の見かけを変えて、分母から $\sqrt{\ }$ のマークのついた数がなくなるようにする問題できしたね。

例題 11 の解答がきちんと理解できた人のために、あっさり計算式だけを書いておきます。

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

(2) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3 \times \sqrt{3}}{2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \dfrac{3 \times \sqrt{3}}{2 \times 3} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{3}} \times \sqrt{3}}{2 \times \underset{1}{\cancel{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(4) $\dfrac{4}{\sqrt{18}} = \dfrac{4}{3\sqrt{2}} = \dfrac{4 \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{4 \times \sqrt{2}}{3 \times 2} = \dfrac{\overset{2}{\cancel{4}} \times \sqrt{2}}{3 \times \underset{1}{\cancel{2}}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(5) $\dfrac{6}{\sqrt{8}} = \dfrac{6}{2\sqrt{2}} = \dfrac{6 \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{6 \times \sqrt{2}}{2 \times 2} = \dfrac{\overset{3}{\cancel{6}} \times \sqrt{2}}{2 \times \underset{1}{\cancel{2}}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

(6) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}} = \dfrac{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{2}}\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{\underset{3}{\cancel{6}}}$

$= \dfrac{\sqrt{18}}{3} = \dfrac{3\times\sqrt{2}}{3} = \dfrac{3\sqrt{2}}{3}$

$= \dfrac{\overset{1}{\cancel{3}}\sqrt{2}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = \sqrt{2}$

(7) $\dfrac{9}{\sqrt{12}} = \dfrac{9}{2\sqrt{3}} = \dfrac{9\times\sqrt{3}}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \dfrac{9\times\sqrt{3}}{2\times3} = \dfrac{\overset{3}{\cancel{9}}\times\sqrt{3}}{2\times\underset{1}{\cancel{3}}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(8) $\dfrac{42}{\sqrt{63}} = \dfrac{42}{3\sqrt{7}} = \dfrac{\overset{14}{\cancel{42}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\times\sqrt{7}} = \dfrac{14}{\sqrt{7}} = \dfrac{14\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}$

$= \dfrac{14\times\sqrt{7}}{7} = \dfrac{\overset{2}{\cancel{14}}\times\sqrt{7}}{\underset{1}{\cancel{7}}} = 2\sqrt{7}$

本文へ戻る

問 29. 計算をして、数の分母には $\sqrt{\ }$ のマークがついている数がないようにする問題でしたね。

計算の方法はいろいろとありますが、例題 11 の解答がきちんと理解できた人のために、あっさり計算の例を書いておきます。

(1) $\sqrt{2}\div\sqrt{7} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{14}}{7}$

(2) $\sqrt{27}\div2\sqrt{6} = \dfrac{\sqrt{27}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{3\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{2\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$

$= \dfrac{3\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{2\times6} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{3}}\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{2\times\underset{2}{\cancel{6}}} = \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{4}$

$= \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

(3) $\sqrt{2}\div\left(-\sqrt{63}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{63}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{7}} = -\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{7}}{3\sqrt{7}\times\sqrt{7}} = -\dfrac{\sqrt{14}}{3\times7} = -\dfrac{\sqrt{14}}{21}$

(4) $\sqrt{80}\div\sqrt{15} = \dfrac{\sqrt{80}}{\sqrt{15}} = \dfrac{4\times\sqrt{5}}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}} = \dfrac{4\times\overset{1}{\cancel{\sqrt{5}}}}{\sqrt{3}\times\underset{1}{\cancel{\sqrt{5}}}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} = \dfrac{4\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

本文へ戻る

問 30. 分配法則を使って式の見かけをマシにする問題でしたね。

例題 12 が理解出来た人のため、計算式だけを書いておきます。

(1) $4\sqrt{5}+5\sqrt{5}=4\times\sqrt{5}+5\times\sqrt{5}=(4+5)\times\sqrt{5}=9\sqrt{5}$

(2) $\sqrt{2}+3\sqrt{2}=1\times\sqrt{2}+3\times\sqrt{2}=(1+3)\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

(3) $7\sqrt{3}-2\sqrt{3}=7\times\sqrt{3}-2\times\sqrt{3}=(7-2)\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

(4) $8\sqrt{7}-9\sqrt{7}=8\times\sqrt{7}-9\times\sqrt{7}=(8-9)\times\sqrt{7}=-\sqrt{7}$

(5) $\sqrt{10}-4\sqrt{10}=1\times\sqrt{10}-4\times\sqrt{10}=(1-4)\times\sqrt{10}=-3\sqrt{10}$

(6) $2\sqrt{2}-5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\times\sqrt{2}-5\times\sqrt{2}-3\times\sqrt{2}=(2-5-3)\times\sqrt{2}=-6\sqrt{2}$

本文へ戻る

問 31. 式の見かけをマシにする問題でしたね。

(1) $3\sqrt{5}-2\sqrt{3}-6\sqrt{5}$ の計算

$3\sqrt{5}$ と $-6\sqrt{5}$ は仲間の部品なので分配法則を使ってまとめることができますね。というわけで

$$\begin{aligned}3\sqrt{5}-2\sqrt{3}-6\sqrt{5}&=3\sqrt{5}-6\sqrt{5}-2\sqrt{3}\\&=(3-6)\times\sqrt{5}-2\sqrt{3}\\&=-3\sqrt{5}-2\sqrt{3}\end{aligned}$$

と計算して見かけをマシにできます。

(2) $2\sqrt{2}-3+4\sqrt{2}$ の計算

$2\sqrt{2}$ と $4\sqrt{2}$ は仲間の部品なので分配法則を使ってまとめることができますね。というわけで

$$\begin{aligned}2\sqrt{2}-3+4\sqrt{2}&=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}-3\\&=(2+4)\times\sqrt{2}-3\\&=6\sqrt{2}-3\end{aligned}$$

と計算して見かけをマシにできます。

(3) $\sqrt{6}+2\sqrt{10}-4\sqrt{10}+3\sqrt{6}$ の計算

$\sqrt{6}$ と $3\sqrt{6}$ は仲間の部品なので分配法則を使ってまとめることができますね。また $2\sqrt{10}$ と $-4\sqrt{10}$ も仲間の部品なので分配法則を使ってまとめることができますね。というわけで

$$\begin{aligned}\sqrt{6}+2\sqrt{10}-4\sqrt{10}+3\sqrt{6} &= \sqrt{6}+3\sqrt{6}+2\sqrt{10}-4\sqrt{10}\\ &= (1+3)\times\sqrt{6}+(2-4)\times\sqrt{10}\\ &= 4\sqrt{6}-2\sqrt{10}\end{aligned}$$

と計算して見かけをマシにできます。

(4) $-3\sqrt{2}+8-2\sqrt{2}-3$ の計算

$-3\sqrt{2}$ と $-2\sqrt{2}$ は仲間の部品なので分配法則を使ってまとめることができますね。また 8 と -2 も仲間の部品なのでまとめることができますね。というわけで

$$\begin{aligned}-3\sqrt{2}+8-2\sqrt{2}-3 &= -3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+8-3\\ &= (-3-2)\times\sqrt{2}+8-3\\ &= -5\sqrt{2}+5\end{aligned}$$

と計算して見かけをマシにできます。

本文へ戻る

問 32. 式の見かけをマシにできるかどうか考えて、マシにできる場合はマシにする問題でしたね。

(1) $\sqrt{18}-4\sqrt{2}$ の計算

$\sqrt{18}$ は $3\sqrt{2}$ と同じですね。というわけで、

$$\begin{aligned}\sqrt{18}-4\sqrt{2}&=3\sqrt{2}-4\sqrt{2}\\&=(3-4)\times\sqrt{2}\\&=-\sqrt{2}\end{aligned}$$

と計算して見かけをマシにできます。

(2) $\sqrt{45}+\sqrt{20}$ の計算

$\sqrt{45}$ は $3\sqrt{5}$ と同じですね。また $\sqrt{20}$ は $2\sqrt{5}$ と同じですね。というわけで、

$$\begin{aligned}\sqrt{45}+\sqrt{20}&=3\sqrt{5}+2\sqrt{5}\\&=(3+2)\times\sqrt{5}\\&=5\sqrt{5}\end{aligned}$$

と計算して見かけをマシにできます。

(3) $\sqrt{8}-\sqrt{98}+\sqrt{16}$ の計算

$\sqrt{8}$ は $2\sqrt{2}$ と同じですね。また $\sqrt{98}$ は $7\sqrt{2}$ と同じですね。そして $\sqrt{16}$ は 4 と同じですね。というわけで、

$$\begin{aligned}\sqrt{8}-\sqrt{98}+\sqrt{16}&=2\sqrt{2}-7\sqrt{2}+4\\&=(2-7)\times\sqrt{2}+4\\&=-5\sqrt{2}+4\end{aligned}$$

と計算して見かけをマシにできます。

(4) $2\sqrt{18}+4\sqrt{2}$ の計算

$\sqrt{18}$ は $3\sqrt{2}$ と同じですね。というわけで、

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{18}+4\sqrt{2} &= 2\times 3\sqrt{2}+4\sqrt{2} \\
&= 6\sqrt{2}+4\sqrt{2} \\
&= (6+4)\times\sqrt{2} \\
&= 10\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

と計算して見かけをマシにできます。

(5) $\sqrt{63}-2\sqrt{28}$ の計算

$\sqrt{63}$ は $3\sqrt{7}$ と同じですね。。また $\sqrt{28}$ は $2\sqrt{7}$ と同じですね。というわけで、

$$
\begin{aligned}
\sqrt{63}-2\sqrt{28} &= 3\sqrt{7}-2\times 2\sqrt{7} \\
&= 3\sqrt{7}-4\sqrt{7} \\
&= (3-4)\times\sqrt{7} \\
&= -\sqrt{7}
\end{aligned}
$$

と計算して見かけをマシにできます。

(6) $3\sqrt{12}-\sqrt{75}+\sqrt{48}$ の計算

$\sqrt{12}$ は $2\sqrt{3}$ と同じですね。また $\sqrt{75}$ は $5\sqrt{3}$ と同じですね。さらに $\sqrt{48}$ は $4\sqrt{3}$ と同じですね。というわけで、

$$
\begin{aligned}
3\sqrt{12}-\sqrt{75}+\sqrt{48} &= 3\times 2\sqrt{3}-5\sqrt{3}+4\sqrt{3} \\
&= 6\sqrt{3}-5\sqrt{3}+4\sqrt{3} \\
&= (6-5+4)\times\sqrt{3} \\
&= 5\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

と計算して見かけをマシにできます。

本文へ戻る

問 33. 式の見かけをマシにできるかどうか考えて、マシにできる場合はマシにする問題でしたね。

(1) $\sqrt{8}+\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ の計算

$\sqrt{8}$ は $2\sqrt{2}$ と見かけを変えることができますね。

$\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ はどんなふうに見かけを変えることができるのか調べてみることにします。すると、

$$\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

となりますね。

というわけで、

$$\begin{aligned}\sqrt{8}+\frac{4}{\sqrt{2}}&=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\\&=(2+2)\times\sqrt{2}\\&=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

と計算して見かけをマシにできます。

(2) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ の計算

$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ は $\dfrac{1}{2}\sqrt{5}$ と同じです。

$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ はどんなふうに見かけを変えることができるのか調べてみることにします。すると、

$$\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{5}\sqrt{5}$$

となりますね。というわけで、

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}} &= \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{5}\sqrt{5}\\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\times\sqrt{5}\\ &= \left(\frac{5}{10}+\frac{2}{10}\right)\times\sqrt{5}\\ &= \frac{7}{10}\sqrt{5}\end{aligned}$$

と計算して見かけをマシにできます。（さらに見かけを $\frac{7\sqrt{5}}{10}$ に変えることもできます。）

(3) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}-\sqrt{40}$

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ はどんなふうに見かけを変えることができるのか調べてみることにします。すると、

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{1}{5}\sqrt{10}$$

となりますね。

$\sqrt{40}$ は $2\sqrt{10}$ と同じです。

というわけで、

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}-\sqrt{40} &= \frac{1}{5}\sqrt{10}-2\sqrt{10}\\ &= \left(\frac{1}{5}-2\right)\times\sqrt{10}\\ &= \left(\frac{1}{5}-\frac{10}{5}\right)\times\sqrt{10}\\ &= -\frac{9}{5}\sqrt{10}\end{aligned}$$

と計算して見かけをマシにできます。（さらに見かけを $-\frac{9\sqrt{10}}{5}$ に変えることもできます。）

(4) $2\sqrt{60}-\sqrt{\frac{5}{3}}$ の計算

$\sqrt{60}$ は $2\sqrt{15}$ と同じです。

$\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ はどんなふうに見かけを変えることができるのか調べてみることにします。すると、

$$\sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{15}$$

となりますね。

というわけで、

$$\begin{aligned} 2\sqrt{60} - \sqrt{\frac{5}{3}} &= 2 \times 2\sqrt{15} - \frac{1}{3}\sqrt{15} \\ &= 4\sqrt{15} - \frac{1}{3}\sqrt{15} \\ &= \left(4 - \frac{1}{3}\right) \times \sqrt{15} \\ &= \left(\frac{12}{3} - \frac{1}{3}\right) \times \sqrt{15} \\ &= \frac{11}{3}\sqrt{15} \end{aligned}$$

と計算して見かけをマシにできます。（さらに見かけを $\dfrac{11\sqrt{15}}{3}$ に変えることもできます。）

(5) $\sqrt{\dfrac{2}{7}} + \sqrt{56}$ の計算

$\sqrt{\dfrac{2}{7}}$ はどんなふうに見かけを変えることができるのか調べてみることにします。すると、

$$\sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7} = \frac{1}{7}\sqrt{14}$$

となりますね。

$\sqrt{56}$ は $2\sqrt{14}$ と同じです。

というわけで、

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2}{7}}+\sqrt{56} &= \frac{1}{7}\sqrt{14}+2\sqrt{14} \\
&= \left(\frac{1}{7}+2\right)\times\sqrt{14} \\
&= \left(\frac{1}{7}+\frac{14}{7}\right)\times\sqrt{14} \\
&= \frac{15}{7}\sqrt{14}
\end{aligned}
$$

と計算して見かけをマシにできます。（さらに見かけを $\dfrac{15\sqrt{14}}{7}$ に変えることもできます。）

(6) $\sqrt{3}+\sqrt{27}-\dfrac{12}{\sqrt{3}}$ の計算

$\sqrt{27}$ は $3\sqrt{3}$ と同じです。

$\dfrac{12}{\sqrt{3}}$ はどんなふうに見かけを変えることができるのか調べてみることにします。すると、

$$
\frac{12}{\sqrt{3}}=\frac{12\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}
$$

となりますね。

というわけで、

$$
\begin{aligned}
\sqrt{3}+\sqrt{27}-\frac{12}{\sqrt{3}} &= \sqrt{3}+3\sqrt{3}-4\sqrt{3} \\
&= (1+3-4)\times\sqrt{3} \\
&= 0\times\sqrt{3} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

と計算して見かけをマシにできます。

本文へ戻る

問 34. 式の見かけをかっこがなくなるように変える問題でしたね。「このテキストでこれまで学習してきとこと」と「式の展開」が理解できている人のために計算の例をあっさり書いておきます。

(1) $$\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{6}-2\right)=\sqrt{3}\times\sqrt{6}+\sqrt{3}\times(-2)+1\times\sqrt{6}+1\times(-2)$$
$$=\sqrt{18}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}-2$$
$$=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}-2$$

(2) $$\left(\sqrt{2}-7\right)\left(\sqrt{2}-8\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left\{(-7)+(-8)\right\}\times\sqrt{2}+(-7)\times(-8)$$
$$=2-15\sqrt{2}+56$$
$$=58-15\sqrt{2}$$

(3) $$\left(3\sqrt{2}-1\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\times3\sqrt{2}+\left(-1\right)^2$$
$$=18-6\sqrt{2}+1$$
$$=19-6\sqrt{2}$$

(4) $$\left(\sqrt{7}-3\right)\left(\sqrt{7}+3\right)=\left(\sqrt{7}\right)^2-3^2$$
$$=7-9$$
$$=-2$$

(5) $$\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)+\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)=\left\{\left(\sqrt{5}\right)^2-1^2\right\}+\left\{\left(\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{5}\times1\right\}$$
$$=\left(5-1\right)+\left(5-5\sqrt{5}\right)$$
$$=4+5-5\sqrt{5}$$
$$=9-5\sqrt{5}$$

(6) $\left(\sqrt{7}-4\right)\left(\sqrt{7}+4\right)+\left(\sqrt{7}-3\right)^2$

$$=\left\{\left(\sqrt{7}\right)^2-4^2\right\}+\left\{\left(\sqrt{7}\right)^2-2\times 3\times\sqrt{7}+(-3)^2\right\}$$

$$=\left(7-16\right)+\left(7-6\sqrt{7}+9\right)$$

$$=-7-16+7+9-6\sqrt{7}$$

$$=7-6\sqrt{7}$$

本文へ戻る