方程式３（二次方程式）

2015 年 2 月 9 日

目次

このテキストの使いかた

日頃の学習では・・・

- テキストをていねいに読んでいきましょう。

  このテキストは、きちんと言葉を使ってていねいな説明が書かれています。記号や数式が並んでいるだけの、意味不明のものではありません。ひとことひとこと言葉を大切にして、解き方ではなく考え方を学び取るようにしてください。そして、書いてあることに対して、「あーそういうことか」とか「えーよくわからない」とか「これ、ちがうんじゃないの？」といった反応をしてください。数学は自分の頭を使って考えていく科目ですから立ち止まって考えることがとても大切なのです。

- テスト直前に勉強を始めるのではなく、テストで力を発揮できるように前もって準備をしておきましょう。

  数学のように、自分の頭を使って「あーでもない、こーでもない」と考えながら学んでいく科目では、学習を始めてからしばらくの間はなかなか成果が出ない事があります。しかし少し我慢をして学習を続けていくうちに、あるとき、驚くような力が付いていることに気づくことがあります。 つまり、実力は初めのうちはゆっくり伸びていき、あとからぐんと伸びることが多いのです。

- 例題を学ぶときには、解答を読む前に、できればまず自分の力で解くことができるかどうか試してみましょう。

  数学の学習では、誰かから教わっただけのことよりも自分で悩んで考えたことの

ほうがよく身につきます。紙と筆記用具を使って実際に答案を書いてみてください。それができたらテキストの解答をていねいに読んで自分の考えと比べてみましょう。

- 例題の学習ができたら、この問題がテストに出ても自分の力だけで解けるかどうか想像してみましょう。そして心配なものには印を付けておきましょう。

  日頃から自分の実力をつかんでおくとテスト対策がしやすくなります。

- 問はもちろん、まず自分の力で解くことができるかどうか試してみてください。

  紙と筆記用具を使って実際に答案を書いてみてください。それができたらテキストの解答をていねいに読んで自分の考えと比べてみましょう。そうすれば理解が深まるでしょう。

- 問を解き終わって答え合わせをしたら、間違ったものには印を付けておきましょう。

  日頃から自分の実力をつかんでおくとテスト対策がしやすくなります。

- ひとつのひとつの節を読み終わったら、どんなことをその節で学んだのか思い出して「あらすじ」を言えるようにしておきましょう。紙と筆記用具を用意して、誰かにあらすじを伝えるにはどんなふうに説明すればよいか考え、文章を書いてみるととても効果があります。

  中学生に「今日は学校の数学の授業でどんなことを勉強したの？」と聞いてみると、「えーと、何だっけ、そうだ、傾きとか習った。」と断片的なことを言えたりすることはあるのですが、改めて、「へぇ、ところで傾きってなんなの？」と聞いてみると「えー、何だっけ、そうだ、なんか計算したり直線を描いてた。」ぐらいの答えしか返ってこないことが多いのです。専門用語を正しく言えるようになることも必要なことかもしれませんが、そんなことより大切なのは「どんなお話を学んだのか」ということです。数学は意味の無い記号操作を学ぶ科目ではなく、ちゃんとしたストーリーがあるものを学んでいるのです。ですから「お話のあらすじ」を理

解しておくことが大切なのです。

定期テスト対策では・・・

「日頃の学習」のところにも書いてありますが、数学のような科目は力がつくまでに時間のかかる科目です。テストに備えて十分な日数を確保しておきましょう。そして、「日頃の学習」で心配な例題や間違った問にちゃんと印を付けているとテスト対策が楽になります。

- テキストから試験範囲の例題や問を探して、印のついていないものがちゃんと解けるかどうか試してみましょう。
- 印を付けた例題や問を繰り返し復習して、テストに出ても大丈夫な問題を少しでも増やしておきましょう。

第1章

おさらい

1.1　ところで方程式ってなんだっけ？

これから、「二次方程式」と呼ばれているものを学びます。ところであなたは、そもそも「方程式」って何だったか覚えていますか？数学では、「式」がいろいろ出てきますが、「式」という言葉の前に「方程」なんて言葉がついているのですから、きっと普通の式とは違い、「何か特別な意味を持っている式」なのですね。方程式とはどんな意味を持っている式なのか、これからおさらいします。

数学では、「数」の代わりに「文字」を使うことが良くありますね。x とか y とか a とか b などの小文字のアルファベットとか、さらには X とか Y とか A とか B などの大文字のアルファベットを使ったりしますよね。これらの文字は、「数」の代わりとして使われるのでしたね。いくつか例を挙げることにしましょう。

(1) 例えば、$-3x+5y$ という「式」の中には、「x」と「y」という「文字」が使われています。もちろんこれらの文字は「数」の代わりに使われています。つまり、「いくつなのか言いたくないのだけれど、2 つの数 x と y があって、x を -3 倍した数に y を 5 倍した数をたして出来る数」を考えることにした人が「$-3x+5y$」という「式」を書くのです。

(2) (1) で、$-3x+5y$ という式のことを説明しましたが、その時、「いくつなのか言い

たくないのだけれど、2 つの数 x と y があって $\cdots$」と書きました。でも、文字を使う動機は、ほかにもあるのでしたね。「いくつなのか言いたくないから文字を使う」ばかりではなく、「いくつなのかわからないから文字を使う」ということもあるのです。そこで、次のような話を考えてみましょう。

「なぞの数があり、その数を 5 倍してからさらに 4 をひくと 11 になります。
それでは、このなぞの数っていったいいくつなのでしょう。」

さて、この話には、「いくつなのかわからない数」が出てきますね。(「なぞの数」ってやつですよ。）数学では、このような時も文字を使うのでしたね。昔からの習慣で、なぞの数を表すとき、よく「x」という文字を使います。(別に、x でなくても何でも良いのですが、習慣でよく「x」が使われるのです。）では、ここでも、この話に出てきた「なぞの数」を x と呼ぶことにしましょう。(数の代わりに文字を使ったことになりますね。）そうすると、この話は、もう、文ではなく「式」で表すことが出来るのです。次のような、たった 1 行の式になるのです。

$$5x - 4 = 11$$

つまり、この、たった 1 行の式には「なぞの数があり、その数を 5 倍してからさらに 4 をひくと 11 になる。」という意味がこめられているのです。(これまでも詳しく学習してきたことですが、数学で使う「式」はみんな意味が込められています。どういう意味の式なのかを考えなかったり、意味を間違えたりすると大変なことになります。気をつけてくださいね。）

問 1. 次の文を式で表しなさい。文字は自分の好きな文字を使いなさい。

(1) なぞの数があり、その数を 2 倍してからさらに 3 をたしてできる数と、その数を -3 倍してからさらに 10 をたしてできる数は同じになる。

(2) なぞの数があり、その数を 2 乗してからさらに 6 をたしてできる数と、その数を -5 倍してできる数は同じになる。

(3) なぞの数が 2 つあり、一方の数を 2 倍してからさらに 1 をたしてできる数と、他方

の数を 5 倍してからさらに 7 をひいてできる数は同じになる。

答えを見る

では、話を先に進めることにしましょう。

この問の前まで、

$$5x - 4 = 11$$

という「式」について考えていました。この式には、文字 x が入っていますが、なぞの数（つまり、いくつなのかわからない数）なので文字を使っているのでしたね。そして、この式には「なぞの数 x があり、x を 5 倍してからさらに 4 をひくと 11 になる。なぞの数 x はいったいいくつなのか?」という意味が込められていました。つまり、この式はなぞの数を見つけようとするときに使う式なのです。このように、「なぞの数を見つけようとするときに使う式」のことを、数学では**方程式**と呼びます。

方程式とは

「なぞの数があるとします。そのなぞの数をこんなふうにして、さらにこんなふうにして $\cdots$ としてできる数と、そのなぞの数をあんなふうにして、さらにあんなふうにして $\cdots$ としてできる数が等しくなる。」ということを数式で表したものを**方程式**と呼びます。そして、このような式は、なぞの数を発見しようとするときに使うのです。

それではこれから、方程式の例をいくつかお見せしましょう。

例 1　なぞの数 x があるとします。このなぞの数 x から 5 をひいたら -2 になるといいます。じゃぁ、このなぞの数 x はいくつなのかなぁ？ということが気になった人は、

$$x - 5 = -2$$

という方程式を書けばよいのです。

例 2　なぞの数 x があるとします。このなぞの数 x を 2 倍してからさらに 3 をたしたら 15 になるといいます。じゃぁ、このなぞの数 x はいくつなのかなぁ？ということが気になった人は、

$$2x + 3 = 15$$

という方程式を書けばよいのです。

例 3　なぞの数 x があるとします。このなぞの数 x を 2 倍してからさらに 3 をたしてできる数と、このなぞの数 x を -6 倍してからさらに -11 をひいてできる数が等しくなるといいます。じゃぁ、このなぞの数 x はいくつなのかなぁ？ということが気になった人は、

$$2x + 3 = -6x - 11$$

という方程式を書けばよいのです。

例 4　なぞの数 x があるとします。このなぞの数 x を 2 乗してからさらに 4 をひいてできる数と、このなぞの数 x を -6 倍してからさらに 4 をたしてできる数が等しくなるといいます。じゃぁ、このなぞの数 x はいくつなのかなぁ？ということが気になった人は、

$$x^2 - 4 = -6x + 4$$

という方程式を書けばよいのです。

　それでは、あなたにも「なぞの数を発見するために使う式」つまり方程式を作ってもらいましょう。次の問を考えてください。

問 2. 次の文をよく読んで、なぞの数を発見するための式 (つまり方程式) を作りなさい。

(1) なぞの数 a があるとします。このなぞの数 a に 7 をたしたら -6 になるといいます。

(2) なぞの数 x があるとします。このなぞの数 x を -3 倍してからさらに 5 をたしてできる数と、このなぞの数 x を -2 倍してからさらに 2 をたしてできる数が等しくなるといいます。

(3) なぞの数 b があるとします。このなぞの数 b を 2 乗してからさらに 5 をたしてできる数と、このなぞの数 b を -3 倍してからさらに 3 をたしてできる数が等しくなるといいます。

答えを見る

では話を続けます。

なぞの数は 1 つとは限りません。なぞの数が 2 つあったり、3 つあったり、4 つあったり $\cdots$ のような話だって考えることは出来るからです。それでは、なぞの数が 2 つある話も考えてみることにします。次の例を見てください。

例 5　2 つのなぞの数 x と y があるとします。このなぞの数 x を -2 倍してからさらに 3 をたしてできる数と、もう 1 つのなぞの数 y を 4 倍してからさらに 2 をたしてできる数が等しくなるといいます。じゃぁ、この 2 つのなぞの数 x と y はいくつなのかなぁ？ということが気になった人は、

$$-2x+3=4y+2$$

という方程式を書けばよいのです。

問 3. 次の文をよく読んで、なぞの数を発見するための式（つまり方程式）を作りなさい。

(1) 2 つのなぞの数 a と b があるとします。このなぞの数 a を 2 倍してからさらに 3 をたしてできる数と、もう 1 つのなぞの数 b に 3 をたしてできる数は等しくなるといいます。

(2) 2 つのなぞの数 x と y があるとします。このなぞの数 x を -3 倍してからさらに、もう 1 つのなぞの数 y をひくと -5 になるといいます。

答えを見る

1.2 謎の数を発見するには（つまり方程式を解くには）

前の節では、「謎の数を見つけようとするときに使う式のことを 方程式と呼ぶ」ということを学びました。では、謎の数はどうやって見つけるのでしょうか。たとえ方程式を作ったとしても、謎の数が見つける方法が無ければ目的は達成できないですね。謎の数を見つけるために方程式は役に立つのでしょうか。これからあなたと一緒に、ゆっくり考えていくことにしましょう。

1.2.1 式の形によって、謎の数の見つけ方は違うということ

前の節で、例や問の中にたくさんの方程式が出てきました。いくつか思い出してみましょう。例えば、例1から例3では「$x-5=-2$」、「$2x+3=15$」、「$2x+3=-6x+4$」という方程式が出てきました。また、例4では「$x^2-4=-6x+4$」という方程式が出てきました。これらは謎の数が1つだけの方程式ですね。またさらに、例5では「$-2x+3=4y+2$」という方程式が現れました。これは謎の数が2つある方程式ですね。このように、「方程式」とひと言で言っても色々なものがあるわけです。謎の数が1つのもの、2つのもの、3つのもの $\cdots$ などと謎の数の個数が違っていたりするわけです。きっと、謎の数が多ければ多いほど、謎の数を見つけるのは難しくなるのでしょうね。また謎の数が1つだけだとしても、式の形には違いがあるようです。このようなことを考えると、きっと、方程式の種類によって、謎の数を発見する方法は違っているのでしょう。

例6 $5x-4=11$ という方程式について考えてみましょう。この式は、「謎の数 x があり、x を5倍してからさらに4をひいてできる数と11は同じ数である」という意味の式ですね。この方程式を使って謎の数 x を見つけるのはどうすればよいのでしょう？覚えていますよね。「等式を変形するときにやっても良いこと」を使うのでしたね。念のため、ここで「等式を変形するときにやっても良いこと」を思い出しておくことにします。（「等式を変形するときにやっても良いこと」は数学を学んでいるうちは、絶対に忘れてはいけない重要なことです。しっかり覚えてください。）

重要な事実：等式を変形するときにやってもよいことその 1

「＝」で結ばれている 2 つのものを入れかえても、相変わらず「＝」で結ばれたままになります。つまり、

$$\boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$$

という等式の左側と右側を入れかえて

$$\boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$$

という等式に書きかえても良いのです。

重要な事実：等式を変形するときにやってもよいことその 2

「＝」で結ばれている 2 つのもののどちらにも、同じものをたしている限り、相変わらず「＝」で結ばれたままになります。つまり、

$$\boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$$

という等式の左側と右側に、同じ数または式をたして、

$$\boxed{\qquad\qquad} + \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad} + \boxed{\qquad\qquad}$$

という等式に書きかえても良いのです。

重要な事実：等式を変形するときにやってもよいことその 3

「＝」で結ばれている 2 つのもののどちらからも、同じものをひいている限り、相変わらず「＝」で結ばれたままになります。つまり、

$$\boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$$

という等式の左側と右側から、同じ数または式をひいて、

$$\boxed{\qquad\qquad} - \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad} - \boxed{\qquad\qquad}$$

という等式に書きかえても良いのです。

重要な事実：等式を変形するときにやってもよいことその 4

「=」で結ばれている 2 つのもののどちらにも、同じものをかけている限り、相変わらず「=」で結ばれたままになります。つまり、

$$\boxed{} = \boxed{}$$

という等式の左側と右側に、同じ数または式をかけて、

$$\boxed{} \times \boxed{} = \boxed{} \times \boxed{}$$

という等式に書きかえても良いのです。

重要な事実：等式を変形するときにやってもよいことその 5

「=」で結ばれている 2 つのもののどちらも、同じものでわる限り、相変わらず「=」で結ばれたままになります。つまり、

$$\boxed{} = \boxed{}$$

という等式の左側と右側を、同じ数または式でわって、

$$\frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

という等式に書きかえても良いのです。ただし、「0 という数でわること」だけはやってはいけません。

（どうして 0 でわっていけないのか、あなたはもう知っていますよね。忘れてしまった人は正負の数のテキスト（このシリーズの）を探して、『$0 \div 3$ の答えは何？ $3 \div 0$ の答えは何？』の所をよく読みなおしましょう。）

どうでしたか？ちゃんと覚えていましたか？では、「等式を変形するときにやってもよいこと」を使って、$5x-5=11$ という方程式を変形し、謎の数 x を発見することにしましょう。

$$5x-4=11$$

という等式の左と右に 4 をたします。すると、

$$5x-4+4=11+4$$

となります。この等式の見かけをマシにすると、

$$5x=15$$

となります。

次にこの等式の左と右に $\dfrac{1}{5}$ をかけます。すると、

$$5x\times\frac{1}{5}=15\times\frac{1}{5}$$

となります。この等式の見かけをマシにすると、

$$x=3$$

となるわけです。これで謎の数 x が発見できましたね。

例 7　$x^2=9$ という方程式について考えてみようと思います。これは、さっきの、例 6 で考えた、$5x-4=11$ とはかなり式の形が違いますね。$x^2=9$ という方程式には「エックスの 2 乗」が出てきますが、$5x-4=11$ 方程式には「エックスの 2 乗」は出てきません。ここが一番の違っているところです。

$x^2=9$ という方程式は、「謎の数 x があり、x を 2 乗すると 9 になる」という意味の式ですね。さて、あなたはこの謎の数 x の正体はわかりますか？答えを言ってしまうことにします。謎の数 x の正体は 3 または -3 なのです。本当ですよ。どちらも 2 乗すれば

ちゃんと 9 になるでしょ。さて、この答え、どうやって見つけたのでしょう。何か操作や式変形をして見つけたのでしょうか。そうではありませんね。式の意味を良く考えることによって、謎の数を見つけたのですね。「謎の数 x があり、x を 2 乗すると 9 になる」という意味の式だったので、「だったら 3 か -3 じゃんか」と思うわけです。

このように、式の意味を良く考えて、謎の数を見つけることもあるのです。しっかり肝に銘じておいてください。

例 6 と例 7 を比べるとわかるように、**方程式の中に現れている謎の数 x を見つける方法は 1 つではありません。方程式のタイプごとに、通用する方法が違う**のです。

そろそろおさらいを終わりにしますが、最後に、方程式の話をするときに使われる数学用語を思い出しておくことにします。方程式とは、謎の数を発見するために使われる式でした。そして、謎の数の正体のことを**方程式の解**と呼ぶのでしたね。また、謎の数を発見することを**方程式を解く**というのですね。

第2章

二次方程式

2.1　二次方程式ってなに？

前の章のおさらいの中に「方程式にはいろいろなタイプがあり、タイプによって解き方が違う」という話が出てきました。ここではまず、「2 次方程式とはどんなタイプの方程式なのか」ということを説明します。例として、次の方程式について考えることにします。

例 8　謎の数 x があるとします。そして、「その謎の数 x を 2 乗してさらに -1 をかけたものと、その謎の数 x を 5 倍したものと、-6 を全てたしたもの」は「その謎の数 x を 3 倍してからさらに 21 をひいたもの」に等しくなっているとします。

この文章を数式にすると、

$$-x^2 + 5x - 6 = 3x - 21$$

となりますよね。これが、この文章から作られた方程式というわけです。

ところで、この方程式には次のような特徴があります。

- 特徴

  前の章でおさらいした「等式を変形するためにやってもよいこと」を繰り返し使うなどして式の見かけをマシにすると、

$$\text{ナントカ}\ x^2 + \text{ほにゃらら}\ x + \text{これこれ} = 0$$

という形にすることができる。ただし、「ナントカ」は 0 とは違う数で、「ほにゃらら」と「これこれ」は何かしらの数である。つまり、専門用語を使って言うと、

$$\text{文字 } x \text{ についての 2 次式} = 0$$

という形にできるということである。（2 次式という言葉の意味、知ってますよね。とっくの昔に学びましたね。）

それでは、さっき私たちが作った

$$-x^2 + 5x - 6 = 3x - 21$$

という方程式が、本当にこの特徴を持っているのかどうか調べることにしましょう。

「等式を変形するためにやってもよいこと」を使ってこの等式を変形していくわけですが、まず、この等式の左と右から $3x$ をひいてみます。すると、

$$-x^2 + 5x - 6 - 3x = 3x - 21 - 3x$$

となります。仲間の部品をまとめてこの等式の見かけをマシにすると、

$$-x^2 + 2x - 6 = -21$$

となります。

次は、この等式の左と右に 21 をたします。すると、

$$-x^2 + 2x - 6 + 21 = -21 + 21$$

となります。仲間の部品をまとめてこの等式の見かけをマシにすると、

$$-x^2 + 2x - 15 = 0$$

となります。どうですか？この等式は

$$\text{ナントカ } x^2 + \text{ほにゃらら } x + \text{これこれ} = 0$$

という形をしていますよね。(「ナントカ」は -1、「ほにゃらら」は 2、「これこれ」は -15 ですね。）これで、本当であることがわかりましたね。

このような特徴を持っている方程式は、「二次方程式」と呼ばれています。

例 8 の説明で、「二次方程式」とはどんな方程式のことなのかわかってもらえたと思いますが、念のため、ここできちんとまとめておくことにしましょう。

二次方程式ってなに？

「等式を変形するためにやってもよいこと」を繰り返し使うなどして式の見かけをマシにすると、

$$\text{ナントカ}\,x^2 + \text{ほにゃらら}\,x + \text{これこれ} = 0$$

という形にすることができる方程式のことを**二次方程式**と呼びます。ただし、「ナントカ」は 0 とは違う数で、「ほにゃらら」と「これこれ」は何かしらの数です。

例題 1　次の式の中から二次方程式を選びなさい。

① $3x + 6 = x - 4$	② $2x + 5x = -3x$
③ $x^2 - 6 = 0$	④ $x^2 - 6x = 0$
⑤ $x^2 - 6x = -8$	⑥ $x^2 - 6x = -2x^2 - 3$
⑦ $3x^2 = (x + 5)(x - 2)$	⑧ $x^2 = (x + 5)(x - 2)$
⑨ $x^2 + 4x + 4$	⑩ $(x + 5)(x - 2)$

解答

ひとつひとつ二次方程式なのかそうでないのか調べます。等式の右側が 0 になるように式を変形していき、

$$\text{ナントカ}\,x^2 + \text{ほにゃらら}\,x + \text{これこれ} = 0$$

という形にすることができるかどうかを調べればよいわけです。

① $3x + 6 = x - 4$ という等式の左と右から x をひくと、

$$3x + 6 - x = x - 4 - x$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$2x + 6 = -4$$

となります。

次はこの等式の左と右に 4 をたすと、

$$2x + 6 + 4 = -4 + 4$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$2x + 10 = 0$$

となります。

これで等式の右側が 0 になりました。これ、どう見ても、

$$\text{ナントカ}\ x^2 + \text{ほにゃらら}\ x + \text{これこれ} = 0$$

という形になっていませんね。「ナントカエックスの 2 乗」という部品がないですよね。ですから、①の式は二次方程式ではありませんね。

以上、①の式が二次方程式なのかそうでないのかとてもきちんと調べてみました、しかし、このような調べ方が頭の中だけでも想像できる人だったら、きっと①の式を見ればすぐに「これは二次方程式じゃないよ。だってもともとナントカエックスの 2 乗という部品はどこにもないもん。もともとないんだから、いくら変形しても出てくるわけないよ。」ってわかったことでしょう。

② ①の説明がきちんと理解できた人のためにあっさり説明します。$2x + 5x = -3x$ という方程式にはもともと「ナントカエックスの 2 乗」という部品はありません。ですか

ら、いくら変形しても「ナントカエックスの 2 乗」という部品が出てくることはありません。というわけで、②の方程式は二次方程式ではありません。

③ $x^2 - 6 = 0$ という式ではもとから「ナントカエックスの 2 乗」という部品が入っています。ですから、この方程式は二次方程式である可能性があります。そこで、等式の右側が 0 になるように式を変形していき、

$$\text{ナントカ}\, x^2 + \text{ほにゃらら}\, x + \text{これこれ} = 0$$

という形にすることができるかどうかを調べることにしますが、よく見るとこの等式は初めから等式の右側が 0 になっています。しかも左側にはもう無駄がありません。ですから、もう何も変形しなくてもよいわけです。

そうすると、②の式は（実はこのままでもう）

$$\text{ナントカ}\, x^2 + \text{ほにゃらら}\, x + \text{これこれ} = 0$$

という形になっていることがわかります。「ナントカ」は 1 で、「ほにゃらら」は 0 で、「これこれ」は -6 ですよね。というわけで、③の式は二次方程式であるということになります。

④ ③の説明がきちんと理解できた人のためにあっさり説明します。

$x^2 - 6x = 0$ という式ではもとから「ナントカエックスの 2 乗」という部品が入っています。そしてこの式はこのままでもう

$$\text{ナントカ}\, x^2 + \text{ほにゃらら}\, x + \text{これこれ} = 0$$

という形になっていることがわかります。「ナントカ」は 1 で、「ほにゃらら」は -6 で、「これこれ」は 0 ですよね。というわけで、④の式は二次方程式であるということになります。

⑤ ④までので説明がきちんと理解できた人のためにあっさり説明します。

$x^2-6x=-8$ という等式の左と右に 8 をたすと、

$$x^2-6x-8=-8+8$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$x^2-6x+8=0$$

となります。

これで等式の右側が 0 になりました。この式は、

$$\text{ナントカ}\ x^2+\text{ほにゃらら}\ x+\text{これこれ}=0$$

という形になっていることがわかります。「ナントカ」は 1 で、「ほにゃらら」は -6 で、「これこれ」は 8 ですよね。というわけで、⑤の式は二次方程式であるということになります。

⑥ もうこの先はあっさり説明します。

$x^2-6x=-2x^2-3$ という等式の左と右に $2x^2$ をたすと、

$$x^2-6x+2x^2=-2x^2-3+2x^2$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$3x^2-6x=-3$$

となります。

次はこの等式の左と右に 3 をたすと、

$$3x^2-6x+3=-3+3$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$

となります。

これで等式の右側が 0 になりました。この式は、

$$\text{ナントカ}\ x^2 + \text{ほにゃらら}\ x + \text{これこれ} = 0$$

という形になっていることがわかります。「ナントカ」は 3 で、「ほにゃらら」は -6 で、「これこれ」は 3 ですよね。というわけで、⑥の式は二次方程式であるということになります。

⑦ $3x^2 = (x+5)(x-2)$ という等式の右を展開してマシにすると、

$$3x^2 = x^2 + 3x - 10$$

となります。

次は、この等式の右と左を入れかえます。すると、

$$x^2 + 3x - 10 = 3x^2$$

となります。

次はこの等式の左と右から $3x^2$ をひくと、

$$x^2 + 3x - 10 - 3x^2 = 3x^2 - 3x^2$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$-2x^2 + 3x - 10 = 0$$

となります。

これで等式の右側が 0 になりました。この式は、

$$\text{ナントカ}\ x^2 + \text{ほにゃらら}\ x + \text{これこれ} = 0$$

という形になっていることがわかります。「ナントカ」は -2 で、「ほにゃらら」は 3 で、「これこれ」は -10 ですよね。というわけで、⑦の式は二次方程式であるということになります。

⑧ $x^2 = (x+5)(x-2)$ という等式の右を展開してマシにすると、

$$x^2 = x^2 + 3x - 10$$

となります。

次は、この等式の右と左を入れかえます。すると、

$$x^2 + 3x - 10 = x^2$$

となります。

次はこの等式の左と右から x^2 をひくと、

$$x^2 + 3x - 10 - x^2 = x^2 - x^2$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$3x - 10 = 0$$

となります。

これで等式の右側が 0 になりました。この式は、

$$\text{ナントカ}\ x^2 + \text{ほにゃらら}\ x + \text{これこれ} = 0$$

という形をしていません。「ナントカエックス 2 乗」がありませんね。というわけで、⑧の式は二次方程式ではありませんね。

⑨ x^2+4x+4 という式には等号、つまり「= のマーク」がありません。（ですからこの式は「等式」の仲間ではありません。単なる式です。）ところで「方程式」というのは「これこれこうしたものと、あれこれああしたものが等しい」ということを意味する式なので、当然、等号、つまり「= のマーク」があるはずです。というわけで、⑨の式は方程式ですらありません。

⑩ ⑨の説明がきちんと理解できた人のためにあっさり答えをいうことにします。

$(x+5)(x-2)$ という式には等号、つまり「= のマーク」がありません。というわけで、⑩の式は方程式ですらありません。

問 4. 次の式の中から二次方程式を選びなさい。

① $x^2+4x+4=0$　② $x^2-4x=x^2+5$
③ $(x+5)(x-2)=x^2$　④ $x^2-6=0$
⑤ $3x+6=x-4$　⑥ $2x+5x=-3x$
⑦ $x^2-8x+12$　⑧ $(x+3)(x-8)$

答えを見る

ここまでの学習で、二次方程式とは何なのかわかってもらえたと思います。そこで次は、謎の数を見つけるにはどうすればよいのか考えていくことにします。

2.2　二次方程式の解き方

方程式にはいろいろなタイプがあり、タイプによって解き方が違うのですよね。それでは、「二次方程式」と呼ばれているタイプの方程式は、どのようにして解けばよいのでしょう。例題を通して、これからあなたと一緒に考えていくことにします。

例題 2　（謎の数の候補が問題の中にいくつか書いてあるときは・・）

謎の数 x があり、

$$x^2-2x-35=0$$

という方程式が成り立っています。次の数の中から、この方程式の解（つまり、謎の数 x

としてふさわしいもの）を選んでください。

$$-4、-5、-6、6、7$$

解答

この例題は、二次方程式のことを何も知らなくても解くことができますよね。だって、解の候補が書いてあるわけですから。一つ一つ、解なのかそうでないのか試していけばよいですよね。では試していくことにしましょう。

- まず、-4 を試します。つまり、$x = -4$ のとき、（方程式の左辺の）$x^2 - 2x - 35$ を計算すると（方程式の右辺の）0 と等しくなるのかならないのか調べるわけです。左辺の計算をすると、

$$(-4)^2 - 2 \times (-4) - 35 = 16 + 8 - 35 = -11$$

  となり、右辺の 0 にはなりません。ですから -4 は解ではありませんね。

- 次は、-5 を試します。つまり、$x = -5$ のとき、（方程式の左辺の）$x^2 - 2x - 35$ を計算すると（方程式の右辺の）0 と等しくなるのかならないのか調べるわけです。左辺の計算をすると、

$$(-5)^2 - 2 \times (-5) - 35 = 25 + 10 - 35 = 0$$

  となり、右辺の 0 と等しくなりました。ですから -5 は解ですね。謎の数の正体が見つかりました。x は -5 だったのです。

でも、調査はこれで終わりではないんですよ。もしかして、あなた、これで終わりだと思いましたか？だって、まだ、試していない候補が残っているんですよ。調べなくてもよいのでしょうか。「謎の数は 1 個だけ」なんて決め付けてはいけないですよね。そこで、ちゃんと残りの候補も試してみます。

- -6 を試します。

左辺の計算をすると、

$$(-6)^2 - 2 \times (-6) - 35 = 36 + 12 - 35 = 13$$

となり、右辺の 0 にはなりません。ですから -6 は解ではありませんね。

- 6 を試します。

  左辺の計算をすると、

  $$6^2 - 2 \times 6 - 35 = 36 - 12 - 35 = -11$$

  となり、右辺の 0 にはなりません。ですから -6 は解ではありませんね。

- 7 を試します。左辺の計算をすると、

  $$7^2 - 2 \times 7 - 35 = 49 - 14 - 35 = 0$$

  となり、右辺の 0 と等しくなりました。ですから 7 は解ですね。謎の数の正体がもう 1 つ見つかったのです。

これで全ての候補に対して調査が終わりました。そして、謎の数 x の正体としてふさわしいものは、-5 と 7 であることがわかりました。

問 5. -2、-1、-0、1、2 のうち、二次方程式 $x^2 - x - 2 = 0$ の解になっているものを選びなさい。

答えを見る

さて、これまで、解の候補（つまり、謎の数の正体の候補）が与えられている問題を練習しました。でも、解の候補が問題の中に書いてあるなんて、あまりにもサービス良すぎですよね。普通はこんなことはありません。そこでこれから、まじめに、二次方程式の解き方を考えることにします。実は、昔の人の努力によって、二次方程式の解き方として 3 通りの方法が発明されています。「えー。3 通りもあるの。覚えるの大変だなぁ。」と思った人もいるかもしれませんね。実は、どんな場合でも通する方法が 1 つあるので、それを身につければそれで何とか乗り切ることもできます。でも、「こんなときにはこの方法だと楽」ということもあるわけです。つまり、いつでも 1 つの方法だけに頼っていると逆に

大変になってしまうのです。ですから、できるだけきちんと 3 つの方法を身につけられるように学習していってください。

2.2.1　二次方程式の解き方その 1：因数分解を利用する方法

まず、あなたに理解してもらいたい非常に重要なことがあります。次をじっくりと読んでください。

重要な事実 : 2 つの数をかけて 0 になるのはどんなとき？

2 つの数 A と B があるとします。もし、この 2 つの数 A と B をかけて 0 になるとしたら、少なくとも、A と B のどちらかは絶対に 0 であるはずです。

何を言っているかわかりましたか？これは極めて大切な話なので補足をしておきましょう。

まず、何でもよいから 2 つの数を思い浮かべてください。そしてその 2 つの数をかけてみてください。

どうですか？ちゃんとやってみましたか？かけてみたらいくつになりましたか？さっき、重要な事実で説明したのは、「もしこんなことをやってみてかけ算の答えが 0 になるとしたら、初めに用意する数には 0 を混ぜておかなければ無理」ということです。（もちろん、初めに用意する数を 2 つとも 0 にしてもよいのですよ。）

問 6. さっき学んだ重要な事実を次のように言い換えてみようと思います。次の文の空欄を正しく埋めてください。

重要な事実 : 2 つの数 A と B があり、A も B も 0 ではないとします。このとき、A と B をかけても絶対に $\boxed{}$ にはなりません。

答えを見る

問 7. さっき学んだ重要な事実を数学っぽく式を使って言ってみようと思います。次の文の空欄を正しく埋めてください。

重要な事実：2 つの数 A と B があるとします。$AB = 0$ ならば $\boxed{}$ または $\boxed{}$ が成り立ちます。 答えを見る

では本題に入ることにしましょう。いま学習したばかりの「重要な事実」を正しく活用すると、因数分解の力を使って二次方程式が解ける場合があるのです。次の例題で学習します。

例題 3　（因数分解の力を使うと二次方程式が解けることがあるという話その 1）

二次方程式 $x^2 - 2x - 35 = 0$ を解きなさい。

解答

念のため、まずこの問題の意味を説明しておきます。この問題は、「謎の数 x があり、$x^2 - 2x - 35$ を計算すると 0 になる。謎の数 x の正体を全て発見しなさい。」ということですよね。

さて、 $x^2 - 2x - 35 = 0$ という方程式の「左辺」を見てください。（「=」の左側に書いてある式を左辺と呼ぶのでしたね。）あなたは式の展開や式の因数分解を学んでいるはずです。よく見ると、この方程式の左辺は因数分解できる予感がしませんか「かけると -35」、「たすと -2」？になる 2 つの数を見つければよいのですよね。（何の話かわからない人はすぐに式の展開や式の因数分解を復習してください。このまま先の進むと大変なことになります。）いっしょうけんめい考えると -7 と 5 が見つかるはずです。ということは、この例題の方程式は、左辺を因数分解して書きかえて、次のようにできます。

$$\begin{array}{rcl} x^2 - 2x - 35 & = & 0 \\ \downarrow & & \\ (x-7)(x+5) & = & 0 \end{array}$$

左辺の $x^2 - 2x - 35$ を因数分解すると
$(x-7)(x+5)$ となるので左辺を書きかえた。
右辺の 0 はそのままにしてある。

次に、今得られた $(x-7)(x+5) = 0$ という式の意味をよく考えてみましょう。（ここが非常に重要な所です。）

この方程式は

$$x-7 \text{ という数と } x+5 \text{ という数をかけると } \underline{0 \text{ になる}}$$

という意味ですよね。ところで、この例題の前に、「ナントカとほにゃららをかけて 0 になるんだったら、少なくとも、ナントカとほにゃららのどちらかは絶対に 0 になっているはず」という話を学びましたね。（28 ページで学んだ「重要な事実」のことですよ。）それを思い出すと、

$$x-7=0 \quad \text{または} \quad x+5=0 \quad \text{である}$$

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$$x-7=0 \text{ となっている場合、} x=7$$

ということになりますね。

また、

$$x+5=0 \text{ となっている場合、} x=-5$$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x=7 \text{ または } x=-5$$

ということですね。

例題 4　（因数分解の力を使うと二次方程式が解けることがあるという話その 2）

二次方程式 $(x-3)(x-8)=0$ を解きなさい。

解答

念のため、まずこの問題の意味を説明しておきます。この問題は、「謎の数 x があり、$(x-3)(x-8)$ を計算すると 0 になる。謎の数 x の正体を全て発見しなさい。」ということですよね。

さて、 $(x-3)(x-8)=0$ という方程式の「左辺」を見てください。(「=」の左側に書いてある式を左辺と呼ぶのでしたね。）あなたは式の展開や式の因数分解を学んでいるはずです。この方程式の左辺はもう因数分解されていますね。これはラッキーです。ではこの $(x-3)(x-8)=0$ という式の意味をよく考えてみましょう。(ここが非常に重要な所です。）この方程式は

$x-3$ という数と $x-8$ という数をかけると 0 になる

という意味ですよね。ところで、「ナントカとほにゃららをかけて 0 になるんだったら、少なくとも、ナントカとほにゃららのどちらかは絶対に 0 になっているはず」という話を学びましたね。(28 ページで学んだ「重要な事実」のことですよ。）それを思い出すと、

$x-3=0$　または　$x-8=0$　である

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$x-3=0$ となっている場合、$x=3$

ということになりますね。

また、

$x-8=0$ となっている場合、$x=8$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$x=3$ または $x=8$

ということですね。

例題 5　(因数分解の力を使うと二次方程式が解けることがあるという話その 3)

二次方程式 $(2x-3)(x+2)=0$ を解きなさい。

解答

念のため、まずこの問題の意味を説明しておきます。この問題は、「謎の数 x があり、$(2x-3)(x+2)$ を計算すると 0 になる。謎の数 x の正体を全て発見しなさい。」ということですよね。

さて、 $(2x-3)(x+2)=0$ という方程式の「左辺」を見てください。(「=」の左側に書いてある式を左辺と呼ぶのでしたね。）あなたは式の展開や式の因数分解を学んでいるはずです。この方程式の左辺はもう因数分解されていますね。これはラッキーです。ではこの $(2x-3)(x+2)=0$ という式の意味をよく考えてみましょう（ここが非常に重要な所です。）この方程式は

$2x-3$ という数と $x+2$ という数をかけると 0 になる

という意味ですよね。ところで、「ナントカとほにゃららをかけて 0 になるんだったら、少なくとも、ナントカとほにゃららのどちらかは絶対に 0 になっているはず」という話を学びましたね。(28 ページで学んだ「重要な事実」のことですよ。）それを思い出すと、

$2x-3=0$ または $x+2=0$ である

と結論してよいことになりますよね。

そこでまず、$2x-3=0$ となっている場合、x はいくつなのか調べてみます。($2x-3=0$ のような形をしている方程式は一次方程式と呼ばれています。一次方程式の解き方についてはとっくの昔に学習しましたね。ですから謎の数 x の見つけ方はあっさり説明します。）どうすればよいのかというと、まず、この式の左辺と右辺に 3 をたします。すると、

$$2x-3+3=0+3$$

となりますが、仲間の部品をまとめてマシにすると、

$$2x=3$$

となりますね。

次に、この式の左辺と右辺に $\dfrac{1}{2}$ をかけます。すると、

$$\frac{1}{2} \times 2x = \frac{1}{2} \times 3$$

となりますが、仲間の部品をまとめてマシにすると、

$$x = \frac{3}{2}$$

となりますね。

今度は、$x + 2 = 0$ となっている場合、x はいくつなのか調べることにします。それはもちろん、

$$x = -2$$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x = \frac{3}{2} \text{ または } x = -2$$

ということですね。

問 8. 以下の文の空欄に正しい数、式、言葉を記入しなさい。

二次方程式 $(x-2)(x+4) = 0$ を解こうと思います。

まずこの式の意味を考えてみます。この方程式は、

$\boxed{}$ と $\boxed{}$ をかけると 0 になる。

という意味ですよね。

ところで、2 つの数をかけると 0 になるとしたら、少なくとも、2 つの数のうちのどちらかは、絶対に 0 でないとけません。ですから、

$\boxed{} = 0$ または $\boxed{} = 0$ である。

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$$\boxed{} = 0 \text{ となっている場合、} x = \boxed{} \text{ ということになりますね。}$$

また、

$$\boxed{} = 0 \text{ となっている場合、} x = \boxed{} \text{ ということになりますね。}$$

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x = \boxed{} \text{ または } x = \boxed{}$$

ということですね。

答えを見る

問 9. 以下の文の空欄に正しい数、式、言葉を記入しなさい。

二次方程式 $x(x+4)=0$ を解こうと思います。

まずこの式の意味を考えてみます。この方程式は、

$$x \text{ と } \boxed{} \text{ をかけると } 0 \text{ になる}$$

という意味ですよね。

ところで、2 つの数をかけると 0 になるとしたら、少なくとも、2 つの数のうちのどちらかは、絶対に 0 でないとけません。ですから、

$$\boxed{} = 0 \text{ または } \boxed{} = 0 \text{ である}$$

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$$x = 0 \text{ となっている場合、もちろん } x = \boxed{}$$

ということになりますね。

また、

$$\boxed{} = 0 \text{ となっている場合、} x = \boxed{}$$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x = \boxed{} \text{ または } x = \boxed{}$$

ということですね。 答えを見る

問 10. 次の方程式を解きなさい。

(1) $(x+5)(x+3)=0$　(2) $x(x+3)=0$　(3) $(x+1)(2x-1)=0$

(4) $x^2-6x+5=0$　(5) $x^2+6x+8=0$　(6) $x^2-4x-21=0$

(7) $x^2-x-56=0$　(8) $x^2-6x=0$　(9) $x^2-13x+36=0$

答えを見る

さて、29 ページの例題 3 から、さっきの問 10 まで解いてきた二次方程式ですが、どれにも解が 2 つありましたよね。このように、多くの場合、二次方程式には解は 2 つあるのですが、実は解が 1 つしかない二次方程式もあるのです。そのことを次の例題で紹介することにしましょう。

例題 6　（解が 1 つしかないに二次方程式もあるという話）

二次方程式 $x^2+6x+9=0$ を解きなさい。

解答

これまで学んできたように、因数分解の力を借りて解くことにします。

$x^2+6x+9=0$ という方程式の左辺ですが、因数分解できそうですよね。かけると +9、たすと +6 になる 2 つの数を探すと 3 と 3 ですよね。ですから、

$$\begin{aligned} x^2+6x+9 &= 0 \\ \downarrow \quad & \\ (x+3)(x+3) &= 0 \end{aligned}$$

左辺の x^2+6x+9 を因数分解すると
$(x+3)(x+3)$ となるので左辺を書きかえた。
「$(x+3)(x+3)$ と書くより $(x+3)^2$ と書く
ほうがよい」という人もいるが、そんなことは
どうでもよい。
右辺の 0 はそのままにしてある。

となるわけです。

　ではここで、今得られた $(x+3)(x+3)=0$ という式の意味をよく考えてみましょう。（ここが非常に重要な所です。）この方程式は

$x+3$ という数と $x+3$ という数をかけると 0 になる

という意味ですよね。また、「ナントカとほにゃららをかけて 0 になるんだったら、少なくとも、ナントカとほにゃららのどちらかは絶対に 0 になっているはず」という話を学びましたね。（28 ページで学んだ「重要な事実」のことですよ。）それを思い出すと、

$x+3=0$ または $x+3=0$ である

と結論してよいことになりますよね。結局どっちにしろ、

$x+3=0$ である

ということになりますね。

　そうすると、

$$x=-3$$

ということになりますね。これで謎の数 x の正体が発見できました。解は 1 つだけでしたね。どうして解が 1 つだけになってしまったのかというと、因数分解を使ってみたら、方程式の左辺は同じモノ（この例題では $x+3$）を 2 つかけた式になっていたからですね。

問 11． 次の方程式を解きなさい。

(1) $(x+5)^2=0$　　(2) $x^2+4x+4=0$　　(3) $x^2-10x+25=0$

答えを見る

例題 7　（右辺が 0 になっていない二次方程式ではまず右辺が 0 になるように準備しないと因数分解を使っても意味がないという話）

二次方程式 $(x-4)(x+1)=-6$ を解きなさい。

解答

　これまで学んできた二次方程式はどれも「=」の右側（つまり右辺）は 0 になっていました。（気付いていましたよね。）これはとても大切なことです。二次方程式の形が「ナントカ $= 0$」となっていたからこそ、28 ページで学んだ「重要な事実」が大活躍するわけですよね。ところがこの例題の方程式は、「=」の右側に -6 にという数が書いてあります。これは大問題です。でも、少し気を使ってあげればこの危機は脱出できますよね。**??**ページから**??**ページでおさらいした「等式を変形するためにやってもよいこと」を使って、「=」の右側が 0 になるように変形してから、これまでのように因数分解を頼って解けば良さそうですよね。ではそうすることにしましょう。

$$(x-4)(x+1) = -6$$

という式の左と右に 6 をたすと、

$$(x-4)(x+1) + 6 = -6 + 6$$

となりますが、仲間の部品をまとめてマシにすると、

$$(x-4)(x+1) + 6 = 0$$

となりますよね。これで「=」の右側が 0 になりました。でも、今度は「=」の左側がこれまで学んできた二次方程式とは違った感じになりました。でも、かっこのついているところを展開してさらにマシにしていけば、いつもの形にできそうですよね。ではやってみます。まず、左辺の $(x-4)(x+1)$ の所を展開して見かけを変えると、

$$\underline{x^2 - 3x - 4} + 6 = 0$$

ここが $(x-4)(x+1)$ の所を展開した所。
他は何も変えていない。

ってなりますよね。

この式をさらにマシにするために仲間の部品をまとめると、

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

となります。これで見慣れた形の二次方程式になりましたね。もうこの先はあなたにもできるはずです。この解答の続きをあなたに穴埋め形式で考えてもらうことにします。

さっきできたばかりの式の左辺を因数分解すると、

$$(x-1)(x-2) = 0$$

となります。この式は、「$x-1$ と $x-2$ をかけると 0 になる」という意味なので、28 ページで学んだ「重要な事実」を思い出すと、

$$\boxed{\qquad\quad} = 0 \text{ または } \boxed{\qquad\quad} = 0 \text{ である}$$

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$$\boxed{\qquad\quad} = 0 \text{ となっている場合、} x = \boxed{\quad}$$

ということになりますね。

また、

$$\boxed{\qquad\quad} = 0 \text{ となっている場合、} x = \boxed{\quad}$$

ということになりますね。これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x = 1 \text{ または } x = 2$$

ということですね。

問 12. 次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2 = 2(x+12)$　(2) $(x-2)(x-3) = 20$

(3) $(x+8)(x+2) = 2x$　(4) $(x+2)^2 = x+4$

答えを見る

例題 8　（x^2 の前に何か数がついている二次方程式では、まず x^2 の前についている数が 1 なくなるように準備をするとうまく行くこともあるという話）

二次方程式 $2x^2 + 10x + 8 = 0$ を解きなさい。

解答

　この方程式をよく観察してください。今まで練習してきたものとはどんな違いがあるでしょうか。

　そもそも二次方程式というのは、「等式を変形するためにやってもよいこと」を繰り返し使うなどして式の見かけをマシにすると、

$$\text{ナントカ}\ x^2 + \text{ほにゃらら}\ x + \text{これこれ} = 0$$

という形にすることができる方程式のことでしたね。この例題の方程式は、初めからこの形をしています。ところで、これまで学んできた二次方程式はどれも、「ナントカ x^2」の「ナントカ」の所には何も数が書いてありませんでしたよね。（言い換えると、これまで学んできた二次方程式では、「ナントカ」は 1 だったのですよね。）しかし、この例題の二次方程式は、ナントカ」は 2 なのです。そのせいで、この二次方程式はこれまで学んできた二次方程式に比べ、少し意地悪になっているのです。はっきり言うと、2 がついているせいで因数分解がやりにくいのです。これがこれまで私たちの学んできた二次方程式との違いです。でも、このような意地悪も、「等式を変形するときにやってもよいこと」を使えば対処できますよね。ではやってみます。

　この例題の方程式、

$$2x^2 + 10x + 8 = 0$$

の左と右を 2 でわります。つまり、左と右に $\dfrac{1}{2}$ をかけるわけです。すると、

$$(2x^2 + 10x + 8) \times \frac{1}{2} = 0 \times \frac{1}{2}$$

となります。（左辺では、$\frac{1}{2}$ は $2x^2+10x+8$ 全体にかけられるということに気をつけてください。ですから、$2x^2+10x+8$ はかっこがついているのです。右辺でも、$\frac{1}{2}$ は 0 全体にかけられますが、「0 全体」とか言っても 0 だけなのでかっこは必要ないですね。）そしてさらに、この式の左辺を分配法則を使って見かけをマシにすると、

$$x^2+5x+4=0$$

となりますね。これでいつもの見慣れた形の二次方程式になりました。つまり、x^2 の前に何も数がついていない二次方程式になったのです。ここまで来れば、もうあなたにもこの先をまかせても大丈夫でしょう。穴埋めをして解答を完成してください。

今できたばかりの方程式の左辺を因数分解すると、

$$\left(x+\boxed{}\right)\left(x+\boxed{}\right)=0$$

となります。この式は、$\boxed{}$ と $\boxed{}$ をかけると 0 になるという意味なので、28 ページで学んだ「重要な事実」を思い出すと、

$$\boxed{}=0 \text{ または } \boxed{}=0 \text{ である}$$

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$$\boxed{}=0 \text{ となっている場合、} x=\boxed{}$$

ということになりますね。

また、

$$\boxed{}=0 \text{ となっている場合、} x=\boxed{}$$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x=-1 \text{ または } x=-4$$

ということですね。

問 13. 次の方程式を解きなさい。

(1) $-3x^2 - 12x + 15 = 0$ (2) $4x^2 - 24x = -20$

答えを見る

2.2.2 二次方程式の解き方その 2：平方根のことを思い出して解く方法

「平方根」という言葉が出てきましたね。この言葉の意味を忘れてしまった人は、これからする話を理解できない恐れがあります。ですからまず、ここであなたにおさらいをしてもらいます。

おさらいの質問

次の文の空欄に正しい数や式、言葉を記入してください。

「ある数 a の平方根とは、2 乗すると $\boxed{}$ になる数のことです。2 乗すると a になる数のうち $\boxed{}$ の方の数を $\sqrt{a}$ と書きます。」

大丈夫でしたか？答えがわからないといっている人はこの先を読んでも意味不明になってしまいます。今すぐ、平方根のテキスト（このシリーズの）を探して復習してください。

では念のため答えを書いておきます。

おさらいの質問の答え

順に、a、プラス

おさらいの質問と答えおわり

では確認の問題をいくつか解いてもらうことにしましょう。

問 14. 平方根のおさらいです。次の問に答えなさい。

(1) ある数 △ を 2 乗したら 49 になりました。△ はいくつですか？（答えは 2 つあり

ますよ。注意してください。）

(2) ある数 ★ を 2 乗したら 11 になりました。★ はいくつですか？（答えは 2 つありますよ。注意してください。）

(3) ある数 □ を 2 乗したら 12 になりました。□ はいくつですか？（答えは 2 つありますよ。注意してください。）

(4) ある数 ◯ を 2 乗したら 0 になりました。◯ はいくつですか？（答えは 1 つだけですよ。注意してください。）

答えを見る

問 15. 平方根のおさらいです。次の問に答えなさい。

(1) 49 の平方根を言いなさい。（答えは 2 つありますよ。注意してください。）

(2) 11 の平方根を言いなさい。（答えは 2 つありますよ。注意してください。）

(3) 12 の平方根を言いなさい。（答えは 2 つありますよ。注意してください。）

(4) 0 の平方根を言いなさい。（答えは 1 つだけですよ。注意してください。）

答えを見る

では本題に入りましょう。

例題 9　（平方根のことを思い出して解く二次方程式その 1）

二次方程式 $x^2 - 7 = 0$ を解きなさい。

解答

この例題の二次方程式ですが、これまで学んできたものとはどんな所が違っていると思いますか？「= の右側」は初めから 0 になっています。また x^2 の前には何も数はついていません。ですから、これまで学んできた解き方で考える人は、「もう因数分解をする準備ができている。左辺を因数分解してみよう。」ということになりますね。でも、左辺の $x^2 - 7$ を見て「あれっ、これってどうやって因数分解するのかな？」って思いませんでしたか？ここで人の運命が 2 つに分かれます。「大丈夫。私はこれぐらいの式だったら因数

分解できる。」という人と「ダメだ。この式は私には因数分解できない。」という人に分かれるのです。因数分解できる人のことは置いておき、これから、「私には因数分解できない」という人のために「掟破り（おきてやぶり）」の方法を教えます。どういうことかというと、二次方程式は「$=$ の右側」を 0 にしてから解いていくのが一番まともな解き方なのですが、ここではあえてその掟（おきて）を破って、「$=$ の右側」に 0 ではない数があるように変形してみるのです。ではやってみることにします。

まず、この例題の方程式、つまり

$$x^2 - 7 = 0$$

の左辺と右辺に 7 をたします。すると、

$$x^2 - 7 + 7 = 0 + 7$$

となります。仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$x^2 = 7$$

となるわけです。これで、「$=$ の右側」に 0 ではない数があるように変形されました。（これまでの掟を破ったわけです。）

さてここで、今できたばかりの式の意味をよく考えてみましょう。この式って、「謎の数 x を 2 乗すると 7 になる」という意味ですよね。だったら、平方根の学習をしたことがあるあなたはもう謎の数 x の正体がわかるはずです。「2 乗して 7 になる数」ってもちろん $\sqrt{7}$ と $-\sqrt{7}$ ですよね。これでこの例題の方程式を解くことができました。答えは

$$x = \sqrt{7} \text{ または } x = -\sqrt{7}$$

ということになりますね。

例題 10　（平方根のことを思い出して解く二次方程式その 2）

二次方程式 $4x^2 - 3 = 0$ を解きなさい。

解答

以下の文の空欄に正しい数や式、言葉を記入しながら読んでください。

二次方程式は「普通は」どうやって解くのか思い出してみると、「まず、$=$ の右側が $\boxed{}$ になるように準備し、$=$ の左側を $\boxed{}$ していく」ということでしたね。ではこの例題の方程式をよく見てください。「$=$ の右側」はもう 0 になっていますよね。ということで、次は「$=$ の左側」にある $4x^2 - 3$ を因数分解するということになります。でも、$4x^2 - 3$ という式ってどうやって因数分解するんでしょうね。ちょっと難しそうですよね。ここで人の運命が 2 つに分かれます。「大丈夫。私はこれぐらいの式だったら因数分解できる。」という人と「ダメだ。この式は私には因数分解できない。」という人に分かれるのです。因数分解できる人のことは置いておき、これから、因数分解できない人のために、前の例題 9 で学んだ「掟破り」の方法で解くことにします。

まず、この例題の方程式、つまり、

$$4x^2 - 3 = 0$$

という方程式の左と右に 3 をたします。すると、

$$4x^2 - 3 + 3 = 0 + 3$$

となります。仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$4x^2 = 3$$

となるわけです。これで、「$=$ の右側」に 0 ではない数があるように変形されました。これまでの掟を破ったわけですが、この式、まだ意地悪な感じがしますよね。x^2 の前に 4 がついていて、いやな感じですよね。そこで、この式の左と右を 4 でわってみましょう。すると、

$$x^2 = \frac{3}{4}$$

となりますね。ここまでくると、もう前の例題 9 と同じようにできますね。というわけ

で、ここで、今できたばかりの式の意味をよく考えてみましょう。この式って、「謎の数 x を 2 乗すると $\dfrac{3}{4}$ になる」という意味ですよね。だったら、平方根の学習をしたことがあるあなたはもう謎の数 x の正体がわかるはずです。「2 乗して $\dfrac{3}{4}$ になる数」ってもちろん $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ですよね。（このことがわからない人は今すぐ「平方根」のテキストを探して復習してください。放っておくと大変なことになります。）これでこの例題の方程式を解くことができました。答えは

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ または } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ということになりますね。

問 16.

次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2 - 2 = 0$　(2) $9x^2 = 5$　(3) $x^2 - 36 = 0$

(4) $2x^2 = 8$　(5) $5x^2 = 15$　(6) $25x^2 - 7 = 0$

答えを見る

例題 11　（平方根のことを思い出して解く二次方程式その 3）

次の二次方程式を解きなさい。

(1)　$(x+3)^2 = 25$　(2)　$9(x-4)^2 = 8$

解答

さて、これまでとはまた違った感じのする二次方程式が出てきましたね。この例題の 2 つの二次方程式の式の形にはどんな特徴があるのか考えてみましょう。

方程式の「= の左側」を見てください。(1) の方程式には、かっこで囲まれた「$x+3$」という「かたまり」だけがあり、(2) の方程式にはかっこで囲まれた「$x-4$」という「かたまり」だけがあります。どちらの「かたまり」も「$x+\triangle$」という形をしていますね。（「えー、ちがうよぉ。(2) の方程式は $x-\triangle$ という形だよ。」なんていわないでくださいね。この世界にはマイナスの数だってあるのですから。）

そして、どちらの方程式も「= の右側」には謎の数 x の入っている部品はなく、ただ数

だけが書いてあります。

このような方程式を解くときには「かたまり」はむやみにくずさないほうが良いのです。よく、$(x+3)^2 = 25$ のような方程式を見たらすぐに $(x+3)^2$ の所を展開して $x^2+6x+9=25$ としてしまう人がいるのですが、そうすると損をしてしまうのです。（もちろんそうしてもこの方程式を解くことはできます。）

以上述べたようなことに気をつけてもらうことにして、これからこの例題の方程式を解くことにしましょう。

(1) $(x+3)^2=25$ という方程式でしたね。

この式の意味をよく考えてください。この方程式の意味を言葉で言うと、「$x+3$ という数を 2 乗すると 25 になる」ということですよね。だったら、平方根の学習をしたことがあるあなたはもう $x+3$ という数の正体がわかるはずです。「2 乗して 25 になる数」ってもちろん 5 と -5 ですよね。つまり、

$$x+3=5 \quad \text{または} \quad x+3=-5$$

というわけですね。

これで「x に 3 をたした数」の正体がわかったので、いよいよ謎の数 x を見つけることにします。

まず、$x+3=5$ の場合ですが、

$$x+3=5$$

という式の左と右から 3 をひくと、

$$x+3-3=5-3$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$x=2$$

となります。これで謎の数 x の正体の 1 つがわかりました。

次は、$x+3=-5$ の場合ですが、

$$x+3=-5$$

という式の左と右から 3 をひくと、

$$x+3-3=-5-3$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$x=-8$$

となります。これでもう 1 つ, 謎の数 x の正体がわかりました。

以上の調査から、答えは

$$x=2 \quad \text{または} \quad x=-8$$

ということになりますね。

(2) $9(x-4)^2=8$ という方程式でしたね。

(1) の方程式と同じように考えて解こうと思います。ですから、$(x-4)^2$ の所を展開しないで解こうと思います。つまり、平方根のことを思い出して解こうというわけです。しかし、この方程式ですが、(1) の方程式とは違い $(x-4)^2$ の前に 9 という数がついています。この 9、じゃまですよね。そこで、

$$9(x-4)^2=8$$

という方程式の左と右を 9 でわってみます。（つまり、左と右に $\dfrac{1}{9}$ をかけるわけです。）すると、

$$\frac{1}{9}\times 9(x-4)^2=\frac{1}{9}\times 8$$

となりますが、、約分などをして見かけをマシにすると、

$$(x-4)^2 = \frac{8}{9}$$

となります。これで $(x-4)^2$ の前についていた邪魔な 9 はいなくなりました。ここまで来れば、あとはこの式の意味を考えていけば答えが見つかりますよね。

この式は、「$x-4$ という数を 2 乗すると $\frac{8}{9}$ になる」ということですよね。というわけで、2 乗すると $\frac{8}{9}$ になる数を探してみると、とりあえず、$\sqrt{\frac{8}{9}}$ と $-\sqrt{\frac{8}{9}}$ が見つかりますよね。つまり、

$$x-4 = \sqrt{\frac{8}{9}} \quad \text{または} \quad -\sqrt{\frac{8}{9}}$$

ということですね。ところで、$\sqrt{\frac{8}{9}}$ と $-\sqrt{\frac{8}{9}}$ ですが、見かけを変えられますよね。そこで、この 2 つの数の見かけを変えると $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ と $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ となりますよね。(大丈夫ですよね。わからなかった人は平方根のテキスト（このシリーズの）を復習してください。）というわけで、

$$x-4 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{または} \quad -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

となるわけですね。

これで「x から 4 をひいた数」の正体がわかったので、いよいよ謎の数 x を見つけることにします。

まず、$x-4 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ の場合ですが、

$$x-4 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

という式の左と右に 4 をたすと、

$$x-4+4 = \frac{2\sqrt{2}}{3} + 4$$

となりますが、仲間の部品をまとめてたりして見かけをマシにすると、

$$x = 4 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

となります。これで謎の数 x の正体の 1 つがわかりました。

次は、$x - 4 = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ の場合ですが、

$$x - 4 = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

という式の左と右に 4 をたすと、

$$x - 4 + 4 = \frac{2\sqrt{2}}{3} + 4$$

となりますが、仲間の部品をまとめてたりして見かけをマシにすると、

$$x = 4 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

となります。これでもう 1 つ, 謎の数 x の正体がわかりました。

以上の調査から、答えは

$$x = 4 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{または} \quad x = 4 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ということになりますね。

問 17. 次の方程式を解きなさい。

(1) $(x-2)^2 = 9$	(2) $(x+7)^2 = 1$	(3) $(x+6)^2 = 49$
(4) $(x-3)^2 = 2$	(5) $(x+4)^2 = 12$	(6) $(x-8)^2 = 80$
(7) $5(x-10)^2 = 20$	(8) $3(x+8)^2 = 54$	(9) $36(x-2)^2 = 7$

答えを見る

例題 12　（平方根のことを思い出して解く二次方程式その 4）

二次方程式 $x^2 + 4x - 3 = 0$ を解きなさい。

解

さて、この方程式の形にはどんな特徴があるでしょうか。

「あれっ、29 ページの例題 3 とかで学んだ、因数分解をして解くやつじゃないの？そっくりだもん。」って思った人もいるでしょう。そうですよね。それとよく似ていますよね。でも、実は、この例題の二次方程式は因数分解のテクニックが使えないのです。

この例題の二次方程式を因数分解のテクニックを使って解こうとすると、「かけると -3、たすと $+4$ になる 2 つの数」を探すことになりますよね。では探してみてください。5 分待ちます。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

はい、5 分たちました。2 つの数、見つかりましたか？きっと見つからなかったですよね。実は「かけると -3、たすと $+4$ になる 2 つの数」などというものは、ちょこちょこっと頭の中で探しているだけでは絶対に見つからないのです。

というわけで、(因数分解を利用して解く二次方程式とこの例題の二次方程式は式の形がよく似ていますが) 因数分解をする方法はあきらめるしかないのです。そこでこれからあなたに少し高級な計算法を学んでもらう必要があります。その方法は「平方完成（へいほうかんせい)」と呼ばれています。では、この例題の方程式のことはしばらくの間忘れてもらい、平方完成について学ぶことにしましょう。

平方完成の学習　これからかなり長い話をします。そこで話を 2 つのステップに分けます。それぞれのステップの中であなたにいくつかの質問をします。順番に考えていってください。

ステップ 1　$(x+\triangle)^2$ という形の式について研究をします。（この式、方程式ではないですからね。単なる式ですよね。注意してくださいね。）

まず、$(x+\triangle)^2$ という形の式をいくつか用意して展開してみることにします。

質問 1　次の式を展開しなさい。

(1)　$(x+3)^2$　　(2)　$(x-7)^2$　　(3)　$(x-4)^2$

では展開してみてください。5 分待ちます。

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

はい、5 分たちました。ちゃんと計算出来ましたか？では答えを教えましょう。

質問 1 の答え　展開のことは昔たくさん練習しましたよね。ですからあっさり答えだけを書いておきます。

(1)　$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

(2)　$(x-7)^2 = x^2 - 14x + 49$

(3)　$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$

ではここで、この質問 1 でおこなった計算の結果を良く見てください。そして次の質問に答えてください。

質問 2　$(x+\triangle)^2$ という形の式を展開すると必ず $x^2 + \bigstar x + \blacksquare$ という形の式になりますよね。では、$\triangle$ と $\bigstar$ にはいつも何か関係があるでしょうか。また $\triangle$ と $\blacksquare$ にはいつも何か関係があるでしょうか。考えてください。10 分待ちます。

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

質問2の答え　ちゃんと考えてくれましたか？考えていない人はこの答えを読んではいけません。数学の力をつけるためには、自分の頭で考えることが大切なのです。

では、しっかりと考えてくれた人のために答えをいうことにしましょう。$(x+\triangle)^2$ という形の式を展開すると、必ず $x^2+\bigstar x+\blacksquare$ という形の式になるわけですが、いつも、$\bigstar$ は $\triangle$ の2倍になっていて、$\blacksquare$ は $\triangle$ の2乗になっているのです。例えば、質問1で $(x+3)^2$ という式を展開しましたが、x^2+6x+9 という式になりましたよね。これは、今説明したとおりになっているはずです。次を見てください。

2倍されている

$$(x\,(+3))^2 = x^2\,(+6)\,x\,(+9)$$

2乗されている

となりましたよね。

ここで説明したことは極めて重要です。しっかり頭に入れておいてください。

ステップ2　$x^2+\bigstar x$ という形の式にたりない数を付け加えて別の式を作り、その式が $(x+\triangle)^2$ という形の式に変形できるようにしたいと思います。つまり、ステップ1とは「だいたい逆」の練習をします。また質問をしますからじっく

りと考えてください。

質問 1　x^2+6x という式にある「うまい数」をたして別の式を作ります。そうすると実は、出来あがった式はさらに $(x+\triangle)^2$ という形の式に変形できるのです。このことは本当なのかどうか悩んください。もし本当だと思ったら、「うまい数」をいくつにすればよいのか考えてください。

では 5 分待ちます。

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

はい、5 分たちました。答えを教えることにしましょう.

質問 1 の答え　まずあなたに思い出して欲しいことがあります。それはさっきのステップ 1 で学習したことです。たしか、$(x+\triangle)^2$ という形の式を展開すると、必ず $x^2+\bigstar x+\blacksquare$ という形の式になり、いつも、$\bigstar$ は $\triangle$ の 2 倍になっていて、$\blacksquare$ は $\triangle$ の 2 乗になっているのでしたね。つまり、次のようになるのですよね。

2 倍されている

$$(x+\triangle)^2 = x^2 + \bigstar\, x + \blacksquare$$

2 乗されている

この質問で考えている式は、x^2+6x という式ですが、この式は $x^2+\bigstar x+\blacksquare$ という形をしているわけではありません。はっきり言うと、x^2+6x という式には $+\blacksquare$ の部品がないのです。でも、だとしたら、x^2+6x という式に「うまい数 $+\blacksquare$」をたせば展開する前の形、つまり $(x+\triangle)^2$ という形に変形できるということになりますね。

では「うまい数」をいくつにすればよいのか考えることにします。もう一度ステップ 1 で学んだことに注目しましょう。次を見てください。

半分になっている

$$(x + \triangle)^2 = x^2 + \bigstar x + \blacksquare$$

2 乗されている

前の説明で使ったものとは 1 ヶ所だけ変わっているところがあります。前の説明で使ったものでは、$\triangle$ から $\bigstar$ へ向けて矢印が書かれ、「$\bigstar$ は $\triangle$ の 2 倍になっているんだよ」と説明がされていましたが、「$\triangle$ は $\bigstar$ の半分だよ」と言いかえても同じなので矢印の向きと説明をそこだけ変えたのです。これを見た人は「うまい数」を見つけられますよね。

それでは $x^2 + 6x$ という式で詳しく考えることにします。

右を見てください。$x^2 + 6x$ という式には $\blacksquare$ がないのでそのままでは $(x + \triangle)^2$ という形に戻す変形はできないわけですが、$+6$ の半分である $+3$ を作り、さらに $+3$ を 2 乗して $+9$ を作ればよいということがわかりますよね。これで「うまい数」が見つかりました。

半分になっている

$$(x + \triangle)^2 = x^2 + 6x + \blacksquare$$

2 乗されている

以上のように考えると、「$x^2 + 6x$ という式に $+9$ をたして $x^2 + 6x + 9$ という式をつくると、できあがった式は $(x + 3)^2$ という形に変形できる」ということがわかったのです。

問　次の式に何かうまい数をたして別の式を作り、できあがった式を $(x + \triangle)^2$ という形に変形しなさい。

(1)　$x^2 - 6x$　　(2)　$x^2 - 14x$　　(3)　$x^2 + 8x$

問の答え　(1)　$x^2 - 6x$ という式の -6 を見たら、まず半分にして -3 を作り、

さらに 2 乗して $+9$ を作ります。そして、 x^2-6x という式に今見つけたばかりの $+9$ をたして x^2-6x+9 という式を作ると、この式は、

$$x^2-6x+9=(x-3)^2$$

と変形できますね。

(2) x^2-14x という式の -14 を見たら、まず半分にして -7 を作り、さらに 2 乗して $+49$ を作ります。そして、 x^2-14x という式に今見つけたばかりの $+49$ をたして $x^2-14x+49$ という式を作ると、この式は、

$$x^2-14x+49=(x-7)^2$$

と変形できますね。

(3) x^2+8x という式の $+8$ を見たら、まず半分にして $+4$ を作り、さらに 2 乗して $+16$ を作ります。そして、 x^2+8x という式に今見つけたばかりの $+16$ をたして $x^2+8x+16$ という式を作ると、この式は、

$$x^2+8x+16=(x+4)^2$$

と変形できますね。

今学んだような、「$x^2+\bigstar x$ という形の式にたりない数を付け加えて別の式を作り、その式が $(x+\triangle)^2$ という形の式に変形する変形」を**平方完成**と呼んでいます。

問 18. 次の文の空欄に正しい数を記入しなさい。

(1) $x^2+10x+\boxed{}$ という式と $\left(x+\boxed{}\right)^2$ という式は見かけは違いますが同じ式です。

(2) $x^2+12x+\boxed{}$ という式と $\left(x+\boxed{}\right)^2$ という式は見かけは違いますが同じ式です。

(3) $x^2 - 6x + \boxed{}$ という式と $\left(x - \boxed{}\right)^2$ という式は見かけは違いますが同じ式です。

答えを見る

平方完成の学習おわり

それでは本題に戻りましょう。たしか、例題 12 を考えている途中でしたね。たしか、

二次方程式 $x^2 + 4x - 3 = 0$ を解きなさい。

という問題でしたね。この方程式は、今学んだばかりの「平方完成」というテクニックを使うと、「平方根のことを思い出す方法」で解くことができるのです。ではやってみましょう。

まず、

$$x^2 + 4x - 3 = 0$$

の左辺と右辺に 3 をたします。すると、

$$x^2 + 4x - 3 + 3 = 0 + 3$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$x^2 + 4x = 3$$

となりますね。これで左辺は $x^2 + \bigstar x$ という形になりました。これでさっき学んだばかりの「平方完成」のテクニックを使う準備ができました。つまり何か「うまい数」をたして、左辺が $(x + \triangle)^2$ という形にで生きるようにたくらむわけです。

「うまい数」の見つけ方は「平方完成の学習」の中で詳しく説明しましたね。その説明が理解できている人は、「うまい数」を見つけられるはずです。どうするのかというと、$x^2 + 4x$ という式の「ナントカ x」という部品で x の前についている $+4$ という数を半分にして $+2$ を作り、さらにこれを 2 乗して $+4$ を作ればよいのでしたね。（大丈夫ですよね。わからなかった人は「平方完成」を復習してください。）というわけで、「うまい数」

は +4 ということになりますね。

「うまい数」が見つかったので、さっきできたばかりの方程式の左辺と右辺に「うまい数」である +4 をたします。(= で結ばれている式を変形するのですから、左辺にだけ +4 をたしてもダメですよ。注意してくださいね。) すると、

$$x^2+4x+4=3+4$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$x^2+4x+4=7$$

となりますね。そうすると、左辺は因数分解をして $(x+2)^2$ と見かけを変えられますね。ですから、今できたばかりの方程式は、

$$(x+2)^2=7$$

と書きかえる事ができるわけです。

これで 45 ページで学んだ例題 11 と同じように解くことができるようになりました。ですから、この先はあなたに続きをやってもらうことにしましょう。空欄に正しい数、式を記入していって下さい。

さっきできたばかりの $(x+2)^2=7$ という式の意味を考えると、「$\boxed{}$ という数を 2 乗すると $\boxed{}$ になる。」ということですよね。。というわけで、2 乗すると $\boxed{}$ になる数を探してみると、もちろん $\boxed{}$ と $\boxed{}$ ですね。そうすると、

$$x+2=\boxed{}\quad \text{または}\quad x+2=\boxed{}$$

となるわけですね。

これで「x に 2 をたした数」の正体がわかったので、いよいよ謎の数 x を見つけることにします。

まず、$x+2=\boxed{}$ の場合ですが、

$$x+2=\boxed{}$$

という式の左辺と右辺から 2 をひくと、

$$x+2-2=\boxed{}-2$$

となりますが、仲間の部品をまとめてたりして見かけをマシにすると、

$$x=-2+\boxed{}$$

となります。これで謎の数 x の正体の 1 つがわかりました。

次は、$x+2=-\sqrt{7}$ の場合ですが、

$$x+2=-\sqrt{7}$$

という式の左辺と右辺から 2 をひくと、

$$x+2-2=-\sqrt{7}-2$$

となりますが、仲間の部品をまとめてたりして見かけをマシにすると、

$$x=\boxed{}$$

となります。これでもう 1 つ, 謎の数 x の正体がわかりました。

以上の調査から、答えは

$$x=-2+\sqrt{7}\quad \text{または}\quad x=-2-\sqrt{7}$$

ということになりますね。

問 19. 次の方程式を「平方完成」のテクニックを使って解きなさい。

(1) $x^2-2x=9$　　(2) $x^2+8x=34$

(3) $x^2+2x=5$　　(4) $x^2+6x=-5$

(5) $x^2-6x+1=0$　　(6) $x^2-8x-16=0$

(7) $x^2+12x+20=0$　　(8) $x^2+10x-24=0$

補足：(4)、(7) 、(8) は「因数分解を使う方法」で解くこともできます。やってみてください。

どちらの方法があなたにとって簡単でしたか？

答えを見る

2.2.3　二次方程式の解き方その 3：解の公式と呼ばれている奥の手を使う方法

昔の人が次のような大発見をしました。

重要な事実：二次方程式の解を求めるための公式

二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は、a、b、c がいくつであるのかよく注意して、$\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ という数と $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ という数を計算すると求められてしまう。

意味、わかりましたか？「良くわからない。」という人もいるかもしれませんね。そこで、これから例題を使って説明します。

例題 13　次の二次方程式を解きなさい。

(1)　$x^2-6x+2=0$　　(2)　$3x^2+5x+1=0$

解答

(1) 右を見てください。 $x^2-6x+2=0$ という方程式では、

$$a=1、b=-6、c=2$$

$$\begin{array}{ccccc} ax^2 & + & bx & + & c=0 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ 1x^2 & - & 6x & + & 2=0 \end{array}$$

となっていますね。

それでは、この例題の前に学んだ重要な事実をここで使いましょう。たしか、

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

という数と、

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

という数を計算して作ればよいのでしたね。

式が複雑なので、まず部品を 1 つ 1 つ作ってみます。

- 分母の $2a$ を作ると、

$$2a = 2 \times 1 = 2$$

  となりますね。

- 分子にある $-b$ を作ると、

$$-b = -1 \times (-6) = 6$$

  となりますね。

- 分子にある $\sqrt{b^2-4ac}$ を作ると、

$$\sqrt{b^2-4ac} = \sqrt{6^2-4\times1\times2} = \sqrt{36-8} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

  となりますね。

これで部品は全てできました。では解を作ることにします。よく注意しながら、今できた部品を使って計算をします。

まず 1 つ目の解を作ると、

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{6+2\sqrt{7}}{2} = \frac{2\times\left(3+\sqrt{7}\right)}{2} = 3+\sqrt{7}$$

が得られ、

2 つ目の解を作ると、

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{6-2\sqrt{7}}{2} = \frac{2\times\left(3-\sqrt{7}\right)}{2} = 3-\sqrt{7}$$

が得られるわけです。

(2) 右を見てください。 $3x^2+5x+1=0$ という方程式では、

$$\begin{array}{ccccccc} ax^2 & + & bx & + & c & = & 0 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ 3x^2 & + & 5x & + & 1 & = & 0 \end{array}$$

$$a=3、b=5、c=1$$

となっていますね。

それでは、この例題の前に学んだ重要な事実をここで使いましょう。たしか、

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

という数と、

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

という数を計算して作ればよいのでしたね。

式が複雑なので、まず部品を 1 つ 1 つ作ってみます。

- 分母の $2a$ を作ると、

$$2a = 2\times 3 = 6$$

  となりますね。

- 分子にある $-b$ を作ると、

$$-b = -1\times 5 = -5$$

  となりますね。

- 分子にある $\sqrt{b^2-4ac}$ を作ると、

$$\sqrt{b^2-4ac} = \sqrt{(-5)^2-4\times 3\times 1} = \sqrt{25-12} = \sqrt{13}$$

となりますね。

これで部品は全てできました。では解を作ることにします。よく注意しながら、今できた部品を使って計算をします。

まず 1 つ目の解を作ると、

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{13}}{6}$$

が得られ、

2 つ目の解を作ると、

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5-\sqrt{13}}{6}$$

が得られるわけです。

問 20. 例題 13 の解答が理解できた人のための問題です。例題 13 の解答のまねをして、次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2+5x-2=0$　(2) $x^2-8x+4=0$

(3) $x^2+4x-21=0$　(4) $x^2-8x+16=0$

(5) $2x^2-3x-4=0$　(6) $3x^2+7x+1=0$

補足：(3) と (4) は例題 13 の解答のまねをしなくても、「因数分解を使う方法」で解くこともできます。やってみてください。

どちらの方法があなたにとって簡単でしたか？「因数分解を使う方法」のほうが簡単ですよね。例題 13 の解答の方法（つまり、解の公式を使う方法）はどんな二次方程式にも使える「万能」な方法です。しかし、「因数分解使う方法」で解くことができる方程式を、わざわざ解の公式を使って解くと大変になってしまうわけです。使い分けが重要ということですね。

答えを見る

2.2.4　いろいろなタイプの二次方程式をノーヒントで解いてみよう

二次方程式の解き方について、もうこれ以上あなたに説明することはありません。ですが、いろいろな解き方がありましたね。あなたが二次方程式を解こうとするとき、どういう方法で解くのが一番よいのか自分で判断しなくてはなりませんね。ですから、これまで学んできたそれぞれの解き方にはどんな考えが含まれていて、どんな利点があるのかということを頭の中に整理しておく必要があるのです。

それでは、まずあなたに次の問を解いてもらうことにしましょう。

問 21.　（ノーヒントで二次方程式を解く練習）次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2 - 5 = 0$　　(2) $x^2 + 12x + 36 = 0$

(3) $(x+7)(x-2) = 0$　　(4) $(x-2)^2 - 7 = 0$

(5) $2x^2 = 32$　　(6) $x^2 = 15x$

(7) $(x-8)(2x+5) = 0$　　(8) $x^2 - 2x - 6 = 0$

(9) $x^2 - 25 = 0$　　(10) $x^2 - 4x + 1 = 0$

(11) $x^2 + 16x + 63 = 0$　　(12) $(x-9)^2 = 0$

(13) $x^2 - 4x - 12 = 0$　　(14) $x^2 - 6x - 27 = 0$

(15) $x^2 - 12x + 32 = 0$　　(16) $x^2 + 4x - 4 = 0$

(17) $(x+1)^2 = 8$　　(18) $x^2 + 6x = 5$

(19) $x^2 = 3$　　(20) $x^2 + 8x = 0$

答えを見る

どうでしたか？一番適切な方法で解けましたか？

では最後に、どんなときにどの方法で解くのが良さそうなのかということについて、少しだけアドバイスしておきましょう。

二次方程式を解くときの方針の立て方

① まず、$\bigcirc x^2 + \triangle x + \square = 0$ の形に変形してから因数分解を使う方法を試すとよい。

② 因数分解を使う方法が通用しないことがわかったら、平方完成を利用する方法を試すか、解の公式を使う方法を試すとよい。

以上はあくまでも、大まかな方針です。融通を利かせることが大切です。例えば、平方完成を使う方法が楽であるということが見え見えの方程式だったら、因数分解を使う方法は遠回りになるからです。

2.3　二次方程式を利用すると解くことができる文章題

まず、もう一度ここで、方程式とは何かということを思い出しておきましょう。たしか、方程式とは、「謎の数を発見しなさい」というときに使う方程式のことでしたね。というわけで、これから謎の数を発見する文章題を学ぶことにします。

例題 14　謎の数が 2 つあるとします。この 2 つの数の差は 7 になっていて、この 2 つの数の積は 144 になっているといいます。この 2 つの数を発見してください。

解答

数学では数の代わりに文字を使ったり、謎の数を表すために文字を使ったりするのでしたね。この問題には「謎の数が 2 つある」のですよね。だったら、2 つ文字を使うことにして、「2 つの謎の数をそれぞれ x、y とあらわしてみる」と考えればよいのでしょうか？そうですねぇ、それも悪くはないのですが、できれば文字は少ないほうがよいですよね。文字を 1 つだけ使ってこの問題を考えていくことはできないでしょうか。

問題文をもう一度よく読んでみると、「この 2 つの数の差は 7 になっていて」と書いてありますよね。ということは、「大きいほうの数は小さいほうの数に 7 をたしたものになっている」ということですよね。そうすると、

小さいほうの数を x とすると、大きいほうの数は $x+7$ とあらわされる

と考えればよいですね。これで文字 y は不要になりました。

文字の準備ができたので、この問題を解くための方程式を作ることにします。

問題文には「2 つの数の積は 144 になっている」と書いてありましたね。さっき、2 つの数は文字を使って x、$x+7$ とあらわすことにしたのですから、

$$x(x+7) = 144$$

という方程式を作ることができますね。これで謎の数を発見するための方程式ができたわけです。ではこれから今作った方程式を解いて謎の数を発見することにしましょう。（解き方、大丈夫ですよね。）

まず、

$$x(x+7) = 144$$

という方程式の左辺を展開して見かけを変えます。すると、

$$x^2 + 7x = 144$$

となります。

次は左辺と右辺から 144 をひくと、

$$x^2 + 7x - 144 = 144 - 144$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$x^2 + 7x - 144 = 0$$

となります。

次は左辺を因数分解して見かけを変えます。すると、

$$(x-9)(x+16) = 0$$

となります。

この式は、「$x-9$ という数と $x+16$ という数をかけると 0 になる」という意味ですから、

$$x - 9 = 0 \text{ または } x + 16 = 0 \text{ である}$$

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$$x - 9 = 0 \text{ となっている場合、} x = 9$$

ということになりますね。

また、

$$x + 16 = 0 \text{ となっている場合、} x = -16$$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x = 9 \quad \text{または} \quad x = -16$$

ということですね。でもまだ終わりではないですね。この問題は、2 つの謎の数を見つけて答える問題ですが、今見つけたのは小さいほうの数ですよね。だって、小さいほうの数を x という文字であらわすことにして考えてきたのですから。ですから、今わかったのは、「小さいほうの数は9 または -16 である」ということですね。いいですか、勘違いしないでくださいね。決して、「小さいほうの数が -16、大きいほうの数が 9」ということではないんですよ。というわけで、小さいほうの数の正体はわかりましたが、大きいほうの数の正体はまだわかっていません。これから大きいほうの数を発見することにしましょう。

- まず、小さいほうの数が 9 のとき、大きいほうの数はいくつなのかを考えてみます。大きいほうの数は小さいほうの数より 7 大きいのでしたね。ということは、

$$\text{大きいほうの数} = 9 + 7 = 16$$

  ということですね。ですからこの場合、2 つの数は 9 と 16 ということになります。

- 次は、小さいほうの数が -16 のとき、大きいほうの数はいくつなのかを考えてみ

ます。

大きいほうの数は小さいほうの数より 7 大きいのでしたね。ということは、

$$\text{大きいほうの数} = -16 + 7 = -9$$

ということですね。ですからこの場合、2 つの数は -16 と -9 ということになります。

以上で全て調査が終わりました。

2 つの謎の数は、

9 と 16 になっている場合と -16 と -9 になっている場合がある

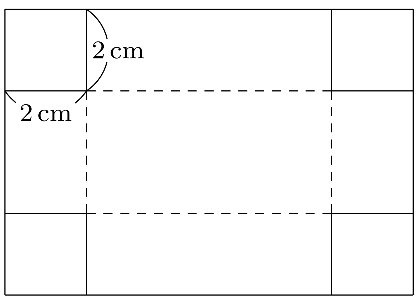
ということですね。

問 22. 大小 2 つの数があり、その差は 11 で積は 60 です。この 2 つの数を求めなさい。

答えを見る

問 23. 連続した 3 つの「自然数」があります。最大の数の 2 乗は、他の 2 つの数の積の 2 倍より 31 小さくなっています。この 3 つの「自然数」を求めなさい。 答えを見る

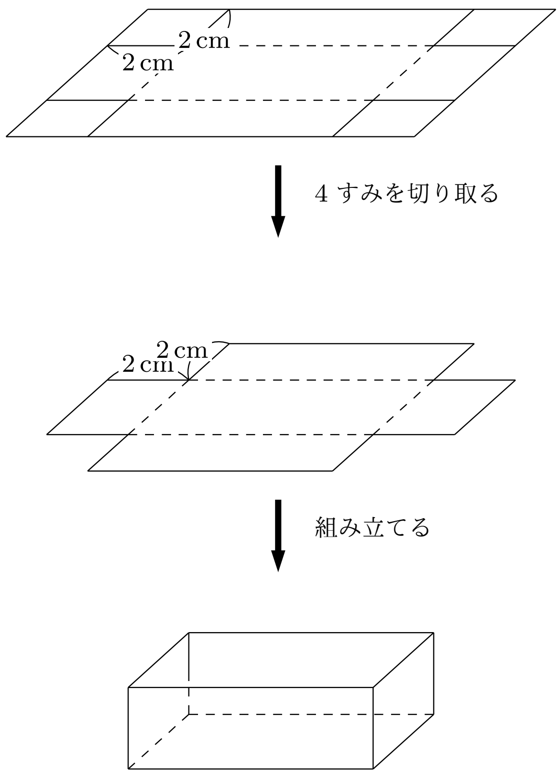
例題 15　横の長さが縦の長さより 3 cm 長い長方形の紙があります。この紙の 4 すみから 1 辺の長さが 2 cm の正方形を切り取って直方体の容器を作りました。そうすると、できあがった容器の容積は 176 cm^3 になったといいます。では、この紙の縦の長さと横の長さはそれぞれ何 cm だったのでしょうか。



解答

まず念のため話を整理しておきます。

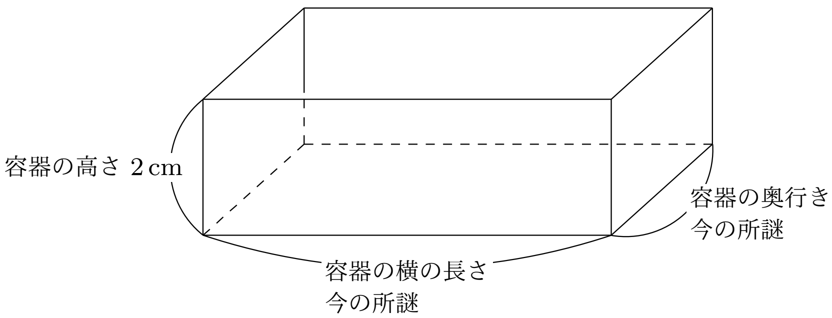
縦と横の長さが謎の長方形の紙があるのでしたね。そして、この紙の 4 すみを切り取って組み立てると直方体の容器ができるわけです。どういうことか頭の中にイメージできますか？右の図のようになっていき、最後に上が開いている（つまりふたのない）容器ができるわけですね。どうでしたか、あなたの思っていた通りでしたか？



では話を進めることにしましょう。

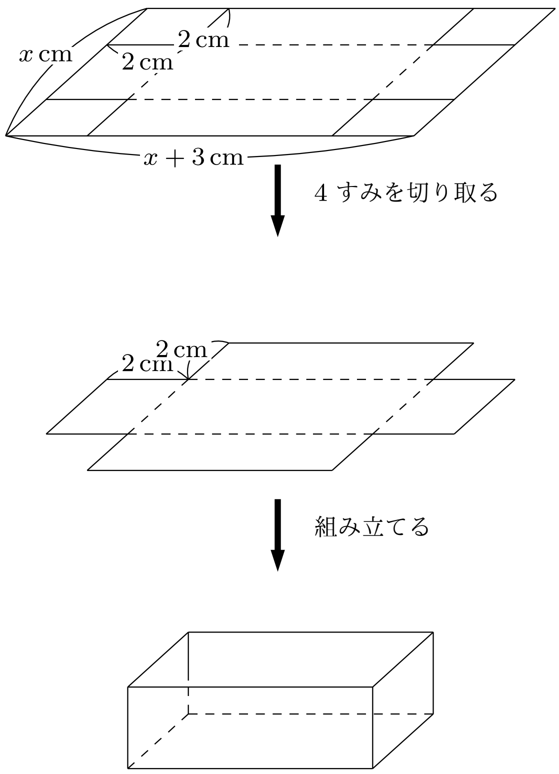
この問題では、謎の数が 2 つでてきます。初めにあった長方形の縦の長さと横の長さが謎なわけです。ですからもしかすると、「縦の長さを x cm、横の長さを y cm として考えていこうかな。」と思った人もいるかもしれませんね。悪くはないのですが、できれば文字は少ないほうがよいですよね。このことも頭の中に入れて考えていくことにしましょう。

では次の図を見てください。できあがった容器のことを詳しく調べてみることにします。（わかりやすくするために少し大きく描いておきました。）



長方形の紙から容器をどのように組み立てたのかを思い出すと、容器の高さはどう考えたって 2 cm ですよね。ところで、容器の横の長さや奥行きはどうなっているのでしょう

か。容器の横の長さや奥行きはもともとの長方形から 4 すみを切り取った分だけ短くなっているわけですが、もともとの長方形の紙の縦や横の長さもわかっていません。そこで、もともとの長方形の紙の縦の長さを x cm としてみましょう。では、もともとの長方形の紙の横の長さはどうしましょうか。もう 1 つ文字を使ったほうがよいでしょうか。まぁ、それでもよいのですが、文字は少ないほうがよいですよね。そこで、問題文の中に何かよいことが書いてなかったか思い出してみましょう。たしか、「横の長さが縦の長さより 3 cm 長い長方形の紙」って書いてありましたね。ということは、横の長さは $x+3$ (cm) って考えればよいですよね。

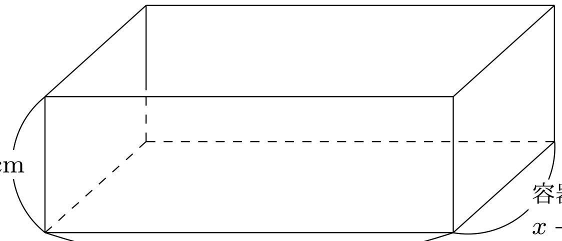


では、できあがった容器の奥行きや横の長さはどうなるのでしょう。もう一度、初めの長方形の紙から容器が組み立てられていく所を思い浮かべてください。(あなたのため、右にもう一度組み立てられていく所の図を書いておきました。)

長方形の紙から 1 辺が 2 cm の正方形を 4 すみから切り取るので、容器の奥行きは長方形の紙の縦の長さより 4 cm 短くなるはずですね。ですから、容器の奥行きは $x-4$ (cm) あらわしてよいことになりますね。

同じように、容器の横の長さも長方形の紙の横の長さより 4 cm 短くなるはずですね。ですから、容器の横の長さは $(x+3)-4$、つまり $x-1$ (cm) とあらわしてよいことになりますね。

ここまで調べたことを次の図にまとめておきます。



もともとの長方形の縦の長さを x (cm) とすると、容器の横の長さは $x-1$ (cm)、
奥行きは $x-4$ (cm) とあらわすことができる。

では話を進めましょう。問題文には「できあがった容器の容積は 176 (cm^3) になった」と書いてありましたね。上の図を見ながら容器の体積を文字 x 入った式で計算してみると、

$$\begin{aligned}\text{容器の体積} &= \text{容器の横の長さ} \times \text{容器の奥行き} \times \text{容器の高さ} \\ &= (x-1) \times (x-4) \times 2 \\ &= 2(x-1)(x-4)\end{aligned}$$

となりますね。これが 176 と等しくなっているのですよね。ですから、

$$2(x-1)(x-4) = 176$$

という方程式を作ることができるわけです。これが謎の数を発見するための式です。ではこれからこの方程式を解いてみることにしましょう。あなたはもう方程式の解き方をたくさん練習しているはずです。ですから、ここから先はあなたに穴埋めをしてもらうことにしましょう。

$$2(x-1)(x-4) = 176$$

という方程式でしたね。

左辺の 2 がじゃまな感じがします。そこで、左辺と右辺を 2 でわることにしましょう。すると、

$$(x-1)(x-4) = \boxed{}$$

となりますね。

次は左辺を展開してしまいましょう。すると、

$$x^2 - \boxed{}\,x + \boxed{} = \boxed{}$$

となりますね。

次は右辺を 0 にするために左辺と右辺から $\boxed{}$ をひきましょう。すると、

$$x^2 - 5x + 4 - \boxed{} = 88 - \boxed{}$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$x^2 - 5x - 84 = 0$$

となりますよね。

次は、この式の左辺を因数分解します。すると、

$$\left(x + \boxed{}\right)\left(x + \boxed{}\right) = 0$$

となりますね。この式は「$x+7$ と $x-12$ をかけると 0 になる」という意味ですから、

$$x + 7 = 0 \quad \text{または} \quad x - 12 = 0$$

が成り立つと結論してよいですね。

そうすると、

$$x + 7 = 0 \text{ のとき } x = \boxed{}$$

となっていて、

$$x - 12 = 0 \text{ のとき } x = \boxed{}$$

となっているわけですね。

これで謎の数 x が発見できました。謎の数は

$$x = -7 \quad \text{または} \quad x = 12$$

だったのです。でもまだ安心してはいけませんね。問題は解き終わってはいませんね。この問題は何を求める問題だったのか思い出してください。たしか、もともとあった長方形の紙の縦の長さと横の長さを求めるのでしたね。ところで、今発見できた謎の数 x ですが、たしかこれまで、「もともとの長方形の縦の長さを x (cm)」として考えてきたのですよね。さっき、$x = -7$ または $x = 12$ ということがわかったのですから、

「もともとの長方形の縦の長さは -7 cm または 12 cm である」

ということになりますね。でもちょっと気になることが出てきましたね。だって、長方形の紙の横の長さが「マイナス」になるなんてありえないですよね。ということは -7 cm のほうは不適切な答えということになりますよね。ですから、2 つ出てきた方程式の解のち、$x = -7$ という解は不採用にします。では、12 cm のほうはどうでしょう。「プラスなんだから採用していいよ。」と思った人は早とちりです。きちんと確認しなくてはいけないことがあるのです。この問題では、「もともとの長方形の紙の 4 すみを切り取る」のでしたね。そうすると、容器の縦の長さはもとより 4 cm 短くなってしまうのですね。答えとして採用してよいかどうかの基準は、「4 cm 切り取ることは本当にできるのか」ということです。もとの長方形の縦の長さが 12 cm だったら、4 すみを切り取って 4 cm 短くなってもまだ 8 cm 残っています。ですから 12 cm は採用してよいのです。しかし、例えば方程式を解いて出てきたもとの長方形の縦の長さが仮に 3 cm だったら、4 cm も短くなんてできません。つまり、作った方程式を解いて仮に $x = 3$ のようなプラスの数が得られた場合、プラスの数だとしても、この解は却下しなくてはいけなくなるわけです。このよう考えてくると、

「もともとの長方形の紙の縦の長さが -7 cm ということはありえないが、12 cm ということはありえる」

ということになるわけです。

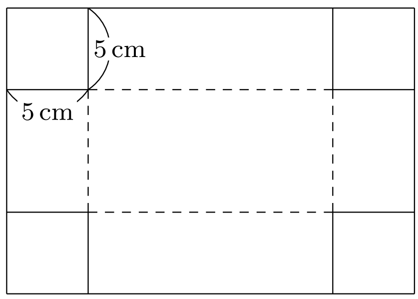
これでもとの長方形の紙の縦の長さは 12 cm であるとわかりました。では次にもとの長方形の紙の横の長さを求めることにしましょう。問題文には「横の長さが縦の長さより 3 cm 長い」とありましたから、横の長さは 15 cm ということになりますね。

以上より、

もとの紙の縦の長さは 12 cm、横の長さは 15 cm

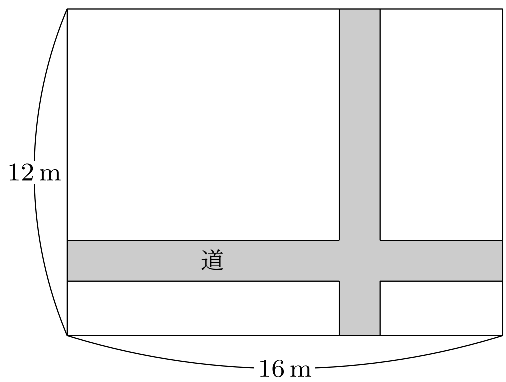
ということがわかりました。

問 24. 横の長さが縦の長さより 8 cm 長い長方形の紙があります。この紙の 4 すみから 1 辺の長さが 5 cm の正方形を切り取って直方体の容器を作りました。そうすると、できあがった容器の容積は 900 cm^3 になったといいます。では、この紙の縦の長さと横の長さはそれぞれ何 cm だったのでしょうか。



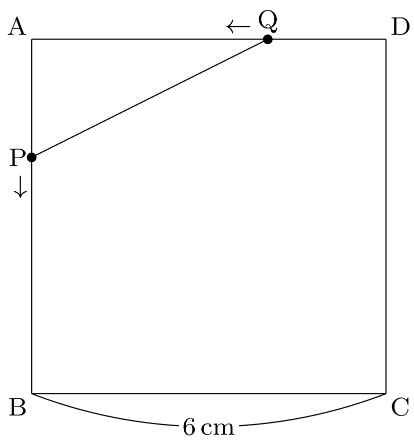
答えを見る

問 25. 右の図のように、縦が 12 m、横が 16 m の土地の上に縦、横同じ幅の道をつけて、残りの部分を畑にしようと思います。畑の面積が 140 m^2 になるようにするには道の幅を何 m にすればよいですか。



答えを見る

例題 16　右の図のような、1 辺が 6 cm の正方形 ABCD があるとします。点 P は点 A から出発して辺 AB 上を点 B まで動きます。また、点 Q は点 P が点 A を出発するのと同時に点 D から出発し、点 A と同じ速さで辺 DA 上を点 A まで動きます。以下の問に答えなさい。ただし、点 Q と点 P の速さは毎秒 1 cm とします。



(1) 出発してから 0.5 秒後の図を描きなさい。そして、このときの AP と AQ の長さを答えなさい。さらに、このときの △APQ の面積を求めなさい。

(2) 出発してから 1.0 秒後の図を描きなさい。そして、このときの AP と AQ の長さを答えなさい。さらに、このときの △APQ の面積を求めなさい。

(3) 出発してから 1.5 秒後の図を描きなさい。そして、このときの AP と AQ の長さを答えなさい。さらに、このときの △APQ の面積を求めなさい。

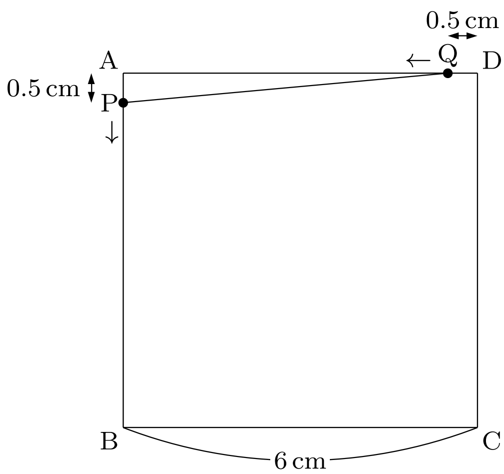
(4) 出発してから x 秒後の図を描きなさい。そして、このときの AP と AQ の長さを答えなさい。さらに、このときの △APQ の面積を x を用いた式で表しなさい。

(5) 実は、△APQ の面積が $4\,\mathrm{cm}^2$ になるときがあります。それはいつですか。

解答

これからゆっくり詳しく解説します。ですがその前に、あなたはもう一度問題をよく読んでください。どんなお話だったのか頭の中を整理してください。それでは、頭の中が整理できた人はこの先を読むことにしましょう。

(1) 出発してから 0.5 秒後の話ですね。点 P と点 Q は毎秒 1 cm の速さで動くのですから、0.5 秒の間に点 P と点 Q は 0.5 cm 進みます。ですから、右の図のようになるわけです。



このとき AP の長さはもちろん、

$$\mathrm{AP} = 0.5\,\mathrm{cm}$$

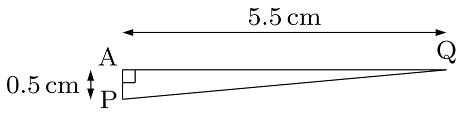
ですね。

では、AQ の長さはどうなるでしょうか。図をよく見れば、AQ の長さは AD の長さから QD の長さをひけば求められることがわかりますね。今、QD は 0.5 cm で

すから、

$$\begin{aligned}\mathrm{AQ} &= \mathrm{AD} - \mathrm{QD}\\ &= 6 - 0.5\\ &= 5.5\,\mathrm{cm}\end{aligned}$$

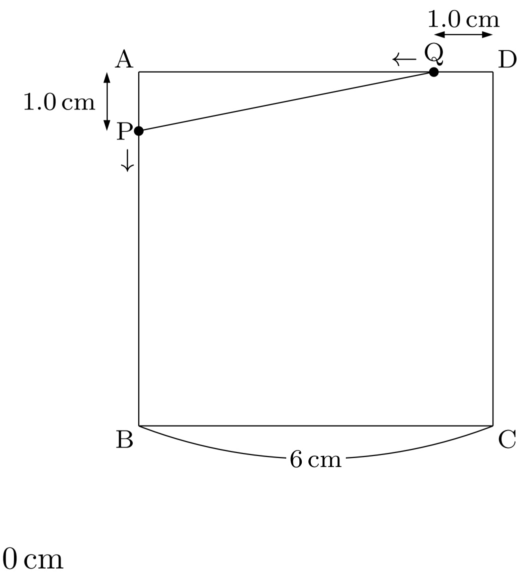
となりますね。



△ABC の面積を調べるため、△ABC だけを取り出した図を右に描きました。点 A の所にできている角は、もともと正方形のかどにあった角なのでもちろん直角ですね。ですから △ABC の面積は、AQ を底辺、AP を高さとして求めることができます。そうすると、

$$\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積} = \frac{1}{2} \times 5.5 \times 0.5 = 1.375\,\mathrm{cm}^2$$

となります。



(2) 出発してから 1.0 秒後の話ですね。(1) と全く同じように考えればよいですよね。点 P と点 Q は毎秒 1 cm の速さで動くのですから、1.0 秒の間に点 P と点 Q は 1.0 cm 進みますね。ですから、右の図のようになるわけです。

このとき AP の長さはもちろん、

$$\mathrm{AP} = 1.0\,\mathrm{cm}$$

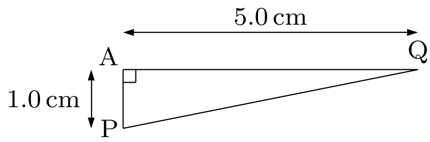
ですね。

では、AQ の長さはどうなるでしょうか。図をよく見れば、AQ の長さは AD の長さから QD の長さをひけば求められることがわかりますね。今、QD は 1.0 cm で

すから、

$$\begin{aligned} AQ &= AD - QD \\ &= 6 - 1.0 \\ &= 5.0\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

となりますね。

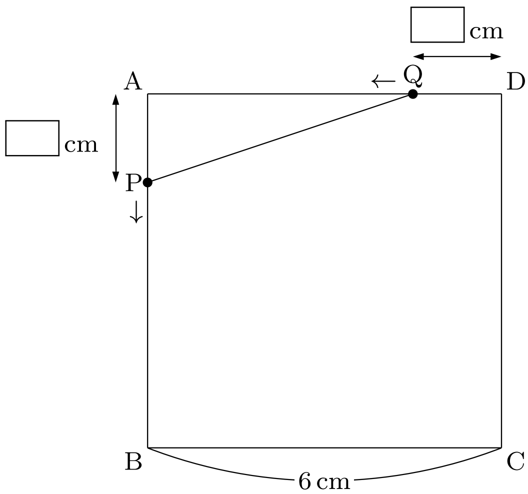


△ABC の面積を調べるため、右に △ABC だけを取り出した図を描きました。点 A の所にできている角は、もともと正方形のかどにあった角なのでもちろん直角ですね。ですから △ABC の面積は、AQ を底辺、AP を高さとして求めることができます。そうすると、

$$\triangle ABC\ \text{の面積} = \frac{1}{2} \times 1.0 \times 5.0 = 2.5\,\mathrm{cm}^2$$

となります。

(3) 出発してから 1.5 秒後の話ですね。(1) や (2) と全く同じように考えればよいですよね。ですからこの先の説明の文と図にはあなたに穴埋めをしてもらいます。



点 P と点 Q は毎秒 1 cm の速さで動くのですから、1.5 秒の間に点 P と点 Q は $\boxed{\quad}$ cm 進みますね。ですから、右の図のようになるわけです。

このとき AP の長さはもちろん、

$$AP = \boxed{\quad}\,\mathrm{cm}$$

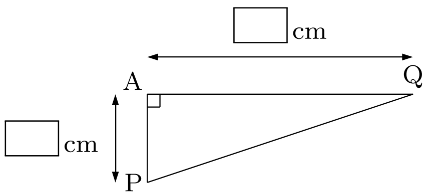
ですね。

では、AQ の長さはどうなるでしょうか。図をよく見れば、AQ の長さは AD の長さから QD の長さをひけば求められることがわかりますね。今、QD は $\boxed{}$ cm ですから、

$$\begin{aligned} \mathrm{AQ} &= \mathrm{AD} - \mathrm{QD} \\ &= 6 - \boxed{} \\ &= \boxed{}\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

となりますね。

△ABC の面積を調べるため、右に△ABC だけを取り出した図を描きました。点 A の所にできている角は、もともと正方形のかどにあった角なのでもちろん直角ですね。ですから △ABC の面積は、AQ を底辺、AP を高さとして求めることができます。そうすると、



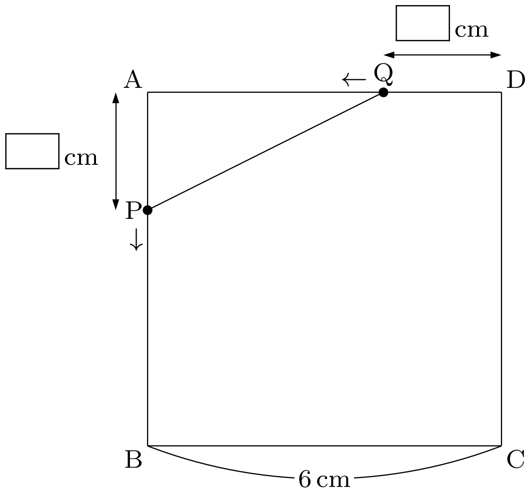
$$\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積} = \frac{1}{2} \times \boxed{} \times \boxed{} = \boxed{}\,\mathrm{cm}^2$$

となります。

(4) (1)、(2)、(3) では、点が出発してからそれぞれ 0.5 秒後、1.0 秒後、1.5 秒後の話を考えてきましたが、ここまでは「お試し」の話です。ここからは、0.5 秒後、1.0 秒後、1.5 秒後なんてケチなことは言わずに、x 秒後の話をするわけですね。しかし、これまでのお試し」の話の中には「x 秒後のことを考えるために大切なこと」は全て含まれています。数学を学んでいくとき、「お試しの話の中から本質的なことを学び取る」ということはとても重要なことなのです。

前置きはこのくらいにして本題に入ることにしましょう。あなたに穴埋めをしてもらいます。

出発してから x 秒後の話ですね。



点 P と点 Q は毎秒 1 cm の速さで動くのですから、x 秒の間に点 P と点 Q は $\boxed{\quad}$ cm 進みますね。ですから、右の図のようになるわけです。

このとき AP の長さはもちろん、

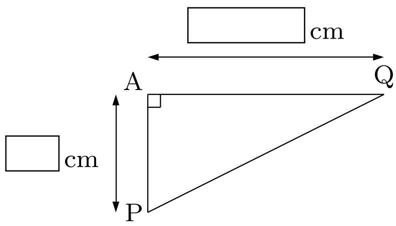
$$\mathrm{AP} = \boxed{\quad}\ \mathrm{cm}$$

ですね。

では、AQ の長さはどうなるでしょうか。図をよく見れば、AQ の長さは AD の長さから QD の長さをひけば求められることがわかりますね。今、QD は $\boxed{\quad}$ cm ですから、

$$\begin{aligned}\mathrm{AQ} &= \mathrm{AD} - \mathrm{QD} \\ &= \boxed{\qquad\quad}\ \mathrm{cm}\end{aligned}$$

となりますね。



△ABC の面積を調べるため、右に△ABC だけを取り出した図を描きました。点 A の所にできている角は、もともと正方形のかどにあった角なのでもちろん直角ですね。ですから △ABC の面積は、AQ を底辺、AP を高さとして求めることができます。そうすると、

$$\triangle\mathrm{ABC}\ の面積 = \frac{1}{2} \times \left(\boxed{\qquad\quad}\right) \times \boxed{\quad} = \frac{1}{2}x(6-x)\,(\mathrm{cm}^2)$$

となります。

(5) (4) が解けた人は、「x 秒後の △APQ の面積は $\boxed{}$ (cm^2) という数式であらわせる」ということがわかったはずです。この式を使えば、いつ △APQ の面積が $4\,(\mathrm{cm}^2)$ になるのか突き止められると思いませんか？だって、今の所、いつ △APQ の面積が $4\,(\mathrm{cm}^2)$ になるのか謎なのですが、いつものように謎の数を x として、「x 秒後に △APQ の面積が $4\,\mathrm{cm}^2$ になる」って考えれば、

$$\frac{1}{2}x(6-x)=4$$

という方程式を作ることができますよね。ではこの方程式を解くことにしましょう。

まず、左辺と右辺に 2 をかけると、

$$\boxed{}\times\frac{1}{2}x(6-x)=\boxed{}\times 4$$

となりますが、約分などをして見かけをマシにすると、

$$x(6-x)=\boxed{}$$

となりますね。

次は左辺を展開すると、

$$6x-\boxed{}^2=\boxed{}$$

となりますが、左辺の $6x$ と $-x^2$ の順番を入れかえて見やすくすると、

$$-x^2+6x=8$$

となりますね。この式は、x^2 の前に「マイナス」がついていてこの先やりにくいので、左辺と右辺に -1 をかけることにします。すると、

$$-1\times(-x^2+6x)=-1\times 8$$

となりますが、かっこをはずすなどして見かけをマシにすると、

$$x^2 - \boxed{} = -8$$

となります。

次は、右辺を 0 にするために左辺と右辺に 8 を足します。すると、

$$x^2 - 6x + 8 = -8 + 8$$

となりますが、仲間の部品をまとめてこの式の見かけをマシにすると、

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

となりますね。

次は左辺を因数分解します。そのために、かけて $\boxed{}$ 、たして $\boxed{}$ となる 2 つ数を探しますがそのような 2 つの数は $\boxed{}$ と $\boxed{}$ ですね。ですから、さっきの方程式の左辺を因数分解して見かけを変えると、

$$\left(x - \boxed{}\right)\left(x - \boxed{}\right) = 0$$

となります。この方程式は「$\boxed{}$ と $\boxed{}$ をかけると 0 になる」という意味ですよね。ということは、

$$\boxed{} = 0 \quad \text{または} \quad \boxed{} = 0$$

が成り立つと結論してよいですね。

そうすると、

$$x - 2 = 0 \text{ のとき } x = \boxed{}$$

となっていて、

$$x - \boxed{} = 0 \text{ のとき } x = \boxed{}$$

となっているわけですね。

これで謎の数 x が発見できました。謎の数は

$$x = 2 \quad \text{または} \quad x = 4$$

だったのですね。

ところで、「点Pと点Qがスタートしてから x 秒後に △ABC の面積が $4\,\text{cm}^2$ になるとしてここまで考えてきたわけですが、謎の数の正体として x の値が2つ出てきました。両方とも採用してよいのでしょうか？そのことを判断するために、ここでもう一度、この問題では点Pや点Qがそれぞれどこからどこまで動くのだったか思い出してください。たしか、「点Pは点Aから出発して辺AB上を点Bまで動きます。また、点Qは点Pが点Aを出発するのと同時に点Dから出発し、点Aと同じ速さで辺DA上を点Aまで動きます。ただし、点Qと点Pの速さは毎秒 1 cm とします。」と書いてありましたね。そしてこの正方形は1辺の長さが 6 cm なのでした。ということは、このお話は点Pと点Qがスタートしてから $\boxed{\quad}$ 秒たつと終わりになるわけです。ですから、「x の値は $\boxed{\quad}$ より大きく $\boxed{\quad}$ より小さくないといけない」ということですね。

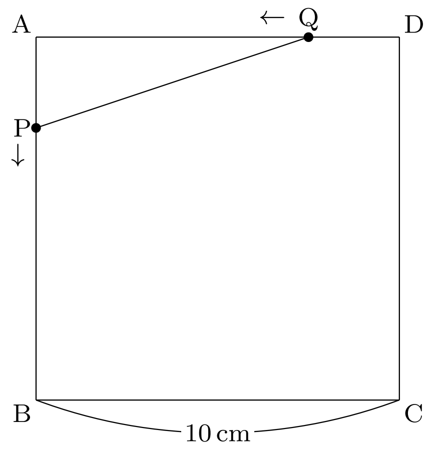
さっき求められた2つの x の値は2と4でしたね。この2つはどちらもちゃんと、「x の値は0より大きく6より小さくないといけない」という条件を満たしています。ですから2つとも採用してよいのです。

以上の調査から、

△ABC の面積が 4 cm になるのは2秒後と4秒後

ということがわかりました。

問 26. 右の図のような、1 辺が 10 cm の正方形 ABCD があるとします。点 P は点 A から出発して辺 AB 上を点 B まで動きます。また、点 Q は点 P が点 A を出発するのと同時に点 D から出発し、点 A と同じ速さで辺 DA 上を点 A まで動きます。以下の問に答えなさい。



(1) 点 P が点 A から 1 cm の所に来たときの図を描きなさい。またこのときの AQ の長さを答えなさい。さらに、このときの △APQ の面積を求めなさい。

(2) 点 P が点 A から 2 cm の所に来たときの図を描きなさい。またこのときの AQ の長さを答えなさい。さらに、このときの △APQ の面積を求めなさい。

(3) 点 P が点 A から 3 cm の所に来たときの図を描きなさい。またこのときの AQ の長さを答えなさい。さらに、このときの △APQ の面積を求めなさい。

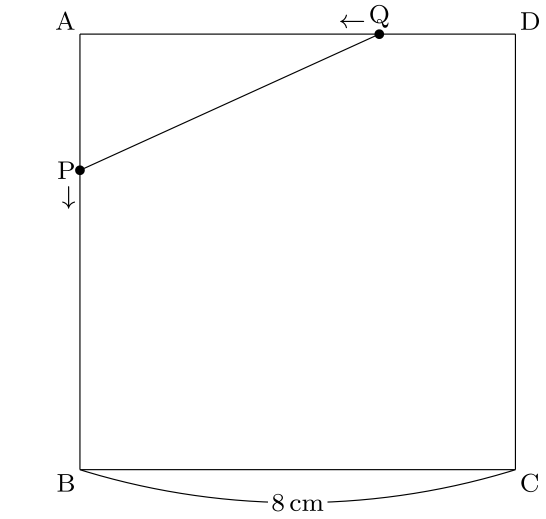
(4) 点 P が点 A から x cm の所に来たときの図を描きなさい。またこのときの AQ の長さを答えなさい。さらに、このときの △APQ の面積を x を用いた式で表しなさい。

(5) この問題では、x の値はどんな範囲にある数でなければならないですか。不等号を使って答えなさい。

(6) 実は、△APQ の面積が $8\,\mathrm{cm}^2$ になるときがあります。それは点 P が点 A から何 cm 動いたときですか。

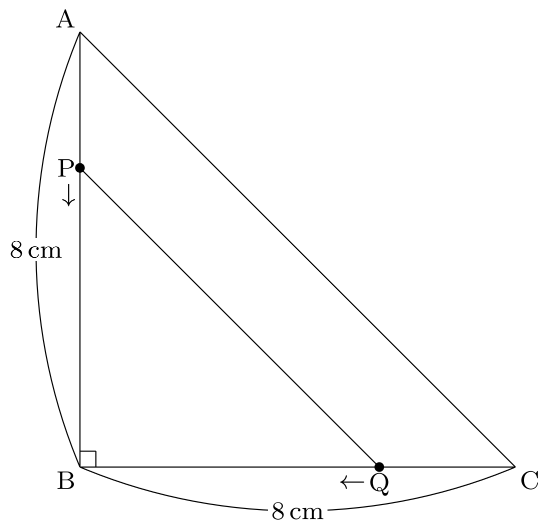
答えを見る

問 27.　右の図のような、1 辺が 8 cm の正方形 ABCD があるとします。点 P は点 A から出発して辺 AB 上を点 B まで動きます。また、点 Q は点 P が点 A を出発するのと同時に点 D から出発し、点 A と同じ速さで辺 DA 上を点 A まで動きます。 実は、△APQ の面積が 7.5 cm^2 になるときがあります。それは点 P が点 A から何 cm 動いたときですか。



答えを見る

問 28.　右の図のような、∠B が直角である直角二等辺三角形 ABC があるとします。辺 AB と辺 CB の長さ 8 cm です。点 P は点 A から出発して辺 AB 上を点 B まで動きます。また、点 Q は点 P が点 A を出発するのと同時に点 C から出発し、点 A と同じ速さで辺 CB 上を点 B まで動きます。 実は、台形 APQC の面積が 14 cm^2 になるときがあります。それは点 P が点 A から何 cm 動いたときですか。



答えを見る

問の解答

問 1.

(1) 例えば謎の数を x という文字であらわすことにすると

> なぞの数があり、その数を 2 倍してからさらに 3 をたしてできる数と、その数を -3 倍してからさらに 10 をたしてできる数は同じになる。

という話は

$$2x + 3 = -3x + 10$$

とあらわすことができます。

(2) 例えば謎の数を a という文字であらわすことにすると

> なぞの数があり、その数を 2 乗してからさらに 6 をたしてできる数と、その数を -5 倍してできる数は同じになる。

という話は

$$a^2 + 6 = -5a$$

とあらわすことができます。

(3) 例えば 2 つの謎の数を x、y という文字であらわすことにすると

> なぞの数が 2 つあり、一方の数を 2 倍してからさらに 1 をたしてできる数と、他方の数を 5 倍してからさらに 7 をひいてできる数は同じになる。

という話は

$$2x+1=5y-7$$

とあらわすことができます。

本文へ戻る

問 2.

(1) $a+7=-6$

(2) $-3x+5=-2x+2$

(3) $b^2+5=-3b+3$

本文へ戻る

問 3.

(1) $2a+3=b+3$

(2) $-3x-y=-5$

本文へ戻る

問 4. 二次方程式を選ぶ問題でしたね。例題 1 の解答がきちんと理解出来た人のため、あっさり説明しましょう。

等式の右側が 0 になるように式を変形していき、

$$\text{ナントカ}\ x^2+\text{ほにゃらら}\ x+\text{これこれ}=0$$

という形にすることができるかどうかを調べればよいのですよね。

① $x^2+4x+4=0$ という等式は初めから

$$\text{ナントカ}\ x^2+\text{ほにゃらら}\ x+\text{これこれ}=0$$

という形になっています。ですからこの等式は 2 次方程式です。

② $x^2 - 4x = x^2 + 5$ という等式を変形すると

$$-4x - 5 = 0$$

となります。

$$\text{ナントカ}\ x^2 + \text{ほにゃらら}\ x + \text{これこれ} = 0$$

という形になっていません。ですからこの等式は 2 次方程式ではありません。

③ $(x+5)(x-2) = x^2$ という等式を変形すると

$$3x - 10 = 0$$

となります。

$$\text{ナントカ}\ x^2 + \text{ほにゃらら}\ x + \text{これこれ} = 0$$

という形になっていません。ですからこの等式は 2 次方程式ではありません。

④ $x^2 - 6 = 0$ という等式は初めから

$$\text{ナントカ}\ x^2 + \text{ほにゃらら}\ x + \text{これこれ} = 0$$

という形になっています。ですからこの等式は 2 次方程式です。

⑤ $3x + 6 = x - 4$ という等式を変形すると

$$2x + 10 = 0$$

となります。

$$\text{ナントカ}\ x^2 + \text{ほにゃらら}\ x + \text{これこれ} = 0$$

という形になっていません。ですからこの等式は 2 次方程式ではありません。

⑥ $2x + 5x = -3x$ という等式を変形すると

$$10x = 0$$

となります。

$$ナントカ\,x^2 + ほにゃらら\,x + これこれ = 0$$

という形になっていません。ですからこの等式は 2 次方程式ではありません。

⑦ $x^2 - 8x + 12$ という式には等号、つまり「$=$ のマーク」がありません。（ですからこの式は「等式」の仲間ではありません。単なる式です。）ところで「方程式」というのは「これこれこうしたものと、あれこれああしたものが等しい」ということを意味する式なので、当然、等号、つまり「$=$ のマーク」があるはずです。というわけで、この式は方程式ですらありません。

⑧ $(x+3)(x-8)$ という式には等号、つまり「$=$ のマーク」がありません。（ですからこの式は「等式」の仲間ではありません。単なる式です。）ところで「方程式」というのは「これこれこうしたものと、あれこれああしたものが等しい」ということを意味する式なので、当然、等号、つまり「$=$ のマーク」があるはずです。というわけで、この式は方程式ですらありません。

以上より、2 次方程式は①、④ということになります。 本文へ戻る

問 5. -2、-1、-0、1、2 のうち、二次方程式 $x^2 - x - 2 = 0$ の解になっているものを選ぶ問題でしたね。

解の候補が書いてあるわけですから。一つ一つ、解なのかそうでないのか試していけばよいですよね。では試していくことにしましょう。

- -2 を試します。

  左辺の計算をすると、

  $$(-2)^2 - (-2) - 2 = 4 + 2 - 2 = 4$$

  となり、右辺の 0 にはなりません。ですから -2 は解ではありませんね。

- -1 を試します。

左辺の計算をすると、

$$(-1)^2 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

となり、右辺の 0 と等しくなりました。ですから -1 は解ですね。

- 0 を試します。

  左辺の計算をすると、

  $$0^2 - 0 - 2 = -2$$

  となり、右辺の 0 にはなりません。ですから 0 は解ではありませんね。

- 1 を試します。

  左辺の計算をすると、

  $$1^2 - 1 - 2 = 1 - 1 - 2 = -2$$

  となり、右辺の 0 にはなりません。ですから 1 は解ではありませんね。

- 2 を試します。

  左辺の計算をすると、

  $$2^2 - 2 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$$

  となり、右辺の 0 と等しくなりました。ですから 2 は解ですね。

以上の調査から、

> -2、-1、-0、1、2 のうち、二次方程式 $x^2 - x - 2 = 0$ の解になっているのは -1 と 2 である

ということがわかりました。 本文へ戻る

問 6. 『さっき学んだ重要な事実を次のように言い換えてみようと思います。次の文の空欄を正しく埋めてください。』という問題でしたね。

重要な事実 : 2 つの数 A と B があり、A も B も 0 ではないとします。このとき、A と B をかけても絶対に $\boxed{0}$ にはなりません。 本文へ戻る

問 7. 『さっき学んだ重要な事実を数学っぽく式を使って言ってみようと思います。次の文の空欄を正しく埋めてください。』という問題でしたね。

重要な事実：2 つの数 A と B があるとします。$AB = 0$ ならば $\boxed{A = 0}$ または $\boxed{B = 0}$ が成り立ちます。

本文へ戻る

問 8. 二次方程式 $(x-2)(x+4) = 0$ を解こうと思います。

まずこの式の意味を考えてみます。この方程式は、

$\boxed{x-2}$ と $\boxed{x+4}$ をかけると 0 になる。

という意味ですよね。

ところで、2 つの数をかけると 0 になるとしたら、少なくとも、2 つの数のうちのどちらかは、絶対に 0 でないとけません。ですから、

$\boxed{x-2} = 0$ または $\boxed{x+4} = 0$ である。

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$\boxed{x-2} = 0$ となっている場合、$x = \boxed{2}$ ということになりますね。

また、

$\boxed{x+4} = 0$ となっている場合、$x = \boxed{-4}$ ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$x = \boxed{2}$ または $x = \boxed{-4}$

ということですね。

本文へ戻る

問 9. 二次方程式 $x(x+4) = 0$ を解こうと思います。

まずこの式の意味を考えてみます。この方程式は、

$$x \text{ と } \boxed{x+4} \text{ をかけると } 0 \text{ になる}$$

という意味ですよね。

ところで、2 つの数をかけると 0 になるとしたら、少なくとも、2 つの数のうちのどちらかは、絶対に 0 でないとけません。ですから、

$$\boxed{x} = 0 \text{ または } \boxed{x+4} = 0 \text{ である}$$

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$$x = 0 \text{ となっている場合、もちろん } x = \boxed{0}$$

ということになりますね。

また、

$$\boxed{x+4} = 0 \text{ となっている場合、} x = \boxed{-4}$$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x = \boxed{0} \text{ または } x = \boxed{-4}$$

ということですね。

本文へ戻る

問 10. 『次の方程式を解きなさい。』という問題でしたね。

この問題の方程式では、「2 つの数をかけると 0 になるとしたら、少なくとも、2 つの数のうちのどちらかは、絶対に 0 でないとけない。」ということをしっかり頭に入れて解くことが大切です。

(1) $(x+5)(x+3) = 0$

この方程式は

$$x+5 \text{ という数と } x+3 \text{ という数をかけると } 0 \text{ になる}$$

という意味ですよね。ところで、「ナントカとほにゃららをかけて 0 になるんだったら、少なくとも、ナントカとほにゃららのどちらかは絶対に 0 になっているはず」ですから、

$$x + 5 = 0 \ \text{ または } \ x + 3 = 0 \ \text{ である}$$

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$$x + 5 = 0 \text{ となっている場合、} x = -5$$

ということになりますね。

また、

$$x + 3 = 0 \text{ となっている場合、} x = -3$$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x = -5 \text{ または } x = -3$$

ということですね。

(2) $x(x+3) = 0$

この方程式は

$$x \text{ という数と } x+3 \text{ という数をかけると } \underline{0 \text{ になる}}$$

という意味ですよね。ところで、「ナントカとほにゃららをかけて 0 になるんだったら、少なくとも、ナントカとほにゃららのどちらかは絶対に 0 になっているはず」ですから、

$$x = 0 \ \text{ または } \ x + 3 = 0 \ \text{ である}$$

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$$x = 0 \text{ となっている場合、} x = 0$$

に決まってますよね。

また、

$$x + 3 = 0 \text{ となっている場合、} x = -3$$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x = 0 \text{ または } x = -3$$

ということですね。

(3) $(x+1)(2x-1) = 0$

この方程式は

$$x + 1 \text{ という数と } 2x - 1 \text{ という数をかけると } \underline{0 \text{ になる}}$$

という意味ですよね。ところで、「ナントカとほにゃららをかけて 0 になるんだったら、少なくとも、ナントカとほにゃららのどちらかは絶対に 0 になっているはず」という話ですから、

$$x + 1 = 0 \text{ または } 2x - 1 = 0 \text{ である}$$

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$$x + 1 = 0 \text{ となっている場合、} x = -1$$

ということになりますね。

また、$2x-1=0$ となっている場合、x はいくつなのか調べてみるとまず、

$$2x=1$$

となり、さらに

$$x=\frac{1}{2}$$

であることがわかります。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x=-1 \text{ または } x=\frac{1}{2}$$

ということですね。

(4) $x^2-6x+5=0$

この方程式は、左辺を因数分解すると

$$(x-2)(x-3)=0$$

と書きかえることができます。

今得られた式は

$x-2$ という数と $x-3$ という数をかけると 0 になる

という意味ですよね。ところで、「ナントカとほにゃららをかけて 0 になるんだったら、少なくとも、ナントカとほにゃららのどちらかは絶対に 0 になっているはず」ですから、

$$x-2=0 \quad \text{または} \quad x-3=0 \quad \text{である}$$

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$$x - 2 = 0 \text{ となっている場合、} x = 2$$

ということになりますね。

また、

$$x - 3 = 0 \text{ となっている場合、} x = 3$$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x = 2 \text{ または } x = 3$$

ということですね。

(5) $x^2 + 6x + 8 = 0$

この方程式は、左辺を因数分解すると

$$(x + 2)(x + 4) = 0$$

と書きかえることができます。

今得られた式は

$x + 2$ という数と $x + 4$ という数をかけると 0 になる

という意味ですよね。ところで、「ナントカとほにゃららをかけて 0 になるんだったら、少なくとも、ナントカとほにゃららのどちらかは絶対に 0 になっているはず」ですから、

$$x + 2 = 0 \quad \text{または} \quad x + 4 = 0 \quad \text{である}$$

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$$x + 2 = 0 \text{ となっている場合、} x = -2$$

ということになりますね。

また、

$$x + 4 = 0 \text{ となっている場合、} x = -4$$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x = -2 \text{ または } x = -4$$

ということですね。

(6) $x^2 - 4x - 21 = 0$

この方程式は、左辺を因数分解すると

$$(x - 7)(x + 3) = 0$$

と書きかえることができます。

今得られた式は

$$x - 7 \text{ という数と } x + 3 \text{ という数をかけると } \underline{0 \text{ になる}}$$

という意味ですよね。ところで、「ナントカとほにゃららをかけて 0 になるんだったら、少なくとも、ナントカとほにゃららのどちらかは絶対に 0 になっているはず」ですから、

$$x - 7 = 0 \quad \text{または} \quad x + 3 = 0 \quad \text{である}$$

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$$x-7=0 \text{ となっている場合、} x=7$$

ということになりますね。

また、

$$x+3=0 \text{ となっている場合、} x=-3$$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x=7 \text{ または } x=-3$$

ということですね。

(7) $x^2-x-56=0$

この方程式は、左辺を因数分解すると

$$(x-8)(x+7)=0$$

と書きかえることができます。

今得られた式は

$$x-8 \text{ という数と } x+7 \text{ という数をかけると } \underline{0 \text{ になる}}$$

という意味ですよね。ところで、「ナントカとほにゃららをかけて 0 になるんだったら、少なくとも、ナントカとほにゃららのどちらかは絶対に 0 になっているはず」ですから、

$$x-8=0 \quad \text{または} \quad x+7=0 \quad \text{である}$$

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$$x-8=0 \text{ となっている場合、} x=8$$

ということになりますね。

また、

$$x+7=0 \text{ となっている場合、} x=-7$$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x=8 \text{ または } x=-7$$

ということですね。

(8) $x^2-6x=0$

この方程式は、左辺を因数分解すると

$$x(x-6)=0$$

と書きかえることができます。

今得られた式は

x という数と $x-6$ という数をかけると 0 になる

という意味ですよね。ところで、「ナントカとほにゃららをかけて 0 になるんだったら、少なくとも、ナントカとほにゃららのどちらかは絶対に 0 になっているはず」ですから、

$$x=0 \quad \text{または} \quad x-6=0 \quad \text{である}$$

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$$x = 0 \text{ となっている場合、} x = 0$$

に決まってますよね。

また、

$$x - 6 = 0 \text{ となっている場合、} x = 6$$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x = 0 \text{ または } x = 6$$

ということですね。

(9) $x^2 - 13x + 36 = 0$

この方程式は、左辺を因数分解すると

$$(x-4)(x-9) = 0$$

と書きかえることができます。

今得られた式は

$$x - 4 \text{ という数と } x - 9 \text{ という数をかけると } \underline{0 \text{ になる}}$$

という意味ですよね。ところで、「ナントカとほにゃららをかけて 0 になるんだったら、少なくとも、ナントカとほにゃららのどちらかは絶対に 0 になっているはず」ですから、

$$x - 4 = 0 \quad \text{または} \quad x - 9 = 0 \quad \text{である}$$

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$$x-4=0 \text{ となっている場合、} x=4$$

ということになりますね。

また、

$$x-9=0 \text{ となっている場合、} x=9$$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x=4 \text{ または } x=9$$

ということですね。

本文へ戻る

問 11. 方程式を解く問題でした。

この問題の方程式では、「2 つの数をかけると 0 になるとしたら、少なくとも、2 つの数のうちのどちらかは、絶対に 0 でないとけない。」ということをしっかり頭に入れて解くことが大切です。

(1) $(x+5)^2=0$

この方程式は

$$x+5 \text{ という数と } x+5 \text{ という数をかけると } \underline{0 \text{ になる}}$$

という意味です。ですから、

$$x+5=0 \quad \text{または} \quad x+5=0 \quad \text{である}$$

と結論してよいことになりますが、結局どっちにしろ、

$$x+5=0 \text{ である}$$

ということになります。そうすると、

$$x = -5$$

ということになります。

(2) $x^2 + 4x + 4 = 0$

この方程式は、左辺を因数分解すると

$$(x+2)(x+2) = 0$$

と書きかえることができます。そして今得られた式は

$x+2$ という数と $x+2$ という数をかけると 0 になる

という意味です。ですから、

$x+2=0$ または $x+2=0$ である

と結論してよいことになりますが、結局どっちにしろ、

$x+2=0$ である

ということになります。そうすると、

$$x = -2$$

ということになります。

(3) $x^2 - 10x + 25 = 0$

この方程式は、左辺を因数分解すると

$$(x-5)(x-5) = 0$$

と書きかえることができます。そして今得られた式は

$$x-5 \text{ という数と } x-5 \text{ という数をかけると } \underline{0 \text{ になる}}$$

という意味です。ですから、

$$x-5=0 \quad \text{または} \quad x-5=0 \quad \text{である}$$

と結論してよいことになりますが、結局どっちにしろ、

$$x-5=0 \text{ である}$$

ということになります。そうすると、

$$x=5$$

ということになります。

本文へ戻る

問 12. 方程式を解く問題でしたね。

この問題のような方程式では、まず右辺が 0 になるように変形することが大切なのですよね。例題 7 の解答が理解出来た人のため、あっさり説明します。

(1) $x^2=2(x+12)$

右辺を展開すると

$$x^2=2x+24$$

となります。さらに、等式を変形するときにやっても良いことをいくつか使うと

$$x^2-2x-24=0$$

となります。これで右辺が 0 になりました。

この式は左辺を因数分解すると

$$(x-6)(x+4)=0$$

と書きかえることができます。

今得られた式は

$x-6$ という数と $x+4$ という数をかけると 0 になる

という意味ですよね。ところで、「ナントカとほにゃららをかけて 0 になるんだったら、少なくとも、ナントカとほにゃららのどちらかは絶対に 0 になっているはず」ですから、

$$x-6=0 \quad \text{または} \quad x+4=0 \quad \text{である}$$

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$x-6=0$ となっている場合、$x=6$

ということになりますね。

また、

$x+4=0$ となっている場合、$x=-4$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x=6 \text{ または } x=-4$$

ということですね。

(2) $(x-2)(x-3)=20$

左辺を展開すると

$$x^2-5x+6=20$$

となります。さらに、等式を変形するときにやっても良いことをいくつか使うと

$$x^2-5x-14=0$$

となります。これで右辺が 0 になりました。

この式は左辺を因数分解すると

$$(x-7)(x+2)=0$$

と書きかえることができます。

今得られた式は

$$x-7 \text{ という数と } x+2 \text{ という数をかけると } \underline{0 \text{ になる}}$$

という意味ですよね。ところで、「ナントカとほにゃららをかけて 0 になるんだったら、少なくとも、ナントカとほにゃららのどちらかは絶対に 0 になっているはず」ですから、

$$x-7=0 \quad \text{または} \quad x+2=0 \quad \text{である}$$

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$$x-7=0 \text{ となっている場合、} x=7$$

ということになりますね。

また、

$$x+2=0 \text{ となっている場合、} x=-2$$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x=7 \text{ または } x=-2$$

ということですね。

(3) $(x+8)(x+2)=2x$

左辺を展開すると

$$x^2+10x+16=2x$$

となります。さらに、等式を変形するときにやっても良いことをいくつか使うと

$$x^2+8x+16=0$$

となります。これで右辺が 0 になりました。

この式は左辺を因数分解すると

$$(x+4)(x+4)=0$$

と書きかえることができます。

今得られた式は

$x+4$ という数と $x+4$ という数をかけると 0 になる

という意味ですよね。ところで、「ナントカとほにゃららをかけて 0 になるんだったら、少なくとも、ナントカとほにゃららのどちらかは絶対に 0 になっているはず」ですから、

$x+4=0$ または $x+4=0$ である

と結論してよいことになりますが、どっちにしろ結局

$x+4=0$ である

ということですよね。

そうすると

$$x=-4$$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

(4) $(x+2)^2 = x+4$

左辺を展開すると

$$x^2 + 4x + 4 = x + 4$$

となります。さらに、等式を変形するときにやっても良いことをいくつか使うと

$$x^2 + 3x = 0$$

となります。これで右辺が 0 になりました。

この式は左辺を因数分解すると

$$x(x+3) = 0$$

と書きかえることができます。

今得られた式は

x という数と $x+3$ という数をかけると 0 になる

という意味ですよね。ところで、「ナントカとほにゃららをかけて 0 になるんだったら、少なくとも、ナントカとほにゃららのどちらかは絶対に 0 になっているはず」ですから、

$x = 0$ または $x + 3 = 0$ である

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$x = 0$ となっている場合、$x = 0$

に決まってますよね。

また、

$$x+3=0 \text{ となっている場合、} x=-3$$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x=0 \text{ または } x=-3$$

ということですね。

本文へ戻る

問 13. 方程式を解く問題でしたね。

この問題のような方程式では、まず、右辺が 0 になるように変形することや「ナントカ x^2」の「ナントカ」の所が 1 になるようにすることが大切なのですよね。例題 8 の解答が理解出来た人のため、あっさり説明します。

(1) $-3x^2-12x+15=0$

この式の左辺と右辺を -3 でわると

$$x^2+4x-5=0$$

となります。

この式は左辺を因数分解すると

$$(x-1)(x+5)=0$$

と書きかえることができます。

今得られた式は

$x-1$ という数と $x+5$ という数をかけると 0 になる

という意味ですよね。ところで、「ナントカとほにゃららをかけて 0 になるんだったら、少なくとも、ナントカとほにゃららのどちらかは絶対に 0 になっているは

ず」ですから、

$$x-1=0 \ \text{ または } \ x+5=0 \ \text{ である}$$

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$$x-1=0 \text{ となっている場合、} x=1$$

ということになりますね。

また、

$$x+5=0 \text{ となっている場合、} x=-5$$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x=1 \text{ または } x=-5$$

ということですね。

(2) $4x^2-24x=-20$

右辺が 0 ではないのでまず、

$$4x^2-24x+20=0$$

と変形します。

この式の左辺と右辺を 4 でわると

$$x^2-6x+5=0$$

となります。

この式は左辺を因数分解すると

$$(x-1)(x-5)=0$$

と書きかえることができます。

今得られた式は

$x-1$ という数と $x-5$ という数をかけると 0 になる

という意味ですよね。ところで、「ナントカとほにゃららをかけて 0 になるんだったら、少なくとも、ナントカとほにゃららのどちらかは絶対に 0 になっているはず」ですから、

$x-1=0$ または $x-5=0$ である

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$x-1=0$ となっている場合、$x=1$

ということになりますね。

また、

$x-5=0$ となっている場合、$x=5$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$x=1$ または $x=5$

ということですね。

本文へ戻る

問 14. 平方根のおさらいの問題でした。

(1) 『ある数 △ を 2 乗したら 49 になりました。△ はいくつですか？（答えは 2 つありますよ。注意してください。)』という問題でしたね。

$$\triangle \text{ は } 7 \text{ または } -7$$

ですよね。

(2) 『ある数 ★ を 2 乗したら 11 になりました。★ はいくつですか？（答えは 2 つありますよ。注意してください。)』という問題でしたね。

$$\bigstar \text{ は } \sqrt{11} \text{ または } -\sqrt{11}$$

ですよね。

(3) 『ある数 □ を 2 乗したら 12 になりました。□ はいくつですか？（答えは 2 つありますよ。注意してください。)』という問題でしたね。

$$\square \text{ は } 2\sqrt{3} \text{ または } -2\sqrt{3}$$

ですよね。

補足：もしかすると、

$$\square \text{ は } \sqrt{12} \text{ または } -\sqrt{12}$$

と思った人もいるかもしれません。これは間違いではないのですが、$\sqrt{12}$ は $2\sqrt{3}$ と同じですし、$-\sqrt{12}$ は $-2\sqrt{3}$ と同じですよね。数学では $\sqrt{\ }$ のマークの中に書いてある数が小さいほうが好まれることが多いのです。ですから、

$$\square \text{ は } 2\sqrt{3} \text{ または } -2\sqrt{3}$$

を答えにしてあるのです。

(4) 『ある数 ◯ を 2 乗したら 0 になりました。◯ はいくつですか？（答えは 1 つだけですよ。注意してください。)』という問題でしたね。

$$\bigcirc \text{ は } 0$$

ですよね。

本文へ戻る

問 15. 平方根のおさらいの問題でした。

(1) 49 の平方根とは 2 乗すると 49 になる数のことですよね。ですから

$$49 \text{ の平方根は } 7 \text{ または } -7$$

ですね。

(2) 11 の平方根とは 2 乗すると 11 になる数のことですよね。ですから

$$11 \text{ の平方根は } \sqrt{11} \text{ または } -\sqrt{11}$$

ですね。

(3) 12 の平方根とは 2 乗すると 12 になる数のことですよね。ですから

$$12 \text{ の平方根は } 2\sqrt{3} \text{ または } -2\sqrt{3}$$

ですね。

補足：もしかすると、

$$12 \text{ の平方根は } \sqrt{12} \text{ または } -\sqrt{12}$$

と思った人もいるかもしれません。これは間違いではないのですが、$\sqrt{12}$ は $2\sqrt{3}$ と同じですし、$-\sqrt{12}$ は $-2\sqrt{3}$ と同じですよね。数学では $\sqrt{}$ のマークの中に書いてある数が小さいほうが好まれることが多いのです。ですから、

$$12 \text{ の平方根は } 2\sqrt{3} \text{ または } -2\sqrt{3}$$

を答えにしてあるのです。

(4) 0 の平方根とは 2 乗すると 0 になる数のことですよね。ですから

$$0 \text{ の平方根は } 0$$

ですね。

本文へ戻る

問 16. 平方根のことを思い出すと解くことができる方程式でしたね。

(1) $x^2 - 2 = 0$

等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x^2 = 2$$

となります。この式の意味をよく考えてみると、「謎の数 x を 2 乗すると 2 になる」という意味です。平方根の学習をしたことがあるあなたはもう謎の数 x の正体がわかるはずです。「2 乗して 7 になる数」ってもちろん $\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$ ですよね。これでこの方程式を解くことができました。答えは

$$x = \sqrt{2} \text{ または } x = -\sqrt{2}$$

ということになりますね。

(2) $9x^2 = 5$

等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x^2 = \frac{5}{9}$$

となります。この式の意味をよく考えてみると、「謎の数 x を 2 乗すると $\frac{5}{9}$ になる」という意味です。平方根の学習をしたことがあるあなたはもう謎の数 x の正体がわかるはずです。「2 乗して $\frac{5}{9}$ になる数」ってもちろん $\frac{\sqrt{5}}{3}$ と $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ ですよ

ね。これでこの方程式を解くことができました。答えは

$$x = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ または } x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

ということになりますね。

(3) $x^2 - 36 = 0$

等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x^2 = 36$$

となります。この式の意味をよく考えてみると、「謎の数 x を 2 乗すると 36 になる」という意味です。平方根の学習をしたことがあるあなたはもう謎の数 x の正体がわかるはずです。「2 乗して 36 になる数」ってもちろん 6 と -6 ですよね。これでこの方程式を解くことができました。答えは

$$x = 6 \text{ または } x = -6$$

ということになりますね。

(4) $2x^2 = 8$

等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x^2 = 4$$

となります。この式の意味をよく考えてみると、「謎の数 x を 2 乗すると 4 になる」という意味です。平方根の学習をしたことがあるあなたはもう謎の数 x の正体がわかるはずです。「2 乗して 4 になる数」ってもちろん 2 と -2 ですよね。これでこの方程式を解くことができました。答えは

$$x = 2 \text{ または } x = -2$$

ということになりますね。

(5) $5x^2 = 15$

等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x^2 = 3$$

となります。この式の意味をよく考えてみると、「謎の数 x を 2 乗すると 3 になる」という意味です。平方根の学習をしたことがあるあなたはもう謎の数 x の正体がわかるはずです。「2 乗して 4 になる数」ってもちろん $\sqrt{3}$ と $-\sqrt{3}$ ですよね。これでこの方程式を解くことができました。答えは

$$x = \sqrt{3} \text{ または } x = -\sqrt{3}$$

ということになりますね。

(6) $25x^2 - 7 = 0$

等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x^2 = \frac{7}{25}$$

となります。この式の意味をよく考えてみると、「謎の数 x を 2 乗すると $\frac{7}{25}$ になる」という意味です。平方根の学習をしたことがあるあなたはもう謎の数 x の正体がわかるはずです。「2 乗して $\frac{7}{25}$ になる数」ってもちろん $\frac{\sqrt{7}}{5}$ と $-\frac{\sqrt{7}}{5}$ ですよね。これでこの方程式を解くことができました。答えは

$$x = \frac{\sqrt{7}}{5} \text{ または } x = -\frac{\sqrt{7}}{5}$$

ということになりますね。

本文へ戻る

問 17. 平方根のことを思い出すと解くことができる方程式でしたね。

(1) $(x-2)^2=9$

この方程式の意味を言葉で言うと、「$x-2$ という数を 2 乗すると 9 になる」ということです。「2 乗して 9 になる数」ってもちろん 3 と -3 ですから、

$$x-2=3 \quad \text{または} \quad x-2=-3$$

というわけですね。

これで「x から 2 を引いた数」の正体がわかったので、いよいよ謎の数 x を見つけることにします。

まず、$x-2=3$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=5$$

となります。これで謎の数 x の正体の 1 つがわかりました。

次は、$x-2=-3$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=-1$$

となります。これでもう 1 つ、謎の数 x の正体がわかりました。

以上の調査から、答えは

$$x=5 \quad \text{または} \quad x=-1$$

ということになりますね。

(2) $(x+7)^2=1$

この方程式の意味を言葉で言うと、「$x+7$ という数を 2 乗すると 1 になる」とい

うことです。「2 乗して 1 になる数」ってもちろん 1 と -1 ですから、

$$x+7=1 \quad \text{または} \quad x+7=-1$$

というわけですね。

これで「x に 7 を足した数」の正体がわかったので、いよいよ謎の数 x を見つけることにします。

まず、$x+7=1$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=-6$$

となります。これで謎の数 x の正体の 1 つがわかりました。

次は、$x+7=-1$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=-8$$

となります。これでもう 1 つ、謎の数 x の正体がわかりました。

以上の調査から、答えは

$$x=-6 \quad \text{または} \quad x=-8$$

ということになりますね。

(3) $(x+6)^2=49$

この方程式の意味を言葉で言うと、「$x+6$ という数を 2 乗すると 49 になる」ということです。「2 乗して 49 になる数」ってもちろん 7 と -7 ですから、

$$x+6=7 \quad \text{または} \quad x+6=-7$$

というわけですね。

これで「x に 6 を足した数」の正体がわかったので、いよいよ謎の数 x を見つける

ことにします。

まず、$x+6=7$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=1$$

となります。これで謎の数 x の正体の 1 つがわかりました。

次は、$x+6=-7$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=-13$$

となります。これでもう 1 つ、謎の数 x の正体がわかりました。

以上の調査から、答えは

$$x=1 \quad \text{または} \quad x=-13$$

ということになりますね。

(4) $(x-3)^2=2$

この方程式の意味を言葉で言うと、「$x-3$ という数を 2 乗すると 2 になる」ということです。「2 乗して 2 になる数」ってもちろん $\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$ ですから、

$$x-3=\sqrt{2} \quad \text{または} \quad x-3=-\sqrt{2}$$

というわけですね。

これで「x から 3 を引いた数」の正体がわかったので、いよいよ謎の数 x を見つけることにします。

まず、$x-3=\sqrt{2}$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=3+\sqrt{2}$$

となります。これで謎の数 x の正体の 1 つがわかりました。

次は、$x-3=-\sqrt{2}$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=3-\sqrt{2}$$

となります。これでもう 1 つ、謎の数 x の正体がわかりました。

以上の調査から、答えは

$$x=3+\sqrt{2} \quad \text{または} \quad x=3-\sqrt{2}$$

ということになりますね。

(5) $(x+4)^2=12$

この方程式の意味を言葉で言うと、「$x+4$ という数を 2 乗すると 12 になる」ということです。「2 乗して 12 になる数」ってもちろん $2\sqrt{3}$ と $-2\sqrt{3}$ ですから、

$$x+4=2\sqrt{3} \quad \text{または} \quad x+4=-2\sqrt{3}$$

というわけですね。

これで「x に 4 を足した数」の正体がわかったので、いよいよ謎の数 x を見つけることにします。

まず、$x+4=2\sqrt{3}$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=-4+2\sqrt{3}$$

となります。これで謎の数 x の正体の 1 つがわかりました。

次は、$x+4=-2\sqrt{3}$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=-4-2\sqrt{3}$$

となります。これでもう 1 つ、謎の数 x の正体がわかりました。

以上の調査から、答えは

$$x = -4 + 2\sqrt{3} \quad \text{または} \quad x = -4 - 2\sqrt{3}$$

ということになりますね。

(6) $(x-8)^2 = 80$

この方程式の意味を言葉で言うと、「$x-8$ という数を 2 乗すると 80 になる」ということです。「2 乗して 80 になる数」ってもちろん $4\sqrt{5}$ と $-4\sqrt{5}$ ですから、

$$x - 8 = 4\sqrt{5} \quad \text{または} \quad x - 8 = -4\sqrt{5}$$

というわけですね。

これで「x から 8 を引いた数」の正体がわかったので、いよいよ謎の数 x を見つけることにします。

まず、$x - 8 = 4\sqrt{5}$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x = 8 + 4\sqrt{5}$$

となります。これで謎の数 x の正体の 1 つがわかりました。

次は、$x - 8 = -4\sqrt{5}$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x = 8 - \sqrt{2}$$

となります。これでもう 1 つ、謎の数 x の正体がわかりました。

以上の調査から、答えは

$$x = 8 + 4\sqrt{5} \quad \text{または} \quad x = 8 - 4\sqrt{5}$$

ということになりますね。

(7) $5(x-10)^2=20$

左辺と右辺を 5 でわると

$$(x-10)^2=4$$

となります。この式の意味を言葉で言うと、「$x-10$ という数を 2 乗すると 4 になる」ということです。「2 乗して 4 になる数」ってもちろん 2 と -2 ですから、

$$x-10=2 \quad \text{または} \quad x-10=-2$$

というわけですね。

これで「x から 10 を引いた数」の正体がわかったので、いよいよ謎の数 x を見つけることにします。

まず、$x-10=2$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=12$$

となります。これで謎の数 x の正体の 1 つがわかりました。

次は、$x-10=-2$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=8$$

となります。これでもう 1 つ、謎の数 x の正体がわかりました。

以上の調査から、答えは

$$x=12 \quad \text{または} \quad x=8$$

ということになりますね。

(8) $3(x+8)^2=54$

左辺と右辺を 3 でわると

$$(x+8)^2=18$$

となります。この式の意味を言葉で言うと、「$x+8$ という数を 2 乗すると 18 になる」ということです。「2 乗して 18 になる数」ってもちろん $3\sqrt{2}$ と $-3\sqrt{2}$ ですから、

$$x+8=3\sqrt{2} \quad \text{または} \quad x+8=-3\sqrt{2}$$

というわけですね。

これで「x に 8 を足した数」の正体がわかったので、いよいよ謎の数 x を見つけることにします。

まず、$x+8=3\sqrt{2}$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=-8+3\sqrt{2}$$

となります。これで謎の数 x の正体の 1 つがわかりました。

次は、$x+8=-3\sqrt{2}$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=-8-3\sqrt{2}$$

となります。これでもう 1 つ、謎の数 x の正体がわかりました。

以上の調査から、答えは

$$x=-8+3\sqrt{2} \quad \text{または} \quad x=-8-3\sqrt{2}$$

ということになりますね。

(9) $36(x-2)^2=7$

左辺と右辺を 36 でわると

$$(x-2)^2=\frac{7}{36}$$

となります。この式の意味を言葉で言うと、「$x-2$ という数を 2 乗すると $\frac{7}{36}$ になる」ということです。「2 乗して $\frac{7}{36}$ になる数」ってもちろん $\frac{\sqrt{7}}{6}$ と $-\frac{\sqrt{7}}{6}$ で

すから、

$$x-2=\frac{\sqrt{7}}{6} \quad \text{または} \quad x-2=-\frac{\sqrt{7}}{6}$$

というわけですね。

これで「x から 2 を引いた数」の正体がわかったので、いよいよ謎の数 x を見つけることにします。

まず、$x-2=\dfrac{\sqrt{7}}{6}$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=2+\frac{\sqrt{7}}{6}$$

となります。これで謎の数 x の正体の 1 つがわかりました。

次は、$x-2=-\dfrac{\sqrt{7}}{6}$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=2-\frac{\sqrt{7}}{6}$$

となります。これでもう 1 つ、謎の数 x の正体がわかりました。

以上の調査から、答えは

$$x=2+\frac{\sqrt{7}}{6} \quad \text{または} \quad x=2-\frac{\sqrt{7}}{6}$$

ということになりますね。

本文へ戻る

問 18. 平方完成の練習ですね。

(1) $x^2+10x+\boxed{25}$ という式と $\left(x+\boxed{5}\right)^2$ という式は見かけは違いますが同じ式です。

(2) $x^2+12x+\boxed{36}$ という式と $\left(x+\boxed{6}\right)^2$ という式は見かけは違いますが同じ式です。

(3) $x^2-6x+\boxed{9}$ という式と $\left(x-\boxed{3}\right)^2$ という式は見かけは違いますが同じ式です。

本文へ戻る

問 19. 方程式を「平方完成」のテクニックを使って解くのでしたね。

(1) $x^2 - 2x = 9$

この式の場合「うまい数」は 1 ですね。そこで、この式の右辺と左辺に 1 をたしてみると

$$x^2 - 2x + 1 = 9 + 1$$

となりますが、さらに左辺を因数分解したり右辺を計算すると、

$$(x - 1)^2 = 10$$

とできます。

この式は「$x - 1$ という数を 2 乗すると 10 になる」ということです。「2 乗して 10 になる数」ってもちろん $\sqrt{10}$ と $-\sqrt{10}$ ですから、

$$x - 1 = \sqrt{10} \quad \text{または} \quad x - 1 = -\sqrt{10}$$

というわけですね。

これで「x から 1 を引いた数」の正体がわかったので、いよいよ謎の数 x を見つけることにします。

まず、$x - 1 = \sqrt{10}$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x = 1 + \sqrt{10}$$

となります。これで謎の数 x の正体の 1 つがわかりました。

次は、$x - 1 = -\sqrt{10}$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x = 1 - \sqrt{10}$$

となります。これでもう 1 つ、謎の数 x の正体がわかりました。

以上の調査から、答えは

$$x = 1 + \sqrt{10} \quad \text{または} \quad x = 1 - \sqrt{10}$$

ということになりますね。

(2) $x^2 + 8x = 34$

この式の場合「うまい数」は 16 ですね。そこで、この式の右辺と左辺に 16 をたしてみると

$$x^2 + 8x + 16 = 34 + 16$$

となりますが、さらに左辺を因数分解したり右辺を計算すると、

$$(x + 4)^2 = 50$$

とできます。

この式は「$x + 4$ という数を 2 乗すると 50 になる」ということです。「2 乗して 50 になる数」ってもちろん $5\sqrt{2}$ と $-5\sqrt{2}$ ですから、

$$x + 4 = 5\sqrt{2} \quad \text{または} \quad x + 4 = -5\sqrt{2}$$

というわけですね。

これで「x に 4 を足した数」の正体がわかったので、いよいよ謎の数 x を見つけることにします。

まず、$x + 4 = 5\sqrt{2}$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x = -4 + 5\sqrt{2}$$

となります。これで謎の数 x の正体の 1 つがわかりました。

次は、$x + 4 = -5\sqrt{2}$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使

うと

$$x = -4 - 5\sqrt{2}$$

となります。これでもう 1 つ、謎の数 x の正体がわかりました。

以上の調査から、答えは

$$x = -4 + 5\sqrt{2} \quad \text{または} \quad x = -4 - 5\sqrt{2}$$

ということになりますね。

(3) $x^2 + 2x = 5$

この式の場合「うまい数」は 1 ですね。そこで、この式の右辺と左辺に 1 をたしてみると

$$x^2 + 2x + 1 = 5 + 1$$

となりますが、さらに左辺を因数分解したり右辺を計算すると、

$$(x+1)^2 = 6$$

とできます。

この式は「$x+1$ という数を 2 乗すると 6 になる」ということです。「2 乗して 6 になる数」ってもちろん $\sqrt{6}$ と $-\sqrt{6}$ ですから、

$$x + 1 = \sqrt{6} \quad \text{または} \quad x + 1 = -\sqrt{6}$$

というわけですね。

これで「x に 1 を足した数」の正体がわかったので、いよいよ謎の数 x を見つけることにします。

まず、$x+1 = \sqrt{6}$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x = -1 + \sqrt{6}$$

となります。これで謎の数 x の正体の 1 つがわかりました。

次は、$x+1=-\sqrt{6}$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=-1-\sqrt{6}$$

となります。これでもう 1 つ、謎の数 x の正体がわかりました。

以上の調査から、答えは

$$x=-1+\sqrt{6} \quad \text{または} \quad x=-1-\sqrt{6}$$

ということになりますね。

(4) $x^2+6x=-5$

この式の場合「うまい数」は 9 ですね。そこで、この式の右辺と左辺に 9 をたしてみると

$$x^2+6x+9=-5+9$$

となりますが、さらに左辺を因数分解したり右辺を計算すると、

$$(x+3)^2=4$$

とできます。

この式は「$x+3$ という数を 2 乗すると 4 になる」ということです。「2 乗して 4 になる数」ってもちろん 2 と -2 ですから、

$$x+3=2 \quad \text{または} \quad x+3=-2$$

というわけですね。

これで「x に 3 を足した数」の正体がわかったので、いよいよ謎の数 x を見つけることにします。

まず、$x+3=2$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=-1$$

となります。これで謎の数 x の正体の 1 つがわかりました。

次は、$x+3=-2$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=-5$$

となります。これでもう 1 つ、謎の数 x の正体がわかりました。

以上の調査から、答えは

$$x=-1 \quad \text{または} \quad x=-5$$

ということになりますね。

(5) $x^2-6x+1=0$

うまい数を見つける前に、等式を変形するときにやっても良いことを使って、まずこの式を

$$x^2-6x=-1$$

と書き換えておきます。

この式の場合「うまい数」は 9 ですね。そこで、この式の右辺と左辺に 9 をたしてみると

$$x^2-6x+9=-1+9$$

となりますが、さらに左辺を因数分解したり右辺を計算すると、

$$(x-3)^2=8$$

とできます。

この式は「$x-3$ という数を 2 乗すると 8 になる」ということです。「2 乗して 8 に

なる数」ってもちろん $2\sqrt{2}$ と $-2\sqrt{2}$ ですから、

$$x - 3 = 2\sqrt{2} \quad \text{または} \quad x - 3 = -2\sqrt{2}$$

というわけですね。

これで「x から 3 を引いた数」の正体がわかったので、いよいよ謎の数 x を見つけることにします。

まず、$x - 3 = 2\sqrt{2}$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x = 3 + 2\sqrt{2}$$

となります。これで謎の数 x の正体の 1 つがわかりました。

次は、$x - 3 = -2\sqrt{2}$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x = 3 - 2\sqrt{2}$$

となります。これでもう 1 つ、謎の数 x の正体がわかりました。

以上の調査から、答えは

$$x = 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{または} \quad x = 3 - 2\sqrt{2}$$

ということになりますね。

(6) $x^2 - 8x - 16 = 0$

うまい数を見つける前に、等式を変形するときにやっても良いことを使って、まずこの式を

$$x^2 - 8x = 16$$

と書き換えておきます。

この式の場合「うまい数」は 16 ですね。そこで、この式の右辺と左辺に 16 をたし

てみると

$$x^2 - 8x + 16 = 16 + 16$$

となりますが、さらに左辺を因数分解したり右辺を計算すると、

$$(x-4)^2 = 32$$

とできます。

この式は「$x-3$ という数を 2 乗すると 8 になる」ということです。「2 乗して 8 になる数」ってもちろん $2\sqrt{2}$ と $-2\sqrt{2}$ ですから、

$$x - 3 = 2\sqrt{2} \quad \text{または} \quad x - 3 = -2\sqrt{2}$$

というわけですね。

これで「x から 3 を引いた数」の正体がわかったので、いよいよ謎の数 x を見つけることにします。

まず、$x - 3 = 2\sqrt{2}$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x = 3 + 2\sqrt{2}$$

となります。これで謎の数 x の正体の 1 つがわかりました。

次は、$x - 3 = -2\sqrt{2}$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x = 3 - 2\sqrt{2}$$

となります。これでもう 1 つ、謎の数 x の正体がわかりました。

以上の調査から、答えは

$$x = 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{または} \quad x = 3 - 2\sqrt{2}$$

ということになりますね。

(7) $x^2+12x+20=0$

うまい数を見つける前に、等式を変形するときにやっても良いことを使って、まずこの式を

$$x^2+12x=-20$$

と書き換えておきます。

この式の場合「うまい数」は 36 ですね。そこで、この式の右辺と左辺に 9 をたしてみると

$$x^2+12x+36=-20+36$$

となりますが、さらに左辺を因数分解したり右辺を計算すると、

$$(x+6)^2=16$$

とできます。

この式は「$x+6$ という数を 2 乗すると 16 になる」ということです。「2 乗して 16 になる数」ってもちろん 4 と -4 ですから、

$$x+6=4 \quad \text{または} \quad x+6=-4$$

というわけですね。

これで「x に 6 を足した数」の正体がわかったので、いよいよ謎の数 x を見つけることにします。

まず、$x+6=4$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=-2$$

となります。これで謎の数 x の正体の 1 つがわかりました。

次は、$x+6=-4$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=-10$$

となります。これでもう 1 つ、謎の数 x の正体がわかりました。

以上の調査から、答えは

$$x=-2 \quad \text{または} \quad x=-10$$

ということになりますね。

(8) $x^2+10x-24=0$

うまい数を見つける前に、等式を変形するときにやっても良いことを使って、まずこの式を

$$x^2+10x=24$$

と書き換えておきます。

この式の場合「うまい数」は 25 ですね。そこで、この式の右辺と左辺に 25 をたしてみると

$$x^2+10x+25=24+25$$

となりますが、さらに左辺を因数分解したり右辺を計算すると、

$$(x+5)^2=49$$

とできます。

この式は「$x+5$ という数を 2 乗すると 49 になる」ということです。「2 乗して 49 になる数」ってもちろん 7 と -7 ですから、

$$x+5=7 \quad \text{または} \quad x+5=-7$$

というわけですね。

これで「x に 5 を足した数」の正体がわかったので、いよいよ謎の数 x を見つけることにします。

まず、$x+5=7$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=2$$

となります。これで謎の数 x の正体の 1 つがわかりました。

次は、$x+5=-7$ の場合ですが、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$x=-12$$

となります。これでもう 1 つ、謎の数 x の正体がわかりました。

以上の調査から、答えは

$$x=2 \quad \text{または} \quad x=-12$$

ということになりますね。

補足：(4)、(7) 、(8) は「因数分解を使う方法」で解くこともできます。やってみてください。

どちらの方法があなたにとって簡単でしたか？ 本文へ戻る

問 20. 例題 13 の解答のまねをして、方程式を解く問題でしたね。

つまり、$ax^2+bx+c=0$ という式と問題の式を良くみて、a、b、c がいくつであるのかよく確認し、$\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ という数と $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ という数を計算すれば解が求められるのでしたね。

(1) $x^2+5x-2=0$

右を見てください。 この方程式では、

$$a=1、b=5、c=-2$$

$$\begin{array}{c} ax^2+bx+c=0 \\ 1x^2+5x-2=0 \end{array}$$

となっていますね。

まず、$\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ という数を作ると、

$$\frac{-5+\sqrt{5^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}=\frac{-5+\sqrt{25+8}}{2}=\frac{-5+\sqrt{33}}{2}$$

となります。

そして、$\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ という数を作ると、

$$\frac{-5-\sqrt{5^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}=\frac{-5-\sqrt{25+8}}{2}=\frac{-5-\sqrt{33}}{2}$$

となります。

というわけで、この方程式の解は

$$x=\frac{-5+\sqrt{33}}{2}\quad\text{または}\quad x=\frac{-5-\sqrt{33}}{2}$$

ということになります。

(2) $x^2-8x+4=0$

右を見てください。 この方程式では、

$$a=1、b=-8、c=4$$

$$\begin{array}{ccccccc} ax^2 & + & bx & + & c & = & 0 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ 1x^2 & - & 8x & + & 4 & = & 0 \end{array}$$

となっていますね。

まず、$\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ という数を作ると、

$$\begin{aligned}\frac{-(-8)+\sqrt{(-8)^2-4\times 1\times 4}}{2\times 1} &= \frac{8+\sqrt{64-16}}{2}\\ &= \frac{8+\sqrt{48}}{2}\\ &= \frac{8+4\sqrt{3}}{2}\\ &= \frac{\overset{4}{\cancel{8}}+\overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{2}}}\\ &= 4+2\sqrt{3}\end{aligned}$$

となります。

そして、$\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ という数を作ると、

$$\begin{aligned}\frac{-(-8)-\sqrt{(-8)^2-4\times 1\times 4}}{2\times 1} &= \frac{8-\sqrt{64-16}}{2}\\ &= \frac{8-\sqrt{48}}{2}\\ &= \frac{8-4\sqrt{3}}{2}\\ &= \frac{\overset{4}{\cancel{8}}-\overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{2}}}\\ &= 4-2\sqrt{3}\end{aligned}$$

となります。

というわけで、この方程式の解は

$$x=4+2\sqrt{3} \quad \text{または} \quad x=4-2\sqrt{3}$$

ということになります。

(3) $x^2 + 4x - 21 = 0$

右を見てください。 この方程式では、

$$a = 1、b = 4、c = -21$$

$$\begin{array}{cccc} ax^2 & + bx & + c & = 0 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1x^2 & + 4x & - 21 & = 0 \end{array}$$

となっていますね。

まず、$\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ という数を作ると、

$$\begin{aligned} \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-21)}}{2 \times 1} &= \frac{-4 + \sqrt{16 + 84}}{2} \\ &= \frac{-4 + \sqrt{100}}{2} \\ &= \frac{-4 + 10}{2} \\ &= \frac{6}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

となります。

そして、$\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ という数を作ると、

$$\begin{aligned} \frac{-4 - \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-21)}}{2 \times 1} &= \frac{-4 - \sqrt{16 + 84}}{2} \\ &= \frac{-4 - \sqrt{100}}{2} \\ &= \frac{-4 - 10}{2} \\ &= \frac{-14}{2} \\ &= -7 \end{aligned}$$

となります。

というわけで、この方程式の解は

$$x = 3 \quad \text{または} \quad x = -7$$

ということになります。

(4) $x^2 - 8x + 16 = 0$

右を見てください。 この方程式では、

$$\begin{array}{cccccc} ax^2 & + & bx & + & c & = 0 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1x^2 & - & 8x & + & 16 & = 0 \end{array}$$

$$a = 1、b = -8、c = 16$$

となっていますね。

まず、$\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ という数を作ると、

$$\begin{aligned} \frac{-(-8) + \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 1 \times 16}}{2 \times 1} &= \frac{8 + \sqrt{64 - 64}}{2} \\ &= \frac{8 + \sqrt{0}}{2} \\ &= \frac{8 + 0}{2} \\ &= \frac{8}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

となります。

そして、$\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ という数を作ると、

$$\begin{aligned} \frac{-(-8) - \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 1 \times 16}}{2 \times 1} &= \frac{8 - \sqrt{64 - 64}}{2} \\ &= \frac{8 - \sqrt{0}}{2} \\ &= \frac{8 - 0}{2} \\ &= \frac{8}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

となります。

どっちも 4 になってしまいましたね。

というわけで、この方程式の解は

$$x = 4$$

ということになります。

(5) $2x^2 - 3x - 4 = 0$

右を見てください。 この方程式では、

$$a = 2、b = -3、c = -4$$

$$\begin{array}{c} ax^2 + bx + c = 0 \\ \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \\ 2x^2 - 3x - 4 = 0 \end{array}$$

となっていますね。

まず、$\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ という数を作ると、

$$\begin{aligned} \frac{-(-3) + \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-4)}}{2 \times 2} &= \frac{3 + \sqrt{9 + 32}}{4} \\ &= \frac{3 + \sqrt{41}}{4} \end{aligned}$$

となります。

そして、$\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ という数を作ると、

$$\begin{aligned} \frac{-(-3) - \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-4)}}{2 \times 2} &= \frac{3 - \sqrt{9 + 32}}{4} \\ &= \frac{3 - \sqrt{41}}{4} \end{aligned}$$

となります。

というわけで、この方程式の解は

$$x = \frac{3 + \sqrt{41}}{4} \quad \text{または} \quad x = \frac{3 - \sqrt{41}}{4}$$

ということになります。

(6) $3x^2+7x+1=0$

右を見てください。 この方程式では、

$$a=3、b=7、c=1$$

$$\begin{array}{c} ax^2+bx+c=0 \\ \updownarrow \qquad \updownarrow \quad \updownarrow \\ 3x^2+7x+1=0 \end{array}$$

となっていますね。

まず、$\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ という数を作ると、

$$\begin{aligned} \frac{-7+\sqrt{7^2-4\times3\times(-4)}}{2\times3} &= \frac{-7+\sqrt{49+48}}{6} \\ &= \frac{-7+\sqrt{97}}{6} \end{aligned}$$

となります。

そして、$\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ という数を作ると、

$$\begin{aligned} \frac{-7-\sqrt{7^2-4\times3\times(-4)}}{2\times3} &= \frac{-7-\sqrt{49+48}}{6} \\ &= \frac{-7-\sqrt{97}}{6} \end{aligned}$$

となります。

というわけで、この方程式の解は

$$x=\frac{-7+\sqrt{97}}{6} \quad \text{または} \quad x=\frac{-7-\sqrt{97}}{6}$$

ということになります。

補足：(3) と (4) は例題 13 の解答のまねをしなくても、「因数分解を使う方法」で解くこともできます。やってみてください。

どちらの方法があなたにとって簡単でしたか？「因数分解を使う方法」のほうが簡単ですよね。例題 13 の解答の方法（つまり、解の公式を使う方法）はどんな二次方程式にも

使える「万能」な方法です。しかし、「因数分解使う方法」で解くことができる方程式を、わざわざ解の公式を使って解くと大変になってしまうわけです。使い分けが重要ということですね。

本文へ戻る

問 21. ノーヒントで二次方程式を解く練習でしたね。答えだけを書いておきます。

(1) $x^2 - 5 = 0$ の解は

$x = \sqrt{5}$ または $x = -\sqrt{5}$

(2) $x^2 + 12x + 36 = 0$ の解は

$x = -6$

(3) $(x+7)(x-2) = 0$ の解は

$x = -7$ または $x = 2$

(4) $(x-2)^2 - 7 = 0$ の解は

$x = 2 + \sqrt{7}$ または $x = 2 - \sqrt{7}$

(5) $2x^2 = 32$ の解は

$x = 4$ または $x = -4$

(6) $x^2 = 15x$ の解は

$x = 0$ または $x = 15$

(7) $(x-8)(2x+5) = 0$ の解は

$x = 8$ または $x = -\dfrac{5}{2}$

(8) $x^2 - 2x - 6 = 0$ の解は

$x = 1 + \sqrt{7}$ または $x = 1 - \sqrt{7}$

(9) $x^2 - 25 = 0$ の解は

$x = 5$ または $x = -5$

(10) $x^2 - 4x + 1 = 0$ の解は

$x = 2 + \sqrt{3}$ または $x = 2 - \sqrt{3}$

(11) $x^2 + 16x + 63 = 0$ の解は

$x = 7$ または $x = 9$

(12) $(x-9)^2 = 0$ の解は

$x = 9$

(13) $x^2 - 4x - 12 = 0$ の解は

$x = -2$ または $x = 6$

(14) $x^2 - 6x - 27 = 0$ の解は

$x = -3$ または $x = 9$

(15) $x^2 - 12x + 32 = 0$ の解は

$$x = 4 \text{ または } x = 8$$

(16) $x^2 + 4x - 4 = 0$ の解は

$$x = -2 + 2\sqrt{2} \text{ または } x = -2 - 2\sqrt{2}$$

(17) $(x+1)^2 = 8$ の解は

$$x = -1 + 2\sqrt{2} \text{ または } x = -1 - 2\sqrt{2}$$

(18) $x^2 + 6x = 5$ の解は

$$x = -3 + \sqrt{14} \text{ または } x = -3 - \sqrt{14}$$

(19) $x^2 = 3$ の解は

$$x = \sqrt{3} \text{ または } x = -\sqrt{3}$$

(20) $x^2 + 8x = 0$ の解は

$$x = 0 \text{ または } x = -8$$

本文へ戻る

問 22. 『大小 2 つの数があり、その差は 11 で積は 60 です。この 2 つの数を求めなさい。』という問題でしたね。

小さいほうの数を x とします。差は 11 ですから、大きいほうの数は $x+11$ とあらわされることになります。

2 つの数の積は 60 ですから

$$x(x+11) = 60$$

という方程式を作ることができます。これで謎の数を発見するための方程式ができたわけです。ではこれから今作った方程式を解いて謎の数を発見することにしましょう。

まず、

$$x(x+11) = 60$$

という方程式の左辺を展開して見かけを変えます。すると、

$$x^2 + 11x = 60$$

となります。

次は左辺と右辺から 60 をひくと、

$$x^2 + 11x - 60 = 60 - 60$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$x^2 + 11x - 60 = 0$$

となります。

次は左辺を因数分解して見かけを変えます。すると、

$$(x + 15)(x - 4) = 0$$

となります。

この式は、「$x + 15$ という数と $x - 4$ という数をかけると 0 になる」という意味ですから、

$$x + 15 = 0 \text{ または } x - 4 = 0 \text{ である}$$

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$$x + 15 = 0 \text{ となっている場合、} x = -15$$

ということになりますね。

また、

$$x - 4 = 0 \text{ となっている場合、} x = 4$$

ということになりますね。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x = -15 \quad \text{または} \quad x = 4$$

ということですね。でもまだ終わりではないですね。この問題は、2 つの謎の数を見つけて答える問題ですが、今見つけたのは小さいほうの数ですよね。だって、小さいほうの数を x という文字であらわすことにして考えてきたのですから。ですから、今わかったのは、「小さいほうの数は-15 または 4 である」ということですね。いいですか、勘違いしないでくださいね。決して、「小さいほうの数が -15、大きいほうの数が 4」ということではないんです。というわけで、小さいほうの数の正体はわかりましたが、大きいほうの数の正体はまだわかっていません。これから大きいほうの数を発見することにしましょう。

- まず、小さいほうの数が -15 のとき、大きいほうの数はいくつなのかを考えてみます。

  大きいほうの数は小さいほうの数より 11 大きいのでしたね。ということは、

  $$\text{大きいほうの数} = -15 + 11 = -4$$

  ということですね。ですからこの場合、2 つの数は -15 と -4 ということになります。

- 次は、小さいほうの数が 4 のとき、大きいほうの数はいくつなのかを考えてみます。

  大きいほうの数は小さいほうの数より 11 大きいのでしたね。ということは、

  $$\text{大きいほうの数} = 4 + 11 = 15$$

  ということですね。ですからこの場合、2 つの数は 4 と 15 ということになります。

以上で全て調査が終わりました。

2 つの謎の数は、

-15 と -4 になっている場合と 4 と 15 になっている場合がある

ということですね。

本文へ戻る

問 23. 『連続した 3 つの「自然数」があります。最大の数の 2 乗は、他の 2 つの数の積の 2 倍より 31 小さくなっています。この 3 つの「自然数」を求めなさい。』という問題でしたね。

真ん中の自然数を x として考えていくことにします。

3 つの自然数は連続しているのですから、一番小さい自然数は $x-1$、一番大きい自然数は $x+1$ とあらわされることになります。

問題によると、最大の数の 2 乗は、他の 2 つの数の積の 2 倍より 31 小さくなっているのですから、

$$(x+1)^2 = 2x(x-1) - 31$$

という方程式を作ることができます。これで謎の数を発見するための方程式ができたわけです。ではこれから今作った方程式を解いて謎の数を発見することにしましょう。

左辺と右辺をそれぞれ展開してみると

$$x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 2x - 31$$

となります。さらに、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$-x^2 - 4x + 32 = 0$$

となり、さらに

$$x^2 + 4x - 32 = 0$$

と変形することができます。

この式の左辺を因数分解して見かけを変えると

$$(x+8)(x-4) = 0$$

となります。この式は、「$x+8$ という数と $x-4$ という数をかけると 0 になる」という意味ですから、

$$x+8=0 \text{ または } x-4=0 \text{ である}$$

と結論してよいことになりますよね。

そうすると、まず、

$$x+8=0 \text{ となっている場合、} x=-8$$

ということになり、また、

$$x-4=0 \text{ となっている場合、} x=4$$

ということになります。

これで謎の数 x の正体が発見できました。

$$x=-8 \quad \text{または} \quad x=4$$

ということです。

この問題を考え始めたとき、真ん中の自然数を x としたのですから、真ん中の自然数は $x=-8$ または $x=4$ ということになりますが、-8 は自然数ではありませんね。ですから -8 は却下です。というわけで、

真ん中の自然数は 4

ということになります。

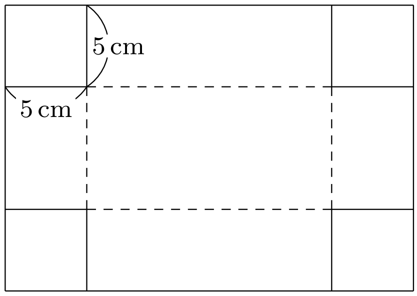
真ん中の自然数が 4 なのですから、一番小さい自然数は 3、一番大きい自然数は 5 ということになります。つまり、3 つの自然数は

3、4、5

ということになります。

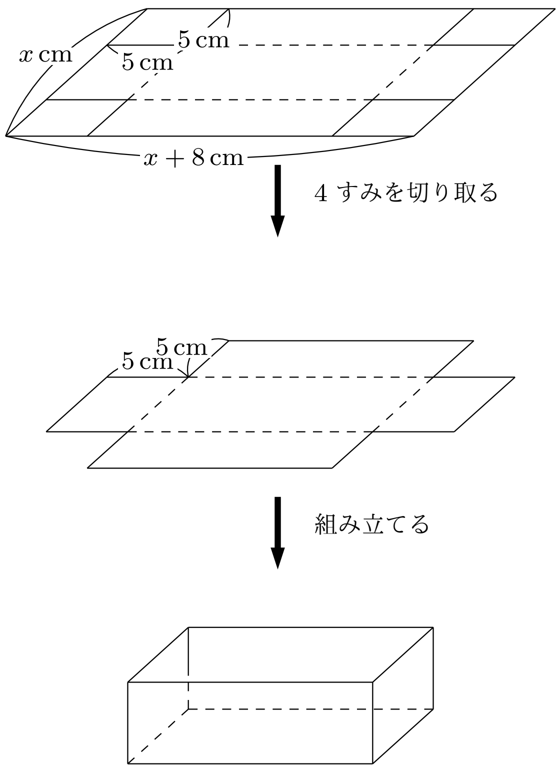
本文へ戻る

問 24.　『横の長さが縦の長さより 8 cm 長い長方形の紙があります。この紙の 4 すみから 1 辺の長さが 5 cm の正方形を切り取って直方体の容器を作りました。そうすると、できあがった容器の容積は $900\,\mathrm{cm}^3$ になったといいます。では、この紙の縦の長さと横の長さはそれぞれ何 cm だったのでしょうか。』という問題でしたね。



長方形の縦の長さと横の長さは謎です。そこで、縦の謎を x (cm) とおくことにします。問題によると横の長さは縦の長さより 8 cm 長いので、横の長さは $x+8$ (cm) とあらわされます。

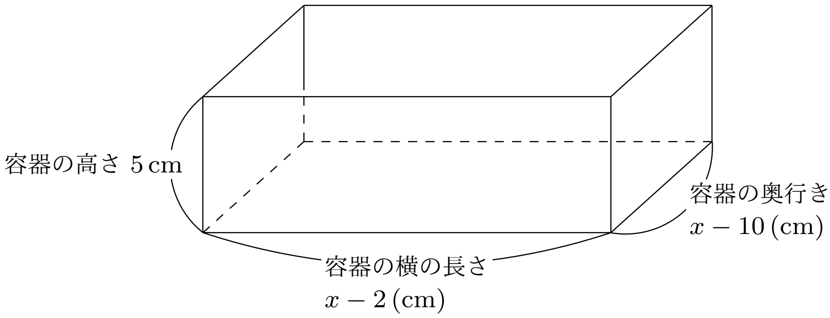
では、できあがった容器の奥行きや横の長さはどうなるのでしょう。もう一度、初めの長方形の紙から容器が組み立てられていく所を思い浮かべてください。(あなたのため、右に組み立てられていく様子を描いておきました。)



長方形の紙から 1 辺が 5 cm の正方形を 4 すみから切り取るので、容器の奥行きは長方形の紙の縦の長さより 10 cm 短くなるはずですね。ですから、容器の奥行きは $x-10$ (cm) とあらわしてよいことになりますね。

同じように、容器の横の長さも長方形の紙の横の長さより 10 cm 短くなるはずですね。ですから、容器の横の長さは $(x+8)-10$、つまり $x-2$ (cm) とあらわしてよいことになりますね。

ここまで調べたことを次の図にまとめておきます。



もともとの長方形の縦の長さを x (cm) とすると、容器の横の長さは $x-2$ (cm)、奥行きは $x-10$ (cm) とあらわすことができる。

では話を進めます。問題には「できあがった容器の容積は $900\,\mathrm{cm}^3$ になった」と書いてありました。図を見ながら容器の体積を文字 x の入った式で計算してみると、

$$
\begin{aligned}
\text{容器の体積} &= \text{容器の横の長さ} \times \text{容器の奥行き} \times \text{容器の高さ} \\
&= (x-2) \times (x-10) \times 5 \\
&= 5(x-2)(x-10)
\end{aligned}
$$

となります。これが 900 と等しくなっているのですから、

$$5(x-2)(x-10) = 900$$

という方程式を作ることができます。これが謎の数を発見するための式です。ではこれからこの方程式を解いてみることにします。

左辺と右辺を 5 でわると、

$$(x-2)(x-10) = 180$$

となります。次に、左辺を展開してこの等式の見かけをマシにすると、

$$x^2 - 12x + 20 = 180$$

となります。等式を変形するときにやっても良いことを使うと、

$$x^2 - 12x - 160 = 0$$

となります。次に、左辺を因数分解して見かけを変えると、

$$(x-20)(x+8)=0$$

となります。この式は「$x-20$ と $x+8$ をかけると 0 になる」という意味ですから、

$$x-20=0 \quad \text{または} \quad x+8=0$$

が成り立つと結論できます。

そうすると、

$$x-20=0 \text{ のとき } x=20$$

となっていて、

$$x+8=0 \text{ のとき } x=-8$$

となっているわけです。

これで謎の数 x の正体は

$$x=20 \quad \text{または} \quad x=-8$$

であることがわかりました。「もともとの長方形の縦の長さを x (cm)」として考えてきたのですから

「もともとの長方形の縦の長さは 20 cm または −8 cm である」

ということになります。

ではいま得られた 2 つの可能性について、本当に答えとして採用して良いのか調査してみましょう。

まず、「もともとの長方形の縦の長さは 20 cm」ということがありえるのかどうか調べます。この場合、4 すみを切り取って 10 cm 短くなってもまだ 10 cm 残っています。ですから 20 cm は採用できます。

次は、「もともとの長方形の縦の長さは −8 cm」ということがありえるのかどうか調べまが、長方形の紙の横の長さが「マイナス」になるなんてありえないですね。ですからこ

の答えは不採用にします。

これでもとの長方形の紙の縦の長さは 20 cm であるとわかりました。では次にもとの長方形の紙の横の長さを求めることにします。問題には「横の長さが縦の長さより 8 cm 長い」とありましたから、横の長さは 28 cm ということになりますね。

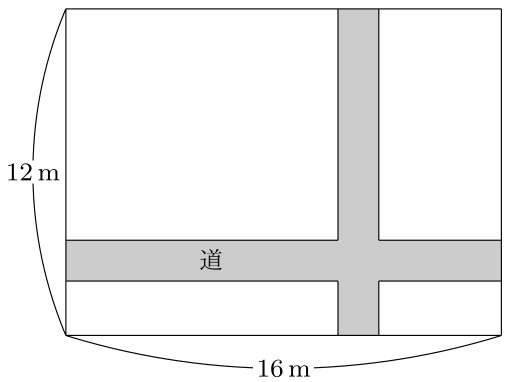
以上より、

もとの紙の縦の長さは 20 cm、横の長さは 28 cm

ということがわかりました。

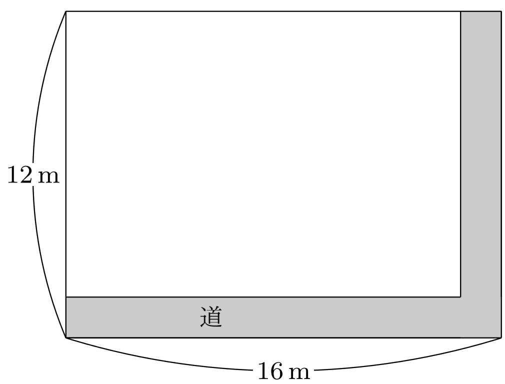
本文へ戻る

問 25. 『右の図のように、縦が 12 m、横が 16 m の土地の上に縦、横同じ幅の道をつけて、残りの部分を畑にしようと思います。畑の面積が 140 m^2 になるようにするには道の幅を何 m にすればよいですか。』という問題でしたね。



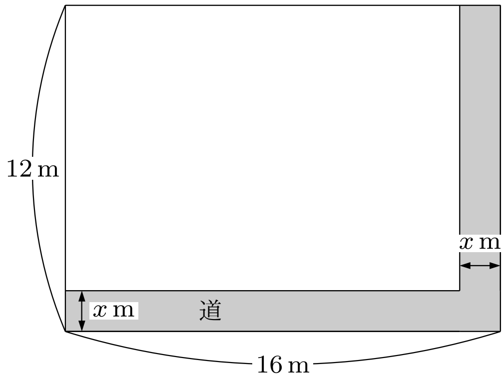
この図では、畑（つまり白い部分）は 4 つあります。ですから畑全体の面積のことを考えようとすると、4 つの部分についてそれぞれ計算しなくてはなりません。その考えでこの問題が解けないというわけではありませんが、ちょっと面倒です。そこで少し工夫をします。

右の図を見てください。道は、土地のふちに沿って（もちろん土地の中に）作ることにします。このように考えても何も問題ありません。畑（白い部分）が 4 つに分かれている場合と、右の図のようになっている場合では、畑の面積は同じだからです。



この問題では「道の幅」が謎なのですから、道の幅を $x\,(\mathrm{m})$ とおくことにします。

右の図を見てください。畑（白い部分）は長方形です。もとの土地と比べると、畑の縦の長さや横の長さは道の分だけ短くなります。ですから、畑（白い部分）の縦の長さは $12-x\,(\mathrm{m})$、横の長さは $16-x\,(\mathrm{m})$ とあらわされることがわかります。



そうすると、

$$\text{畑の面積} = (12-x)(16-x)\,(\mathrm{cm}^2)$$

と計算できます。問題によると、畑の面積を $140\,\mathrm{cm}^2$ にしたいわけです。ですから、

$$(12-x)(16-x) = 140$$

という方程式を作ることができます。これが謎の数を発見するための式です。ではこれからこの方程式を解いてみることにします。

左辺を展開してこの等式の見かけをマシにすると、

$$192 - 12x - 16x + x^2 = 140$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると

$$192 - 28x + x^2 = 140$$

となります。次に、等式を変形するときにやっても良いことを使うと、

$$x^2 - 28x + 52 = 0$$

となります。次に、左辺を因数分解して見かけを変えると、

$$(x-26)(x-2) = 0$$

となります。この式は「$x-26$ と $x-2$ をかけると 0 になる」という意味ですから、

$$x-26=0 \quad \text{または} \quad x-2=0$$

が成り立つと結論できます。

そうすると、

$$x-26=0 \text{ のとき } x=26$$

となっていて、

$$x-2=0 \text{ のとき } x=2$$

となっているわけです。

これで謎の数 x の正体は

$$x=26 \quad \text{または} \quad x=2$$

であることがわかりました。「道の幅を $x\,(\mathrm{m})$」として考えてきたのですから

「道の幅は 26 m または 2 m である」

ということになります。

ではいま得られた 2 つの可能性について、本当に答えとして採用して良いのか調査してみましょう。

まず、「道の幅は 26 m」ということがありえるのかどうか調べます。この場合、どう考えても土地の中にそんな幅の道を作ることはできません。なぜなら、土地は縦の長さは 12 m しかないからです。ですからこの答えは不採用にします。

次は、「道の幅は 2 m」ということがありえるのかどうか調べます。この場合、土地の中にそういう幅の道を作ることはできますね。土地の中に幅 2 m の道を作っても、縦は 10 m、横は 14 m 残るからです。ですから 2 m は採用できます。

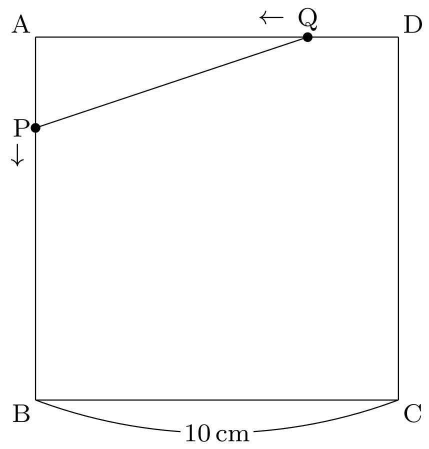
以上より、

道の幅は 2 m にすれば良い

ということがわかりました。

本文へ戻る

問 26. 『右の図のような、1 辺が 10 cm の正方形 ABCD があるとします。点 P は点 A から出発して辺 AB 上を点 B まで動きます。また、点 Q は点 P が点 A を出発するのと同時に点 D から出発し、点 A と同じ速さで辺 DA 上を点 A まで動きます。以下の問に答えなさい。』という問題でしたね。



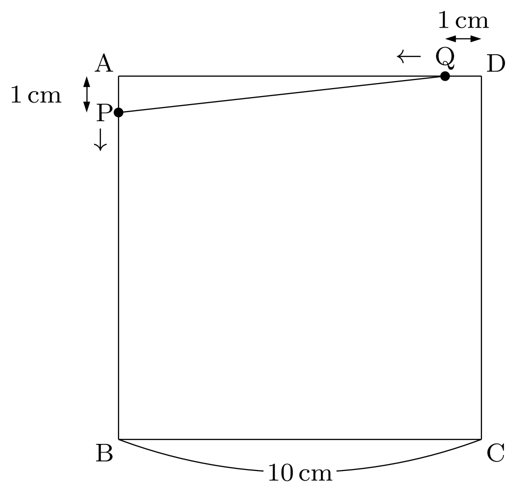
(1) 点 P が点 A から 1 cm の所に来たときの話でした。

このときの図は右のようになります。そして、

$$\text{AQ の長さ} = 10 - 1 = 9\,\text{cm}$$

$$\triangle\text{APQ の面積} = \frac{1}{2} \times 9 \times 1 = \frac{9}{2}\,\text{cm}^2$$

となります。



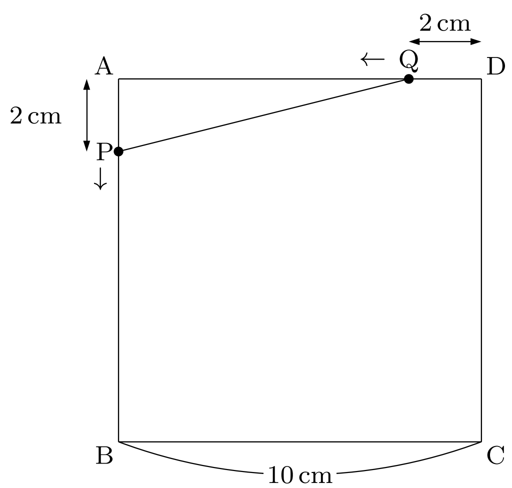
(2) 点 P が点 A から 2 cm の所に来たときの話でした。

このときの図は右のようになります。そして、

$$\text{AQ の長さ} = 10 - 2 = 8\,\text{cm}$$

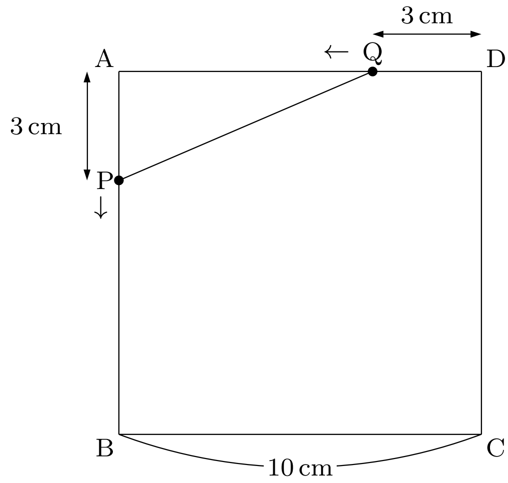
$$\triangle\text{APQ の面積} = \frac{1}{2} \times 8 \times 2 = 8\,\text{cm}^2$$

となります。



(3) 点 P が点 A から 3 cm の所に来たときの話でした。

このときの図は右のようになります。そして、



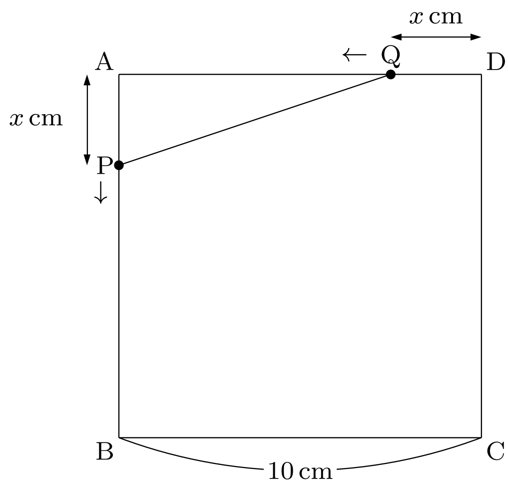
$$\text{AQ の長さ} = 10 - 3 = 7\,\text{cm}$$

$$\triangle\text{APQ の面積} = \frac{1}{2} \times 7 \times 3 = \frac{21}{2}\,\text{cm}^2$$

となります。

(4) 点 P が点 A から x cm の所に来たときの話でした。

このときの図は右のようになります。そして、



$$\text{AQ の長さ} = 10 - x\,(\text{cm})$$

$$\triangle\text{APQ の面積} = \frac{1}{2} \times (10 - x) \times x$$
$$= \frac{1}{2}x(10 - x)\,(\text{cm}^2)$$

となります。

(5) 『この問題では、x の値はどんな範囲にある数でなければならないですか。』ということでした。

この問題では、P は A から B まで動きます。ですから x は 0 以上 10 以下でなければなりません。

また、Q は D から A まで動きます。ですから x は 0 以上 10 以下でなければなりません。

これらのことを考え合わせると、結局

$$0 \leqq x \leqq 10$$

ということになります。

(6) $\triangle$APQ の面積が $8\,\mathrm{cm}^2$ になるときは、点 P が点 A から何 cm 動いたときなのかという話でした。(4) で、点 P が点 A から $x\,\mathrm{cm}$ の所に来たとき

$$\triangle\text{APQ の面積} = \frac{1}{2}x(10-x)\,(\mathrm{cm}^2)$$

となると計算したのですから、いつ面積が $8\,\mathrm{cm}^2$ になるのか知りたければ

$$\frac{1}{2}x(10-x) = 8$$

という方程式を作れば良いことになります。

ではこの方程式を解いて謎の数 x を発見しましょう。

まず、左辺と右辺に 2 をかけると、

$$x(10-x) = 16$$

となります。次に左辺を展開して見かけをマシにすると

$$10x - x^2 = 16$$

となります。次に、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$-x^2 + 10x - 16 = 0$$

となります。さらに、左辺と右辺に -1 をかけると、

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

となります。ここで左辺を因数分解して見かけを変えると、

$$(x-8)(x-2)=0$$

となります。この式は「$x-8$ と $x-2$ をかけると 0 になる」という意味ですから、

$$x-8=0 \quad \text{または} \quad x-2=0$$

が成り立つと結論できます。

そうすると、

$$x-8=0 \text{ のとき } x=8$$

となっていて、

$$x-2=0 \text{ のとき } x=2$$

となっているわけです。

これで謎の数 x の正体は

$$x=8 \quad \text{または} \quad x=2$$

であることがわかりました。「P が A から x (cm) のところにきた」として考えているのですから

「P は A から 8 cm のところまたは 2 cm のところにいる」

ということになります。

ではいま得られた 2 つの可能性について、本当に答えとして採用して良いのか考えてみましょう。

(5) で、この問題では

$$0 \leqq x \leqq 10$$

でなければならないということが判明していますが、8 や 2 は、どちらもこの条件を満たしています。だからどちらも答えとして採用して良いのです。

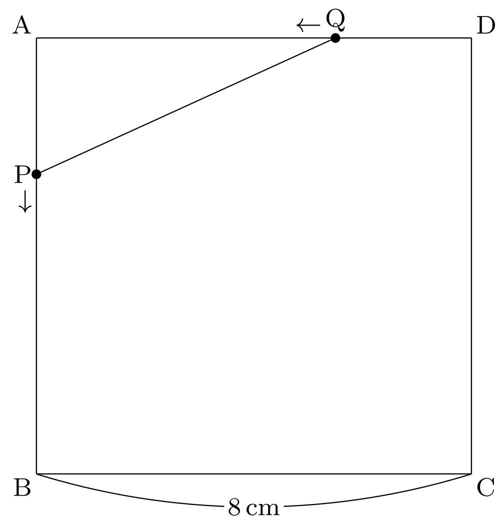
以上より、

△APQ の面積が 8 cm^2 になるときは、点 P が点 A から 8 cm または 2 cm 動いたとき

ということがわかりました。

本文へ戻る

問 27. 『右の図のような、1 辺が 8 cm の正方形 ABCD があるとします。点 P は点 A から出発して辺 AB 上を点 B まで動きます。また、点 Q は点 P が点 A を出発するのと同時に点 D から出発し、点 A と同じ速さで辺 DA 上を点 A まで動きます。 実は、△APQ の面積が 7.5 cm^2 になるときがあります。それは点 P が点 A から何 cm 動いたときですか。』という問題でしたね。



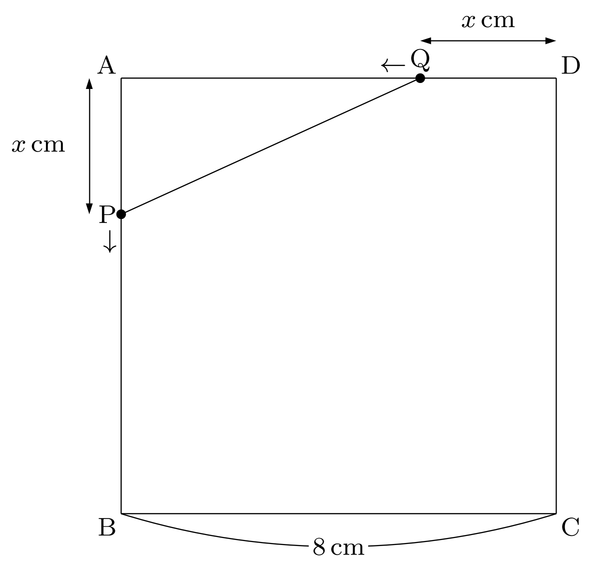
点 P が点 A から何 cm 動いたときに △APQ の面積が 7.5 cm^2 になるのかが謎ですから、「点 P が点 A から x cm 動いたときに △APQ の面積が 7.5 cm^2 になる」として考えていくことにします。

右の図を見てください。点 P が点 A から x cm 動いたときの図です。このとき、

$$\text{AQ の長さ} = 8 - x\,(\text{cm})$$

$$\begin{aligned}\triangle\text{APQ の面積} &= \frac{1}{2} \times (8 - x) \times x \\ &= \frac{1}{2}x(8 - x)\,(\text{cm}^2)\end{aligned}$$

となります。



ですから、いつ $\triangle\mathrm{APQ}$ の面積が

$7.5\,\mathrm{cm}^2$ になるのか知りたければ

$$\frac{1}{2}x(8-x) = 7.5$$

という方程式を作れば良いことになります。

ではこの方程式を解いて謎の数 x を発見しましょう。

まず、左辺と右辺に 2 をかけると、

$$x(8-x) = 15$$

となります。次に左辺を展開して見かけをマシにすると

$$8x - x^2 = 15$$

となります。次に、等式を変形するときにやっても良いことを使うと

$$-x^2 + 8x - 15 = 0$$

となります。さらに、左辺と右辺に -1 をかけると、

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

となります。ここで左辺を因数分解して見かけを変えると、

$$(x-3)(x-5) = 0$$

となります。この式は「$x-3$ と $x-5$ をかけると 0 になる」という意味ですから、

$$x-3=0 \quad \text{または} \quad x-5=0$$

が成り立つと結論できます。

そうすると、

$$x-3=0 \text{ のとき } x=3$$

となっていて、

$$x-5=0 \text{ のとき } x=5$$

となっているわけです。

これで謎の数 x の正体は

$$x=3 \quad \text{または} \quad x=5$$

であることがわかりました。「P が A から $x\,(\mathrm{cm})$ のところにきた」として考えているのですから

「P は A から 3 cm のところまたは 5 cm のところにいる」

ということになります。

ではいま得られた 2 つの可能性について、本当に答えとして採用して良いのか考えてみましょう。

まず、「P は A から 3 cm のところにいる」ということがありえるのかどうか調べます。P は AB 上を動きますが、AB の長さは 8 cm あります。ですから「P は A から 3 cm のところにいる」ということはありえます。

次は、「P は A から 5 cm のところにいる」ということがありえるのかどうか調べます。P は AB 上を動きますが、AB の長さは 8 cm あります。ですから「P は A から 5 cm のところにいる」ということはありえます。

というわけで、どちらも採用して良いということになりますね。

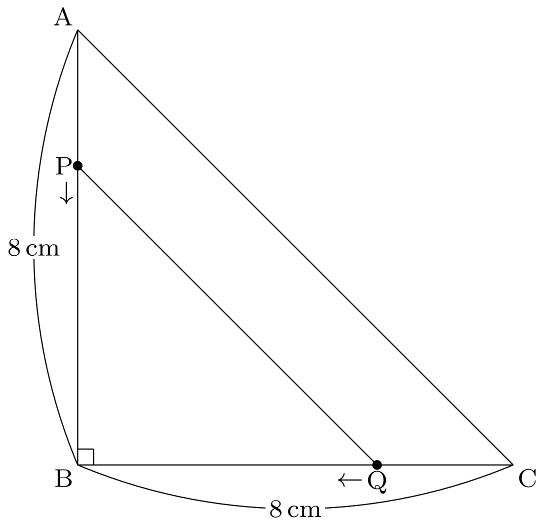
以上より、

△APQ の面積が $7.5\,\mathrm{cm}^2$ になるのは、点 P が点 A から 3 cm または 5 cm 動いたとき

ということがわかりました。

本文へ戻る

問 28. 『右の図のような、∠B が直角である直角二等辺三角形 ABC があるとします。辺 AB と辺 CB の長さ 8 cm です。点 P は点 A から出発して辺 AB 上を点 B まで動きます。また、点 Q は点 P が点 A を出発するのと同時に点 C から出発し、点 A と同じ速さで辺 CB 上を点 B まで動きます。 実は、台形 APQC の面積が 14 cm^2 になるときがあります。それは点 P が点 A から何 cm 動いたときですか。』という問題でしたね。



台形 APQC の面積が 14 cm^2 になるのは点 P が点 A から何 cm 動いたときであるのかが謎ですから、「点 P が点 A から x cm 動いたとき、台形 APQC の面積が 14 cm^2 になる」と考えて解いていくことにします。

ところで、話を進める前に少し工夫をしておきたいことがあります。台形の面積の計算って少し面倒なところがありますよね。たしか、

$$\text{台形の面積} = (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高さ} \times \frac{1}{2}$$

って計算するんですよね。でも、こ, の問題の図で台形 APQC を見ると、こういう計算の仕方で面積を計算するのは向いていない気がしますよね。そこで台形 APQC に注目する代わりに、△PBQ（つまり、△ABC から台形 APQC を取り去ってできる三角形）に注目することにします。

$$\triangle\text{ABC の面積} = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32\,\text{cm}^2$$

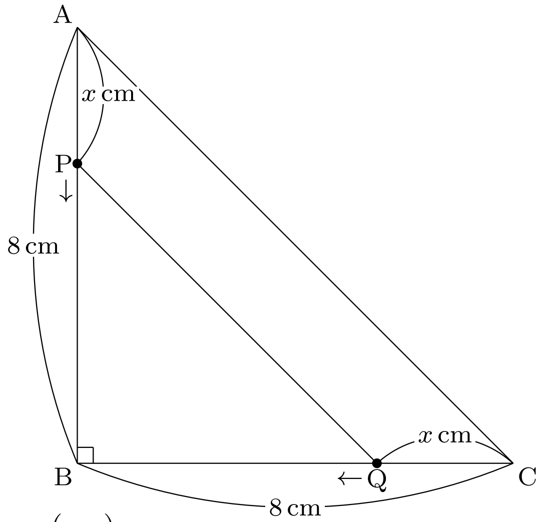
ですから、台形 APQC の面積が 14 cm^2 になるときには

$$\triangle\text{PBQ の面積} = 32 - 14 = 18\,\text{cm}^2$$

となっていますよね。ですからこの問題は、「点 P が点 A から x cm 動いたとき、$\triangle$PBQ の面積が 18 cm^2 になる」と考えて解いていけば良いですね。

では右の図を見てください。

点 P が点 A から x cm 動いたときの図です。



点 Q は点 P が点 A を出発するのと同時に点 C から出発し、点 A と同じ速さで辺 CB 上を動くのですから点 Q は点 C から x cm 動いています。

このとき、

$$\text{AQ の長さ} = 8 - x\,(\text{cm})$$

$$\text{BQ の長さ} = 8 - x\,(\text{cm})$$

となります。ですから、

$$\begin{aligned}\triangle\text{PBQ の面積} &= \frac{1}{2} \times (8 - x) \times (8 - x)\\ &= \frac{1}{2}x(8 - x)^2\,(\text{cm}^2)\end{aligned}$$

となります。

ということは、いつ $\triangle$PBQ の面積が 18 cm^2 になるのか知りたければ

$$\frac{1}{2}(8 - x)^2 = 18$$

という方程式を作れば良いことになります。

ではこの方程式を解いて謎の数 x を発見しましょう。

まず、左辺と右辺に 2 をかけると、

$$(8 - x)^2 = 36$$

となります。この式は「$8-x$ を 2 乗すると 36 になる」という意味の式です。そこで 2 乗すると 36 になる数を探してみると 6 と -6 が見つかります。ですから、

$$8-x=6 \quad \text{または} \quad 8-x=-6$$

が成り立つと結論できます。

そうすると、

$$8-x=6 \text{ のとき } x=2$$

となっていて、

$$8-x=-6 \text{ のとき } x=14$$

となっているわけです。

これで謎の数 x の正体は

$$x=2 \quad \text{または} \quad x=14$$

であることがわかりました。「P が A から x (cm) のところにきた」として考えているのですから

「P は A から 2 cm のところまたは 14 cm のところにいる」

ということになります。

ではいま得られた 2 つの可能性について、本当に答えとして採用して良いのか考えてみましょう。

まず、「P は A から 2 cm のところにいる」ということがありえるのかどうか調べます。P は AB 上を動きますが、AB の長さは 8 cm あります。ですから「P は A から 2 cm のところにいる」ということはありえます。というわけでこちらは採用できます。

次は、「P は A ら 14 cm のところにいる」ということがありえるのかどうか調べます。P は AB 上を動きますが、AB の長さは 8 cm しかありません。ですから「P は A から 14 cm のところにいる」ということはありえません。というわけでこちらは採用できません。

以上より、

台形 APQC の面積が $14\,\mathrm{cm}^2$ になるのは、$\triangle$PBQ の面積が $18\,\mathrm{cm}^2$ になるときで、

それは点 P が点 A から $2\,\mathrm{cm}$ 動いたとき

ということがわかりました。

本文へ戻る