文字式３（式の展開と因数分解）

2015 年 2 月 9 日

目次

このテキストの使いかた

日頃の学習では・・・

- テキストをていねいに読んでいきましょう。

  このテキストは、きちんと言葉を使っててていねいな説明が書かれています。記号や数式が並んでいるだけの、意味不明のものではありません。ひとことひとこと言葉を大切にして、解き方ではなく考え方を学び取るようにしてください。そして、書いてあることに対して、「あーそういうことか」とか「えーよくわからない」とか「これ、ちがうんじゃないの？」といった反応をしてください。数学は自分の頭を使って考えていく科目ですから立ち止まって考えることがとても大切なのです。

- テスト直前に勉強を始めるのではなく、テストで力を発揮できるように前もって準備をしておきましょう。

  数学のように、自分の頭を使って「あーでもない、こーでもない」と考えながら学んでいく科目では、学習を始めてからしばらくの間はなかなか成果が出ない事があります。しかし少し我慢をして学習を続けていくうちに、あるとき、驚くような力が付いていることに気づくことがあります。 つまり、実力は初めのうちはゆっくり伸びていき、あとからぐんと伸びることが多いのです。

- 例題を学ぶときには、解答を読む前に、できればまず自分の力で解くことができるかどうか試してみましょう。

  数学の学習では、誰かから教わっただけのことよりも自分で悩んで考えたことの

ほうがよく身につきます。紙と筆記用具を使って実際に答案を書いてみてください。それができたらテキストの解答をていねいに読んで自分の考えと比べてみましょう。

- 例題の学習ができたら、この問題がテストに出ても自分の力だけで解けるかどうか想像してみましょう。そして心配なものには印を付けておきましょう。

  日頃から自分の実力をつかんでおくとテスト対策がしやすくなります。

- 問はもちろん、まず自分の力で解くことができるかどうか試してみてください。

  紙と筆記用具を使って実際に答案を書いてみてください。それができたらテキストの解答をていねいに読んで自分の考えと比べてみましょう。そうすれば理解が深まるでしょう。

- 問を解き終わって答え合わせをしたら、間違ったものには印を付けておきましょう。

  日頃から自分の実力をつかんでおくとテスト対策がしやすくなります。

- ひとつのひとつの節を読み終わったら、どんなことをその節で学んだのか思い出して「あらすじ」を言えるようにしておきましょう。紙と筆記用具を用意して、誰かにあらすじを伝えるにはどんなふうに説明すればよいか考え、文章を書いてみるととても効果があります。

  中学生に「今日は学校の数学の授業でどんなことを勉強したの？」と聞いてみると、「えーと、何だっけ、そうだ、傾きとか習った。」と断片的なことを言えたりすることはあるのですが、改めて、「へぇ、ところで傾きってなんなの？」と聞いてみると「えー、何だっけ、そうだ、なんか計算したり直線を描いてた。」ぐらいの答えしか返ってこないことが多いのです。専門用語を正しく言えるようになることも必要なことかもしれませんが、そんなことより大切なのは「どんなお話を学んだのか」ということです。数学は意味の無い記号操作を学ぶ科目ではなく、ちゃんとしたストーリーがあるものを学んでいるのです。ですから「お話のあらすじ」を理

解しておくことが大切なのです。

定期テスト対策では・・・

「日頃の学習」のところにも書いてありますが、数学のような科目は力がつくまでに時間のかかる科目です。テストに備えて十分な日数を確保しておきましょう。そして、「日頃の学習」で心配な例題や間違った問にちゃんと印を付けているとテスト対策が楽になります。

- テキストから試験範囲の例題や問を探して、印のついていないものがちゃんと解けるかどうか試してみましょう。
- 印を付けた例題や問を繰り返し復習して、テストに出ても大丈夫な問題を少しでも増やしておきましょう。

第1章

おさらい

1.1　部品が1つの式で、かけ算とわり算の練習をしよう

　まず、あなたに思い出してもらいたいことがあります。いくつかおさらいすることにしましょう。

思い出してもらいたいことその1

　以前に、文字式を書くときの「大切な約束事」をいくつか学びました。「×」のマークを省略するとか、数は文字より前に書くとか、・・・、そういった約束がありましたね。ですから、a という文字と、-2 という数をかけて出来る式は $-2a$ と書くことになるのですよね。つまり、あなたは $-2a$ という式をを見たら、「-2 と a がかけてある」と思わなくてはいけません。

思い出してもらいたいことその2

　以前、「かけ算の結合法則」と呼ばれているものを学びましたね。（これは、小学校でも学んでいます。）どういう法則かと言うと、「いくつかの数があるとき、それらの数を全部かけたときの答えは、どんな順番でかけ算をしても同じになる。」という法則です。例えば、$5 \times (3 \times 8)$ と $(5 \times 3) \times 8$ ではかけ算をしていく順番が違っていますが、答えは同じになります。また、さらに、「かけ算の交換法則」と呼ばれているものも、前に学びましたね。（これも、小学校でも学んでいます。）どういう法則かというと「かけ算では、かけ

る数とかけられる数を入れかえて計算しても答えは同じになる。」という法則です。例えば、7×9 の答えと 9×7 の答えは同じになるのです。

「かけ算の結合法則」と「かけ算の交換法則」のおかげで、いくつかの数をかけ算したいとき、あなたはかけ算していく順番を自由に変えることができます。例えば、5 と 3 と 8 を全部かけるとき、5 と 3 をかけてから最後に 8 をかけても良いし、8 と 3 をかけてから最後に 5 をかけても良いし、3 と 8 をかけてから最後に 5 をかけても良いし、・・・・・・ということです。

例題 1　$3a$ という式に -4 という数をかけるとどうなるのか考えなさい。

解答

$3a$ という式は、そもそも 3 という数と a という文字をかけて出来ているのですね。つまり、

$$3a = 3 \times a$$

ですよね。そうすると、$3a$ という式に -4 という数をかけるということは、「3 という数」と「a という文字」と「-4 という数」をかけるということになります。つまり、

$$3a \times (-4) = 3 \times a \times (-4)$$

ですよね。3 つのものをかけ算することになりましたが、この式はかけ算だけの式なので、どれとどれを先にかけ算してもよいのですね。（結合法則と交換法則のおかげですよ。）そこで、3 と -4 をまずかけてしまいましょう。だって、3 と -4 は数だから計算出来ちゃいますよね。そうすると、次のように計算が進むわけです。

$$\begin{aligned} 3a \times (-4) &= 3 \times a \times (-4) \\ &= 3 \times (-4) \times a \\ &= -12 \times a \\ &= -12a \end{aligned}$$

問 1. $-x$ という式に 7 という数をかけるとどうなるのか考えることにします。次の文の空欄に正しい数や文字を書きなさい。

$-x$ という式は、そもそも $\boxed{}$ という数と $\boxed{}$ という文字をかけて出来ています。つまり、

$$-x = (-1) \times x$$

ですよね。そうすると、$-x$ という式に 7 という数をかけるということは、「$\boxed{}$ という数」と「$\boxed{}$ という文字」と「$\boxed{}$ という数」をかけるということになります。つまり、

$$-x \times 7 = (-1) \times x \times 7$$

ですよね。3 つのものをかけ算することになりましたが、この式はかけ算だけの式なので、どれとどれを先にかけ算してもよいのですね。（結合法則と交換法則のおかげですよ。）そこで、$\boxed{}$ と $\boxed{}$ をまずかけてしまいましょう。だって、$\boxed{}$ と $\boxed{}$ は数だから計算出来ちゃいますよね。そうすると、次のように計算が進むわけです。

$$\begin{aligned} -x \times 7 &= (-1) \times x \times 7 \\ &= (-1) \times 7 \times x \\ &= \boxed{} \times \boxed{} \\ &= \boxed{} \end{aligned}$$

答えを見る

問 2. 次の計算をしなさい。

(1) $5x \times 6$　　(2) $3a \times (-7)$

(3) $-a \times 5$　　(4) $-2x \times (-3)$

(5) $10x \times \dfrac{2}{5}$　　(6) $-\dfrac{3}{8}a \times 24$

(7) $15x \times \left(-\dfrac{2}{3}\right)$　　(8) $-\dfrac{3}{10}a \times \dfrac{5}{9}$

答えを見る

例題 2　$12x$ という式を 4 という数でわるとどうなるのか考えなさい。

解答

「$\div 4$」をすることと、「$\times \dfrac{1}{4}$」をすることは同じことでしたね。これがわかれば、後は、さっきの例題 25 と同じように計算できます。次のように計算を進めることが出来ます。自分できちんとたどってみてください。

$$
\begin{aligned}
12x \div 4 &= 12x \times \frac{1}{4} \\
&= 12 \times x \times \frac{1}{4} \\
&= 12 \times \frac{1}{4} \times x \\
&= 3 \times x \\
&= 3x
\end{aligned}
$$

問 3.　$4a$ という式を $-\dfrac{4}{7}$ という数でわるとどうなるのか考えることにします。次の文の空欄に正しい数や式を書きなさい。

「$\div \left(-\dfrac{4}{7}\right)$」をすることと、「$\times \left(\boxed{}\right)$」をすることは同じことです。ですから、次のように計算を進めることが出来ます。

$$
\begin{aligned}
4a \div \left(-\frac{4}{7}\right) &= 4a \times \left(\boxed{}\right) \\
&= 4 \times a \times \left(-\frac{7}{4}\right) \\
&= 4 \times \left(-\frac{7}{4}\right) \times a \\
&= \boxed{} \times a \\
&= \boxed{}
\end{aligned}
$$

答えを見る

問 4.　次の計算をしなさい。

(1) $8a \div (-4)$　　(2) $-15x \div (-3)$

(3) $9x \div \left(-\dfrac{3}{2}\right)$　　(4) $-7x \div 7$

(5) $\left(-\dfrac{3}{5}a\right) \div 6$　　(6) $(-2a) \div \left(-\dfrac{4}{3}\right)$

(7) $6x \div 12$　　(8) $\dfrac{6}{7}a \div (-3)$

答えを見る

例題 3　$3a$ という式に $-4b$ という式をかけるとどうなるのか考えなさい。

解答

$3a$ という式は、そもそも 3 という数と a という文字をかけて出来ているのですね。つまり、

$$3a = 3 \times a$$

ですよね。

また $-4b$ という式は、そもそも -4 という数と b という文字をかけて出来ているのですね。つまり、

$$-4b = -4 \times b$$

ですよね。

そうすると、$3b$ という式に $-4b$ という式をかけるということは、結局、「3 という数」と「a という文字」と「-4 という数」と「b という文字」をかけるということになります。つまり、

$$3a \times (-4b) = 3 \times a \times (-4) \times b$$

ということですよね。4 つのものをかけ算することになりましたが、この式はかけ算だけの式なので、どれとどれを先にかけ算してもよいですよね。（結合法則と交換法則のおかげですよ。）そこで、3 と -4 をまずかけてしまいましょう。だって、3 と -4 は数だから

計算出来ちゃいますよね。そうすると次のように計算が進むわけです。

$$\begin{aligned}3a \times (-4a) &= 3 \times a \times (-4) \times b \\ &= 3 \times (-4) \times a \times b \\ &= -12 \times a \times b \\ &= -12ab\end{aligned}$$

例題 4　$3a$ という式に $-4a$ という式をかけるとどうなるのか考えなさい。

解答

　$3a$ という式は、そもそも 3 という数と a という文字をかけて出来ているのですね。つまり、

$$3a = 3 \times a$$

ですよね。

　また $-4a$ という式は、そもそも -4 という数と a という文字をかけて出来ているのですね。つまり、

$$-4a = -4 \times a$$

ですよね。

　そうすると、$3a$ という式に $-4a$ という式をかけるということは、「3 という数」と「a という文字」と「-4 という数」と「a という文字」をかけるということになります。つまり、

$$3a \times (-4a) = 3 \times a \times (-4) \times a$$

ということですよね。4 つのものをかけ算することになりましたが、この式はかけ算だけの式なので、どれとどれを先にかけ算してもよいですね。（結合法則と交換法則のおかげですよ。）そこで、3 と -4 をまずかけてしまいましょう。だって、3 と -4 は数だから計

算出来ちゃいますよね。そうすると次のように計算が進むわけです。

$$\begin{aligned} 3a \times (-4a) &= 3 \times a \times (-4) \times a \\ &= 3 \times (-4) \times a \times a \\ &= -12 \times a \times a \\ &= -12a^2 \end{aligned}$$

問 5. $-2x$ という式に $7y$ という数をかけるとどうなるのか考えることにします。次の文の空欄に正しい数や文字を書きなさい。

$-2x$ という式は、そもそも $\boxed{}$ という数と $\boxed{}$ という文字をかけて出来ています。つまり、

$$-2x = (-2) \times x$$

ですよね。

また $7y$ という式は、そもそも $\boxed{}$ という数と $\boxed{}$ という文字をかけて出来ています。つまり、

$$7y = 7 \times y$$

ですよね。

そうすると、$-2x$ という式に $7y$ という式をかけるということは、「$\boxed{}$ という数」と「$\boxed{}$ という文字」と「$\boxed{}$ という数」と「$\boxed{}$ という文字」をかけるということになります。つまり、

$$-2x \times 7y = (-2) \times x \times 7 \times y$$

ですよね。4 つのものをかけ算することになりましたが、この式はかけ算だけの式なので、どれとどれを先にかけ算してもよいですね。（結合法則と交換法則のおかげですよ。）そこで、$\boxed{}$ と $\boxed{}$ をまずかけてしまいましょう。だって、$\boxed{}$ と $\boxed{}$ は数だから

計算出来ちゃいますよね。そうすると、次のように計算が進むわけです。

$$\begin{aligned}-2x \times 7y &= (-2) \times x \times 7 \times y \\ &= (-2) \times 7 \times x \times y \\ &= \boxed{} \times \boxed{} \\ &= \boxed{}\end{aligned}$$

答えを見る

問 6. $-2x$ という式に $7x$ という数をかけるとどうなるのか考えることにします。次の文の空欄に正しい数や文字を書きなさい。

$-2x$ という式は、そもそも $\boxed{}$ という数と $\boxed{}$ という文字をかけて出来ています。つまり、

$$-2x = (-2) \times x$$

ですよね。

また $7x$ という式は、そもそも $\boxed{}$ という数と $\boxed{}$ という文字をかけて出来ています。つまり、

$$7x = 7 \times x$$

ですよね。

そうすると、$-2x$ という式に $7x$ という式をかけるということは、「$\boxed{}$ という数」と「$\boxed{}$ という文字」と「$\boxed{}$ という数」と「$\boxed{}$ という文字」をかけるということになります。つまり、

$$-2x \times 7x = (-2) \times x \times 7 \times x$$

ですよね。4 つのものをかけ算することになりましたが、この式はかけ算だけの式なので、どれとどれを先にかけ算してもよいのですね。（結合法則と交換法則のおかげですよ。）そこで、$\boxed{}$ と $\boxed{}$ をまずかけてしまいましょう。だって、$\boxed{}$ と $\boxed{}$ は数だから計

算出来ちゃいますよね。そうすると、次のように計算が進むわけです。

$$
\begin{aligned}
-2x \times 7x &= (-2) \times x \times 7 \times x \\
&= (-2) \times 7 \times x \times x \\
&= \boxed{} \times \boxed{} \\
&= \boxed{}
\end{aligned}
$$

答えを見る

問 7. 次の計算をしなさい。

(1) $5x \times 6y$　　(2) $3a \times (-7a)$

(3) $-a \times 5b$　　(4) $-2x \times (-3x)$

(5) $10x \times \dfrac{2}{5}y$　　(6) $-\dfrac{3}{8}a \times 24b$

(7) $15x \times \left(-\dfrac{2}{3}y\right)$　　(8) $-\dfrac{3}{10}a \times \dfrac{5}{9}a$

答えを見る

それでは話を進めます。

例題 5　$(-3a)^2$ という式について考えることにします。

(1) $(-3a)^2$ という式には「にじょう」を意味するマークが付いています。$(-3a)^2$ という式は、何を二乗しているのですか。

(2) $(-3a)^2$ という式の見かけを変えてみてください。

解答

(1) $(-3a)^2$ という式は $-3a$ を二乗しています。つまり、$-3a$ を 2 個かけているのです。

(2) (1) でわかったように、$(-3a)^2$ という式は $-3a$ を 2 個かけているのです。ですから次のように計算を進めることができます。（ここから先は、例題 3 や例題 4 が理

解できていれば大丈夫なはずです。）

$$\begin{aligned}(-3a)^2 &= (-3a)\times(-3a)\\ &= (-3)\times a\times(-3)\times a\\ &= (-3)\times(-3)\times a\times a\\ &= 9\times a^2\\ &= 9a^2\end{aligned}$$

例題 6　$-(-3a)^2$ という式について考えることにします。

(1)　$-(-3a)^2$ という式には「にじょう」を意味するマークが付いています。$-(-3a)^2$ という式では、二乗されているのは何ですか。

(2)　$-(-3a)^2$ という式の見かけを変えてみてください。

解答

(1) $-(-3a)^2$ という式は「-1 という数」と「$-3a$ を二乗したもの」をかけてできた式です。つまり、この式の中では、二乗されているのは $-3a$ です。

(2) (1) でわかったように、$-(-3a)^2$ という式は「-1 という数」と「$-3a$ を二乗したもの」をかけてできた式です。ですから次のように計算を進めることができます。（ここから先は、例題 3 や例題 4 が理解できていれば大丈夫なはずです。）

$$\begin{aligned}-(-3a)^2 &= (-1)\times(-3a)\times(-3a)\\ &= (-1)\times(-3)\times a\times(-3)\times a\\ &= (-1)\times(-3)\times(-3)\times a\times a\\ &= -9\times a^2\\ &= -9a^2\end{aligned}$$

問 8.　次の計算をしなさい。

(1) $(-7x)^2$　　(2) $-(-7x)^2$

(3) $2a\times(-5a)^2$　　(4) $(-7a)^2\times 4a$

(5) $\dfrac{3}{5}x\times(5x)^2$　　(6) $(-3)\times(-7x)^2$

答えを見る

では次に、わり算の練習をしたいのですが、その前にあなたに思い出してもらいたいことがあります。

思い出してもらいたいことその 3

分数を約分するときの話

例えば、$(5 \times 8) \div (15 \times 4)$ という計算について考えてみましょう。「ナントカ」わる「ほにゃらら」という計算の答えは、分数で答えると $\dfrac{\text{ナントカ}}{\text{ほにゃらら}}$ でしたね。ですからとりあえず、

$$(5 \times 8) \div (15 \times 4) = \frac{5 \times 8}{15 \times 4}$$

ってことですね。次は分子のかけ算 5×8 と分母のかけ算 15×4 を行っても良いのですが、どうせあとで約分が待ってますよね。ですからこういうかけ算は今は行わないで、このまま約分に取りかかったほうがいいですよね。そこで次のように計算が進みます。

$$\frac{5 \times 8}{15 \times 4} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \times \overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{15}} \times \underset{1}{\cancel{4}}}$$

いいですか、分子の 5 と分母の 15 で約分し、分子の 8 と分母の 4 で約分したのですよ。さらに計算をしていくと、

$$\frac{\overset{1}{\cancel{5}} \times \overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{15}} \times \underset{1}{\cancel{4}}} = \frac{2}{3}$$

とできますね。この計算法の特徴は、初めからあったかけ算をそのまま放っておくという点にあります。つまり、初めからあった 5×8 とか 15×4 というかけ算は放っておき、先に約分に取りかかっているのです。もちろん、先にかけ算してしまっても正しい答えを出すことはできます。その場合は次のように計算は進みます。まず、

$$(5 \times 8) \div (15 \times 4) = 40 \div 60$$

となりますね。次に、

$$40 \div 60 = \frac{40}{60}$$

とできますね。最後に約分をすれば、

$$\frac{\overset{2}{\cancel{40}}}{\underset{3}{\cancel{60}}} = \frac{2}{3}$$

となりますよね。

というわけで、$(5 \times 8) \div (15 \times 4)$ の計算を 2 通りやってみました。「初めからあるかけ算を放っておいて先に約分をする方法」と、「先にかけ算をしてしまってあとから約分する方法」です。どちらのほうがいいというわけではありません。時と場合に応じて、あなたが使い分ける必要があるのです。これから練習する文字式のわり算では、前者、つまり「初めからあるかけ算を放っておいて先に約分をする方法」」が威力を発揮します。

それではわり算の話に入ることにしましょう。

例題 7　$12xy$ という式を $4y$ という式でわるとどうなるのか考えなさい。

解答

念のための注意をしておきます。$12xy$ というのはそもそも $12 \times x \times y$ のことで、$4y$ というのはそもそも $4 \times y$ のことですね。ですから、あなたは $12xy$ という式を見たら、「12 と x と y をかけているんだな」と思わなくてはなりませんし、$4y$ という式を見たら、「4 と y と y をかけているんだな」と思わなくてはならないのです。これだけのことを注意しておいて、本題に入ることにしましょう。

「$12xy \div 4y$」の答えは、分数で答えると、とりあえず、「$\dfrac{12xy}{4y}$」ですね。かけ算のマークも復活させておくと、「$\dfrac{12 \times x \times y}{4 \times y}$」ということですね。あとは、この例題の前に説明した方法で、約分をして計算を進めていきます。すると

$$\begin{aligned}\frac{12 \times x \times y}{4 \times y} &= \frac{\overset{3}{\cancel{12}} \times x \times \overset{1}{\cancel{y}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \times \underset{1}{\cancel{y}}} \\ &= \frac{3 \times x \times 1}{1 \times 1} \\ &= 3x\end{aligned}$$

となりますね。

問 9.　$-6a^2b$ という式を $2ab$ という式でわるとどうなるか考えようと思います。次の文の空欄に正しい数や式を書きなさい。

かけ算のマークを使うと、そもそも $-6a^2b$ という式は $\square \times \square \times \square \times \square$ のことで、$2ab$ という式は $\square \times \square \times \square$ のことです。ですからとりあえず、

$$-6a^2b \div 2ab = \frac{\square \times \square \times \square \times \square}{\square \times \square \times \square}$$

となるわけです。

この式を約分していきます。すると、

$$\frac{(-6) \times a \times a \times b}{2 \times a \times b} = \frac{\overset{\square}{\cancel{(-6)}} \times \overset{\square}{\cancel{a}} \times a \times \overset{\square}{\cancel{b}}}{\underset{\square}{\cancel{2}} \times \underset{\square}{\cancel{a}} \times \underset{\square}{\cancel{b}}}$$

$$= \frac{\square \times \square \times a \times \square}{\square \times \square \times \square}$$

$$= \square$$

となりますね。　答えを見る

問 10.　次の計算をしなさい。

(1) $8xy \div 4y$　　(2) $24x^2 \div 4x$

(3) $-18xy^2 \div 6y$　　(4) $-18a^2b \div (-9ab)$　答えを見る

ではわり算の話を続けていきます。しかしその前に、あなたに思い出してほしいことがあります。

<u>思い出してもらいたいことその 4</u>

まず、分数の意味を思い出してみてください。そもそも、

$$\frac{\text{ナントカ}}{\text{ほにゃらら}}\text{ という分数は「ナントカ」÷「ほにゃらら」というわり算の答え}$$

なのでしたね。

次に、逆数を使うとわり算をかけざんに直すことができるということを思い出してください。どういうことかというと、

「ナントカ」÷「ほにゃらら」というわり算は、
「ナントカ」×「ほにゃららの逆数」というかけ算に直せる

ということでしたね。

というわけで、

- $\dfrac{\text{ナントカ}}{\text{ほにゃらら}}$ という分数
- 「ナントカ」÷「ほにゃらら」というわり算の答え
- 「ナントカ」×「ほにゃららの逆数」というかけ算の答え

は全て同じになるのでしたね。

ですから例えば、

$$\frac{a}{5}\text{、}\quad a \div 5\text{、}\quad a \times \frac{1}{5}$$

はみんな同じなのです。さらに付け加えると、かけ算は順番を変えられるので（つまり、かけ算は交換法則が成り立つので）、

$$a \times \frac{1}{5} \text{ と } \frac{1}{5} \times a \text{ は同じ}$$

です。ですから結局、

$$\frac{a}{5}\text{、}\quad a \div 5\text{、}\quad a \times \frac{1}{5}\text{、}\quad \frac{1}{5} \times a$$

はみんな同じなのです。このようなことを、もう少し複雑な式で考えてみましょう。例えば、$\dfrac{5x}{3}$ という式について考えることにします。さっきと同じように考えると、

$$\frac{5x}{3} \text{ と } \frac{1}{3} \times 5x \text{ は同じ}$$

であることがわかります。またもちろん、

$$\frac{1}{3} \times 5x \text{ と } \frac{1}{3} \times 5 \times x \text{ は同じ}$$

です。3 つの数のかけ算はどこを先にかけても良いのですから、

$$\frac{1}{3} \times 5 \times x \text{ と } \frac{5}{3} \times x \text{ は同じ}$$

です。かけ算のマークを省略すれば、

$$\frac{5}{3} \times x \text{ と } \frac{5}{3}x \text{ は同じ}$$

です。以上で、結局、

$$\frac{5x}{3} \text{ と } \frac{5}{3}x \text{ は同じ}$$

ということがわかりました。この話がきちんと理解できたかどうか、次の問で確認することにしましょう。

問 11. $-\dfrac{2x}{7}$ という式について考えることにします。次の文の空欄に正しい数や式を書きなさい。

$\dfrac{\triangle}{7}$ と $\dfrac{1}{7} \times \triangle$ は同じですから、

$$-\frac{2x}{7} \text{ と } -\frac{1}{7} \times \boxed{} \text{ は同じ}$$

であることがわかります。またもちろん、

$$-\frac{1}{7} \times 2x \text{ と } -\frac{1}{7} \times \boxed{} \times \boxed{} \text{ は同じ}$$

です。3 つの数のかけ算はどこを先にかけても良いのですから、

$$-\frac{1}{7} \times 2 \times x \text{ と } \boxed{} \times x \text{ は同じ}$$

です。かけ算のマークを省略すれば、

$$-\frac{2}{7} \times x \text{ と } \boxed{} \text{ は同じ}$$

です。以上で、結局、

$$-\frac{2x}{7} \text{ と } \boxed{} \text{ は同じ}$$

ということがわかりました。 答えを見る

問 12. 次の文の空欄に正しい数や式を書きなさい。

問 11 をいっしょうけんめい考えると、

$$-\frac{2x}{7} \text{ と } -\frac{2}{7}x \text{ は同じ}$$

ということがわかりました。同じように考えると、

$$\frac{3a}{2} \text{ と } \boxed{} \text{ は同じ}$$

であることがわかります。また、

$$\boxed{} \text{ と } -\frac{8}{3}x \text{ は同じ}$$

ということもわかります。 答えを見る

では本題に戻ることにしましょう。文字式のわり算の話でしたね。

例題 8　$6ab^2$ という式を $-\dfrac{3}{2}a$ という式でわるとどうなるのか考えなさい。

解答

この例題の前で学んだことによると、$-\dfrac{3}{2}a$ と $-\dfrac{3a}{2}$ は同じですね。そこで、$6ab^2$ という式を $-\dfrac{3}{2}a$ という式でわる代わりに、$6ab^2$ という式を $-\dfrac{3a}{2}$ でわることにします。

「$\div\left(-\dfrac{3a}{2}\right)$」をすることと「$\times\left(-\dfrac{2}{3a}\right)$」をすることは同じことなのですよね。ですから、次のように計算を進めることが出来ます。

$$\begin{aligned} 6a^2b \div \left(-\frac{3a}{2}\right) &= 6a^2b \times \left(-\frac{2}{3a}\right) \\ &= -\frac{6a^2b \times 2}{3a} \end{aligned}$$

ここまでくれば、あとは 18 ページの例題 7 と同じように、かけ算のマークを復活して

約分をする方法で計算を進めることができますね。ではやってみます。

$$
\begin{aligned}
-\frac{6a^2b\times 2}{3a} &= -\frac{6\times a\times a\times b}{3\times a}\\
&= -\frac{\overset{2}{\cancel{6}}\times \overset{1}{\cancel{a}}\times a\times b}{\underset{1}{\cancel{3}}\times \underset{1}{\cancel{a}}}\\
&= -\frac{2\times 1\times a\times b}{1\times 1}\\
&= -2ab
\end{aligned}
$$

となりますね。

例題 9 $-\dfrac{3}{2}x^2$ という式を $-\dfrac{9}{4}x$ という式でわるとどうなるのか考えなさい。

解答

例題 8 の前で学んだことによると、$-\dfrac{3}{2}x^2$ と $-\dfrac{3x^2}{2}$ は同じですね。また、$-\dfrac{9}{4}x$ と $-\dfrac{9x}{4}$ は同じですね。そこで、$-\dfrac{3}{2}x^2$ という式を $-\dfrac{9}{4}x$ という式でわる代わりに、$-\dfrac{3x^2}{2}$ という式を $-\dfrac{9x}{4}$ でわることにします。

「$\div\left(-\dfrac{9x}{4}\right)$」をすることと、「$\times\left(-\dfrac{4}{9x}\right)$」をすることは同じことですね。ですから、次のように計算を進めることが出来ます。

$$
\begin{aligned}
-\frac{3x^2}{2}\div\left(-\frac{9x}{4}\right) &= -\frac{3x^2}{2}\times\left(-\frac{4}{9x}\right)\\
&= \frac{3x^2\times 4}{2\times 9x}
\end{aligned}
$$

ここまでくれば、あとは 18 ページの例題 7 と同じように、かけ算のマークを復活して約分をする方法で計算を進めることができますね。ではやってみます。

$$
\begin{aligned}
\frac{3x^2\times 4}{2\times 9x} &= -\frac{3\times x\times x}{2\times 9\times x}\\
&= \frac{\overset{1}{\cancel{3}}\times \overset{1}{\cancel{x}}\times x}{2\times \underset{3}{\cancel{9}}\times \underset{1}{\cancel{x}}}\\
&= \frac{1\times 1\times x}{2\times 3\times 1}\\
&= \frac{x}{6}
\end{aligned}
$$

となりますね。

問 13. $\dfrac{8}{7}a^2$ という式を $-\dfrac{4}{7}a$ という式でわるとどうなるのか考えることにします。次の文の空欄に正しい数や式を書きなさい。

$\dfrac{8}{7}a^2$ は $\dfrac{8a^2}{7}$ と同じです。また、$-\dfrac{4}{7}a$ は $-\dfrac{\boxed{}}{7}$ と同じです。ですから、$\dfrac{8}{7}a^2$ という式を $-\dfrac{4}{7}a$ という式でわる代わりに、$\dfrac{8a^2}{7}$ という式を $-\dfrac{\boxed{}}{7}$ という式でわることにします。

「$\div\left(-\dfrac{4a}{7}\right)$」をすることと、「$\times\left(\boxed{}\right)$」をすることは同じことです。ですから、次のように計算を進めることが出来ます。

$$\begin{aligned}\frac{8a^2}{7}\div\left(-\frac{4a}{7}\right) &= \frac{8a^2}{7}\times\left(-\boxed{}\right)\\ &= -\frac{8a^2\times\boxed{}}{7\times\boxed{}}\end{aligned}$$

ここまでくれば、あとは 18 ページの例題 7 と同じように、かけ算のマークを復活して約分をする方法で計算を進めることができますね。ではやってみます。

$$\begin{aligned}-\frac{8a^2\times 7}{7\times 4a} &= -\frac{8\times a\times\boxed{}\times 7}{7\times\boxed{}\times\boxed{}}\\ &= -\frac{\overset{\boxed{}}{\cancel{8}}\times\overset{\boxed{}}{\cancel{a}}\times a\times\overset{\boxed{}}{\cancel{7}}}{\underset{\boxed{}}{\cancel{7}}\times\underset{\boxed{}}{\cancel{4}}\times\underset{\boxed{}}{\cancel{a}}}\\ &= \boxed{}\end{aligned}$$

となりますね。 答えを見る

問 14. 次の計算をしなさい。

(1) $8a\div\dfrac{4}{3}a$　　(2) $-15x^2\div\left(-\dfrac{3}{2}x\right)$

(3) $9xy\div\left(-\dfrac{3}{2}x\right)$　　(4) $-7xy^2\div\dfrac{7}{3}x$

(5) $\left(-\dfrac{3}{5}a^2b\right) \div \dfrac{6}{5}ab$　　(6) $\left(-\dfrac{2}{7}ab^2\right) \div \left(-\dfrac{4}{3}b\right)$

(7) $\left(-\dfrac{5}{18}ab\right) \div \left(-\dfrac{10}{9}b\right)$　　(8) $\dfrac{2}{5}x^2y^2 \div \dfrac{3}{10}xy$

答えを見る

それでは今度は、かけ算とわり算が混ざっている計算を練習しましょう。

何度もいいますが、「逆数を使えば、わり算はかけ算に直して計算できる」のでしたね。つまり、例えば、「$\div(-6)$」をするのと、「$\times\left(-\dfrac{1}{6}\right)$」をするのは同じことです。また例えば、「$\div(-6a)$」をするのと、「$\times\left(-\dfrac{1}{6a}\right)$」をするのは同じことです。さらに例えば、「$\div\dfrac{6a}{5}$」をするのと、「$\times\dfrac{5}{6a}$」をするのは同じことです。ということは、式の中にわり算があったとしても、逆数を使えばかけ算に直して計算できることになります。

例題 10　次の式を、逆数を使ってかけ算にだけの式に直してから計算しなさい。

(1)　$(-4xy^2) \times 6x \div (-3y)$　　(2)　$4xy^2 \div 6x \times (-3y)$

(3)　$(-4xy^2) \div 6x \div (-3y)$

解答

とにかく、わり算のところを逆数を使ってかけ算に直して計算します。

(1) $(-4xy^2) \times 6x \div (-3y)$ という式の $\div(-3y)$ を $\times\left(-\dfrac{1}{3y}\right)$ に変えて計算すればよいですね。

$(-4xy^2) \times 6x \div (-3y)$ という式には「マイナス」のマークがついた式が 2 つあります。$(-4xy^2)$ と $(-3y)$ です。2 つあるのですから $(-4xy^2) \times 6x \div (-3y)$ という計算の答えには「マイナス」のマークは付きません。このことにも注意しておきましょう。

では、計算に取りかかります。まず、逆数を使ってわり算のところをかけざんに変

えます。すると、

$$
\begin{aligned}
(-4xy^2) \times 6x \div (-3y) &= (-4xy^2) \times 6x \times \left(-\frac{1}{3y}\right) \\
&= \frac{4xy^2 \times 6x}{3y}
\end{aligned}
$$

となります。ここまで来たら、あとは 18 ページの例題 7 と同じように、かけ算のマークを復活して約分をする方法で計算を進めることができますね。ではやってみます。

$$
\begin{aligned}
\frac{4xy^2 \times 6x}{3y} &= \frac{4 \times x \times y \times y \times 6 \times x}{3 \times y} \\
&= \frac{4 \times x \times \overset{1}{\cancel{y}} \times y \times \overset{2}{\cancel{6}} \times x}{\underset{1}{\cancel{3}} \times \underset{1}{\cancel{y}}} \\
&= 4 \times x \times y \times 2 \times x \\
&= 8x^2y
\end{aligned}
$$

となりますね。

(2) $4xy^2 \div 6x \times (-3y)$ という式の $\div 6x$ を $\times \dfrac{1}{6x}$ に変えて計算すればよいですね。

$4xy^2 \div 6x \times (-3y)$ という式には「マイナス」のマークがついた式が 1 つあります。$(-3y)$ です。1 つあるのですから $4xy^2 \div 6x \times (-3y)$ という計算の答えには「マイナス」のマークが付きます。このことにも注意しておきましょう。

では、計算に取りかかります。まず、逆数を使ってわり算のところをかけ算に変えます。すると、

$$
\begin{aligned}
4xy^2 \div 6x \times (-3y) &= 4xy^2 \times \frac{1}{6x} \times (-3y) \\
&= -\frac{4xy^2 \times 3y}{6x}
\end{aligned}
$$

となります。ここまで来たら、あとは 18 ページの例題 7 と同じように、かけ算の

マークを復活して約分をする方法で計算を進めることができますね。ではやってみます。

$$
\begin{aligned}
-\frac{4xy^2 \times 3y}{6x} &= -\frac{4 \times x \times y \times y \times 3 \times y}{6 \times x} \\
&= -\frac{4 \times \overset{1}{\cancel{x}} \times y \times y \times \overset{1}{\cancel{3}} \times y}{\underset{2}{\cancel{6}} \times \underset{1}{\cancel{x}}} \\
&= -\frac{\overset{2}{\cancel{4}} \times y \times y \times y}{\underset{1}{\cancel{2}}} \\
&= -2y^3
\end{aligned}
$$

となりますね。

(3) $(-4xy^2) \div 6x \div (-3y)$ という式の $\div 6x$ を $\times \dfrac{1}{6x}$ に変え、 $\div(-3y)$ を $\times \left(-\dfrac{1}{3y}\right)$ に変えて計算すればよいですね。

$(-4xy^2) \div 6x \div (-3y)$ という式には「マイナス」のマークがついた式が 2 つあります。$(-4xy^2)$ と $(-3y)$ です。2 つあるのですから $(-4xy^2) \div 6x \div (-3y)$ という計算の答えには「マイナス」のマークは付きません。このことにも注意しておきましょう。

では、計算に取りかかります。まず、逆数を使ってわり算のところをかけ算に変えます。すると、

$$
\begin{aligned}
(-4xy^2) \div 6x \div (-3y) &= (-4xy^2) \times \frac{1}{6x} \times \left(-\frac{1}{3y}\right) \\
&= \frac{4xy^2}{6x \times 3y}
\end{aligned}
$$

となります。ここまで来たら、あとは 18 ページの例題 7 と同じように、かけ算のマークを復活して約分をする方法で計算を進めることができますね。ではやってみ

ます。

$$\frac{4xy^2}{6x \times 3y} = \frac{4 \times x \times y \times y}{6 \times x \times 3 \times y}$$
$$= \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \times \overset{1}{\cancel{x}} \times \overset{1}{\cancel{y}} \times y}{\underset{3}{\cancel{6}} \times \underset{1}{\cancel{x}} \times 3 \times \underset{1}{\cancel{y}}}$$
$$= \frac{2 \times y}{3}$$
$$= \frac{2y}{3}$$

となりますね。

問 15. 次の式を、逆数を使ってかけ算にだけの式に直してから計算しなさい。

(1) $(-5xy) \times 7y \div (-10x)$　　(2) $7a \times 4b \div (-14a)$

(3) $24xy \div (-6x) \times (-3xy)$　　(4) $-24x^2y \div (-6x) \div (-3y)$　答えを見る

例題 11　逆数を使って、かけ算にだけの式に直してから計算しなさい。

(1) $6ab \div \left(-\frac{5}{8}b\right) \times \frac{5}{4}a$　　(2) $\left(-\frac{2}{3}x^2y\right) \times \frac{5}{6}y \div \left(-\frac{4}{5}xy\right)$

解答

式が少し複雑になってきました。混乱している人もいるかもしれません。落ち着いてくださいね。「÷」のあとに書いてある数を逆数にするのですよ。そうすれば、わり算をかけ算に変えられるのです。

(1) $6ab \div \left(-\frac{5}{8}b\right) \times \frac{5}{4}a$ でしたね。「÷」のあとに書いてある式は $-\frac{5}{8}b$ ですね。$-\frac{5}{8}b$ の逆数は $-\frac{8}{5b}$ ですから、まず、次のようにかけ算だけの式にできます。

$$6ab \div \left(-\frac{5}{8}b\right) \times \frac{5}{4}a = 6ab \times \left(-\frac{8}{5b}\right) \times \frac{5a}{4}$$

三つの式がかけられることになりました。マイナスのマークが付いている式が一個（つまり奇数個）入っていますね。($-\frac{5}{8b}$ のことです。) そうすると、このかけ算の答えにはマイナスのマークが付くわけです。ですから、この先は次のように計算

できます。

$$
\begin{aligned}
6ab \times \left(-\frac{8}{5b}\right) \times \frac{5a}{4} &= -\frac{6ab \times 8 \times 5a}{5b \times 4} \\
&= -\frac{6 \times a \times b \times 8 \times 5 \times a}{5 \times b \times 4} \\
&= -\frac{6 \times a \times \overset{1}{\cancel{b}} \times \overset{2}{\cancel{8}} \times \overset{1}{\cancel{5}} \times a}{\underset{1}{\cancel{5}} \times \underset{1}{\cancel{b}} \times \underset{1}{\cancel{4}}} \\
&= -6 \times a \times 2 \times a \\
&= -12a^2
\end{aligned}
$$

(2) $\left(-\frac{2}{3}x^2y\right) \times \frac{5}{6}y \div \left(-\frac{4}{5}xy\right)$ でしたね。「$\div$」のあとに書いてある式は $-\frac{4}{5}xy$ ですね。$-\frac{4}{5}xy$ の逆数は $-\frac{5}{4xy}$ ですから、まず、次のようにかけ算だけの式にできます。

$$
\left(-\frac{3}{2}x^2y\right) \times \frac{5}{6}y \div \left(-\frac{4}{5}xy\right) = \left(-\frac{3x^2y}{2}\right) \times \frac{5y}{6} \times \left(-\frac{5}{4y}\right)
$$

三つの式がかけられることになりました。マイナスのマークが付いている式が二個（つまり偶数個）入っていますね。（$-\frac{3x^2y}{2}$ と $-\frac{5}{4y}$ のことです。）そうすると、このかけ算の答えにはマイナスのマークは付かないわけです。ですから、この先は次のように計算できます。

$$
\begin{aligned}
\left(-\frac{3x^2y}{2}\right) \times \frac{5y}{6} \times \left(-\frac{5}{4y}\right) &= \frac{3x^2y \times 5y \times 5}{2 \times 6 \times 4y} \\
&= \frac{3 \times x \times x \times y \times 5 \times y \times 5}{2 \times 6 \times 4 \times y} \\
&= \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \times x \times x \times \overset{1}{\cancel{y}} \times 5 \times y \times 5}{2 \times \underset{2}{\cancel{6}} \times 4 \times \underset{1}{\cancel{y}}} \\
&= \frac{x \times x \times 5 \times y \times 5}{\times 2 \times 2 \times 4} \\
&= \frac{25x^2y}{16}
\end{aligned}
$$

問 16. 逆数を使って、かけ算にだけの式に直してから計算しなさい。

(1) $\frac{3}{5}xy^2 \div \left(-\frac{3}{10}x\right) \div \left(-\frac{2}{3}y\right)$　(2) $-27a^2b \times \left(-\frac{2}{3}b\right) \div (-9ab)$

(3) $\left(-\frac{5}{3}y\right) \times \frac{7}{15}xy \div \frac{5}{6}xy^2$　(4) $\left(-\frac{3}{7}a^2b^2\right) \div 2ab \div \left(-\frac{3}{4}b\right)$

答えを見る

1.2　分配法則

あなたは、「分配法則」ってどんな法則だったか覚えていますか？「分配法則」は数学を学習する人は、絶対に忘れてはいけない法則です。念のため、おさらいします。

重要な事実：分配法則その 1

三つの数があるとします。今ここでは、その三つの数を □、△、◯ であらわすことにします。すると、

(1) □、△、◯ がどんな数だとしても、(□＋△)×◯ の計算結果と、□×◯＋△×◯ の計算結果は必ず同じになります。

(2) □、△、◯ がどんな数だとしても、◯×(□＋△) の計算結果と、◯×□＋◯×△ の計算結果は必ず同じになります。

念のため、少し説明します。ここでは (1) について説明しましょう。三つの数として 5、3、7 を使って説明します。(1) で言っていることは、「$(5+3)\times 7$ の計算結果と $5\times 7+3\times 7$ の計算結果は同じになるんだよ」ということです。本当に計算結果が同じになるのか、計算して調べることにします。

まず、$(5+3)\times 7$ の計算ですが、この式には「かっこ」がありますね。ですから「かっこの中を先に」計算します。ですから、

$$(5+3)\times 7 = 8\times 7 = 56$$

となりますね。

一方、$5\times7+3\times7$ の計算ですが、この式には「たし算」と「かけ算」が混ざっています。(「かっこ」はありません。) こんなときは、「かけ算」から先に計算するのでしたね。ですから、

$$5\times7+3\times7=35+21=56$$

となりますね。どうですか？ $(5+3)\times7$ も $5\times7+3\times7$ も計算してみたら 56 になりましたね。これでさっきの、重要な事実 (1) の意味はわかってもらえてでしょうか？もう少し、説明を続けます。

このような分配法則を使うとき、よく や のようなマークを付けることがあります。例えば、さっきの $(5+3)\times7$ の計算では、まず

$$(5+3)\times7$$

のように、かっこの後ろにある「7」から、かっこの中にある二つの数「5」と「3」へ向けて というマークを書くのです。そして、次に、分配法則を使うわけです。つまり、かっこの中を先に計算するのではなくて、 でつながれた数どうしをかけ、あいだに「+」のマークをつけておきます。ですから、

あいだに + のマークをつける

$$(5+3)\times7=5\times7+3\times7$$

どちらも でつながれた数をかけている

のように計算は進みます。どうですか？かっこの後ろにある「7」が、かっこの中にある二つの数「5」と「3」へ、「分けられて」、「配られて」いる感じがするでしょ。だから、分配法則って言うんですよ。このように、「分配」が終わったら、あとは普通に計算すればよいのです。つまり、

あいだに ＋ のマークをつける

$$(5+3)\times 7 = 5\times 7 + 3\times 7 = 35+21 = 56$$

どちらも　　でつながれた数をかけている

のように計算が進むのです。

ここまで、「重要な事実 (1)」について説明してきました。「重要な事実 (2)」も同じようなことです。(1) との違いは、分配される数、つまり、「分けられて配られる数」がかっこの前にあるということです。くどく説明するのはやめて、((2) についても、簡単な例をあなたにお見せしましょう。例えば、$8\times(4+3)$ の計算結果と $8\times 4 + 8\times 3$ の計算結果は同じになるのです。本当ですよ。自分で計算して確かめてくださいね。ですから、重要な事実 (2) を使う人は、

あいだに ＋ のマークをつける

$$8\times(4+3) = 8\times 4 + 8\times 3 = 32+24 = 56$$

どちらも　　でつながれた数をかけている

のように計算できるのです。

問 17. 次の文の空欄に正しい数を書きなさい。

(1) $(12+15)\times 4$ の計算結果と $12\times\boxed{}+15\times\boxed{}$ の計算結果は同じです。

(2) $7\times 6+8\times 6$ の計算結果と $(7+8)\times\boxed{}$ の計算結果は同じです。

(3) $9\times(3+8)$ の計算結果と $\boxed{}\times 3+\boxed{}\times 8$ の計算結果は同じです。

(4) $12\times 5+12\times 15$ の計算結果と $\boxed{}\times(5+15)$ の計算結果は同じです。

答えを見る

問 18. 次の文の空欄に当てはまる数を答えなさい。

(1) $(16+5)\times 12$ の計算結果と $\boxed{}\times 12+\boxed{}\times 12$ の計算結果は同じです。

(2) $5\times 16+7\times 16$ の計算結果と $\left(\boxed{}+\boxed{}\right)\times 16$ の計算結果は同じです。

(3) $9\times(3+24)$ の計算結果と $9\times\boxed{}+9\times\boxed{}$ の計算結果は同じです。

(4) $8\times 14+8\times 2$ の計算結果と $8\times\boxed{}+8\times\boxed{}$ の計算結果は同じです。 答えを見る

問 19. 次の式の空欄に、+、−、×、÷ のうち、正しい記号を記入しなさい。

(1) $(5+7)\times 3 = 5\ \square\ 3\ \square\ 7\ \square\ 3$

(2) $6\times 5 + 9\times 5 = \left(6\ \square\ 9\right)\times 5$

(3) $4\times(2+3) = 4\ \square\ 2\ \square\ 4\ \square\ 3$

(4) $8\times 2 + 8\times 7 = 8\ \square\ \left(2\ \square\ 7\right)$

答えを見る

では、話を進めることにしましょう。実は、分配法則には、かっこの中に「マイナス」のマークが出てくるものもあるのです。次を見てください。

重要な事実：分配法則その 2

三つの数があるとします。今ここでは、その三つの数を □、△、◯ であらわすことにします。すると、

(1) □、△、◯ がどんな数だとしても、(□−△)×◯ の計算結果と、□×◯−△×◯ の計算結果は必ず同じになります。

(2) □、△、◯ がどんな数だとしても、◯×(□−△) の計算結果と、◯×□−◯×△ の計算結果は必ず同じになります。

このテキストの前のほうを探して、前に学んだ、「分配法則その 1」と見比べてみてください。そっくりですが、ちょっと違っているのがわかりますよね。

三つの数を実際に用意して、本当にこのようになるのか試すことにします。ここでは、三つの数として、「7」、「3」、「2」を使うことにします。そうすると、例えば、この、重要な事実 (1) によると、「$(7-3)\times 2$ の計算結果と、$7\times 2 - 3\times 2$ の計算結果は等しい。」ということらしいですね。本当にそうなのかそれぞれ計算してみてください。$(7-3)\times 2$ を、この式のとおりに計算するといくつになりますか？また、$7\times 2 - 3\times 2$ をこの式のとおりに計算するといくつになりますか？どうです？どっちも $\square$ になったでしょ。（空欄

には正しい数を書いておいてくださいね。）

問 20. 次の文の空欄にあてはまる数や記号を記入しなさい。

(1) $(12-3)\times 6$ の計算結果と $12\times\square-3\times\square$ の計算結果は同じです。

(2) $9\times 2-6\times 2$ の計算結果と $\left(\square-\square\right)\times 2$ の計算結果は同じです。

(3) $7\times 5-7\times 3$ の計算結果と $7\times\left(\square-\square\right)$ の計算結果は同じです。

(4) $4\times(8-5)=4\ \square\ 8\ \square\ 4\ \square\ 5$ が成り立ちます。

答えを見る

問 21. 念のための問題です。あなたが、分配法則を正しく理解できているか試すことにしましょう。

(1) $\{(-9)+5\}\times 7$ の計算結果と $(-9)\times 7+5\times 7$ の計算結果は同じだと思いますか。計算をしないで答えてください。つまり、2 つの式の形をじっと見るだけで、答えてください。

(2) $\{(-12)-6\}\times(-8)$ の計算結果と $(-12)\times(-8)-6\times(-8)$ の計算結果は同じだと思いますか。計算をしないで答えてください。つまり、2 つの式の形をじっと見るだけで、答えてください。

答えを見る

例題 12　実は、次の式はどれも、分配法則を使って、式の形を変えてから計算することができます。そこで、そのまま計算するのではなく、必ず分配法則を使って式の形を変えてから計算してください。

(1) $\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}\right)\times 12$　　(2) $(-9)\times(7+5)$

(3) $(-4)\times 36+(-4)\times 64$　　(4) $23\times(-12)+23\times 112$

解答

分配法則その 1 によると、

$$(\square+\triangle)\times\bigcirc$$

という形をしている式は

$$\square\times\bigcirc+\triangle\times\bigcirc$$

というかたちに変えることができます。

　逆に、

$$\square \times \bigcirc + \triangle \times \bigcirc$$

という形をしている式を

$$(\square + \triangle) \times \bigcirc$$

にできるわけです。分配法則その 2 についても同じようなことができるわけです。

(1) $(\square - \triangle) \times \bigcirc$ という形をしている式ですから、$\square \times \bigcirc - \triangle \times \bigcirc$ という形に変えてから計算します。ですから、次のように計算は進みます。自分でちゃんと、たどってみてください。

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) \times 12 = \frac{2}{\cancel{3}_{1}} \times \cancel{12}^{4} - \frac{3}{\cancel{4}_{1}} \times \cancel{12}^{3} = 8 - 9 = -1$$

(2) $\bigcirc \times (\square + \triangle)$ という形をしている式ですから、$\bigcirc \times \square + \bigcirc \times \triangle$ という形に変えてから計算します。ですから、次のように計算は進みます。自分でちゃんと、たどってみてください。

$$(-9) \times (7 + 5) = (-9) \times 7 + (-9) \times 5 = -63 - 45 = -108$$

(3) $\bigcirc \times \square + \bigcirc \times \triangle \times$ という形をしている式ですから、$\bigcirc \times (\square + \triangle)$ という形に変えてから計算します。ですから、次のように計算は進みます。自分でちゃんと、たどってみてください。

$$(-4) \times 36 + (-4) \times 64 = (-4) \times (36 + 64) = (-4) \times 100 = -400$$

(4) $\bigcirc \times \square + \bigcirc \times \triangle \times$ という形をしている式ですから、$\bigcirc \times (\square + \triangle)$ という形に変えてから計算します。ですから、次のように計算は進みます。自分でちゃんと、たどってみてください。

$$23 \times (-12) + 23 \times 112 = 23 \times \{(-12) + 112\} = 23 \times 100 = 2300$$

注意：この例題では、指示されたとおり、分配法則を使ってから計算をしました。しかし、分配法則が使える形の式だからといって、いつでも絶対に分配法則を使わなくてはいけないというわけではありません。この例題に出てきた問題は、実はどれも、分配法則を使ったほうが楽に計算できるものばかりなのです。そのまま計算したほうが楽なのか、それとも分配法則を使ったほうが楽になるのかということは、式をよく見て自分で決めるしかありません。例えば、この例題の (1) をもう一度良く見てください。この問題では、分配法則を使うと分数がなくなってしまうということを、自分で見抜く必要があるのです。つまり $\dfrac{2}{3}$ の分母である 3 と、$\dfrac{3}{4}$ の分母である 4 は、どちらも 12 と相性がよいのです。だから、分配法則を使えば、一気に分数がなくなってしまうのです。もし、分配法則を使わないで計算していたら、$\dfrac{2}{3}$ の分母と $\dfrac{3}{4}$ の分母が違っているので、通分をする必要があったはずです。これってめんどうですよね。

問 22.　実は、次の式はどれも、分配法則を使って、式の形を変えてから計算することができます。そこで、そのまま計算するのではなく、必ず分配法則を使って式の形を変えてから計算してください。

(1) $(-12) \times \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{3}\right)$　　(2) $\left(-\dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{7}\right) \times 70$

(3) $8 \times (-27) + 8 \times (-23)$　　(4) $1.3 \times (-15) - 0.3 \times (-15)$

(5) $(-6) \times 26 + (-6) \times 24$　　(6) $(-64) \times 106 - (-64) \times 6$

答えを見る

例題 13　分配法則が良く理解できている人のための問題です。$-(6x-5)$ という式について考えることにします。実は、この式は、次のうちのどれか 1 つの式と同じなのです。どれと同じなのでしょうか。

ア．$6x-5$　　イ．$6x+5$　　ウ．$-6x+5$　　エ．$-6x-5$

解答

　前に、「大切な約束事その 4」というのがありました。そこでは、「-1 という数と文字のかけ算では $\times$ のマークを省略するだけでなく、1 も省略する。$-$ のマークは残ることに注意しよう。」ということを学習しました。（覚えていますか？）このことがよく理解できている人だったら、

$-(6x-5)$ という式は -1 という数と $6x-5$ という文字式をかけて出来ている

ということがわかると思います。つまり、$-(6x-5)$ という式は $(-1)\times(6x-5)$ という式と同じなのです。

　ではここで分配法則を思い出してみましょう。たしか、

$$\bigcirc \times (\square + \triangle)$$

の計算結果と

$$\bigcirc \times \square + \bigcirc \times \triangle$$

の計算結果は同じになるのでしたよね。ところで、$(-1)\times(6x-5)$ という式は、分配法則に出てくる

$$\bigcirc \times (\square + \triangle)$$

という式と形が同じではないですか。（$\bigcirc$ は -1、$\square$ は $6x$、$\triangle$ は -5 ですね。）ということは、この式は

$$\bigcirc \times \square + \bigcirc \times \triangle$$

という形に見かけを変えることが出来るはずです。$\bigcirc$ が、前から、かっこの中にいる $\square$ と $\triangle$ へ分配されるのです。次のように計算を進めることが出来ます。

$$\begin{aligned}(-1)\times(6x-5) &= (-1)\times 6x + (-1)\times(-5)\\ &= -6x+5\end{aligned}$$

ですから、この問題の答えはウですね。

問 23. 分配法則が良く理解できている人のための問題です。$-(2a+5)$ という式について考えることにします。実は、この式は、次のうちのどれか 1 つの式と同じなのです。どれと同じなのでしょうか。

ア．$-2a-5$　　イ．$2a+5$　　ウ．$-2a+5$　　エ．$2a-5$

答えを見る

問 24. 次の式を変形し、かっこのない式にしなさい。

(1) $-(3x-8)$　　(2) $-(6a+4)$

(3) $-(-4b-3)$　　(4) $-(-7y+3)$

答えを見る

例題 14　3 という数と $2x-5y$ という式をかけるとどうなるのか考えなさい。

解答

3 という数と$2x-5y$ という式をかけるのですから、とりあえず、

$$3 \times (2x-5y)$$

という式を書けばよいですね。ところで、この式は分配法則を使える形をしています。念のため、ここで分配法則を確認しておきましょう。次を見てください。

$$\square \times (\triangle - \bigcirc) = \square \times \triangle - \square \times \bigcirc$$

どちらも　　でつながれた数をかけている

つまり、□ が、前から、かっこの中の △ と ◯ に分配される

このように、$\square \times (\triangle - \bigcirc)$ という形をした式は、$\square \times \triangle - \square \times \bigcirc$ という形に変えて計算できるのでした。ですから、$3 \times (2x-5y)$ という式は、$3 \times 2x - 3 \times 5y$ と形を変えることができるのです。また、さらに、$3 \times 2x$ の所を計算すると $6x$ になり、$3 \times 5y$ は $15y$ ですから結局、次のように計算を進めることが出来ます。自分でもきちんと計算をたどっ

てみてください。

$$\begin{aligned} 3\times(2x-5y) &= 3\times 2x - 3\times 5y \\ &= 3\times 2\times x - 3\times 5\times y \\ &= 6\times x - 15\times y \\ &= 6x - 15y \end{aligned}$$

以上で、$3\times(2x-5y)$ という式に分配法則を使うと $6x-15y$ という形の式に変えられるということがわかりました。

念のため、大切な注意をしておきます。この例題では、$3\times(2x-5y)$ という式を $6x-15y$ という形の式に変えました。しかし、何が何でもこのように変えなければいけないというわけではありません。つまり、$6x-15y$ という形のほうが、$3\times(2x-5y)$ という形より優れているわけではないのです。$3\times(2x-5y)$ という式と $6x-15y$ という式は、見かけは違っていますが、同じ式なのです。どちらがよいということはありません。目的に応じてあなたが使い分けるのです。例えば、もしこの先も、この式を使って何か問題を解き続ける必要があるような場合、どちらを使ったほうがうまくいくのかあなたが判断するのです。

問 25. -5 という数と $2x-4y$ という式をかけるとどうなるのか考えることにします。次の計算の空欄に正しい数や式を書きなさい。

$$\begin{aligned} -5\times(2x-4y) &= (-5)\times\boxed{} + (-5)\times\left(\boxed{}\right) \\ &= \boxed{} + \boxed{} \end{aligned}$$

答えを見る

問 26. 分配法則を使って、次の式を書きかえなさい。

(1) $7(8x+5y)$　　(2) $12(3x-7y)$

(3) $-6(3x-2y)$　　(4) $-12\left(\dfrac{1}{4}x+\dfrac{2}{3}y\right)$

(5) $(x+2y)\times 4$　　(6) $(-3a+b)\times 5$

(7) $(9a+6b)\times\dfrac{1}{3}$　　(8) $\left(-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{2}{3}y\right)\times(-18)$

答えを見る

例題 15　$15x+30y$ という式を 5 でわるとどうなるのか考えなさい。

解答

さっきの例題（つまり例題 14）では、かけ算の練習をしました。今度は、わり算の練習ですね。でも、かけ算が出来る人にとっては、わり算だってどうってことはないですよね。だって「ある数でわる」ということと、「ある数の逆数をかける」ということは同じなのでしたよね。ですからこの問題では、「$\div 5$」をする代わりに「$\times\dfrac{1}{5}$」をすればよいのです。次のように計算を進めることが出来ます。まず、逆数を使ってわり算をかけ算に直します。

$$(15x+30)\div 5=(15x+30y)\times\frac{1}{5}$$

となりますね。次に分配法則を使って、

$$(15x+30y)\times\frac{1}{5}=15x\times\frac{1}{5}+30y\times\frac{1}{5}$$

と出来ますね。これをさらに計算すると、

$$15x\times\frac{1}{5}+30y\times\frac{1}{5}=3x+6y$$

となりますね。これが答えですね。

問 27.　$9x-12y$ という式を -3 でわるとどうなるのか考えることにします。次の文の空欄に正しい数や式を書きなさい。

$$\begin{aligned}(9x-12y)\div(-3)&=(9x-12)\times\left(\boxed{}\right)\\&=\boxed{}\times\left(-\frac{1}{3}\right)-\boxed{}\times\left(-\frac{1}{3}\right)\\&=\boxed{}\end{aligned}$$

答えを見る

問 28. 分配法則を使って、次の式を書きかえなさい。

(1) $(4a+8b)\div 2$

(2) $(6x-21y)\div(-3)$

(3) $(-12a+8b)\div(-2)$

(4) $(-14a+56b)\div(-7)$

(5) $(x+2y)\div\left(-\dfrac{1}{4}\right)$

(6) $(-3a+b)\div\dfrac{1}{5}$

(7) $(6x-18y)\div\dfrac{3}{5}$

(8) $(-12a+20b)\div\left(-\dfrac{4}{3}\right)$

答えを見る

第2章

式の展開と因数分解

2.1　文字式の展開

　これから、「分配法則」を使う計算をさらに練習します。そのために、前の章で、分配法則の基本を詳しく復習したのです。分配法則を繰り返し使いこなすと、「文字式の展開」と呼ばれている計算ができるようになるのです。

2.1.1　分配法則を 1 回使う計算

例題 16　$2x - 5y$ という式と $3x$ という式をかけるとどうなるのか考えなさい。

解答

　$2x - 5y$ という式と $3x$ という式をかけるのですから、とりあえず、

$$(2x - 5y) \times 3x$$

という式を書けばよいですね。ところで、この式は分配法則を使える形をしています。ですから、

$$(2x - 5y) \times 3x = 2x \times 3x - 5y \times 3x$$

と書きかえることができます。また、さらに、$2x \times 3x$ の所を計算すると $6x^2$ になり、$5y \times 3x$ の所を計算すると $15xy$ になりますから結局、次のように計算を進めることが出

来ます。自分できちんとたどってみてください。

$$\begin{aligned}(2x-5y)\times 3x &= 2x\times 3x - 5y\times 3x \\ &= 6x^2-15xy\end{aligned}$$

念のため、大切な注意をしておきます。この例題では、$(2x-5y)\times 3x$ という式を $6x^2-15xy$ という形の式に変えました。しかし、何が何でもこのように変えなければいけないというわけではありません。つまり、$6x^2-15xy$ という形のほうが $(2x-5y)\times 3x$ という形より優れているわけではないのです。$(2x-5y)\times 3x$ という式と $6x^2-15xy$ という式は、見かけは違っていますが同じ式なのです。どちらがよいということはありません。目的に応じて、あなたが使い分けるのです。例えば、もしこの先もこの式を使って何か問題を解き続ける必要があるような場合、どちらを使ったほうがうまくいくのか、あなたが判断するのです。

問 29. $2x+4y$ という式と $-5y$ という式をかけるとどうなるのか考えることにします。次の計算の空欄に正しい数や式を書きなさい。

$$\begin{aligned}(2x+4y)\times(-5y) &= \boxed{}\times(-5y)+\boxed{}\times(-5y) \\ &= \boxed{} - \boxed{}\end{aligned}$$

答えを見る

例題 17　$-6x$ という式と $3x+2y$ という式をかけるとどうなるのか考えなさい。

解答

$-6x$ という式と $3x+2y$ という式をかけるのですから、とりあえず、

$$-6x\times(3x+2y)$$

という式を書けばよいですね。ところで、この式は分配法則を使える形をしています。ですから、

$$-6x\times(3x+2y) = (-6x)\times 3x + (-6x)\times 2y$$

と書きかえることができます。また、さらに、$2x \times 3x$ の所を計算すると $6x^2$ になり、$5y \times 3x$ の所を計算すると $15xy$ になりますから結局、次のように計算を進めることが出来ます。自分できちんとたどってみてください。

$$\begin{aligned} -6x \times (3x + 2y) &= (-6x) \times 3x + (-6x) \times 2y \\ &= -18x^2 - 12xy \end{aligned}$$

念のため、大切な注意をしておきます。この例題では、$-6x \times (3x + 2y)$ という式を $-18x^2 - 12xy$ という形の式に変えました。しかし、何が何でもこのように変えなければいけないというわけではありません。つまり、$-18x^2 - 12xy$ という形のほうが、$-6x \times (3x + 2y)$ という形より優れているわけではないのです。$-6x \times (3x + 2y)$ という式と $-18x^2 - 12xy$ という式は、見かけは違っていますが、同じ式なのです。どちらがよいということはありません。目的に応じて、あなたが使い分けるのです。もし、この先も、この式を使って何か問題を解き続ける必要があるような場合、どちらを使ったほうがうまくいくのか、あなたが判断するのです。

問 30. $-5y$ という式と $2x - 4y$ という式をかけるとどうなるのか考えることにします。次の計算の空欄に正しい数や式を書きなさい。

$$\begin{aligned} -5y \times (2x - 4y) &= (-5y) \times \boxed{} - (-5y) \times \boxed{} \\ &= \boxed{} + \boxed{} \end{aligned}$$

答えを見る

問 31. 分配法則を使って、次の式を書きかえなさい。

(1) $7x(8x + 5y)$　　(2) $12y(3x - 7y)$

(3) $-6x(3x - 2y)$　　(4) $-12y\left(\dfrac{1}{4}x + \dfrac{2}{3}y\right)$

(5) $(x + 2y) \times 4a$　　(6) $(-3a + b) \times 5y$

(7) $(9a + 6b) \times \dfrac{1}{3}b$　　(8) $\left(-\dfrac{1}{2}x - \dfrac{2}{3}y\right) \times (-18y)$

答えを見る

例題 18　$15xy+30y^2$ という式を $5y$ でわるとどうなるのか考えなさい。

解答

わり算の練習ですね。でも、かけ算が出来る人にとっては、わり算だってどうってことはないですよね。だって「ある数でわる」ということと、「ある数の逆数をかける」ということは同じなのでしたよね。ですから、この問題では「$\div 5y$」をする代わりに「$\times\dfrac{1}{5y}$」をすればよいのです。次のように計算を進めることが出来ます。まず、逆数を使ってわり算をかけ算に直します。

$$(15xy+30y^2)\div 5y=(15x+30y)\times\frac{1}{5y}$$

となりますね。次に分配法則を使って、

$$(15xy+30y^2)\times\frac{1}{5y}=15xy\times\frac{1}{5y}+30y^2\times\frac{1}{5y}$$

と出来ますね。これをさらに約分をしていくと、

$$\overset{3x}{\cancel{15xy}}\times\frac{1}{\underset{1}{\cancel{5y}}}+\overset{6y}{\cancel{30y^2}}\times\frac{1}{\underset{1}{\cancel{5y}}}=3x+6y$$

となりますね。これが答えですね。

問 32.　$9x^2-12x$ という式を $-3x$ でわるとどうなるのか考えることにします。次の文の空欄に正しい数や式を書きなさい。

$$\begin{aligned}(9x^2-12x)\div(-3x)&=(9x^2-12x)\times\left(\boxed{}\right)\\&=\boxed{}\times\left(-\frac{1}{3x}\right)-\boxed{}\times\left(-\frac{1}{3x}\right)\\&=\boxed{}\end{aligned}$$

答えを見る

例題 19　$2a^2+4ab$ という式を $\dfrac{2}{3}a$ でわるとどうなるのか考えなさい。

解答

わり算の練習ですね。でも、かけ算が出来る人にとっては、わり算だってどうってことはないですよね。だって「ある数でわる」ということと、「ある数の逆数をかける」ということは同じなのでしたよね。ところで、$\dfrac{2}{3}a$ の逆数ってなんでしょう。わかりますか。そもそも $\dfrac{2}{3}a$ って、$\dfrac{2a}{3}$ と同じですよね。(大丈夫ですよね。このことがわからなくなっている人は、今すぐ**??**ページを開いて、問**??** のあとに書いてある話を全て復習してください。)) ですから、$\dfrac{2}{3}a$ の逆数は $\dfrac{3}{2a}$ ですね。というわけで、この問題では「$\div\dfrac{2}{3}a$」をする代わりに「$\times\dfrac{3}{2a}$」をすればよいのです。次のように計算を進めることが出来ます。まず、逆数を使ってわり算をかけ算に直します。

$$(2a^2+4ab)\div\frac{2}{3}a=(2a^2+4ab)\times\frac{3}{2a}$$

となりますね。次に分配法則を使って、

$$(2a^2+4ab^2)\times\frac{3}{2a}=2a^2\times\frac{3}{2a}+4ab\times\frac{3}{2a}$$

と出来ますね。これをさらに約分していくと、

$$\overset{a}{\cancel{2a^2}}\times\frac{3}{\underset{1}{\cancel{2a}}}+\overset{2b}{\cancel{4ab}}\times\frac{3}{\underset{1}{\cancel{2a}}}=3a+6b$$

となりますね。これが答えですね。

問 33.　$9x^2-12x$ という式を $-\dfrac{3}{5}x$ でわるとどうなるのか考えることにします。次の文の空欄に正しい数や式を書きなさい。

$$\begin{aligned}(9x^2-12x)\div\left(-\frac{3}{5}x\right)&=(9x^2-12x)\times\left(\boxed{}\right)\\&=9x^2\times\left(\boxed{}\right)-12x\times\left(\boxed{}\right)\\&=\boxed{}\end{aligned}$$

答えを見る

問 34. 分配法則を使って、次の式を書きかえなさい。

(1) $(4ab+8b^2)\div 2b$　　(2) $(6x^2-21x)\div(-3x)$

(3) $(-12a^2+8ab)\div(-2a)$　　(4) $(-14ab+56b)\div(-7b)$

(5) $(x^2+2xy)\div\left(-\dfrac{1}{4}x\right)$　　(6) $(-3ab^2+b^2)\div\dfrac{1}{5}b$

(7) $(6xy^2-18x^2y)\div\left(\dfrac{3}{5}xy\right)$　　(8) $(-12a^2b+20ab)\div\left(-\dfrac{4}{3}a\right)$

答えを見る

2.1.2　分配法則を繰り返し使う計算

例 1　$(1+2)\times(3+4)$ という式について考えてみます。この式の値を計算してくださいといわれたら、あなたならどうしますか？もちろんいろいろな計算の仕方がありますよね。きっと一番楽なのは、2 つのかっこの中を先に計算してからかけ算をする方法ですね。つまり、

$$(1+2)\times(3+4)=3\times 7=21$$

と計算するわけです。

答えは出たわけですが、ここで、もう少し違う計算の仕方を考えてみることにしましょう。私たちは分配法則というものを知っています。そこで、分配法則を使って、この式を計算できないか考えてみましょう。それでは、もう一度この式をよく見てみましょう。$(1+2)\times(3+4)$ という式ですよね。この式って分配法則に出てくる式と形が合っていないですよね。だって、分配法則って、

「□、△、◯ がどんな数だとしても、(□ + △) × ◯ の計算結果と、□ × ◯ + △ × ◯ の計算結果は必ず同じになります。」

とか、

「□、△、◯ がどんな数だとしても、◯ × (□ + △) の計算結果と、◯ × □ + ◯ × △ の計算結果は必ず同じになります。」

という話ですよね。だから、$(\square + \triangle) \times \bigcirc$ という形をしていたり、$\bigcirc \times (\square + \triangle)$ という形をしている式だったら分配法則が使えるんですよね。でも、今考えている式は $(1+2) \times (3+4)$ という式なので、形、違いますよね。かっこが 2 つもあります。あー、でも、だったら、どっちかのかっこの中だけとりあえず計算してしまえばよいのではないでしょうか。そうすればかっこが 1 つだけの式になりますよね。というわけで、そうですねぇ、前にあるかっこの中を計算してみることにしますつまり、$(1+2)$ の所だけ計算してしまうのです。そうすると、

$$(1+2) \times (3+4) = 3 \times (3+4)$$

となりますね。めでたいことにこの式は、$\bigcirc \times (\square + \triangle)$ という形をしています。ですから、分配法則を使える形になったのです。それではこの式に分配法則を使ってみましょう。（いいですか。分配法則を使おうとしているのですから、残っているかっこの中は計算しないんですよ。）分配法則を使ってみると、

$$3 \times (3+4) = 3 \times 3 + 3 \times 4$$

となりますね。（実を言うと、この先の計算にはあまり興味がありません。どうせ前と同じで 21 になります。）

今、分配法則を使って $(1+2) \times (3+4)$ を計算する方法を考えました。ここでもう一度話をまとめてみます。まず、2 つあるかっこのうち、どちらか 1 つだけかっこの中を計算しました。例えば、前にあるかっこの中を計算してみると、

$$(1+2) \times (3+4) = 3 \times (3+4)$$

となりました。これで、分配法則を使える形になったので、分配法則を使いました。そうすると、

$$3 \times (3+4) = 3 \times 3 + 3 \times 4$$

となったのです。ここであなたによく理解しておいてほしいのは、2 つのかっこのうちの

どちらかだけを先に計算すると、分配法則を使える形の式になったということです。このような考え方は、これから先とても大切になります。

例 2　$(a+b)(c+d)$ という式について考えてみます。

この式は、前の例の式、つまり例 1 の式である $(1+2)\times(3+4)$ と同じ形をしています。そこで、$(1+2)\times(3+4)$ という式をどのように計算したのか簡単に振り返ってみます。たしか、2 通りの計算法を考えたのでした。

1 つの方法は、2 つのかっこの中を先に計算してしまう方法です。つまり、

$$(1+2)\times(3+4)=3\times 7$$

と計算を進める方法です。

もう 1 つの方法は、まずどちらか 1 つのかっこの中だけを先に計算し、次に分配法則を使う方法です。つまり、

$$(1+2)\times(3+4)=3\times(3+4)=3\times 3+3\times 4$$

と計算を進める方法です。

ところで、$(a+b)(c+d)$ という式は、$(1+2)\times(3+4)$ という式と形が同じなわけです。だとしたら、$(a+b)(c+d)$ という式は $(1+2)\times(3+4)$ という式と同じように計算を進めることができるのでしょうか。ちょっと考えると無理な気がしますよね。だって、a とか b とか c とか d とかいうのは文字なので、かっこの中を計算したくてもこれ以上計算できないですよね。でも人間にはすばらしい知恵があるのです。どういうことか少し詳しく説明しましょう。

文字は数の代わりに使っているのでしたね。つまり、a とか b とかいっても、とにかく、それぞれ、「何かしらの 1 つの数」なのですよね。そして、$a+b$ と書いてあったらこれは「a と b をたした数」なのですよね。ということは、$a+b$ だって、とにかく「何かしらの 1 つの数」ですよね。(もちろん「1 つの数」といってもいくつなのかはいえません。) だったら、$a+b$ という「1 つの数」に別の名前をつけて、1 つの文字で表してもよいです

よね。例えば、$a+b$ という「1 つの数」を M という文字で表すのです。（ですから、こういうふうに考えたとき、あなたは M と書いてあるのを見たら、「$a+b$ という数のことだな」と思わなくてはいけません。）

このように考えれば、$(a+b)(c+d)$ という式でも分配法則を使って計算を進めることができます。次のように進みます。

まず、$a+b$ という「1 つの数」を M という文字で表すことにします。すると、

$$(a+b)(c+d) = M \times (c+d)$$

となります。そうすると、めでたいことに、$M \times (c+d)$ という式は分配法則が使える形をしています。そこで分配法則を使ってみると、

$$M \times (c+d) = M \times c + M \times d$$

となりますね。ここまで計算が進んだら、M は $a+b$ という数のことであることを思い出しましょう。そして、M を $a+b$ に戻してみましょう。すると、

$$M \times c + M \times d = (a+b) \times c + (a+b) \times d$$

となります。ではこの式をよく見てください。右側の $(a+b) \times c + (a+b) \times d$ という式ですが、この中には分配法則が使える部品が 2 つありますね。そうです、$(a+b) \times c$ と $(a+b) \times d$ という部品です。この 2 つの部品に分配法則を使って計算を進めると、

$$(a+b) \times c + (a+b) \times d = a \times c + b \times c + a \times d + b \times d$$

となりますね。

それでは話をまとめてみましょう。$(a+b)(c+d)$ という式の計算でした。「$a+b$ はとにかく 1 つの数なので 1 つの文字、例えば M という文字で表してみる」ということと「分配法則を繰り返し使う」ということを計算の方針としたのでした。その結果次のように計算を進めることができました。（以下の計算式では、中学生流に $\times$ のマークは省略してあります。）

$a+b$ を M とおくと、

$$
\begin{aligned}
(a+b)(c+d) &= M(c+d) \\
&\qquad\qquad \text{分配法則を使う} \\
&= Mc+Md \\
&\qquad\qquad M\ \text{を}\ a+b\ \text{に戻す} \\
&= (a+b)c+(a+b)d \\
&\qquad\qquad \text{分配法則を使う} \\
&= ac+bc+ad+bd
\end{aligned}
$$

今学んだばかりの例 2 では、$(a+b)(c+d)$ という式の見かけを $ac+bc+ad+bd$ という形に変えました。初めはかっこで囲まれた 2 つの式 $a+b$ と $c+d$ がかけ算された形をしていましたが、最後には 4 つの部品 ac、bc、ad、bd がたされた形の式になり、かっこが何もない式となりました。このような計算のことを「展開」といいます。つまり、いくつかの式がかけ算された形をしている式を、いくつかの部品がたされた形にしてかっこをなくす計算のことを**展開**と呼びます。そして、展開をするときには分配法則を使うのです。

例題 20　$(x-3)(y+7)$ という式を展開しなさい。

解答

念のために確認しておきます。展開というのは、いくつかの式がかけ算された形をしている式を、いくつかの部品がたされた形にしてかっこをなくす計算のことですね。そして、展開をするときには分配法則を使うのですね。

それでは本題に入ることにしましょう。

この式には、かっこで囲まれた部品が 2 つあります。$x-3$ と $y+7$ のことです。どちらも「ある 1 つの数」をあらわしているのですから、どちらかを 1 つの文字で表すことにしましょう。そうですねぇ、どっちでもよいのですが、ここでは気分で $y+7$ を 1 つの文字 M であらわすことにしましょう。そうすると、

$$(x-3)(y+7)=(x-3)M$$

となりますね。これで分配法則が使える形になりました。そこで、分配法則を使ってみ

ると、

$$(x-3)M = xM - 3M$$

となりますね。ここで M は $y+7$ のことだったということを思い出して、M を $y+7$ に戻してみましょう。すると、

$$xM - 3M = x(y+7) - 3(y+7)$$

となります。分配法則が使える 2 つの部品が現れましたね。$x(y+7)$ と $-3(y+7$ のことですよ。そこで、この 2 つの部品に分配法則を使ってみましょう。すると、

$$x(y+7) - 3(y+7) = xy + 7y - 3y - 21$$

となりますね。これで、いくつかの部品がたされた形の式になり、かっこはなくなりました。ですからこれが展開した結果ですね。

ではもう一度計算の仕方をまとめておきます。次のようになるわけです。

$y+7$ を M とおくと、

$$\begin{aligned}
(x-3)(y+7) &= (x-3)M && \text{分配法則を使う} \\
&= xM - 3M && M \text{ を } y+7 \text{ に戻す} \\
&= x(y+7) - 3(y+7) && \text{分配法則を使う} \\
&= xy + 7x - 3y - 21
\end{aligned}$$

問 35. 次の式を展開しなさい。

(1) $(a-b)(c+d)$　　(2) $(a-b)(c-d)$

(3) $(x+3)(y-5)$　　(4) $(x-5)(y-2)$

答えを見る

例題 21　$(x-3)(x+7)$ という式を展開しなさい。

解答

念のためにまた確認しておきます。展開というのは、いくつかの式がかけ算された形を

している式を、いくつかの部品がたされた形にしてかっこをなくす計算のことですね。そして、展開をするときには分配法則を使うのですね。

それでは本題に入ることにしましょう。

この式には、かっこで囲まれた部品が 2 つあります。$x-3$ と $x+7$ のことです。どちらも「ある 1 つの数」をあらわしているのですから、どちらかを 1 つの文字で表すことにしましょう。そうですねぇ、どっちでもよいのですが、ここでは気分で $x+7$ を 1 つの文字 M であらわすことにしましょう。そうすると、

$$(x-3)(x+7)=(x-3)M$$

となりますね。これで分配法則が使える形になりました。そこで、分配法則を使ってみると、

$$(x-3)M=xM-3M$$

となりますね。ここで M は $x+7$ のことだったということを思い出して、M を $x+7$ に戻してみましょう。すると、

$$xM-3M=x(x+7)-3(x+7)$$

となります。分配法則が使える 2 つの部品が現れましたね。$x(x+7)$ と $-3(x+7)$ のことですよ。そこで、この 2 つの部品に分配法則を使ってみましょう。すると、

$$x(x+7)-3(x+7)=x^2+7x-3x-21$$

となりますね。これで、いくつかの部品がたされた形の式になり、かっこはなくなりました。ですから「これで終わり」と思った人もいるかもしれません。しかし、ここで計算を終わりにしてはいけないのです。今できたばかりの式をもう一度見てください。この式の中には「仲間の部品」がありますよね。そうです、$7x$ と $-3x$ です。この 2 つの部品って、1 つの部品にまとめることができますよね。つまり、$7x-3x$ って $4x$ と同じですよね。（このようなことができるのも、もちろん分配法則のおかげですよね。）とうわけで、

さらに、

$$x^2+7x-3x-21=x^2+4x-21$$

とできるわけですね。

　ではもう一度計算の仕方をまとめておきます。次のようになるわけです。

$x+7$ を M とおくと、

$$\begin{aligned}(x-3)(x+7)&=(x-3)M && \text{分配法則を使う}\\ &=xM-3M && M\text{ を }x+7\text{ に戻す}\\ &=x(x+7)-3(x+7) && \text{分配法則を使う}\\ &=x^2+7x-3x-21 && \text{仲間の部品をまとめる}\\ &=x^2+4x-21\end{aligned}$$

問 36. 次の式を展開しなさい。

(1) $(a-2)(a-3)$　　(2) $(x+5)(x+9)$

(3) $(2a+3)(a-5)$　　(4) $(3x-5)(4x-2)$　　答えを見る

例題 22　$(2x-3y)(3x+7y)$ という式を展開しなさい。

解答

　念のためにまた確認しておきます。展開というのは、「いくつかの式がかけ算された形をしている式を、いくつかの部品がたされた形にして、かっこをなくす計算」のことですね。そして、展開をするときには分配法則を使うのですね。

　それでは本題に入ることにしましょう。

　この式には、かっこで囲まれた部品が 2 つあります。$2x-3y$ と $3x+7y$ のことです。どちらも「ある 1 つの数」をあらわしているのですから、どちらかを 1 つの文字で表すことにしましょう。そうですねぇ、どっちでもよいのですが、ここでは気分で $2x-3y$ を 1

つの文字 M であらわすことにしましょう。そうすると、

$$(2x-3y)(3x+7y)=M(3x+7y)$$

となりますね。これで分配法則が使える形になりました。そこで、分配法則を使ってみると、

$$M(3x+7y)=M\times 3x+M\times 7y$$

となりますね。ここで M は $2x-3y$ のことだったということを思い出して、M を $2x-3y$ に戻してみましょう。すると、

$$M\times 3x+M\times 7y=(2x-3y)\times 3x+(2x-3y)\times 7y$$

となります。分配法則が使える 2 つの部品が現れましたね。$(2x-3y)\times 3x$ と $(2x-3y)\times 7y$ のことですよ。そこで、この 2 つの部品に分配法則を使ってみましょう。すると、

$$(2x-3y)\times 3x+(2x-3y)\times 7y=6x^2-9xy+14xy-21y^2$$

となりますね。これで、いくつかの部品がたされた形の式になり、かっこはなくなりました。ですから「これで終わり」と思った人もいるかもしれません。しかし、ここで計算を終わりにしてはいけないのです。今できたばかりの式をもう一度見てください。この式の中には「仲間の部品」がありますよね。そうです、$-9xy$ と $14xy$ です。この 2 つの部品って、1 つの部品にまとめることができますよね。つまり、$-9xy+14xy$ って $5xy$ と同じですよね。（このようなことができるのも、もちろん分配法則のおかげですよね。）というわけで、さらに、

$$6x^2-9xy+14xy-21y^2=6x^2+5xy-21y^2$$

とできるわけですね。

ではもう一度計算の仕方をまとめておきます。次のようになるわけです。

$2x-3y$ を M とおくと、

$$
\begin{aligned}
(2x-3y)(3x+7y) &= M(3x+7y) && \text{分配法則を使う} \\
&= M \times 3x + M \times 7y && M \text{ を } 2x-3y \text{ に戻す} \\
&= (2x-3y)\times 3x + (2x-3y)\times 7y && \text{分配法則を使う} \\
&= 6x^2 - 9xy + 14xy - 21y^2 && \text{仲間の部品をまとめる} \\
&= 6x^2 + 5xy - 21y^2
\end{aligned}
$$

問 37. 次の式を展開しなさい。

(1) $(5a+4b)(3a-8b)$　　(2) $(3x-y)(8x-3y)$　　答えを見る

例題 23　$(2x-3y)(3x+7y-2)$ という式を展開しなさい。

解答

念のためにまた確認しておきます。展開というのは、「いくつかの式がかけ算された形をしている式を、いくつかの部品がたされた形にしてかっこをなくす計算」のことですね。そして、展開をするときには分配法則を使うのですね。

それでは本題に入ることにしましょう。

この式には、かっこで囲まれた部品が 2 つあります。$2x-3y$ と $3x+7y-2$ のことです。どちらも「ある 1 つの数」をあらわしているのですから、どちらかを 1 つの文字で表すことにしましょう。そうですねぇ、どっちでもよいのですが、ここでは気分で $3x+7y-2$ を 1 つの文字 M であらわすことにしましょう。そうすると、

$$(2x-3y)(3x+7y-2) = (2x-3y)M$$

となりますね。これで分配法則が使える形になりました。そこで、分配法則を使ってみると、

$$(2x-3y)M = 2x \times M - 3y \times M$$

となりますね。ここで M は $3x+7y-2$ のことだったということを思い出して、M を

$3x+7y-2$ に戻してみましょう。すると、

$$2x \times M - 3y \times M = 2x \times (3x+7y-2) - 3y \times (3x+7y-2)$$

となります。分配法則が使える 2 つの部品が現れましたね。$2x \times (3x+7y-2)$ と $-3y \times (3x+7y-2)$ のことですよ。そこで、この 2 つの部品に分配法則を使ってみましょう。すると、

$$2x \times (3x+7y-2) - 3y \times (3x+7y-2) = 6x^2 + 14xy - 4x - 9xy - 21y^2 + 6y$$

となりますね。これで、いくつかの部品がたされた形の式になり、かっこはなくなりました。ですから「これで終わり」と思った人もいるかもしれません。しかし、ここで計算を終わりにしてはいけないのです。今できたばかりの式をもう一度見てください。この式の中には「仲間の部品」がありますよね。そうです、$14xy$ と $-9xy$ です。この 2 つの部品って、1 つの部品にまとめることができますよね。つまり、$14xy - 9xy$ って $5xy$ と同じですよね。（このようなことができるのも、もちろん分配法則のおかげですよね。）というわけで、さらに、

$$6x^2 + 14xy - 4x - 9xy - 21y^2 + 6y = 6x^2 + 5xy - 4x - 21y^2 + 6y$$

とできるわけですね。

　ではもう一度計算の仕方をまとめておきます。次のようになるわけです。

$3x+7y-2$ を M とおくと、

$$\begin{aligned}
(2x-3y)(3x+7y-2) &= (2x-3y)M \\
&\quad \text{分配法則を使う} \\
&= 2x \times M - 3y \times M \\
&\quad \text{M を $3x+7y-2$ に戻す} \\
&= 2x \times (3x+7y+2) - 3y \times (3x+7y+2) \\
&\quad \text{分配法則を使う} \\
&= 6x^2 + 14xy + 4x - 9xy - 21y^2 + 6y \\
&\quad \text{仲間の部品をまとめる} \\
&= 6x^2 + 5xy + 4x - 21y^2 + 6y
\end{aligned}$$

問 38. 次の式を展開しなさい。

(1) $(3a+4)(2a-5b+3)$　　(2) $(3x-2y-1)(4x-3y)$　答えを見る

2.2　展開の公式を作っておくと役に立つこともある

数学では、「公式」と呼ばれるものを作ることがあります。「こういうことををすると結果は必ずこうなる」ということが一度発見されると、あとは、「その結果を覚えて当てはめるだけ」で答えが出るようになるわけです。あなたも知っていると思いますが、例えば、「円の面積の公式」と呼ばれるものがあります。円の面積 $=$ 円周率 $\times$ 半径 $\times$ 半径 という式です。円は「ふちが曲がった形」をしているので、大昔の人は、面積はどうやって計算したらよいのかわかりませんでした。しかし昔の人は、いろいろ知恵を絞って円を長方形に変える方法を発明し、円の面積の計算の仕方を発見したのです。そして、円の面積は「円周率」と呼ばれる数に「その円の半径」を 2 回かければ求められるということを発見したのです。ですから、私たちは「円の面積ってどうやって求めるんだろう」ということを 1 から悩まないでも、円の面積 $=$ 円周率 $\times$ 半径 $\times$ 半径 という公式に「半径の値」を当てはめて計算するだけで、円の面積を求めることができるようになったのです。

これから私たちは、まず、「展開の公式」とよばれるものを作ろうと思います。つまり、「こういう形の式を展開すると結果は必ずこうなる」というようなことを発見しようと思います。（さっきの、円の公式の話の昔の人のように知恵を絞って悩むわけです。）「展開の公式」を作ることができたら、次は「当てはめて答えを求める練習」をします。

2.2.1　$(\bigstar+\square)(\blacklozenge+\triangle)$ という形の式を展開すると結果はどうなる？

一応初めに言っておきます。48 ページから始まる「2.1.2 分配法則を繰り返す計算」を全てきちんと学んだ人は、これから説明していくことを知らなくても、もうすでにどんな式でも展開をすることができます。しかしこの先のことを考えると、これから説明していくこともきちんと理解しておくことを強くお勧めします。

$(\bigstar+\square)(\blacklozenge+\triangle)$ という形の式を展開していくことにします。

この式にはかっこで囲まれた 2 つの式がありますが、どちららか好きなほうを 1 つの文字であらわすことにします。ここでは $\blacklozenge+\triangle$ の方を M とあらわすことにしましょう。つまり、

$$(\bigstar+\square)(\blacklozenge+\triangle)=(\bigstar+\square)\times M$$

とします。そうすると分配法則を使うことができるわけです。つまり、

$$(\bigstar+\square)\times M=\bigstar\times M+\square\times M$$

とできるわけです。

ここで M を $\blacklozenge+\triangle$ に戻してみます。すると、

$$\bigstar\times M+\square\times M=\bigstar\times(\blacklozenge+\triangle)+\square\times(\blacklozenge+\triangle)$$

となります。分配法則を使える形の部品が 2 つ現れました。そこで、この 2 つの部品に分配法則を使って見ます。すると、

$$\bigstar\times(\blacklozenge+\triangle)+\square\times(\blacklozenge+\triangle)=\bigstar\times\blacklozenge+\bigstar\times\triangle+\square\times\blacklozenge+\square\times\triangle$$

となりますね。これで展開は終わりですね。この展開の計算をもう一度まとめておきます。ただし、今度は、$\times$ のマークは省略して中学生流に書いておきます。次を見てください。

$\blacklozenge+\triangle$ を M とおくと、

$$\begin{aligned}(\bigstar+\square)(\blacklozenge+\triangle)&=(\bigstar+\square)M && \text{分配法則を使う}\\&=\bigstar M+\square M && M\text{ を }\blacklozenge+\triangle\text{ に戻す}\\&=\bigstar(\blacklozenge+\triangle)+\square(\blacklozenge+\triangle) && \text{分配法則を使う}\\&=\bigstar\blacklozenge+\bigstar\triangle+\square\blacklozenge+\square\triangle\end{aligned}$$

それではここで、途中の計算は省いて、初めと終わりだけを書いた式を作ってみます。すると、

$$(\bigstar+\square)(\blacklozenge+\triangle)=\bigstar\blacklozenge+\bigstar\triangle+\square\blacklozenge+\square\triangle$$

となっていますよね。この式の左辺と右辺をよく観察してください。すると次のようになっていることがわかりませんか？

$$(\bigstar+\square)(\blacklozenge+\triangle)=\overset{\text{①}}{\bigstar\blacklozenge}+\overset{\text{②}}{\bigstar\triangle}+\underset{\text{③}}{\square\blacklozenge}+\underset{\text{④}}{\square\triangle}$$

つまり、① で結ばれる 2 つのものをかけ、② で結ばれる 2 つのものをかけ、③ で結ばれる 2 つのものをかけ、④ で結ばれる 2 つのものをかけ、そのようにしてできた 4 つの部品をたせばよいのです。

これで公式をつくることができましたね。まとめておくことにしましょう。

重要な事実：$(\bigstar+\square)(\blacklozenge+\triangle)$ という形の式を展開すると結果はどうなる？

$(\bigstar+\square)(\blacklozenge+\triangle)$ という形の式を展開していくと最後は $\bigstar\blacklozenge+\bigstar\triangle+\square\blacklozenge+\square\triangle$ という式になります。

つまり、

$$(\bigstar+\square)(\blacklozenge+\triangle)=\overset{\text{①}}{\bigstar\blacklozenge}+\overset{\text{②}}{\bigstar\triangle}+\underset{\text{③}}{\square\blacklozenge}+\underset{\text{④}}{\square\triangle}$$

のように、① で結ばれる 2 つのものをかけ、② で結ばれる 2 つのものをかけ、③ で結ばれる 2 つのものをかけ、④ で結ばれる 2 つのものをかけ、そのようにしてできた 4 つの部品をたせばよいのです。

それでは今できたばかりの公式を使う練習をしましょう。

例題 24　次の式を展開しなさい。

(1)　$(x-5)(y+3)$　　　　(2)　$(2x+8)(3y+2)$

解答

(1) 右を見てください。あなたのために公式を書いておきました。これを見ながら考えていきましょう。

$$(\bigstar + \square)(\blacklozenge + \triangle) = \overset{\text{①}}{\bigstar\blacklozenge} + \overset{\text{②}}{\bigstar\triangle} + \underset{\text{③}}{\square\blacklozenge} + \underset{\text{④}}{\square\triangle}$$

どれとどれがかけられていくのかわかりやすくするために、① のような印を問題の式につけてみます。すると右のようになりますね。では、番号の順に部品を作っていくことにしましょう。

$$(x-5)(y+3)$$

まず、① の部品を作ると、

$$(x-5)(y+3) = xy\cdots\cdots$$

と計算は進みます。（まだ作っていない部品があるので $\cdots\cdots$ がついています。）

次に、② の部品を作ると、

$$(x-5)(y+3) = xy + 3x\cdots\cdots$$

と計算は進みます。（まだ作っていない部品があるので $\cdots\cdots$ がついています。）

次に、③ の部品を作ると、

$$(x-5)(y+3) = xy + 3x - 5y\cdots\cdots$$

と計算は進みます。（まだ作っていない部品があるので $\cdots\cdots$ がついています。）

最後に、④ の部品を作ると、

$$(x-5)(y+3) = xy + 3x - 5y - 15$$

と計算は進みます。（もう作っていない部品はないので $\cdots\cdots$ はつきません。）

今出来上がった式には仲間の部品はありません。ですからこれで完成ですね。

(2) 右を見てください。あなたのために公式を書いておきました。これを見ながら考えていきましょう。

$$(\bigstar + \square)(\blacklozenge + \triangle) = \overset{\textcircled{1}}{\bigstar\blacklozenge} + \overset{\textcircled{2}}{\bigstar\triangle} + \underset{\textcircled{3}}{\square\blacklozenge} + \underset{\textcircled{4}}{\square\triangle}$$

どれとどれがかけられていくのかわかりやすくするために、① のような印を問題の式につけてみます。すると右のようになりますね。では、番号の順に部品を作っていくことにしましょう。

$$(2x+8)(3y+2)$$

まず、① の部品を作ると、

$$(2x+8)(3y+2) = 6xy\cdots\cdots$$

と計算は進みます。（まだ作っていない部品があるので $\cdots\cdots$ がついています。）

次に、② の部品を作ると、

$$(2x+8)(3y+2) = 6xy + 4x\cdots\cdots$$

と計算は進みます。（まだ作っていない部品があるので $\cdots\cdots$ がついています。）

次に、③ の部品を作ると、

$$(2x+8)(3y+2) = 6xy+4x+24y\cdots\cdots$$

と計算は進みます。（まだ作っていない部品があるので $\cdots\cdots$ がついています。）

最後に、④ の部品を作ると、

$$(2x+8)(3y+2) = 6xy+4x+24y+16$$

と計算は進みます。（もう作っていない部品はないので $\cdots\cdots$ はつきません。）

今出来上がった式には仲間の部品はありません。ですからこれで完成ですね。

問 39. 次の式を、右をような計算方法で展開しなさい。

$$(\bigstar+\square)(\blacklozenge+\triangle) = \overset{①}{\bigstar\blacklozenge}+\overset{②}{\bigstar\triangle}+\underset{③}{\square\blacklozenge}+\underset{④}{\square\triangle}$$

(1) $(y-5)(x-9)$　　(2) $(2y-7)(5x-9)$

(3) $(3a-4)(4b-1)$　　(4) $(2a+7b)(5c-9d)$

答えを見る

例題 25　次の式を展開しなさい。

(1)　$(x-5)(x+3)$　　(2)　$(2x+8)(3x+2)$

解答

(1) 右を見てください。あなたのために公式を書いておきました。これを見ながら考えていきましょう。

$$(\bigstar+\square)(\blacklozenge+\triangle) = \overset{①}{\bigstar\blacklozenge}+\overset{②}{\bigstar\triangle}+\underset{③}{\square\blacklozenge}+\underset{④}{\square\triangle}$$

どれとどれがかけられていくのかわかりやすくするために、① のような印を問題の式につけてみます。すると右のよう

$$(x-5)(x+3)$$

になりますね。では、番号の順に部品を作っていくことにしましょう。

まず、①の部品を作ると、

$$(x-5)(x+3) = x^2 \cdots\cdots$$

と計算は進みます。（まだ作っていない部品があるので $\cdots\cdots$ がついています）

次に、②の部品を作ると、

$$(x-5)(x+3) = x^2 + 3x \cdots\cdots$$

と計算は進みます。（まだ作っていない部品があるので $\cdots\cdots$ がついています。）

次に、③の部品を作ると、

$$(x-5)(x+3) = x^2 + 3x - 5x \cdots\cdots$$

と計算は進みます。（まだ作っていない部品があるので $\cdots\cdots$ がついています。）

最後に、④の部品を作ると、

$$(x-5)(x+3) = x^2 + 3x - 5x - 15$$

と計算は進みます。（もう作っていない部品はないので $\cdots\cdots$ はつきません。）

今出来上がった式をよく見てください。この式には仲間の部品がありますよね。$+3x$ と $-5x$ はまとめることができますよね。ですからまだ終わりではありません。次のようにできますね。

$$(x-5)(x+3)=x^2+3x-5x-15=x^2-2x-15$$

(2) 右を見てください。あなたのために公式を書いておきました。これを見ながら考えていきましょう。

$$(\bigstar+\square)(\blacklozenge+\triangle)=\overset{\textcircled{1}}{\bigstar\blacklozenge}+\overset{\textcircled{2}}{\bigstar\triangle}+\underset{\textcircled{3}}{\square\blacklozenge}+\underset{\textcircled{4}}{\square\triangle}$$

どれとどれがかけられていくのかわかりやすくするために、①のような印を問題の式につけてみます。すると右のようになりますね。では、番号の順に部品を作っていくことにしましょう。

$$(2x+8)(3x+2)$$

まず、①の部品を作ると、

$$(2x+8)(3x+2)=6x^2\cdots\cdots$$

と計算は進みます。（まだ作っていない部品があるので $\cdots\cdots$ がついています。）

次に、②の部品を作ると、

$$(2x+8)(3x+2)=6x^2+4x\cdots\cdots$$

と計算は進みます。（まだ作っていない部品があるので $\cdots\cdots$ がついています。）

次に、③の部品を作ると、

$$(2x+8)(3x+2)=6x^2+4x+24x\cdots\cdots$$

と計算は進みます。（まだ作っていない部品があるので $\cdots\cdots$ がついています。）

最後に、④ の部品を作ると、

$$(2x+8)(3x+2) = 6x^2 + 4x + 24x + 16$$

と計算は進みます。（もう作っていない部品はないので ⋯⋯ はつきません。）

今出来上がった式をよく見てください。この式には仲間の部品がありますよね。$+4x$ と $+24x$ はまとめることができますよね。ですからまだ終わりではありません。次のようにできますね。

$$(2x+8)(3x+2) = 6x^2 + 4x + 24x + 16 = 6x^2 + 28x + 16$$

問 40. 次の式を、右のような計算方法で展開しなさい。

$$(\bigstar + \square)(\blacklozenge + \triangle) = \overset{\text{①}}{\bigstar\blacklozenge} + \overset{\text{②}}{\bigstar\triangle} + \underset{\text{③}}{\square\blacklozenge} + \underset{\text{④}}{\square\triangle}$$

(1) $(y-5)(y+9)$　　(2) $(2x-7)(5x-9)$

(3) $(3a+4)(4a+1)$　　(4) $(2a+7b)(5a-9b)$

答えを見る

2.2.2　$(x+\square)(x+\triangle)$ という形の式を展開すると結果はどうなる？

一応初めに言っておきます。48 ページから始まる「2.1.2 分配法則を繰り返す計算」と、59 ページから始まる「2.2.1($\bigstar + \square$)($\blacklozenge + \triangle$) という形の式を展開すると結果はどうなる？」を全てきちんと学んだ人は、これから説明していくことを知らなくても、もうすでにどんな式でも展開をすることができます。しかしこの先のことを考えると、これから説明していくこともきちんと理解しておくことを強くお勧めします。

例 3　$(x+2)(y+5)$ という式と $(x+2)(x+5)$ という式の展開について研究します。

この 2 つの式は結構似ていますよね。違っているのは 1 ヶ所だけですよね。$(x+2)(y+5)$ という式ではかっこで囲まれた 2 つの式のうち片方は $x+\cdots$ となっていますがもう片方は $y+\cdots$ となっています。しかし、$(x+2)(x+5)$ という式では、かっこで囲まれた 2 つの式はどちらも $x+\cdots$ となっています。このような違いがあると、展開した結果にどのような影響が出るのかこれから研究していきます。

どちらの式も、前に学んだ方法、つまり右のような計算方法で展開してみることにます。

$$(\bigstar+\square)(\blacklozenge+\triangle)=\overset{\text{①}}{\bigstar\blacklozenge}+\overset{\text{②}}{\bigstar\triangle}+\underset{\text{③}}{\square\blacklozenge}+\underset{\text{④}}{\square\triangle}$$

- $(x+2)(y+5)$ という式を展開してみると・・・

  どれとどれがかけられていくのかわかりやすくするために、①のような印を問題の式につけてみます。すると右のようになりますね。では、番号の順に部品を作っていくことにしましょう。

  $$(x+2)(y+5)$$

  まず、①の部品を作ると、

  $$(x+2)(y+5)=xy\cdots\cdots$$

  と計算は進みます。（まだ作っていない部品があるので $\cdots\cdots$ がついています。）

  次に、②の部品を作ると、

  $$(x+2)(y+5)=xy+5x\cdots\cdots$$

  と計算は進みます。（まだ作っていない部品があるので $\cdots\cdots$ がついています。）

  次に、③の部品を作ると、

  $$(x+2)(y+5)=xy+5x+2y\cdots\cdots$$

  と計算は進みます。（まだ作っていない部品があるので $\cdots\cdots$ がついています。）

最後に、④ の部品を作ると、

$$(x+2)(y+5) = xy + 5x + 2y + 10$$

と計算は進みます。（もう作っていない部品はないので $\cdots\cdots$ はつきません。）

今出来上がった式をよく見てください。今出来上がった式には仲間の部品はありません。ですからこれで完成ですね。

- $(x+2)(x+5)$ という式を展開してみると・・・

どれとどれがかけられていくのかわかりやすくするために、① のような印を問題の式につけてみます。すると右のようになりますね。では、番号の順に部品を作っていくことにしましょう。

$$(x+2)(x+5)$$

まず、① の部品を作ると、

$$(x+2)(x+5) = x^2 \cdots\cdots$$

と計算は進みます。（まだ作っていない部品があるので $\cdots\cdots$ がついています。）

次に、② の部品を作ると、

$$(x+2)(x+5) = x^2 + 5x \cdots\cdots$$

と計算は進みます。（まだ作っていない部品があるので $\cdots\cdots$ がついています。）

次に、③ の部品を作ると、

$$(x+2)(x+5) = x^2 + 5x + 2x \cdots\cdots$$

と計算は進みます。（まだ作っていない部品があるので $\cdots\cdots$ がついています。）

最後に、④ の部品を作ると、

$$(x+2)(x+5) = x^2 + 5x + 2x + 10$$

と計算は進みます。（もう作っていない部品はないので $\cdots\cdots$ はつきません。）

今出来上がった式をよく見てください。この式には仲間の部品がありますよね。$+5x$ と $+2x$ はまとめることができますよね。ですからまだ終わりではありません。次のようにできますね。

$$(x+2)(x+5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$$

さて、ここまで $(x+2)(y+5)$ という式と $(x+2)(x+5)$ というを展開してみました。2 つの式はよく似ているのですが、展開した結果にはどのような違いが出たでしょうか。計算をしっかり見比べた人は、$(x+2)(y+5)$ という式の展開では仲間の部品は出てこなかったけれどもと $(x+2)(x+5)$ という式の展開では仲間の部品が出てきたということに気がついていると思います。つまり、ここであなたにしっかり理解してほしいのは次のようなことです。

- $(x+\square)(x+\triangle)$ という形の式を展開すると、仲間の部品が必ず出てくる。
- $(x+\square)(x+\triangle)$ という形の式を展開すると、

$$x^2 + \text{ナントカ}\ x + \text{ほにゃらら}$$

　　という形の式になる。

問 41. 例 3 の説明がしっかり理解できた人のための問題です。

$(a+4)(b-6)$ という式と $(a+4)(a-6)$ という式の展開について考えることにします。以下の問に答えなさい。

(1) 右のような計算方法で展開していくと、仲間の部品（専門用語で言うと同類項）が出てくるのはどちらの式ですか。

$$(\bigstar+\square)(\blacklozenge+\triangle)=\overset{①}{\bigstar\blacklozenge}+\overset{②}{\bigstar\triangle}+\underset{③}{\square\blacklozenge}+\underset{④}{\square\triangle}$$

(2) それぞれの式を展開しなさい。

答えを見る

例 4　$(x+7)(x+5)$ という式の展開について詳しく分析することにします。

例 3 がしっかり理解できた人は、

- $(x+7)(x+5)$ という形の式を展開すると、仲間の部品が必ず出てくる。
- $(x+7)(x+5)$ という形の式を展開すると、

$$x^2+\text{ナントカ}\,x+\text{ほにゃらら}$$

という形の式になる。

ということがわかるはずです。そこで、

- どれとどれが仲間の部品になるのか。
- 「ナントカ」と「ほにゃらら」がいくつになるのか簡単にわからないのか。

ということについて悩んでみようと思います。

$$(x+7)(x+5)$$

右のようにして展開していくとき、仲間になる部品が出るのは ①、②、③、④ のうち、どれとどれなのでしょう。

これまでしっかり展開の学習をしてきた人はすぐにわかると思います。② と ③ ですよね。つまり、② のかけ算で作られる $+5x$ と ③ のかけ算で作られる $+7x$ が仲間の部品となり、最終的に $+12x$ が出来ていくわけです。

この考えが理解できた人は、「ナントカ」を知りたければ、「$+7$ と $+5$ をたせばよい」ということがわかると思います。つまり、一般的にいうと、

$(x+\square)(x+\triangle)$ という式を展開していくと、仲間の部品が出てきて必ず最後には

$$x^2 + \text{ナントカ}\ x + \text{ほにゃらら}$$

という形の式になるのですが、「ナントカ」という数は「+□ と +△ をたした数」になっている。

ということです。

$(x+7)(x+5)$

次に、「ほにゃらら」について悩んでみます。右のようにして展開していくとき、「ほにゃらら」ができるのは ①、②、③、④ のうち、どれなのでしょう。これまでしっかり展開の学習をしてきた人はすぐにわかると思います。④ ですよね。というわけで、「ほにゃらら」を知りたければ、「+7 と +5 をかければよい」ということがわかると思います。つまり、一般的にいうと、

$(x+\square)(x+\triangle)$ という式を展開していくと、必ず最後には

$$x^2 + \text{ナントカ}\ x + \text{ほにゃらら}$$

という形の式になるのですが、「ほにゃらら」という数は「+□ と +△ をかけた数」になっている。

ということです。

ここまで考えてきたことが理解できた人は、$(x+7)(x+5)$ という式の展開をするとき、次のようにすればよいということがわかると思います。

まず、「x と x がかけられるので x^2 ができるよな」と考え、

$$(x+7)(x+5) = x^2$$

と書きます。

次は「$+7x$ と $+5x$ という部品ができるけど仲間だからまとめて $+12x$ にすればいいよね」と考え、

$$(x+7)(x+5) = x^2 + 12x$$

と続けます。

そして最後に、「$+7$ と $+5$ がかけられるので $+35$ ができるよな」と考えて、

$$(x+7)(x+5)=x^2+12x+35$$

と続けるわけです。これで完成ですね。

問 42. $(x+7)(x-5)$ という式の展開について詳しく分析することにします。

(1) $(x+4)(x-2)$ という式を展開していくと、必ず最後には、

$$x^2 + \text{ナントカ}\ x + \text{ほにゃらら}$$

という形の式になるのはわかりますよね。では、「ほにゃらら」と「ナントカ」はそれぞれいくつですか。式をじっと見て答えなさい。

(2) $(x+7)(x-5)$ という式を展開しなさい。 答えを見る

問 43. $(x-7)(x+5)$ という式の展開について詳しく分析することにします。

(1) $(x-7)(x+5)$ という式を展開していくと、必ず最後には、

$$x^2 + \text{ナントカ}\ x + \text{ほにゃらら}$$

という形の式になるのはわかりますよね。では、「ほにゃらら」と「ナントカ」はそれぞれいくつですか。式をじっと見て答えなさい。

(2) $(x-7)(x+5)$ という式を展開しなさい。 答えを見る

問 44. $(x-7)(x-5)$ という式の展開について詳しく分析することにします。

(1) $(x-7)(x-5)$ という式を展開していくと、必ず最後には、

$$x^2 + \text{ナントカ}\ x + \text{ほにゃらら}$$

という形の式になるのはわかりますよね。では、「ほにゃらら」と「ナントカ」はそれぞれいくつですか。式をじっと見て答えなさい。

(2) $(x-7)(x-5)$ という式を展開しなさい。 答えを見る

それでは念のため、ここまで学んだことをまとめておきましょう。私たちは、次のようなことを発見したのです。

重要な事実：$(x+\square)(x+\triangle)$ という形の式を展開すると結果はどうなる？

$(x+\square)(x+\triangle)$ という形の式を展開していくと、必ず最後には、

$$x^2 + \text{ナントカ}\ x + \text{ほにゃらら}$$

という形の式になります。

このとき、「ナントカ」という数は「$+\square$ と $+\triangle$ をたした数」になっていて、「ほにゃらら」という数は「$+\square$ と $+\triangle$ をかけた数」になっているのです。

問 45. 次の式を展開しなさい。

(1) $(x+9)(x+4)$　　(2) $(x-6)(x+5)$

(3) $(a+2)(a-5)$　　(4) $(a-3)(a-4)$

答えを見る

例題 26　以下の問に答えなさい。

(1)　$(x+5)(x-8)$ を展開しなさい。

(2)　$(x+5y)(x-8y)$ を展開しなさい。

(3)　(1) と (2) の答えをよく見て比べてなさい。そして気がついたことをわかりやすく説明しなさい。

解答

(1)　あなたにわかってもらいたいことがあるので、ここではあえて、初心に帰って右のようにして展開していくことにします。念のために注意をしておくと、仲間になる部品が出るのは ② のかけ算でできる $-8x$ と ③ のかけ算でできる $+5x$ とですよね。この 2 つの部品が合わさって

$$(x+5)(x-8)$$

$-3x$ になるわけです。というわけで、

$$(x+5)(x+8) = x^2 - 3x - 24$$

となりますね。

(2) あなたにわかってもらいたいことがあるので、ここではあえて、初心に帰って右のようにして展開していくことにします。念のために注意をしておくと、仲間になる部品が出るのは

$$(x+5y)(x-8y)$$

② のかけ算でできる $-8xy$ と ③ のかけ算でできる $+5xy$ とですよね。この 2 つの部品が合わさって $-3xy$ になるわけです。というわけで、

$$(x+5y)(x+8y) = x^2 - 3xy - 24y^2$$

となりますね。

(3) (1) と (2) の答えを比べてみます。

$(x+5)(x+8)$ と $(x+5y)(x+8y)$ という 2 つの式はよく似ています。違いは、それぞれかっこで囲まれている 2 つの式で「後ろの部品」で、y がついているかついていないかの違いがあるということです。「後ろの部品」が数だけのときと、文字がついている式では、展開した結果にどんな違いが出ているのか詳しく観察してみましょう。

まず、「後ろの部品」が数だけのときは、

$$(x+5)(x+8) = x^2 - 3x - 24$$

となりますね。

また、「後ろの部品」に文字 y がついているときは、

$$(x+5y)(x+8y) = x^2 - 3xy - 24y^2$$

でしたね。

展開した結果はよく似ています。違いは、「真ん中にできた部品に y がつくかつかないか」ということと、「最後の部品に y^2 がつくかつかないか」ということですね。

(1) と (2) の解答をしっかり読んだ人はもうわかっていると思いますが、念のため、どうしてこういう違いが出るのか分析してみることにします。

右を見てください。

$$(x+5)(x-8)$$

$$(x+5y)(x-8y)$$

$(x+5)(x-8)$ の展開と $(x+5y)(x-8y)$ の展開のどちらにしても、展開した結果、「真ん中の部品」となっていくのは②のかけ算をしてできる部品と③のかけ算をしてできる部品ですね。②のかけ算と③のかけ算は、上の図をみると、「x」と「数」をかけていますが、下の図を見ると、「x」と「数 $\times\ y$」をかけています。ですから、下の図の計算では、上の計算に比べ文字 y が 1 つ余分につくわけです。

また、展開した結果、「最後の部品」となっていくのは④のかけ算をしてできる部品ですね。上の図をみると、④のかけ算は、上の図をみると、「数」と「数」をかけていますが、下の図を見ると、「数 $\times\ y$」と「数 $\times\ y$」をかけています。ですから、下の図の計算では、上の計算に比べ文字 y が 2 つ余分につくわけです。

問 46. 以下の問に答えなさい。

(1) $(x-2)(x-9)$ を展開しなさい。

(2) $(x-2y)(x-9y)$ を展開しなさい。

(3) (1) と (2) の答えをよく見て比べてなさい。そして気がついたことをわかりやすく説明しなさい。

答えを見る

問 47. 以下の問に答えなさい。

(1) $(a+6)(a+9)$ を展開しなさい。

(2) $(a+6b)(a+9b)$ を展開しなさい。

(3) (1) と (2) の答えをよく見て比べてなさい。そして気がついたことをわかりやすく説明しなさい。

答えを見る

2.2.3　$(x+\square)^2$ という形の式を展開すると結果はどうなる？

一応初めに言っておきます。48 ページから始まる「2.1.2 分配法則を繰り返す計算」と、59 ページから始まる「2.2.1($\bigstar+\square$)($\blacklozenge+\triangle$) という形の式を展開すると結果はどうなる？」と 67 ページから始まる「2.2.2$(x+\square)(x+\triangle)$ という形の式を展開すると結果はどうなる？」を全てきちんと学んだ人は、これから説明していくことを知らなくても、もうすでにどんな式でも展開をすることができます。しかし、この先のことを考えると、これから説明していくこともきちんと理解しておくことを強くお勧めします。

例 5　$(x+7)^2$ という式の展開について考えてみることにします。

そもそも、「にじょう」というのは、同じモノを 2 つかけるという意味ですよね。ですから、$(x+7)^2$ って、$(x+7)(x+7)$ のことですね。だったら、ちょっと前に学んだ方法で、この式を展開することができますよね。つまり、

$(x+\square)(x+\triangle)$ という形の式を展開していくと、必ず最後には、

$$x^2+\text{ナントカ}\,x+\text{ほにゃらら}$$

という形の式になり、

「ナントカ」という数は「$+\square$ と $+\triangle$ をたした数」になっていて、「ほにゃらら」という数は「$+\square$ と $+\triangle$ をかけた数」になっている

わけです。ですから、

$$(x+7)(x+7)=x^2+14x+49$$

って展開できますよね。ところで、この $(x+7)(x+7)$ という式では □ と △ は同じ数でした。どちらも 7 だったわけです。こういうときは、「ナントカ」という数は「+□ の 2 倍」になっていて、「ほにゃらら」という数は「+□ の 2 乗」になってしまうのです 。

問 48. 次の文の空欄に正しい数、式、言葉を記入しなさい。

$(x-5)^2$ という式の展開について考えてみることにします。

そもそも、「にじょう」というのは、同じモノを 2 つかけるという意味です。ですから、$(x-5)^2$ とは、$\left(\boxed{}\right)\left(\boxed{}\right)$ のことです。そうすると、ちょっと前に学んだ方法で、この式を展開することができます。前に、

> $(x+□)(x+△)$ という形の式を展開していくと、必ず最後には、
>
> $$x^2 + ナントカ\ x + ほにゃらら$$
>
> という形の式になり、
>
> 「ナントカ」という数は「+□ と +△ をたした数」になっていて、「ほにゃらら」という数は「+□ と +△ をかけた数」になっている

ということを学びました。ですから、

$$(x-5)(x-5) = x^2 - \boxed{}\,x + \boxed{}$$

って展開できますよね。

ところで今、$(x+□)(x+△)$ という形の式の展開のことを思い出して考えてみたわけですが、この $(x-5)(x-5)$ という式では □ と △ は $\boxed{}$ 数でした。どちらも -5 だったわけです。こういうときは、「ナントカ」という数は「□ を 2 つたした数」なので結局「+□ の $\boxed{}$ 倍」になり、「ほにゃらら」という数は「□ を 2 つかけた数」なので結局「+□ の $\boxed{}$ 乗」になってしまうのです 。

答えを見る

例 6　$(x+7y)^2$ という式の展開について考えてみることにします。

二乗とは同じモノを 2 つかけたもののことですから、

$$(x+7y)^2 = (x+7y)(x+7y)$$

ということですよね。

では、右の図を見てください。初心に帰ってこのように展開することにします。

$$(x+7y)(x+7y)$$

①のかけ算では x^2 ができますよね。

②と③のかけ算ではどちらも $+7xy$ ができます。つまり、$+7xy$ が 2 つできるわけですから、$+7xy$ を 2 倍しておけばよいわけですね。

④のかけ算では $+7y$ と $+7y$ をかけます。同じモノを 2 つかけるのですから $(+7y)$ を 2 乗しておけばよいですね。

このように考えると、

$$(x+7y)^2 = x^2 + 2\times(+7y) + (+7y)^2 = x^2 + 14xy + 49y^2$$

と計算することができますね。

問 49. 次の文の空欄に正しい数、式、言葉を記入しなさい。

$(x-5y)^2$ という式の展開について考えてみることにします。

そもそも、「にじょう」というのは、同じモノを 2 つかけるという意味です。ですから、$(x-5y)^2$ とは、$\left(\boxed{\qquad}\right)\left(\boxed{\qquad}\right)$ のことです。

では、右の図を見てください。初心に帰ってこのように展開することにします。

$$(x-5y)(x-5y)$$

①のかけ算では $\boxed{\quad}$ ができます。

②と③のかけ算ではどちらも $\boxed{\qquad}$ ができます。つまり、$-5xy$ が 2 つできるわけですから、$-5xy$ を $\boxed{\quad}$ 倍しておけばよいわけです。

④のかけ算では $-5y$ と $-5y$ をかけます。同じモノを 2 つかけるのですから $-5y$ を $\boxed{\quad}$ 乗しておけばよいのです。

このように考えると、

$$(x-5y)^2 = x^2 + 2 \times \left(\boxed{\qquad}\right) + \left(\boxed{\qquad}\right)^2 = x^2 - \boxed{\quad} + \boxed{\qquad}$$

と計算することができますね。

答えを見る

問 50. 次の式を展開しなさい。

(1) $(a+5)^2$　(2) $(x-3)^2$

(3) $(a+5b)^2$　(4) $(x-3y)^2$

(5) $(3a+5)^2$　(6) $(2x-7)^2$

(7) $(3a+5b)^2$　(8) $(2x-7y)^2$

答えを見る

2.2.4　(★ + △)(★ − △) という形の式を展開すると結果はどうなる？

一応初めに言っておきます。48 ページから始まる「2.1.2 分配法則を繰り返す計算」と、59 ページから始まる「2.2.1(★ + □)(♦ + △) という形の式を展開すると結果はどうなる？」と67 ページから始まる「2.2.2$(x+□)(x+△)$ という形の式を展開すると結果はどうなる？」を全てきちんと学んだ人は、これから説明していくことを知らなくても、もうすでにどんな式でも展開をすることができます。しかし、この先のことを考えると、これから説明していくこともきちんと理解しておくことを強くお勧めします。

例 7　$(x+5)(x-5)$ という式を展開してみようと思います。では、右の図を見てください。初心に帰ってこのように展開することにします。

$$(x+5)(x-5)$$

①のかけ算では x^2 ができます。

②のかけ算では $-5x$ ができ、③のかけ算では $+5x$ ができ

ます。つまり、「プラスマイナスが違っているだけの仲間の部品」ができるわけです。ですから、この 2 つの仲間の部品を合わせると何もなくなってしまうのです。

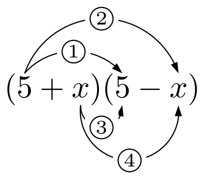
④のかけ算では $+5$ と -5 をかけます。「プラスマイナスが違っているだけの数」をを 2 つかけるのですからその数を 2 乗してさらにマイナスのマークを付ければよいのです。

このように考えると、

$$(x+5)(x-5)=x^2-5^2=x^2-25$$

と計算することができますね。

例 8　$(5+x)(5-x)$ という式を展開してみようと思います。



では、右の図を見てください。初心に帰ってこのように展開することにします。

①のかけ算では 5^2 ができます。

②のかけ算では $+5x$ ができ、③のかけ算では $-5x$ ができます。つまり、「プラスマイナスが違っているだけの仲間の部品」ができるわけです。ですから、この 2 つの仲間の部品を合わせると何もなくなってしまうのです。

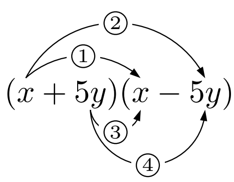
④のかけ算では $+x$ と $-x$ をかけます。「プラスマイナスが違っているだけの文字」をを 2 つかけるのですからその文字を 2 乗してさらにマイナスのマークを付ければよいのです。

このように考えると、

$$(5+x)(5-x)=5^2-x^2=25-x^2$$

と計算することができますね。

例 9　$(x+5y)(x-5y)$ という式を展開してみようと思います。



では、右の図を見てください。初心に帰ってこのように展開

することにします。

①のかけ算では x^2 ができます。

②のかけ算では $-5xy$ ができ、③のかけ算では $+5xy$ ができます。つまり、「プラスマイナスが違っているだけの仲間の部品」ができるわけです。ですから、この 2 つの仲間の部品を合わせると何もなくなってしまうのです。

④のかけ算では $+5y$ と $-5y$ をかけます。「プラスマイナスが違っているだけの式」をを 2 つかけるのですからその式を 2 乗してさらにマイナスのマークを付ければよいのです。

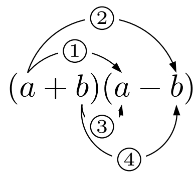
このように考えると、

$$(x+5y)(x-5y) = x^2 - (5y)^2 = x^2 - 25y^2$$

と計算することができますね。

問 51. 次の文の空欄に正しい数、式、言葉を記入しなさい。

$(a+b)(a-b)$ という式を展開してみようと思います。



右を見てください。初心に帰ってこのように展開することにします。

①のかけ算では $\boxed{}$ ができます。

②のかけ算では $\boxed{}$ ができ、③のかけ算では $\boxed{}$ ができます。つまり、「プラスマイナスが違っているだけの仲間の部品」ができるわけです。ですから、この 2 つの仲間の部品を合わせると何もなくなってしまうのです。

④のかけ算では $\boxed{}$ と $\boxed{}$ をかけます。「プラスマイナスが違っているだけの文字」をを 2 つかけるのですからその文字を 2 乗してさらにマイナスのマークを付ければよいのです。

このように考えると、

$$(a+b)(a-b)=\boxed{}-\boxed{}$$

と計算することができますね。

答えを見る

ここまで、例 7、例 8、例 9、問 51 をしっかり理解できた人は次のようなことを発見したことになりますね。

重要な事実：$(\bigstar+\triangle)(\bigstar-\triangle)$ という形の式を展開すると結果はどうなる？

$(\bigstar+\triangle)(\bigstar-\triangle)$ という形の式を、右のように展開していくと、

$$(\bigstar+\triangle)(\bigstar-\triangle)$$

①のかけ算では「$\bigstar^2$」ができ、

②のかけ算と③のかけ算では「プラスマイナスが違っているだけの仲間の部品」ができるので合わせると何もなくなってしまい、

④のかけ算では「プラスマイナスが違っているだけのモノ」をを 2 つかけるので「そのモノを 2 乗してさらにマイナスのマークを付けた部品」ができます。

ですから、

$$(\bigstar+\triangle)(\bigstar-\triangle)=\bigstar^2-\triangle^2$$

となるのです。

問 52. 次の式を展開しなさい。

(1) $(x+8)(x-8)$　(2) $(x-8)(x+8)$

(3) $(8+x)(8-x)$　(4) $(x+8y)(x-8y)$

(5) $(2x+1)(2x-1)$　(6) $(2x+5y)(2x-5y)$

(7) $(a-5b)(a+5b)$　(8) $(3a+2b)(3a-2b)$

答えを見る

2.2.5　これまでに学んだ計算技術を使って、やや複雑な式の計算にチャレンジしよう

例 10　$(x-3)(x+5)-(x+7)^2$ という式の見かけをマシにしようと思います。

念のために初めに確認しておきます。この式は「$x-3$」かける「$x+5$」ひく「$x+7$ の 2 乗」という式ですよね。ですから、

$$3\times 8-7^2$$

とか、

$$9\times 54-8^2$$

とか、

$$(-3)\times(-5)-4^2$$

という式と同じ形の式ですよね。かけ算やひき算が混ざってますよね。ところで、こういう式ってどういう順番に計算を進めるんでしたっけ。そこで、$(-3)\times(-5)-4^2$ という式を使って計算の仕方を思い出してみることにします。

おさらい：$(-3)\times(-5)-4^2$ という式の計算の仕方

かけ算やひき算が混ざっている式では、まず、かけ算をするんですよね。ですから、$(-3)\times(-5)$ と 4^2 をそれぞれ先に計算しますよね。（いいですか、4^2 もかけ算ですよね。だって、4^2 って、4×4 のことなのですから。）

まず、$(-3)\times(-5)$ を計算すると、

$$(-3)\times(-5)=15$$

ですね。

また、4×4 を計算すると、

$$4\times 4=16$$

ですね。

　これでかけ算は終わりました。ですからあとはひき算をすればよいですね。すると、

$$15 - 16 = -1$$

となりますね。

おさらい終わり

では本題に入ることにしましょう。

<u>$(x-3)(x+5)-(x+7)^2$ という式の計算の仕方</u>

　$(x-3)(x+5)-(x+7)^2$ という式は「$x-3$」かける「$x+5$」ひく「$x+7$ の 2 乗」という式ですから、かけ算やひき算が混ざっています。このようなときは、まず、かけ算をするんですよね。ですから、$(x-3)(x+5)$ と $(x+7)^2$ を先に計算しますよね。というわけで、とりあえず $(x-3)(x+5)$ と、$(x+7)^2$ をそれぞれ計算してみることにします。（この 2 つの式の計算の仕方はもう大丈夫ですよね。これまでにさんざん練習したのですから。）

　まず、$(x-3)(x+5)$ を計算すると、

$$(x-3)(x+5) = x^2 + 2x - 15$$

ですよね。

　また、$(x+7)^2$ を計算すると、

$$(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49$$

ですよね。

　これでかけ算は終わりました。ですからあとはひき算をすればよいわけです。すると、

$$\begin{aligned}(x^2+2x-15)-(x^2+14x+49) &= x^2+2x-15-x^2-14x-49 \\ &= -12x-64\end{aligned}$$

となりますね。これで答えが出ました。

ここで念のための注意をしておきます。今、$x^2+2x-15$ から $x^2+14x+49$ をひきましたが、どちらの式にもかっこをつけてからひくことが大切です。$x^2+2x-15$ や $x^2+14x+49$ はどちらも 1 つのかたまりなのです。例えば、$x^2+14x+49$ は $x^2+14x+49$ という式を計算してできる 1 つの数をあらわしているのです。ですから、ひき算をするときにきちんとかっこをつけないと、「マイナスのマーク」が x^2 だけについてしまい、正しい計算ができなくなってしまいます。

例 11　例 10 が理解できた人のための例です。

$(a+3)^2-(a-7)(a+2)$ という式の見かけをマシにしようと思います。

例 10 のときとは違って、今度はあっさり説明します。

$(a+3)^2-(a-7)(a+2)$ という式は「$a+3$ の 2 乗」ひく「$a-7$」かける「$a+2$」という式ですから、かけ算やひき算が混ざっています。このようなときは、まず、かけ算をするんですよね。ですから、$(a+3)^2$ と $(a-7)(a+2)$ を先に計算しますよね。それができたらひき算をするわけです。というわけで、

$$
\begin{aligned}
(a+3)^2-(a-7)(a+2) &= (a^2+6a+9)-(a^2-5a-14) \\
&= a^2+6a+9-a^2+5a+14) \\
&= 11a+23
\end{aligned}
$$

となりますね。

ここで念のための注意をしておきます。今、a^2+6a+9 から $a^2-5a-14$ をひきましたが、どちらの式にもかっこをつけてからひくことが大切です。a^2+6a+9 や $a^2-5a-14$ はどちらも 1 つのかたまりなのです。例えば、$a^2-5a-14$ は $a^2-5a-14$ という式を計算してできる 1 つの数をあらわしているのです。ですから、ひき算をするときにきちんとかっこをつけないと、「マイナスのマーク」が a^2 だけについてしまい、正しい計算ができなくなってしまいます。

問 53. 次の式の見かけをマシにしなさい。

(1) $(x+2)(x+5)-x(x-8)$ (2) $(x-6)(x+6)+(x-3)(x-8)$

(3) $(a+5)^2+(a-7)(a-8)$ (4) $(2x+3y)(2x+5y)-x(3x-8)$

(5) $(a+b)(a-b)-(a-b)^2$ (6) $(2x+3y)(5x-2y)-(3x+1)^2$

答えを見る

2.3 因数分解

2.3.1 因数分解ってなんでしょう

これまで私たちは「展開」と呼ばれる計算について詳しく学んできました。展開とは、「いくつかの式がかけ算された形をしている式」を、「いくつかの部品がたされた形にしてかっこをなくす式」に見かけを変える計算のことでしたね。

これから私たちは、「展開の逆の計算」を学ぶことにします。つまり、「いくつかの部品がたされた形をしている式」を、「いくつかの式がかけ算された形でかっこのついた式」に戻す計算です。「展開の逆」の計算を学ぶのですから、当然、「展開」についてよく理解していることが必要です。そこで、まず展開についてかんたんにおさらいします。

おさらい

次の式を展開しなさい。

(1) $x(x+5)$ (2) $(x+2)(x+3)$

解答

もうあなたは展開についてしっかりと学んでいるはずですから、あっさり説明しましょう。

「展開」という計算をするとき、一番もとになっているのは「分配法則」でしたね。そして、特別な形をしている式の場合には、「分配法則」を使って計算を進めていくとある決まった形の式になるので、それを覚えておくと役に立つこともあるということでしたね。（そう思ったので、前の節で「展開の公式」をいくつか作ったのでした。）

(1) 初心に帰って分配法則を使って計算してみると、

$$x(x+5) = x^2 + 5x$$

となりますね。

(2) 初心に帰って分配法則を繰り返し使えばわかることですが、こういう形の式を展開すると、必ず、

$$x^2 + \text{ナントカ}\ x + \text{ほにゃらら}$$

という形の式になるのでしたね。そして、「ナントカ」はかっこで囲まれている式 2 つの式の「後ろの部品」をあわせたものになっていて、「ほにゃらら」はかっこで囲まれている式 2 つの式の「後ろの部品」をかけせたものになっているのでした。この問題の式では、かっこで囲まれている式 2 つの式の「後ろの部品」は +2 と +3 です。ですから、たすと +5 でかけると +6 です。というわけで、

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$$

となりますね。

おさらいおわり

ではあなたにいくつか質問です。

質問

(1) 「ある式」を展開したら、$x^2 + 3x$ という式になりました.。「ある式」とはどんな式だと思いますか？

(2) 「ある式」を展開したら、$x^2 + 8x + 12$ という式になりました.。「ある式」とはどんな式だと思いますか？

では、3 分待ちます。じっくり考えてください。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

はい、3 分たちました。答え、わかりましたか？

　この質問の前で「おさらい」をしましたが、しっかりおさらいした人はきっとすぐに答えがわかったと思います。では答えを教えることにしましょう。

質問の答え

(1) 展開すると x^2+3x という式になるのは、$x(x+3)$ という式です。本当ですよ。次の計算を見てくださいね。

$$x(x+3) = x^2+3x$$

となりますね。

(2) 展開すると $x^2+8x+12$ という式になるのは、$(x+2)(x+6)$ という式です。本当ですよ。$(x+2)(x+6)$ という式を自分で展開してみてください。ちゃんと $x^2+8x+12$ になりますから。

えっ、どうやって答えがわかったかですって？そりゃあ、$x^2+8x+12$ という式の +8 と +12 をじっと見ているうちに「あっ、+2 と +6 か」ってひらめいたんですよ。

えっ、まだどういうことかわかんないですって？では詳しく説明しましょう。展開の学習で詳しく研究したことですが、

> $(x+\square)(x+\triangle)$ という式を展開していくと、仲間の部品が出てきて必ず最後には
>
> $$x^2 + \text{ナントカ}\ x + \text{ほにゃらら}$$
>
> という形の式になるのですが、「ナントカ」という数は「+□ と +△ をたした数」になっていて、「ほにゃらら」は「+□ と +△ をかけた数」になっている

ということでしたね。だから、「どんな式を展開すると $x^2+8x+12$ になるのかなぁ？」って思っとき、「ナントカ」は $+8$ で、「ほにゃらら」は $+12$ なんだから、「たすと $+8$」になって「かけると $+12$」になる 2 つの数を探せばいいじゃん」って思ったわけです。そうしていろいろ探してみたら、$+2$ と $+6$ が見つかったのです。

ではここであなたに専門用語を教えることにしましょう。

さっきの質問で、「ある式を展開したらこれこれこういう式になりました。では、どんな式を展開したのでしょうか？」ということを考えましたね。（言い換えると、展開して出来た式の「もとの式」を見つけてくださいという問題ですね。）このように、展開された式の「もとの式」を見つけることを、その式を**因数分解する**といいます。つまり、因数分解とは展開の逆の計算というわけです。ですから、因数分解をすると、「かっこで囲まれたいくつかの式がかけられている形」に戻るわけです。

因数分解は展開の逆の計算ですから、展開について熟練している人は特に何かを学ばなくても因数分解をすることができます。しかしそうは言っても、因数分解にはいくつかコツがあるのです。それではこれから因数分解を練習していくことにしましょう。

2.3.2　共通因数があったらまず絶対にくくり出そう

共通因数という言葉が出てきましたね。共通因数とは何のことなのか説明するのはあとにして、まずいくつかの例を学ぶことにします。

例 12　x^2+7x という式を因数分解することにします。つまり、この式は、ある式を展開してできているらしいのですが、もとの式がどんな式だったか当てるわけです。そこで、この式を詳しく分析してみましょう。

まず、この式の中にある x^2 という部品と $7x$ という部品について考えてみます。

- x^2 という部品の分析

  この部品は「x と x をかけてできている」のですよね。

- $7x$ という部品の分析

  この部品は「7 と x をかけてできている」のですよね。

部品の分析ができたので、x^2+7x という式全体のことを考えてみます。

x^2+7x という式をかけ算のマークを使って詳しく書き直してみると、

$$x^2+7x = x\times x + x\times 7$$

ですよね。書き直したほうの式をよく見てみると、何と分配法則が使える形ではないですか。（まぁ、分配法則を使うといっても、展開のときとは逆の使い方をするんですけどね。）つまり、

$$x\times x + x\times 7 = x\times(x+7)$$

ってできますよね。これで因数分解ができたことになります。念のため、最終的にかけ算のマークを省略した中学生流の答えを次に書いておきます。

$$x^2+7x = x(x+7)$$

となるわけですね。

例 13　$3x-6y$ という式を因数分解することにします。つまり、この式は、ある式を展開してできているらしいのですが、もとの式がどんな式だったか当てるわけです。そこで、この式を詳しく分析してみましょう。

まず、この式の中にある $3x$ という部品と $6y$ という部品について考えてみます。

- $3x$ という部品の分析

  この部品は「3 と x をかけてできている」のですよね。

- $6y$ という部品の分析

  この部品は「6 と y をかけてできている」のですよね。あー、でも、「2 と 3 と x をかけてできている」と思うこともできますね。

部品の分析ができたので、$3x-6y$ という式全体のことを考えてみます。

- $3x$ という部品は「3 と x をかけてできている」と考えるしかないですが、例えば、$6y$ という部品は「6 と y をかけてできている」と考えてみると・・・

$$3x - 6y = 3 \times x - 6 \times y$$

と思うことができるわけですよね。あー、だったら、分配法則を思い出しても 2 つの部品から何もくくりだすことができませんね。だって、$3 \times x$ と $6 \times y$ には共通なものが何もないわけですから。というわけで、この式はこれ以上変形できません。つまり、因数分解はできないのです。えー、でも、本当に因数分解できないのでしょうか。

- $3x$ という部品は「3 と x をかけてできている」と考えるしかないですが、例えば、$6y$ という部品は「2 と 3 と y をかけてできている」と考えてみると・・・

$$3x - 6y = 3 \times x - 2 \times 3 \times y$$

と思うことができるわけですよね。あー、だったら、分配法則を思い出すと、2 つの部品からそれぞれ 3 をくくりだすことができますよね。だって、$3 \times x$ と $2 \times 3 \times y$ のどちらにも 3 が共通に入っているのですから。というわけで、

$$3 \times x - 2 \times 3 \times y = 3 \times (x - 2 \times y)$$

とすることができますね。ここでかっこの中の見かけをマシにし、さらにかけ算のマークを省くことにしましょう。すると、

$$3 \times (x - 2 \times y) = 3(x - 2y)$$

となりますね。これがたぶん $3x - 6y$ という式を因数分解した結果のようですね。でもこれ、困りましたね。だって、前の結果と違うじゃないですか。さっきは「もう変形はできないので因数分解はできない」ということだったですよね。どうしましょう。どっちが本当の答えなのでしょうか。

では正しい答えを教えることにしましょう。

$3x - 6y$ という式を因数分解した結果は $3(x - 2y)$ なのです。もう因数分解はできないという考えは間違っているのです。実は、因数分解では、かっこで囲まれる式が全く無駄のない式になるようにすることに決めてあるのです。この例で考えることにした $3x - 6y$ という式の $3x$ と $6y$ という部品には、共通な文字は全く含まれていません。しかし、3 と 6 は相性のよい数なのです。6 という数は 2×3 と等しいのですから、6 の中には 3 が含まれているわけです。ですから、$3x - 6y$ という式のの $3x$ と $6y$ という部品には 3 という共通な数が含まれているのです。因数分解を行ったとき、かっこで囲まれる式が全く無駄のないようにするためには、共通な 3 をかっこの外にくくりだせばよいわけです。

例 14　$4x^2 - 12x$ という式を因数分解することにします。つまり、この式は、ある式を展開してできているらしいのですが、もとの式がどんな式だったか当てるわけです。そこで、この式を詳しく分析してみましょう。

まず、この式の中にある $4x^2$ という部品と $12x$ という部品について考えてみます。

- $4x^2$ という部品の分析
  この部品は「4 と x と x をかけてできている」のですよね。あー、でも、「2 と 2 と x と x をかけてできている」と思うこともできますね。
- $12x$ という部品の分析
  この部品は「12 と x をかけてできている」のですよね。あー、でも、「2 と 6 と x をかけてできている」と思うこともできますね。このほかにも例えば、、「4 と 3 と x をかけてできている」と思うこともできますし、また例えば、「2 と 2 と 3 と x をかけてできている」と思うこともできますね。

部品の分析ができたので、$4x^2 - 12x$ という式全体のことを考えてみます。さっき見たように、ある 1 つの部品だけを考えたとき、いくつかの違う方法で理解することができるわけです。そうすると、式全体を見て因数分解するときにも、いくつかの違った見方をすることができることになります。

- 例えば、$4x^2$ という部品は「4 と x と x をかけてできている」と考え、$12x$ という

部品は「2 と 6 と x をかけてできている」と考えてみると・・・

$$4x^2 - 12x = 4 \times x \times x - 2 \times 6 \times x$$

と思うことができるわけですよね。あー、だったら、分配法則を思い出すと、2 つの部品からそれぞれ x をくくりだすことができますよね。だって、$4 \times x \times x$ と $2 \times 6 \times x$ のどちらにも x が 1 つ共通に入っているのですから。というわけで、

$$4 \times x \times x - 2 \times 6 \times x = x \times (4 \times x - 2 \times 6)$$

とすることができますね。ここでかっこの中の見かけをマシにし、さらにかけ算のマークを省くことにしましょう。すると、

$$x \times (4 \times x + 2 \times 6) = x(4x - 12)$$

となりますね。これが $4x^2 - 12x$ という式を因数分解した結果かもしれませんね。

- 例えば、$4x^2$ という部品は「4 と x と x をかけてできている」と考え、$12x$ という部品は「4 と 3 と x をかけてできている」と考えてみると・・・

$$4x^2 - 12x = 4 \times x \times x - 4 \times 3 \times x$$

と思うことができるわけですよね。あー、だったら、分配法則を思い出すと、2 つの部品からそれぞれ x だけでなく 4 もくくりだすことができますよね。だって、$4 \times x \times x$ と $4 \times 3 \times x$ のどちらにも x と 4 が共通に入っているのですから。というわけで、

$$4 \times x \times x - 4 \times 3 \times x = 4 \times x \times (x - 3)$$

とすることができますね。ここでかけ算のマークを省いてこの式の見かけをマシにすることにしましょう。すると、

$$4 \times x \times (x - 3) = 4x(x - 3)$$

となりますね。これがたぶん $4x^2 - 12x$ という式を因数分解した結果のようですね。でもこれ、困りましたね。だって、前の結果と違うじゃないですか。さっきは「$x(4x - 12)$ が $4x^2 - 12x$ という式を因数分解した結果かもしれません」ということだったですよね。どうしましょう。どっちが本当の答えなのでしょうか。それに、まだ心配なことがあります。だって、例えば、$4x^2$ という部品は「2 と 2 と x をかけてできている」と考え、$12x$ という部品は「2 と 6 と x をかけてできている」と考えることだってできるんですよね。そう考えて分配法則を使っていったら、また違う答えになるかも知れないじゃぁないですか。

いろいろと悩み事が出てきたので、念のため、ここまで考えてきたことを整理してみます。

- $4x^2 - 12x$ という式を因数分解しようとしたときに、例えば、$4x^2$ という部品は「4 と x と x をかけてできている」と考え、$12x$ という部品は「2 と 6 と x をかけてできている」と考えてみると、次のように計算を進めることになります。

$$\begin{aligned}4x^2 - 12x &= 4 \times x \times x - 2 \times 6 \times x \\ &= x \times (4 \times x - 2 \times 6) \\ &= x(4x - 12)\end{aligned}$$

この計算では、$4x^2$ という部品と $12x$ という部品のどちらにも共通に含まれている x を分配法則を使ってくくりだしているわけです。

- $4x^2 - 12x$ という式を因数分解しようとしたときに、例えば、$4x^2$ という部品は「4 と x と x をかけてできている」と考え、$12x$ という部品は「4 と 3 と x をかけてできている」と考えてみると、次のように計算を進めることになります。

$$\begin{aligned}4x^2 - 12x &= 4 \times x \times x - 4 \times 3 \times x \\ &= 4 \times x \times (x - 3) \\ &= 4x(x - 3)\end{aligned}$$

この計算では、$4x^2$ という部品と $12x$ という部品のどちらにも共通に含まれている $4 \times x$ を分配法則を使ってくくりだしているわけです。

- $4x^2 - 12x$ という式を因数分解しようとしたときに、$4x^2$ という部品と $12x$ という部品は今さっき紹介した 2 つの考え方以外にもいろいろな見方をすることができるのですから、さっき紹介した 2 つの因数分解の結果？とは違う計算がまだあると思われます。

ではここで、あなたに思い出してもらいたいことがあります。それは例 13 で学んだことです。たしか、「実は、因数分解では、かっこで囲まれる式が全く無駄のない式になるようにすることに決めてある」ということでしたよね。今の所、「$4x^2 - 12x$ という式を因数分解した結果」の候補として、$x(4x-12)$ と $4x(x-3)$ が得られているわけです。さらに、この 2 つの候補のほかに候補があるわけです。それではどれが一番よいのかというと、$4x(x-3)$ ですよね。この式は、かっこで囲まれる式に全く無駄がないですよね。えっ、「無駄のない式」ってどういうことかよくわからないですって？例 13 をしっかり学んだ人は「無駄のない式」ってどういうことなのかわかっているはずなのですが、念のため少し説明しましょう。次の計算をたどってみてください。この計算は $4x^2 - 12x$ という式を因数分解しようとしたときに、$4x^2$ という部品は「4 と x と x をかけてできている」と考え、$12x$ という部品は「2 と 6 と x をかけてできている」と考えた人の計算ですが、この人は無駄のあることに気付き、計算をさらに続けています。

$$
\begin{aligned}
4x^2 - 12x &= 4 \times x \times x - 2 \times 6 \times x \\
&= x \times (4 \times x - 2 \times 6) \\
&= x(4x - 12) \\
&= x(4 \times x - 4 \times 3) \\
&= x \times 4(x - 3) \\
&= 4x(x - 3)
\end{aligned}
$$

どういうことかわかりましたか？この人は自分の初めの考えどおり計算を進め、$4x^2$ と $12x$ に共通に含まれている x をくくりだしました。すると 3 行目の式が得られるわけです。しかし、この人は 3 行目の式を見ているうちに、かっこで囲まれた式の中にある $4x$ と 12 という部品には 4 という共通な部品が含まれていることに気付いたのです。そこで

さらに計算を続けることにしてかっこの外へ 4 をくくりだしました。かっこの外へくくりだされた 4 は、もっと前にかっこの外へくくりだされた x とかけ算されて $4x$ となるわけです。そのようにして、最後の式となったのです。

この計算をたどることができた人は、3 行目に得られた式では因数分解の結果としてはまだまだダメであるということがわかったと思います、つまり $x(4x-12)$ という式でかっこで囲まれている式 $4x-12$ には、まだ無駄があったということですよね。4 と 12 は相性がよいので、この $4x-12$ からさらに 4 をくくりだすことができるからです。そのようにして $4x-12$ からさらに 4 をくくりだしてしまうと、もう無駄はありません。最後に $4x(x-3)$ という式が得られたわけですが、この式でかっこで囲まれている $x-3$ にはもう無駄がないのです。この $x-3$ という式からはもう何もくくりだすことができないからです。

以上、$4x^2-12x$ という式因数分解について詳しく考えてみました。これまでの説明でよくわかってもらえたと思いますが、因数分解をするときは、いろいろな悩み事が出てくるわけです。ですから、いつでもこうすればうまく行くという方法はありません。式の形、式の中に出てくる部品とよく相談をして、いろいろと悩みながら自分の頭で考えていくしかないのです。式の形、式の中の部品の特徴をうまくつかんでいけるように普段から練習しておくことが大切なのです。それでは最後に、式の形、式の中の部品の特徴をうまくつかめるようになった人が、この例の $4x^2-12x$ という式を計算するとどうなるのか書いておきます。

$$\begin{aligned} 4x^2-12x &= 4x\times x-4x\times 3 \\ &= 4x(x-3) \end{aligned}$$

これが $4x^2-12x$ という式を因数分解した結果です。式の特徴がしっかりとつかめる人は、「$4x^2$ と $12x$ という部品には $4x$ が共通に含まれている」ということ、「さらにそれ以上は何も共通には含まれていない」ということが見抜けるわけです。

例題 27　例 12、例 13、例 14 がきちんと理解できた人のための問題です。

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$2ab + 5ac$　　(2)　$6ax - 3a$

(3)　$16a^2b - 12b^2$　　(4)　$ax + bx$

解答

どの式も、それぞれ何かある式を展開してできているらしいのですが、もとの式がどんな式だったか当てる問題ですね。

(1)　$2ab + 5ac$ ですね。この式を詳しく分析してみましょう。

まず、この式の中にある $2ab$ と $5ac$ という部品を分析します。すると右のようになっていることがわかります。

$2ab \cdots\cdots 2 \times a \times b$

$5ac \cdots\cdots 5 \times a \times c$

この分析結果をよく見ると、どちらの部品にも a が共通に含まれていることがわかります。その他に共通に含まれているものはありません。ということは $2ab + 5ac$ という式では、分配法則を使って a だけをくくりだせることになります。ですから、次のように因数分解の計算をしていくことができます。

$$\begin{aligned} 2ab + 5ac &= a \times 2b + a \times 5c \\ &= a(2b + 5c) \end{aligned}$$

(2)　$6ax - 3a$ ですね。この式を詳しく分析してみましょう。

まず、この式の中にある $6ax$ と $3a$ という部品を分析します。すると右のようになっていることがわかります。

$6ac \cdots\cdots 2 \times 3 \times a \times x$

$3a \ \cdots\cdots 3 \times a$

この分析結果をよく見ると、どちらの部品にも 3 と a が共通に含まれていることがわかります。その他に共通に含まれているものはありません。ということは $6ax - 3a$ という式では、分配法則を使って $3a$ だけをくくりだせることになります。このとき注意してほしいことがあります。「$3a$ という部品から $3a$ をくくりだすと

何も残らない」と思う人がよくいますがその考えは違います。$3a$ は $3a \times 1$ と考えることができますから、$3a$ から $3a$ をくくりだすと 1 が残るのです。このことにもきちんと周注意すると、次のように因数分解の計算をしていくことができます。

$$
\begin{aligned}
6ax - 3a &= 3a \times x - 3a \times 1 \\
&= 3a(x-1)
\end{aligned}
$$

(3)　$16a^2b - 12b^2$ ですね。この式を詳しく分析してみましょう。

まず、この式の中にある $16a^2b$ と $12b^2$ という部品を分析します。すると右のようになっていることがわかります。

$16a^2b \cdots\cdots 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times a \times a \times b$

$12b^2 \quad \cdots\cdots 2 \times 2 \times 3 \times b \times b$

この分析結果をよく見ると、どちらの部品にも 2 と 2 と b が共通に含まれていることがわかります。その他に共通に含まれているものはありません。ということは $16a^2b - 12b^2$ という式では、分配法則を使って $4b$ だけをくくりだせることになります。ですから、次のように因数分解の計算をしていくことができます。

$$
\begin{aligned}
16a^2b - 12b^2 &= 4b \times 4a^2 - 4b \times 3b \\
&= 4b(4a^2 - 3)
\end{aligned}
$$

(4)　$ax + bx$ ですね。この式を詳しく分析してみましょう。

まず、この式の中にある ax と bx という部品を分析します。すると右のようになっていることがわかります。

$ax \cdots\cdots a \times x$

$bx \cdots\cdots b \times x$

この分析結果をよく見ると、どちらの部品にも x が共通に含まれていることがわかります。その他に共通に含まれているものはありません。ということは $ax+bx$ という式では、分配法則を使って x だけをくくりだせることになります。ですから、

次のように因数分解の計算をしていくことができます。

$$\begin{aligned} ax + bx &= a \times x + b \times x \\ &= (a+b)x \end{aligned}$$

大切なアドバイス

前にも説明したように、因数分解は展開の逆の計算ですね。ところで、小学校で学んだように、ひき算はたし算の逆の計算で、わり算はかけ算の逆の計算でした。あなたもこのような計算を小学校で学んだ経験からわかると思いますが、人間には「もとの計算」より「逆の計算」のほうが難しいのです。それはどうしてなのでしょうか。

例えば、わり算をするときのことを想像してください。あなたはわり算をするとき、きっと知らず知らずのうちにかけ算をしているはずです。例えば、$60 \div 12$ というわり算をするとき、頭の中や筆算で 12×4 をしてみたり、12×5 をするなどして、答えが 60 になるかけ算を探しているはずです。つまり、人間にとって、わり算はかけ算をもとにする計算なのです。ですから、わり算はかけ算より 1 ランク上の難しい計算になるわけです。

展開と因数分解についても同じようなことが言えます。因数分解は展開より 1 ランク上の難しい計算なので、自分の行った因数分解が正しくできているかどうか心配になることも多いでしょう。ですから、因数分解するときは、自分の出した答えを展開しなおして、もとの式に戻るかどうか確認するクセをつけておくと良いのです。そのようなことを繰り返していくうちに、あなたはきっと、ほとんど間違わずに因数分解することができるようになっていることでしょう。

問 54. 次の式を因数分解しなさい。

(1) $6x + 8y$　　(2) $6x + 8$

(3) $6x^2 + 8x$　　(4) $6x^2y + 8y$

答えを見る

問 55. 次の式を因数分解しなさい。

(1) $2mx - 3my$　　(2) $4ax + 2a$

(3) $12a^2b - 8b^2$　　(4) $ma - na$

答えを見る

それではここで、共通因数という言葉について説明することにしましょう。ここまで学んできた因数分解の問題で出てきた式は、全ての部品に共通なものが含まれている式でした。例えば、例 13 で学んだ $3x-6y$ という式の $3x$ と $6y$ という部品にはどちらにも 3 という数が共通に含まれています。また、例 14 で学んだ $4x^2-12x$ という式の $4x^2$ と $12x$ という部品にはどちらにも $4x$ という式が共通に含まれています。このように、式の中の全ての部品に共通に含まれているものを**共通因数**と呼びます。ですから例えば、$3x-6y$ という式では共通因数は 3 で、$4x^2-12x$ という式では共通因数は $4x$ です。

ここまできちんと学んできた人は、「共通因数がある式では必ず共通因数をくくって因数分解していくのだ」ということがわかったと思います。

2.3.3　$(x+\square)(x+\triangle)$ という形の式を展開すると x^2+ ナントカ $x+$ ほにゃらら という形になることを思い出そう

展開の学習をしたときに、

『$(x+\square)(x+\triangle)$ という形の式を展開すると
x^2+ ナントカ $x+$ ほにゃらら という形になる』

ということを学びましたね。因数分解は展開の逆の計算です。展開する前のもとの式を探すわけです。ですから、因数分解しようとしている式が、

$$x^2+\text{ナントカ}\,x+\text{ほにゃらら}$$

という形をしているのだったら、展開する前は、

$$(x+\square)(x+\triangle)$$

という形だったわけですから、「ナントカ」という数と「ほにゃらら」という数をじっとよく見て、$\square$ という数と $\triangle$ という数を発見することができれば、因数分解が見つかることになります。それではどのようにして $\square$ と $\triangle$ を発見すればよいでしょうか。ここでまた、展開の学習をしたときに学んだことを思い出してみると、たしか、「ナントカは $+\square$

と △ をたした数になっていて、ほにゃららは +□ と △ をかけた数になっている」のでしたね。だから、たすと「ナントカ」になり、かけると「ほにゃらら」になる 2 つの数を探せばよいということになりますよね。

例 15　x^2+5x+6 という式の因数分解について考えてみます。つまり、この式は、ある式を展開してできているらしいのですが、もとの式がどんな式だったか当てるわけです。そこで、この式を詳しく分析してみましょう。

この式は、

$$x^2 + \text{ナントカ}\ x + \text{ほにゃらら}$$

という形をしていますね。ですから、この式は、展開される前、

$$(x+\square)(x+\triangle)$$

という形をしていたはずです。そして、さっき考えたことによれば □ と △ を見つけるには、たすと「ナントカ」になり、かけると「ほにゃらら」になる 2 つの数を探せばよいということですね。

では探してみましょう。この例の、x^2+5x+6 という式では「ナントカ」は +5 で「ほにゃらら」は +6 ですよね。ですから、

たすと +5、かけると +6 になる 2 つの数

を探せばよいわけです。

2 つの手がかりがありますが、どちらの手がかりを先に考えていくのがよいでしょうか。「たすと +5」という手がかりから先に考えたほうがよいのでしょうか。それとも「かけると +6」という手がかりから先に考えたほうがよいでしょうか。

そうですね、良くわからないから先に「たすと +5」という手がかりから考えてみましょう。たすと +5 になる 2 つの数ですから、例えば、1 と 4 なんてものがありますよね。あー、このほかにも 0 と 5 とか、-1 と 6 とか、-2 と 7 とか、-3 と 8 とか $\cdots$ あれっ、いくらでも見つかるではありませんか。キリがありませんね。そうか、たすと「ナ

ントカ」という手がかりから考え始めると、いくらでもキリなく 2 つの数の候補が見つかるわけですね。まぁ、それでいけないということもないのでしょうが、「いくらでもキリなく」っていうのはいやですよね。

では、もし「かけると +6」という手がかりかりを先に考えるとどうなっていたのでしょうか。やはり、「いくらでもキリなく」出てくるのでしょうか。うーん、「かけると +6」になる 2 つの数ですよね。例えば、1 と 6 なんてものがありますよね。あー、このほかにも 2 と 3 とかありますよね。他にも 3 と 2 とかありますね。あっ、でもこれ、2 と 3 と同じことか。あー、そう考えていくと、もしかして、「かけると +6」になる 2 つの数って、1 と 6 というのと 2 と 3 というのしかないんじゃないかな。いや、待ってくださいね、大事なこと忘れてました。マイナスの数っているのも気にしないといけませんね。そうすると -1 と -6 というのと -2 と -3 というのもありますよね。でもこれで今度こそ全部じゃないのかなぁ？そうですよねー、いや、もっと意地の悪いのもあるぞ。$\dfrac{1}{2}$ と 12 でもいいのかー。なんだよ、そんなのまで考えに入れたらやっぱりいくらでも見つかっちゃうじゃんか。やだなー。でも「整数」に限って 2 つの数を探すと、「かけると +6」になる 2 つの数って、1 と 6 というのと 2 と 3 というのと -1 と -6 というのと -2 と -3 というのだけですよね。きっと、この問題は初心者向けなので分数が出てくるなんてないですよね。勝手な希望なんですけど。そうすれば、「かけると +6」になる 2 つの数は 4 組だけですよね。

では、右を見てください。念ため、「整数」の範囲で「かけると +6」になる 2 つの数を書いておきました。整数の範囲で探してみると、この 4 組以外ありません。これが、探している 2 つの数の候補なわけです。あとは、この中から「たすと +5」になっているものを選べばよいですよね。それはもちろん 2 と 3 ですよね。これで探していた 2 つの数が見つかりました。（よかったですよね。「整数」の中から 2 つの数を見つ

かけると +6 になる 2 つの数
1 と 6
2 と 3
-1 と -6
-2 と -3

けることができる問題でした。）というわけで、x^2+5x+6 を因数分解すると、

$$(x+2)(x+3)$$

となることが発見できました。

例 16　$x^2-8x+15$ という式の因数分解について考えてみます。つまり、この式は、ある式を展開してできているらしいのですが、もとの式がどんな式だったか当てるわけです。そこで、この式を詳しく分析してみましょう。

この式は、

$$x^2 + \text{ナントカ}\ x + \text{ほにゃらら}$$

という形をしていますね。ですから、この式は、展開される前、

$$(x+\square)(x+\triangle)$$

という形をしていたはずです。そして、以前考えたことによれば □ と △ を見つけるには、たすと「ナントカ」になり、かけると「ほにゃらら」になる 2 つの数を探せばよいということですね。

では探してみましょう。この例の、$x^2-8x+15$ という式では「ナントカ」は -8 で「ほにゃらら」は $+15$ ですよね。ですから、

たすと -8、かけると $+15$ になる 2 つの数

を探せばよいわけです。2 つの手がかりがありますが、どちらの手がかりを先に考えていくのがよいでしょうか。前の例 15 をしっかり学んだ人はおわかりだと思います。「かけると $+15$」という手がかりから先に考えたほうがよいですよね。とりあえず整数の範囲で 2 つの数を探すことにしても、「たすとナントカ」という手がかりから先に考えてしまうと、候補がキリなく見つかってしまいます。しかし、整数の範囲ならば、「かけてほにゃらら」という手がかりでは、候補がいくつかの組に限られ、キリがないなんてことは起こらないからです。

それでは「かけると $+15$」になる 2 つの数を整数の範囲で探してみます。まず片方の数を 1 にして探してみると、相手の数は 15 ですね。片方を 2 に変えると相手がいませんね。片方を 3 にすると相手は 5 ですね。片方を 4 にすると相手がいません。このようにして、片方の数を順番に変えていきながら全部探してみると右のようになります。（この世にはマイナスの数もあるので見落とさないようにしてくださいね。）これが、探している 2 つの数の候補なわけです。あとは、この中から「たすと -8」になっているものを選べばよいですよね。それはもちろん -3 と -5 ですよね。これで探していた 2 つの数が見つかりました。（よかったですよね。「整数」の中から 2 つの数を見つけることができる問題でした。）というわけで、$x^2 - 8x + 15$ を因数分解すると、

かけると $+15$ になる 2 つの数
1 と 15
3 と 5
-1 と -15
-3 と -5

$$(x-3)(x-5)$$

となることが発見できました。

例 17　$x^2 - 2x - 8$ という式の因数分解について考えてみます。つまり、この式は、ある式を展開してできているらしいのですが、もとの式がどんな式だったか当てるわけです。そこで、この式を詳しく分析してみましょう。

この式は、

$$x^2 + \text{ナントカ}\ x + \text{ほにゃらら}$$

という形をしていますね。ですから、この式は、展開される前、

$$(x+\square)(x+\triangle)$$

という形をしていたはずです。そして、以前考えたことによれば $\square$ と $\triangle$ を見つけるには、たすと「ナントカ」になり、かけると「ほにゃらら」になる 2 つの数を探せばよいということですね。

では探してみましょう。この例の、$x^2 - 2x - 8$ という式では「ナントカ」は -2 で「ほ

にゃらら」は -8 ですよね。ですから、

たすと -2、かけると -8 になる 2 つの数

を探せばよいわけです。2 つの手がかりがありますが、どちらの手がかりを先に考えていくのがよいでしょうか。例 15 をしっかり学んだ人はおわかりだと思います。「かけると -8」という手がかりから先に考えたほうがよいですよね。とりあえず整数の範囲で 2 つの数を探すことにしても、「たすとナントカ」という手がかりから先に考えてしまうと、候補がキリなく見つかってしまいます。しかし、整数の範囲ならば、「かけてほにゃらら」という手がかりでは、候補がいくつかの組に限られ、キリがないなんてことは起こらないからです。

それでは「かけると -8」になる 2 つの数を整数の範囲で探してみます。まず片方の数を 1 にして探してみると、相手の数は -8 ですね。片方を 2 にすると相手は -4 ですね。片方を 3 にすると相手がいません。このようにして、片方の数を順番に変えていきながら全部探してみると右のようになります。これが、探している 2 つの数の候補なわけです。あとは、この中から「たすと -2」になっているものを選べばよいですよね。それはもちろん 2 と -4 ですよね。これで探していた 2 つの数が見つかりました。（よかったですよね。「整数」の中から 2 つの数を見つけることができる問題でした。）というわけで、$x^2 - 2x - 8$ を因数分解すると、

かけると -8 になる 2 つの数

1 と -8
2 と -4
-1 と 8
-2 と 4

$$(x+2)(x-4)$$

となることが発見できました。

例 18　$x^2 + 8x + 16$ という式の因数分解について考えてみます。つまり、この式は、ある式を展開してできているらしいのですが、もとの式がどんな式だったか当てるわけです。そこで、この式を詳しく分析してみましょう。

この式は、

$$x^2 + \text{ナントカ}\,x + \text{ほにゃらら}$$

という形をしていますね。ですから、この式は、展開される前、

$$(x + \square)(x + \triangle)$$

という形をしていたはずです。そして、以前考えたことによれば □ と △ を見つけるには、たすと「ナントカ」になり、かけると「ほにゃらら」になる 2 つの数を探せばよいということですね。

では探してみましょう。この例の、$x^2 + 8x + 16$ という式では「ナントカ」は +8 で「ほにゃらら」は +16 ですよね。ですから、

たすと +8、かけると +16 になる 2 つの数

を探せばよいわけです。2 つの手がかりがありますが、どちらの手がかりを先に考えていくのがよいでしょうか。例 15 をしっかり学んだ人はおわかりだと思います。「かけると +16」という手がかりから先に考えたほうがよいですよね。とりあえず整数の範囲で 2 つの数を探すことにしても、「たすとナントカ」という手がかりから先に考えてしまうと、候補がキリなく見つかってしまいます。しかし、整数の範囲ならば、「かけてほにゃらら」という手がかりでは、候補がいくつかの組に限られ、キリがないなんてことは起こらないからです。

それでは「かけると −8」になる 2 つの数を整数の範囲で探してみます。まず片方の数を 1 にして探してみると、相手の数は 16 ですね。片方を 2 にすると相手は 8 ですね。片方を 3 にすると相手がいません。このようにして、片方の数を順番に変えていきながら全部探してみると右のようになります。これが、探している 2 つの数の候補なわけです。あとは、この中から「たすと +8」になっているものを選べばよいですよね。それはもちろん

かけると +16 になる 2 つの数
1 と 16
2 と 8
4 と 4
−1 と −16
−2 と −8
−4 と −4

4 と 4 ですよね。これで探していた 2 つの数が見つかりました。（よかったですよね。「整数」の中から 2 つの数を見つけることができる問題でした。）というわけで、$x^2+8x+16$ を因数分解すると、

$$(x+4)(x+4)$$

となることが発見できました。

これで終わりにしてもよいのですが、念のための注意をしておきます。$(x+4)(x+4)$ という式は $x+4$ を 2 つかけてできています。つまり同じモノを 2 つかけてできている式です。こういうときは「2 乗」をあらわす記号を使うことができますよね。というわけで、$(x+4)(x+4)$ と答える代わりに $(x+4)^2$ と答えることができます。

問 56. 次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2+3x+2	(2) x^2-4x+3
(3) x^2+7x-8	(4) x^2+2x+1
(5) x^2+7x+6	(6) x^2-8x+7
(7) x^2-x-6	(8) x^2-4x+4
(9) $x^2+8x+12$	(10) $x^2-9x+18$
(11) $x^2+3x-10$	(12) $x^2+14x+49$
(13) $x^2+11x-12$	(14) $x^2-10x+16$
(15) $x^2+2x-35$	(16) $x^2-12x+36$

答えを見る

2.3.4　$(\bigstar+\triangle)(\bigstar-\triangle)$ という形の式を展開すると $\bigstar^2-\triangle^2$ という形になることを思い出そう

展開の学習をしたときに、

『$(\bigstar+\triangle)(\bigstar-\triangle)$ という形の式を展開すると $\bigstar^2-\triangle^2$ という形になる』

ということを学びました。因数分解は展開の逆の計算です。展開する前のもとの式を探す

わけです。ですから、因数分解しようとしている式が、

$$\bigstar^2 - \triangle^2$$

という形をしているのだったら、展開する前は、

$$(\bigstar + \triangle)(\bigstar - \triangle)$$

という形だったわけです。ということは、式をよく見て $\bigstar$ と $\triangle$ を発見できれば因数分解ができることになります。

例 19　$x^2 - 25$ という式の因数分解について考えてみます。つまり、この式は、ある式を展開してできているらしいのですが、もとの式がどんな式だったか当てるわけです。そこで、この式を詳しく分析してみましょう。

よく見るとこの $x^2 - 25$ という式は、

$$\bigstar^2 - \triangle^2$$

という形をしていると思うことができますよね。だって、25 って 5 の二乗なのですから、$x^2 - 25$ という式は、

$$x^2 - 5^2$$

となっているということですよね。ということは、展開される前、

$$(x+5)(x-5)$$

という形をしていたはずです。

例 20　$9x^2 - 25$ という式の因数分解について考えてみます。つまり、この式は、ある式を展開してできているらしいのですが、もとの式がどんな式だったか当てるわけです。そこで、この式を詳しく分析してみましょう。

よく見るとこの $9x^2-25$ という式は、

$$\bigstar^2 - \triangle^2$$

という形をしていると思うことができますよね。だって、$9x^2$ って $3x$ を二乗したものですし、25 って 5 の二乗なのですから、$9x^2-25$ という式は、

$$(3x)^2 - 5^2$$

となっているということですよね。ということは、展開される前、

$$(3x+5)(3x-5)$$

という形をしていたはずです。

例 21　$9x^2-25y^2$ という式の因数分解について考えてみます。つまり、この式は、ある式を展開してできているらしいのですが、もとの式がどんな式だったか当てるわけです。そこで、この式を詳しく分析してみましょう。

よく見るとこの $9x^2-25y^2$ という式は、

$$\bigstar^2 - \triangle^2$$

という形をしていると思うことができますよね。だって、$9x^2$ って $3x$ を二乗したものですし、$25y^2$ って $5y$ の二乗なのですから、$9x^2-25y^2$ という式は、

$$(3x)^2 - (5y)^2$$

となっているということですよね。ということは、展開される前、

$$(3x+5y)(3x-5y)$$

という形をしていたはずです。

問 57. 次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2 - 16$　　(2) $9x^2 - 16$

(3) $x^2 - 16y^2$　　(4) $49x^2 - 16y^2$

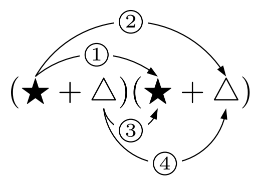
答えを見る

2.3.5 $(\bigstar + \triangle)^2$ という形の式の展開を研究して因数分解に役立てよう

展開の学習をしたとき、$(x + \square)^2$ という形の式を展開するとどうなるのか調べましたね。覚えていますか？ここではこれから、$(x + \square)^2$ という形の式と似ている式の展開についてまず調べます。これから調べようとしているのは、$(\bigstar + \triangle)^2$ という形の式を展開するとどんな特徴を持つ式になるのかということです。そのことが調べ終わったら、その結果を逆に使って因数分解に役立てることにします。

では、$(\bigstar + \triangle)^2$ を展開してみましょう。

$(\bigstar + \triangle)^2$ とは、$(\bigstar + \triangle)(\bigstar + \triangle)$ のことですね。ここでは久しぶりに初心に帰って右のように展開してみます。すると、



$$\begin{aligned}(\bigstar + \triangle)^2 &= (\bigstar + \triangle)(\bigstar + \triangle)\\ &= \bigstar^2 + \bigstar\triangle + \triangle\bigstar + \triangle^2\\ &= \bigstar^2 + \triangle\bigstar + \triangle\bigstar + \triangle^2\\ &= \bigstar^2 + 2\triangle\bigstar + \triangle^2\end{aligned}$$

となりますね。計算、ついてこれていますか？この計算では途中、同じ部品が 2 つ出てきましたね。つまり、$\bigstar\triangle$ が 2 つ出てきたわけです。同じモノを 2 つたすことと 2 倍することは結局同じなので最後に $2\triangle\bigstar$ という部品ができていることに注意してください。

というわけで、結局、$(\bigstar + \triangle)^2$ を展開してみると、$\bigstar^2 + 2\triangle\bigstar + \triangle^2$ となることがわかりました。念のため、この結果を次のような、言葉を使った式でもう一度書いておきます。

$$(\text{前の部品} + \text{後ろの部品})^2 = \text{前の部品}^2 + 2 \times \text{後ろの部品} \times \text{前の部品} + \text{後ろの部品}^2$$

大丈夫ですよね。

それでは次に、この結果を因数分解に活用する練習をしましょう。

$$(\text{前の部品} + \text{後ろの部品})^2$$

という形の式を展開すると

$$\text{前の部品}^2 + 2 \times \text{後ろの部品} \times \text{前の部品} + \text{後ろの部品}^2$$

という形の式になるのですから、このことを逆に考えると、

重要な事実：前の部品^2 + 2 × 後ろの部品 × 前の部品 + 後ろの部品^{2}という形の式は展開する前にどんな形をしていたの？

$$\text{前の部品}^2 + 2 \times \text{後ろの部品} \times \text{前の部品} + \text{後ろの部品}^2$$

という形の式は、展開する前は、

$$(\text{前の部品} + \text{後ろの部品})^2$$

という式だったのである。

ということですね。このことを活用して、これからいくつかの例題で因数分解の練習をしてみましょう。

例 22　$9x^2 + 24x + 16$ という式の因数分解について考えてみます。つまり、この式は、ある式を展開してできているらしいのですが、もとの式がどんな式だったか当てるわけです。そこで、この式を詳しく分析してみましょう。

この $9x^2 + 24x + 16$ という式では、

1 番目の部品は $9x^2$ ですが、これは $3x$ を二乗したものです。

3 番目の部品は 16 ですが、これは 4 を二乗したものです。

　ですから、1 番目と 3 番目の部品を見る限り、$9x^2+24x+16$ という式は、

$$\text{前の部品}^2 + 2\times\text{後ろの部品}\times\text{前の部品}+\text{後ろの部品}^2$$

という形をしているわけです。つまり、「前の部品」が $3x$ で「後ろの部品」が 4 だと考えればよいわけです。

　というわけで、残されている問題は、2 番目の部品も形が合っていのるかということです。そこで、確認してみることにしましょう。

　ここまでの考えでは、因数分解をすると「前の部品」は $3x$ になる予定で、「後ろの部品」は 4 になる予定ですよね。そこで、$2\times$ 後ろの部品 $\times$ 前の部品 を作ってみると $2\times4\times3x=24x$ となりますね。これは、ちゃんと $9x^2+24x+16$ という式の 2 番目の部品になっていますね。これで全て確認できました。

　$9x^2+24x+16$ という式は

$$\text{前の部品}^2 + 2\times\text{後ろの部品}\times\text{前の部品}+\text{後ろの部品}^2$$

という形をしていることがはっきりしたわけです。

　（こういうことを考えるときは、まず、因数分解しようとしている式の 1 番目の部品と 3 番目の部品に注目するのがよいのです。1 番目の部品と 3 番目の部品をよく見て、「前の部品」と「後ろの部品」が何になるのか予想をしてみるのです。予想ができたら、その予想を使って因数分解をしようとしている式の 2 番目の部品を作ってみます。その結果、因数分解しようとしている式の 2 番目の部品が本当に出来たら、予想は当たっているということになるわけです。）

　これで、もう答えはわかりましたね。「前の部品」は $3x$ で、「後ろの部品」は 4 なのですから、$9x^2+24x+16$ という式を因数分解すると、

$$(3x+4)^2$$

となるのです。

例 23　例 22 が理解できた人のための例です。

$9x^2-24x+16$ という式の因数分解について考えてみます。つまり、この式は、ある式を展開してできているらしいのですが、もとの式がどんな式だったか当てるわけです。そこで、この式を詳しく分析してみましょう。

この例の $9x^2-24x+16$ という式は例 22 の $9x^2+24x+16$ という式と似ていますね。どこが違うのかというと、2 番目の部品ですね。プラスマイナスが違っていますね。このことを頭に入れておいて、例 22 と同じように考えて因数分解を発見することにします。

この例の $9x^2+24x-16$ という式では

1 番目の部品は $9x^2$ ですが、これは $3x$ を二乗したものです。

3 番目の部品は 16 ですが、これは 4 を二乗したものです。

（ここまでは例 22 の $9x^2+24x+16$ という式と同じ考えですね。）

ですから、1 番目と 3 番目の部品を見る限り、$9x^2-24x+16$ という式は、

$$\text{前の部品}^2+2\times\text{後ろの部品}\times\text{前の部品}+\text{後ろの部品}^2$$

という形をしているわけです。つまり、「前の部品」が $3x$ で「後ろの部品」が 4 だと考えればよいわけです。

というわけで、残されている問題は、2 番目の部品も形があっていのるかということです。しかし、例 22 を覚えている人はもう気付いていると思いますが、この考えでは、$2\times$後ろの部品$\times$前の部品 を作ってみると $2\times4\times3x=24x$ となるので、$9x^2-24x+16$ という式の 2 番目の部品にはならないですよね。プラスマイナスが食い違ってしまいます。これは困りました。あー、でもちょっと待ってくださいね。プラスマイナスが食い違っているだけですよね。いいことを思いつきました。さっき 3 番目の部品である 16 を分析したとき、これは 4 を二乗したものだって考えたんですよね。でも 16 って、-4 を二乗したものって考えることもできますよね。そうすると、「後ろの部品」は -4 ということになるので、$2\times$ 後ろの部品 $\times$ 前の部品 を作ってみると $2\times(-4)\times3x=-24x$ となります。うまくいったじゃないですか。ちゃんと、$9x^2-24x+16$ という式の 2 番目の部品になりました。ですから、$9x^2-24x+16$ という式では、「前の部品」が $3x$ で「後ろ

の部品」が -4 だと考えれば、

$$\text{前の部品}^2 + 2 \times \text{後ろの部品} \times \text{前の部品} + \text{後ろの部品}^2$$

という形をしていることになるのです。

これで、もう答えはわかりましたね。「前の部品」は $3x$ で、「後ろの部品」は -4 なのですから、$9x^2 - 24x + 16$ という式を因数分解すると、

$$(3x-4)^2$$

となるのです。

問 58. 次の式を因数分解しなさい。

(1) $4x^2 + 12x + 9$　(2) $4x^2 - 12x + 9$

(3) $25a^2 + 40a + 16$　(4) $25a^2 - 40a + 16$

答えを見る

2.3.6 これまでに学んだ計算技術を使って、やや複雑な式を因数分解しよう

例 24　$ax^2 - 2ax - 8a$ という式の因数分解について考えてみます。つまり、この式は、ある式を展開してできているらしいのですが、もとの式がどんな式だったか当てるわけです。そこで、この式を詳しく分析してみましょう。

ここであなたに思い出してもらいたい大切なことがあります。それは、90 ページから始まる単元で学んだ、「共通因数があったらまず絶対にくくりだそう」ということです。覚えていますよね。共通因数というのは、因数分解しようとしている式の中にあるどの部品にも共通に含まれているもののことでしたね。

それではまず、$ax^2 - 2ax - 8a$ という式をよく見て共通因数があるのかどうか調べてみましょう。

この式は ax^2、$-2ax$、$-8a$ という 3 つの部品からできています。ぱっと見ただけでも、

どの部品にも a が共通に含まれていることがわかるますよね。（つまり、a は共通因数なわけです。）まぁ、もしかすると a の他にも共通因数があるかもしれませんが、そういうことは後で悩むことにしてとりあえず a をくくりだしてみます。すると、

$$ax^2 - 2ax - 8a = a(x^2 - 2x - 8)$$

ってなりますね。

　ではここでかっこで囲まれた式をよく見て、まだ何か共通因数が残っているのか考えましょう。かっこで囲まれている式は x^2、$-2x$、-8 という部品からできているわけですが、もう何も共通因数はありませんね。というわけで、共通因数をくくりだす計算は終わりました。

　では、これで因数分解も終わったことになるのでしょうか？できたばかりの式をよく見てみると、かっこで囲まれている式ですが、なんか見覚えある形ですよね。以前、こういう形の式を因数分解する練習をしましたよね。そうです、たすと「ナントカ」。かけると「ほにゃらら」になっている 2 つの数を探すと因数分解ができるという話です。覚えていますよね。今の場合は、「たすと -2」、「かけると -8」になる 2 つ数を探せばよいですよね。（こういうときはまず「かけるとほにゃらら」という手がかりから考えると早く見つかるのでしたね。）今さらどうやって探すのか教えたりしている余裕はありませんが、この 2 つの数って、-4 と 2 ですよね。というわけで、かっこで囲まれている $x^2 - 2x - 8$ という部分は因数分解をして $(x-4)(x+2)$ という式に取り替えることができるわけです。

　ここまでの説明が理解できた人は、次のように計算を進めればよいということがわかったはずです。もう一度初めから計算をしてみると、

$$\begin{aligned} ax^2 - 2ax - 8a &= a(x^2 - 2x - 8) \\ &= a(x-4)(x+2) \end{aligned}$$

となります。

　もうこれ以上「分解」する所はありませんね。ですからこれが答えです。

例 25　例 24 の説明がきちんと理解できた人のための例です。

$3ax^2+18ax-48a$ という式の因数分解について考えてみます。つまり、この式は、ある式を展開してできているらしいのですが、もとの式がどんな式だったか当てるわけです。そこで、この式を詳しく分析してみましょう。

例 24 で学んだように、とにかくどんな式を因数分解するにしても、共通因数があったらまず絶対にくくりだすのですよね。では、$3ax^2+18ax-48a$ という式をよく見て共通因数があるのかどうか調べてみましょう。

この式は $3ax^2$、$+18ax$、$-48a$ という 3 つの部品からできています。ぱっと見ただけでも、どの部品にも a が共通に含まれていることがわかるますよね。（つまり、a は共通因数なわけです。）まぁ、もしかすると a の他にも共通因数があるかもしれませんが、そういうことは後で悩むことにしてとりあえず a をくくりだしてみます。すると、

$$3ax^2+18ax-48a=a(3x^2+18x-48)$$

ってなりますね。

ではここでかっこで囲まれた式をよく見て、まだ何か共通因数が残っているのか考えましょう。かっこで囲まれている式は $3x^2$、$18x$、-48 という部品からできているわけですが、3、18、48 って数、気になりませんか？これ、どれも 3 の倍数ですよね。ですから $3x^2$、$18x$、-48 という部品には 3 が共通に含まれていますよね。（つまり、3 はも共通因数だったのです。）というわけで、次のように計算を進めることができますね。初めから計算を書いていくと、

$$\begin{aligned}3ax^2+18ax-48a&=a(3x^2+18x-48)\\&=3a(x^2+6x-16)\end{aligned}$$

となりますよね。

ではまた、ここでかっこで囲まれた式をよく見て、まだ何か共通因数が残っているのか考えましょう。

かっこで囲まれている式は x^2、$6x$、-16 という部品からできているわけですが、もう何

も共通因数はありませんね。というわけで、共通因数をくくりだす計算は終わりました。

では、これで因数分解も終わったことになるのでしょうか？できたばかりの式をよく見てみると、かっこで囲まれている式ですが、なんか見覚えある形ですよね。以前、こういう形の式を因数分解する練習をしましたよね。そうです、たすと「ナントカ」。かけると「ほにゃらら」になっている 2 つの数を探すと因数分解ができるという話です。覚えていますよね。今の場合は、「たすと $+6$」、「かけると -16」になる 2 つ数を探せばよいですよね。（こういうときはまず「かけるとほにゃらら」という手がかりから考えると早く見つかるのでしたね。）今さらどうやって探すのか教えたりしている余裕はありませんが、この 2 つの数って、-2 と $+8$ ですよね。というわけで、かっこで囲まれている $x^2+6x-16$ という部分は因数分解をして $(x-2)(x+8)$ という式に取り替えることができるわけです。

ここまでの説明が理解できた人は、次のように計算を進めればよいということがわかったはずです。もう一度初めから計算をしてみると、

$$\begin{aligned} 3ax^2+18ax-48a &= a(3x^2+18x-48) \\ &= 3a(x^2+6x-16) \\ &= 3a(x-2)(x+8) \end{aligned}$$

となります。

もうこれ以上「分解」する所はありませんね。ですからこれが答えです。

問 59. 次の式を因数分解しなさい。

(1) $ax^2+4ax+3a$　　(2) $-2ax^2-8ax-6a$

(3) $6x^2-54$　　(4) $2bx^2-4bx-16b$

(5) $4a^2b-bx^2$　　(6) x^2y-y

答えを見る

第3章

展開や因数分解を色々なことに役立てよう

3.1　展開や因数分解を使うと楽にかけ算やひき算ができることもあるという話

例 26　52^2 っていくつになるのか考えてみます。

52^2 って 52×52 というかけ算のことですよね。計算がとっても得意な人だったら暗算で、$52 \times 52 = 2704$ って計算してしまうかもしれませんね。そこまで計算が得意でない人は、まぁ、右のように、縦書きの筆算で計算をすればよいですよね。このように計算すれば何も問題はないわけですが、何か少し、気の利いた計算の仕方がないのか考えてみます。

$$\begin{array}{rr} & 52 \\ \times) & 52 \\ \hline & 104 \\ & 260 \\ \hline & 2704 \end{array}$$

52 という数は結構 50 に近い数ですよね。ところで今、52×52 を計算しようとしているわけですが、50×50 だったら割と簡単に計算できます。だって、50 という数は 1 の位は 0 なのですから、50×50 を計算するには、5×5 をして 25 を作ってからその答えに 0 を 2 つつければよいですよね。というわけで 50×50 の答えだったら簡単にわかるわけです。もちろん 50×50 の答えは 2500 ですよね。

ところで、52 という数は 50 よりたった 2 だけ多い数です。ですからきっと、52×52

の答えを求めるためには 50×50 という計算にに少し何か補正をすればよいと思われます。どんな補正をすればよいか詳しく考えてみます。

さっきも言ったように、52 という数は 50 よりたった 2 だけ多い数なのですよね。つまり 52 は $50+2$ なのですよね。ですから、

$$52^2 = (50+2)^2$$

ということですね。あれっ、この $(50+2)^2$ という式ですが、展開の学習でよく出てきた式の形をしていますね。そうです、たしか、

$$(\text{前の部品} + \text{後ろの部品})^2$$

という形の式を展開すると

$$\text{前の部品}^2 + 2 \times \text{後ろの部品} \times \text{前の部品} + \text{後ろの部品}^2$$

という形の式になるのでしたね。そうすると、今、「前の部品」は 50 で「後ろの部品」は 2 なのですから、

$$(50+2)^2 = 50^2 + 2 \times 2 \times 50 + 2^2$$

って計算してよいですよね。この計算を続けると、

$$50^2 + 2 \times 2 \times 50 + 2^2 = 2500 + 200 + 4 = 2704$$

となるわけです。

この計算では、52^2 という計算を、「割と簡単に計算ができる 50^2」と「補正の部分である $+2 \times 2 \times 50 + 2^2$」に分けて計算しているわけです。

例 27　199^2 っていくつになるのか考えてみます。

199^2 って 199×199 というかけ算のことですよね。計算がとっても得意な人だったら暗算で、$199 \times 199 = 39601$ って計算してしまうかもしれませんね。そこまで計算が得意でない人は、まぁ、右のよう

$$\begin{array}{r} 199 \\ \times)\ \ 199 \\ \hline 1791 \\ 1791 \\ 199 \\ \hline 39601 \end{array}$$

に、縦書きの筆算で計算をすればよいですよね。このように計算すれば何も問題はないわけですが、何か少し、気の利いた計算の仕方がないのか考えてみます。

199 という数はかなり 200 に近い数ですよね。ところで今、199×199 を計算しようとしているわけですが、200×200 だったら割と簡単に計算できます。だって、200 という数は 10 の位と 1 の位は 0 なのですから、200×200 を計算するには、2×2 をして 4 を作ってからその答えに 0 を 4 つつければよいですよね。というわけで 200×200 の答えだったら簡単にわかるわけです。もちろん 200×200 の答えは 40000 ですよね。

ところで、199 という数は 200 よりたった 1 だけ少ない数です。ですからきっと、199×199 の答えを求めるためには 200×200 という計算にに少し何か補正をすればよいと思われます。どんな補正をすればよいか詳しく考えてみます。

さっきも言ったように、199 という数は 200 よりたった 1 だけ少ない数なのですよね。つまり 199 は $200 - 1$ なのですよね。ですから、

$$199^2 = (200 - 1)^2$$

ということですね。あれっ、この $(200 - 1)^2$ という式ですが、展開の学習でよく出てきた式の形をしていますね。そうです、たしか、

$$(\text{前の部品} + \text{後ろの部品})^2$$

という形の式を展開すると

$$\text{前の部品}^2 + 2 \times \text{後ろの部品} \times \text{前の部品} + \text{後ろの部品}^2$$

という形の式になるのでしたね。そうすると、今、「前の部品」は 200 で「後ろの部品」は -1 なのですから、

$$(200 - 1)^2 = 200\ 2 + 2 \times (-1) \times 200 + (-1)^2$$

って計算してよいですよね。この計算を続けると、

$$200^2 + 2 \times (-1) \times 200 + (-1)^2 = 40000 - 400 + 1 = 39601$$

となるわけです。

この計算では、199^2 という計算を、「割と簡単に計算ができる 200^2」と「補正の部分である $+2 \times (-1) \times 2000 + (-1)^2$」に分けて計算しているわけです。

問 60. 例 26 と例 27 の説明が理解できた人のための問題です。
次の式を例 26 と例 27 の説明にでてできた方法を真似して計算しなさい。

(1) 68^2　　(2) 301^2

答えを見る

例 28　73×67 っていくつになるのか考えてみます。

$$\begin{array}{r} 73 \\ \times)\ \ 67 \\ \hline 511 \\ 438\ \ \\ \hline 4891 \end{array}$$

計算がとっても得意な人だったら暗算で、$73 \times 67 = 4891$ って計算してしまうかもしれませんね。そこまで計算が得意でない人は、まぁ、右のように、縦書きの筆算で計算をすればよいですよね。このように計算すれば何も問題はないわけですが、何か少し、気の利いた計算の仕方がないのか考えてみます。

73 という数は結構 70 に近い数ですよね。また、67 という数も結構 70 に近い数です。ところで今、73×67 を計算しようとしているわけですが、70×70 だったら割と簡単に計算できます。だって、70 という数は 1 の位は 0 なのですから、70×70 を計算するには、7×7 をして 49 を作ってからその答えに 0 を 2 つつければよいですよね。というわけで 70×70 の答えだったら簡単にわかるわけです。もちろん 70×70 の答えは 4900 ですよね。

ところで、73 という数は 50 よりたった 3 だけ多い数です。また、67 という数は 70 よりたった 3 だけ小さい数です。ですからきっと、73×67 の答えを求めるためには 70×70 という計算にに少し何か補正をすればよいと思われます。どんな補正をすればよいか詳しく考えてみます。

さっきも言ったように、73 という数は 50 よりたった 3 だけ多い数です。また、67 と

いう数は 70 よりたった 3 だけ小さい数です。つまり 73 は $70+3$ と考えることができ、67 は $70-3$ と考えることができなのですよね。ですから、

$$73 \times 67 = (70+3)(67-3)$$

ということですね。あれっ、この $(70+3)(67-3)2$ という式ですが、展開の学習でよく出てきた式の形をしていますね。そうです、たしか、

『$(★+△)(★-△)$ という形の式を展開すると $★^2-△^2$ という形になる』

のでしたね。

そうすると、今、★ は 70 で △ は 2 なのですから、

$$(70+3)(70-3) = 70^2 - 3^2$$

って計算してよいですよね。

この計算を続けると、

$$70^2 - 3^2 = 4900 - 9 = 4891$$

となるわけです。

この計算では、73×67 という計算を、「割と簡単に計算ができる 70^2」と「補正の部分である -3^2」に分けて計算しているわけです。補正の部分は 1 ケタの数になったのでひき算も割と楽にできたわけです。

ここで注意してほしいことがあります。このような計算ができたのは、73 と 67 がどちらも 70 から同じ数だけずれているからです。（73 と 67 ではどちらも 70 から 3 だけずれていますよね。）ですから、例えば 73×68 という計算には、この例で説明した方法は使えないのです。

問 61. 例 28 の説明が理解できた人のための問題です。

次の式を例 28 の説明にでてきた方法を真似して計算しなさい。

(1) 81×79　　(2) 398×402

答えを見る

例 29　$27^2 - 23^2$ っていくつになるのか考えてみます。

計算がかなり得意な人だったらもしかすると暗算で、$27^2 - 23^2 = 729 - 529 = 200$ って計算してしまうかもしれませんね。そこまで計算が得意でない人は、まぁ、右のように、縦書きの筆算でそれぞれ 27×27 と 23×23 計算をしてからひき算すればよいですよね。このように計算すれば何も問題はないわけですが、何かもう少し、気の利いた計算の仕方がないのか考えてみます。

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times \,) \;\; 27 \\ \hline 189 \\ 54 \\ \hline 729 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23 \\ \times \,) \;\; 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 729 \\ - \,) \; 529 \\ \hline 200 \end{array}$$

この $27^2 - 23^2$ という式の形、特徴ありますよね。こういう形、見覚えありませんか？そうです、これ、展開や因数分解のときに学んだ式の形をしていますよね。たしか、

『$\bigstar^2 - \triangle^2$ という形の式を因数分解すると $(\bigstar + \triangle)(\bigstar - \triangle)$ という形になる』

のでしたね。

そうすると、今、$\bigstar$ は 27 で $\triangle$ は 13 なのですから、

$$27^2 - 23^2 = (27 + 23)(27 - 23)$$

って計算してよいですよね。この計算を続けると、

$$(27 + 23)(27 - 23) = 50 \times 4 = 200$$

となるわけです。

この計算では最後に 50 と 4 というかけ算のしやすい数ができました。特に 50 という数ができたのはラッキーです。どうしてこのようなラッキーなことになったのかというと、もともとあった 2 つの数である 27 と 23 をたすと 1 の位が 0 になるからです。だから 50 のように 1 の位が 0 の数ができて最後のかけ算が楽になるのです。

例 30　$37^2 - 17^2$ っていくつになるのか考えてみます。

計算がかなり得意な人だったらもしかすると暗算で、$37^2 - 17^2 = 1369 - 289 = 1080$ って計算してしまうかもしれませんね。そこまで計算が得意でない人は、まぁ、右のように、縦書きの筆算でそれぞれ 37×37 と 17×17 計算をしてからひき算すればよいですよね。このように計算すれば何も問題はないわけですが、何かもう少し、気の利いた計算の仕方がないのか考えてみます。

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times)\quad 37 \\ \hline 259 \\ 111 \\ \hline 1369 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ \times)\quad 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1369 \\ -)\quad 289 \\ \hline 1080 \end{array}$$

この $37^2 - 17^2$ という式の形、特徴ありますよね。こういう形、見覚えありませんか？そうです、これ、展開や因数分解のときに学んだ式の形をしていますよね。たしか、

『$\bigstar^2 - \triangle^2$ という形の式を因数分解すると $(\bigstar + \triangle)(\bigstar - \triangle)$ という形になる』

のでしたね。

そうすると、今、$\bigstar$ は 37 で $\triangle$ は 17 なのですから、

$$37^2 - 17^2 = (37 + 17)(37 - 17)$$

って計算してよいですよね。この計算を続けると、

$$(37 + 17)(37 - 17) = 54 \times 20 = 1080$$

となるわけです。

この計算では最後に 20 というかけ算のしやすい数がでてきました。どうしてこのようなラッキーなことになったのかというと、もともとあった 2 つの数である 37 から 17 をひくと 1 の位が 0 になるからです。だから 20 のように 1 の位が 0 の数ができて最後のかけ算が楽になるのです。

問 62.　例 29 と例 30 の説明が理解できた人のための問題です。

次の式を例 29 と例 30 の説明にでてきた方法を真似して計算しなさい。

(1) $18^2 - 12^2$　　(2) $76^2 - 24^2$　　答えを見る

3.1.1　式の値を求めるときは式をマシにしてから代入しよう

例題 28　$x = 25$、$y = 7$ のとき、次の式の値はいくつになるのか計算しなさい。

$$x(x-3y)-(x+y)(x-2y)$$

解答

　なぁんにも工夫をしないで計算する人は、問題の式の x と y の所をいきなり 25 と 7 にして、

$$25\times(25-3\times 7)-(25+7)(25-2\times 7)=\cdots\cdots$$

って計算を始めてしまうのでしょうね。それでいけないわけではありません。でもこの計算ちょっと複雑ですよね。途中でたくさん間違えてしまいそうじゃないですか。そこでいきなり代入して計算するのはやめにすることにします。まず、問題の式の見かけをマシにしたほうが良さそうですね。というわけで問題の式を計算して、

$$\begin{aligned} x(x-3y)-(x+y)(x-2y) &= (x^2-3xy)-(x^2-xy-2y^2) \\ &= x^2-3xy-x^2+xy+2y^2 \\ &= -2xy+2y^2 \end{aligned}$$

としておきます。（この計算、大丈夫ですよね。展開の練習たくさんしたはずです。もう詳しくこの計算の仕方教えている余裕はありません。不安があるひとはすぐこのテキストで復習してください。）

　というわけで、この問題の答えを出すためには、$-2xy+2y^2$ という式の x と y の所を 25 と 7 にして計算すればよいわけです。ですから、

$$-2\times 25\times 7+2\times 7^2=-350+98=-252$$

となりますね。このように、式をマシにしてから代入すると、少し計算が楽になるわけ

です。

問 63.　$a = 24$、$b = 19$ のとき、次の式の値はいくつになるのか計算しなさい。

$$(a-2b)(a-3b)-a(a+6b)$$

答えを見る

例題 29　$x = 97$ のとき、次の式の値はいくつになるのか計算しなさい。

$$x^2+6x+9$$

解答

なぁんにも工夫をしないで計算する人は、問題の式の x の所をいきなり 97 にして、

$$97 \times 97 + 6 \times 97 + 9 = \cdots\cdots$$

って計算を始めてしまうのでしょうね。それでいけないわけではありません。でもこの計算ちょっと複雑ですよね。途中でたくさん間違えてしまいそうじゃないですか。そこでいきなり代入して計算するのはやめにすることにします。まず、問題の式の見かけをマシにしたほうが良さそうですね。でももしかすると「この x^2+6x+9 という式、これ以上マシになんかならないよ」と思った人もいるかもしれませんね。でも、マシになるのです。「マシにならない」と思った人と、「マシになる」と思っている人では、「マシ」の意味が違うのです。どういうことかというと、x^2+6x+9 という式を因数分解して、

$$x^2+6x+9=(x+3)^2$$

としてしまうとよいのです。（この計算、大丈夫ですよね。因数分解の練習たくさんしたはずです。もう詳しくこの計算の仕方教えている余裕はありません。不安があるひとはすぐこのテキストで復習してください。）

というわけで、この問題の答えを出すためには、$(x+3)^2$ という式の x の所を 97 にし

て計算すればよいわけです。ですから、

$$(97+3)^2 = (100)^2 = 100 \times 100 = 10000$$

となりますね。このように、式をマシにしてから代入すると、少し計算が楽になるわけです。

この計算の仕方では、ラッキーなことに途中で 100 という数が出てきましたね。どうして出てきたのかというと、もちろん 97 と 3 をたしたからですよね。どうして 3 をたすことになったのかというと、この問題の式は見かけを変えると、$(x+3)^2$ という式だからですよね。つまり、97 という式と $(x+3)^2$ という式は相性がよかったのです。（というより、こんな問題を作る人は、相性がよい数と式をあらかじめ用意してから問題を作るわけです。）

問 64. 例 29 の説明が理解できた人のための問題です。

$a = 302$ のとき、次の式の値を例 29 の説明にでてきた方法を真似して求めなさい。

$$x^2 - 4x + 4$$

答えを見る

問 65. $x = 4.75$、$y = 3.25$ のとき $x^2 - y^2$ の値を因数分解を利用して求めなさい。

答えを見る

第4章

文字式を利用して真実を追究しよう

4.1　文字はありとあらゆる数の代わりになることもできる

何度もいいますが、数学では、文字は数の代わりに使われます。このことを念のため、簡単におさらいしておきます。

数学で文字を使うときは、主に次の三つの場合があります。

(1) その数がいくつなのか知っているが、いくつなのかは言いたくないので文字を使う場合

あなたは、ある数を頭の中に思い浮かべているとしましょう。でも、ほかの人には、その数がいくつなのかは言いたくないとします。こんなとき、あなたは文字を使って「a という数があるとします。」と言えばよいのです。

(2) その数がいくつなのかわからないので文字を使う場合

ある人が、ある日、友達から突然次のような質問をされました。

「2 乗すると 5 になる数ってあるのかなぁ？」この人は、一生懸命考えたのですが、そんな数は見つけられませんでした。しかし、「そんな数ないよ。」って断言できるほど考えたわけでもありません。そこで、(あるのか無いのか良くわからないのですが)、この人は、「2 乗すると 5 になる数」を「謎の数 x」と呼ぶことにしました。つまり、その数はいくつなのかわからないので、文字を使って x と呼ぶことにした

のです。

(3) いろいろな数に当てはまる話をするときに文字を使う場合

今、あなたは、「偶数」の話をしようとしているとします。「偶数」って一言で言っても、0 とか 2 とか 4 とか 6 とか 8 とか $\cdots$ たくさんありますよね。もし、あなたが、どんな偶数にも当てはまる話をしたいのだったら、どれかひとつの偶数を決めて話をするわけにはいかないでしょう。つまり、もし、あなたが偶数を「4」に決めて話をしていくと、あなたの話は 4 という偶数だけに当てはまる話になってしまいます。偶数は、4 のほかにも 0 とか 6 とかいろいろあるのですが、あなたは、0 や 6 に当てはまる話はできなくなるのです。これでは困りますね。数学では、そんなときに文字を使います。あなたは、文字を使って、「a という偶数があるとします」と言えばよいのです。そうすると、a は、0 にもなれるし、2 にもなれるし、4 にもなれるし、6 にもなれるし、8 にもなれるし、$\cdots$ どんな偶数にもなれるのです。

これから、次の節で「証拠を見せる話」を学びます。そのような話をするときに大切になるのは、(3) の場合、つまり「 いろいろな数に当てはまる話をするときに文字を使う」という場合です。文字を使うことによって、ありとあらゆる数の話を一度にすることができるようになるからです。

4.2　文字式を使って証拠を見せよう

4.2.1　どうすれば決着がつくかな？

例を使って説明しましょう。

例 31　達也と賢治が話をしています。

達也：おれ、昨日、家で弟に算数の宿題を教えたんだけど、そのとき弟が変なことに気がついたんだ。

賢治：へぇー、どんなこと？

達也：うーん、じゃあ順番に説明していくね。まず、弟の宿題なんだけど、

$$4 \times 4 - 3 \times 3$$

とか、

$$5 \times 5 - 4 \times 4$$

とか、

$$6 \times 6 - 5 \times 5$$

とか、

$$7 \times 7 - 6 \times 6$$

とか、

$$8 \times 8 - 7 \times 7$$

とか、そういう計算問題がずっと続くんだ。最後の問題はたしか、

$$100 \times 100 - 99 \times 99$$

だったかな。

賢治：へぇ、変わった問題だね。

達也：それでね、うちの弟は、途中でうんざりしてきて、「もうやだー」とか言い出して、宿題ほったらかしてどっかへ行っちゃったんだ。

賢治：そりゃぁそうだな。誰だっていやになる。

達也：そのまま夜になって夕ご飯のあと弟はボーっとテレビを見てたんだけど、「あっ、さっきの宿題なんか変だ。気になる。」とか言い出したんだ。「えー、どういうこと？」って俺が聞いたら弟は宿題を持ってきてなにやら計算しだした。

賢治：へー、何が変だったの？

達也：いやー、何と、さっきの計算、たし算するだけで簡単に答えが出るって言うんだ。ホントだよ。今計算してみせるからな。

まず

$$4 \times 4 - 3 \times 3$$

って計算だけど、普通は 4×4 と 3×3 をやって 16 と 9 にしてからひき算で $16 - 9 = 7$ ってやるよね。でも弟は「そんなことしなくても 4 たす 3 するだけでいい」とか言うんだ。

賢治：たしかにたし算するだけで正しい答えと同じになるな。でも偶然じゃん？

達也：いやー、どうも偶然じゃないみたいんだ。また計算してみせるよ。

今度は

$$5 \times 5 - 4 \times 4$$

って計算だけど、普通は 5×5 と 4×4 をやって 25 と 16 にしてからひき算で $25 - 16 = 9$ ってやるよね。でも弟によると、そんなことしなくても 5 たす 4 するだけでいいというわけだ。

賢治：今度もたしかにたし算するだけで正しい答えと同じになるな。でもやっぱり偶然じゃん？

達也：いやー、やっぱり偶然じゃないみたいんだ。この先いくら計算してみてもそうなってる。今度はお前計算してみなよ。

賢治：いいよ。じゃあ、次は

$$6 \times 6 - 5 \times 5$$

って計算だな。普通は 6×6 と 5×5 をやって 36 と 25 にしてからひき算で $36 - 25 = 11$ ってやるよね。でも達也の弟の言ったとおりにやると、6 たす 5 するだけでいいってことだけど、ホントだ、正しい答えがでる。

　どういうことだよこれ。念のため次も試してみよう。次は

$$7 \times 7 - 6 \times 6$$

って計算だな。普通は 7×7 と 6×6 をやって 49 と 36 にしてからひき算で $49 - 36 = 13$ ってやるよな。でも達也の弟の言ったとおりにやると、7 たす 6 するだけでいいってことだけど、マジかよ。正しい答えがでる。偶然じゃないみたいだな。でもなんでなんだよ。

達也：へー、賢治も成長したんだね。「なんでなんだよ」だって。去年の賢治だったら、理由がなくても納得しちゃってたよね。

賢治：なに言ってんだよ。俺は去年も「証拠のないことは信じない男」だったぜ。たしかに今の所は達也の弟の言ったとおりになってる。でもこの先、ずっと達也の弟の言ったとおりになっている保証はないわけだ。例えば、$100^2 - 99^2$ の答えは、達也の弟の言うことを信じると $100 + 99 = 199$ ってすぐに出せるけど、本当にこんな計算でいつも正しい答えが出るのか不安だからな。

達也：そういうことだね。

さて、2 人の会話、内容はわかりましたか？

達也の弟が発見したのは、

> 「続いている 2 つの数があるとき、大きいほうの数を 2 乗したものから小さい方の数を 2 乗したものをひくと、必ず答えは初めにあった 2 つの数の合計になっている。」

ということですよね。しかし「必ずそうなる証拠」は今の所ないのです。本当に計算してみたら、確かに、$4 \times 4 - 3 \times 3$ は $4 + 3$ と同じになりました。また、$5 \times 5 - 4 \times 4$ は $5 + 4$ と同じになり、$6 \times 6 - 5 \times 5$ は $6 + 5$ と同じになり、$7 \times 7 - 6 \times 6$ は $7 + 6$ と同じになるということも本当に計算してわかりました。しかし、このほかにも、いくらでもキリなく「続いている 2 つの数」があります。いくらでもキリなくあるのですから、「ほらね、全部計算して見せたけど、全部言ったとおりになってたでしょ。」というわけにはいかないのです。ではどうすれば、誰もが納得できる証拠を見せることができるのでしょうか。

4.2.2　決着をつけるには

前の節の例 31 では、

「続いている 2 つの数があるとき、大きいほうの数を 2 乗したものから小さい方の数を 2 乗したものをひくと、必ず答えは初めにあった 2 つの数の合計になっている。」

という話が出てきましたね。ただ、その話が真実である証拠が見つかっていません。なぜ、証拠を見つけるのが難しいかというと、前にも言ったとおり、「続いている 2 つの数」なんていくらでもあるからです。あなたが $4 \times 4 - 3 \times 3$ や $5 \times 5 - 4 \times 4$ を計算してみせて「ほら、答えは初めからあった 2 つの数の合計になったでしょ。」と言っても、誰かに「じゃあ、$658^2 - 657^2$ はどうなの？」と言われたら、あなたはまた計算してみせなくてはいけません。（あなただって、きっと $658^2 - 657^2$ の答えが 658 と 657 の合計になるかどうかすぐにはわからないでしょ？）

しかしたとえあなたが $658^2 - 657^2$ を計算して、「ほら、やっぱり答えは初めからあった 2 つの数の合計になったでしょ。」と言っても、また誰かが「じゃあ、$712^2 - 711^2$ はどうなの？」と言って来たらあなたはまた計算しなくてはいけなくなります。これでは、いつまでたってもキリがありませんね。

そこで、文字の登場です。文字は数の代わりになるからです。しかもいろいろな数の代わりになるのでしたね。でも、どのように文字を使えばよいのでしょうか。

この話には「2 つの続いている数」というのが出てきます。（本当は「2 つの続いている自然数」というべきです。この先はちゃんと「自然数」と書くことにします。あなたはもちろん、「自然数」は知ってますよね。もし忘れていたら、自分で調べなおしてからこの先を読んでください。）

何度も言っていますが「2 つの続いている自然数」なんていうものは、いくらでもあるわけです。そこで、ここでは文字を使うことにして、「2 つの続いている自然数のうち小さい方の数」を n と呼ぶことにしましょう。文字を使ったのですから n は 6 になることもできますし、52 になることもできますし、106 になることもできますし、625 になることもできますし、2905 になることもできますし $\cdots$ ありとあらゆる数になれるわけです。これは重大な進歩です。これで、キリなくいくらでもある「続いている 2 つの自然数」と

いうのを全て議論できるようになるからです。

今、「続いている 2 つの自然数のうち小さい方の数」を n と呼ぶことにしました。そして、2 つの自然数は続いているのですから、大きいほうの数は小さいほうの数より絶対に 1 増えているはずです。これは疑いようがありません。そもそも「続いている」というのは「1 増えている」ということなのですから。そうすると、「2 つの続いている自然数のうち大きい方の数」は $n+1$ のはずです。というわけで、「2 つの続いている自然数」を n、$n+1$ として、ありとあらゆる場合を議論できるようになりました。でもまだ、証拠を見せていくためのスタート地点に立っただけです。これから証拠を見つける必要があります。

そこで、話を先に進める前にこの話のゴールを確認しておきましょう。たしか、「・・・すると (必ず）初めにあった 2 つの自然数の合計になる」ということでしたね。

それではいよいよ「証拠を見せる話」に入りましょう。つまり、

> 「続いている 2 つの数があるとき、大きいほうの数を 2 乗したものから小さい方の数を 2 乗したものをひくと、必ず答えは初めにあった 2 つの数の合計になっている。」

という主張の証拠を見せようと思います。

「続いている 2 つの自然数」などというものはいくらでもキリなくあるのです。そこで、文字を登場させることにしたのでした。**「続いている自然数のうちの小さい法の数」を n としておけば、「続いている自然数のうち大きいほうの数」は $n+1$ とあらわすことができる**わけです。（これで「 いくらでもキリなくある続いている 2 つの自然数」を全て扱うことができるようになるわけですね。2 つの数が 8、9 であろうが、956、957 であろうが扱えるのです。だって n はどんな自然数にもなれるのですから。）

次は、この続いている 2 つの自然数 n、$n+1$ を使って主張が本当かどうか調べることにします。大きいほうの自然数 $n+1$ を 2 乗したものから小さいほうの自然数 n を 2 乗したものをひくとどうなるのか知りたいので、

$$(n+1)^2 - n^2$$

を計算するわけです。それではこれから、この式をマシにしていきますがどうすればよいでしょうか。もちろんまず $(n+1)^2$ を展開したほうがよいですね。そのようにしていくと、

$$\begin{aligned}(n+1)^2-n^2&=(n^2+2n+1)-n^2\\&=2n+1\end{aligned}$$

となります。つまり、「続いている 2 つの自然数 $n+1$ と n に対して、大きいほうの自然数を 2 乗したものから小さいほうの自然数を 2 乗したものをひいてできる数」は $2n+1$ という数であることがわかりました。ところで、こういう計算をしたとき、計算の結果が初めからあった 2 つの数の合計」になっているのかどうかを知りたいのですよね。そこで、初めからあった 2 つの数の合計」を計算してみることにします。もちろん初めからあった 2 つの数」というのは $n+1$ と n ですよね。というわけで、この 2 つの数をたしてみます。すると、

$$(n+1)+n=n+1+n=2n+1$$

と計算できます。これ、ちゃんと、さっき求めた、「続いている 2 つの自然数 $n+1$ と n に対して、大きいほうの自然数を 2 乗したものから小さいほうの自然数を 2 乗したものをひいてできる数」と一致してますよね。

これで、**「続いている 2 つの自然数 $\boldsymbol{n+1}$ と $\boldsymbol{n}$ に対して、大きいほうの自然数を 2 乗したものから小さいほうの自然数を 2 乗したものをひいてできる数」と「初めからあった 2 つの自然数 $\boldsymbol{n+1}$、$\boldsymbol{n}$ をたしてみた数」はどちらも $\boldsymbol{2n+1}$ という数になることがわかった**のです。つまり、「続いている 2 つの自然数 $n+1$ と n に対して、大きいほうの自然数を 2 乗したものから小さいほうの自然数を 2 乗したものをひくと、必ず答えは初めにあった 2 つの自然数の合計になっている。」という主張の証拠が見つかったのです。

ここまでの話、わかってもらえましたか？理解できたかどうか、次の問で確認することにしましょう。

問 66.　次の会話に適切な言葉、数、式を書きなさい。

A：私は、とても面白いことを発見しました。それは

> 続いている 2 つの自然数を用意して、「大きい方の自然数を 2 乗してできる数」から「小さい方の自然数を 2 乗してできる数」をひくと、必ず答えは「初めに用意した 2 つの自然数の合計」になっている。

ということです。

B：へー、そうなんですか。でも本当ですか？

A：本当ですよ。じゃあ、続いている 2 つの自然数として 4 と 5 を用意してやってみますね。まず $5^2 - 4^2$ を計算してみます。5 を 2 乗すると 25 ができて 4 を 2 乗すると 16 ができるので、さらにひき算をすると $25 - 16 = 9$ ってなりますよね。一方、$5 + 4$ って 9 ですよね。ほら同じ数になったでしょ。

B：それだけじゃぁ。まだまだ信じられないですよ。だって、続いている 2 つの自然数って、他にもあるでしょ。あなたがやって見せたのは、4 と 5 のときの話だけでしょ。

A：いいですよ。じゃあ、今度は 6 と 7 でやってあげますね。まず $7^2 - 6^2$ を計算してみます。7 を 2 乗すると 49 ができて 6 を 2 乗すると 36 ができるので、さらにひき算をすると $49 - 36 = 13$ ってなりますよね。一方、$7 + 6$ って 13 ですよね。ほら同じ数になったでしょ。どうですか？これで信じてもらえますか？

B：ダメですよ。続いている 2 つの自然数なんて、他にもまだまだあるじゃないですか。いくらそんな計算見せられても私は反論できますよ。「じゃあ、895 と 896 のときは？」とか言えばいいんですから。そうしたら、きっとあなたは $896^2 - 895^2$ と $896 + 895$ を計算して見せて、「ほら同じ数になったでしょ。」とか言うんでしょうけど、私はまた「 じゃあ、5244 と 5245 のときは？」とか言えば反撃できますよね。これじゃあ、いつまでたっても決着つかないですよ。

A：確かにそうですね。では、私に提案があります。続いている 2 つの自然数をはっきり

決めてしまうと、その場合の話しかできなくなるので、続いている 2 つの自然数を、文字を使って n、$\boxed{}$ とすることにしましょう。

B：いいですよ。続いている 2 つの自然数ですから、大きいほうの数は小さいほうの数より必ず 1 増えているのでそうしたのですね。小さい方の自然数を n としておけば、次の自然数は $n+1$ のはずですからね。

A：じゃぁ、話を進めますね。私は、『続いている 2 つの自然数を用意して、「大きい方の自然数を 2 乗してできる数」から「小さい方の自然数を 2 乗してできる数」をひくと、必ず答えは「初めに用意した 2 つの自然数の合計」になっている』と主張しているのですから、今用意した n と $n+1$ を使って『「大きい方の自然数を 2 乗してできる数」から「小さい方の自然数を 2 乗してできる数」をひいてできる数』と『初めに用意した 2 つの自然数の合計』を計算してみることにします。つまり $(n+1)^2-n^2$ と $(n+1)+n$ を計算することにします。

まず、$(n+1)^2-n^2$ を計算すると、

$$\begin{aligned}(n+1)^2-n^2 &= \left(\boxed{}\right)-n^2\\ &= \boxed{}\end{aligned}$$

ってなりますよね。

一方、$(n+1)+n$ を計算すると

$$(n+1)+n=\boxed{}$$

ってなりますよね。どうですか、ちゃんと同じになったでしょ。

ですから、続いている 2 つの自然数があるときに、『「大きい方の自然数を 2 乗してできる数」から「小さい方の自然数を 2 乗してできる数」をひいてできる数』と『初めに用意した 2 つの自然数の合計』は必ず同じ数になるのです。 答えを見る

問 67. ある人がいいました。

続いている 2 つの「偶数」を用意して、「大きい方の偶数を 2 乗してできる数」から「小さい方の偶数を 2 乗してできる数」をひくと、必ず答えは「初めに用意した 2 つの偶数の合計」になっている。

さて、この人のいっていることは本当でしょうか。本当だと思う人は証拠を見せなさい。うそだと思う人も証拠を見せなさい。 答えを見る

問 68. ある人がいいました。

続いている 2 つの「奇数」をかけて、さらに 1 をたすと必ず 4 の倍数ができる。

さて、この人のいっていることは本当でしょうか。本当だと思う人は証拠を見せなさい。うそだと思う人も証拠を見せなさい。 答えを見る

4.2.3　文字式を使って証拠を見せる練習をしよう

ここまでの説明で、証拠の見せ方は大体わかってもらえたことと思います。そこでこれから、もっといろいろな問題で、きちんと証拠を見せる練習をします。

これから、様々な人がいろいろな主張をします。あなたはその主張が正しいのか間違っているのか探りを入れなくてはなりません。そして、正しいと思ったときも、間違っていると思ったときも証拠を見せなくてはなりません。ところで、証拠をきちんと見せるには、「そもそも・・・とは」という話が理解できていないといけませんね。どういうことかというと、例えば、3 の倍数が出てくる主張の証拠を見せようとするときは、「そもそも 3 の倍数とは $3\times$ 自然数 という形に表せる数のこと」ということを理解していなくてはならないのです。そこで、証拠を見せる練習に入る前に、「そもそも・・・とは」という話をきちんとできるようにする練習をします。

例題 30　次の問に答えなさい。

(1) 偶数とはそもそもどんな数のことですか。また、偶数を文字を使ってあらわすとしたら、どんな式であらわせばよいですか。

(2) 奇数とはそもそもどんな数のことですか。また、奇数を文字を使ってあらわすとしたら、どんな式であらわせばよいですか。

(3) 4 の倍数とはそもそもどんな数のことですか。また、 4 の倍数を文字を使ってあらわすとしたら、どんな式であらわせばよいですか。

解答

(1) 偶数とはそもそも 2 で割り切れる数のことでしたね。別の言い方をすると、「ある自然数を 2 倍してできている数」のことです。ですから、「そもそも偶数とは、ある自然数 n を使って、$2n$ の形に表すことのできる数」ということです。実際、n が 1 という自然数ならば、 $2n$ は 2 という偶数になりますし、n が 2 という自然数ならば、 $2n$ は 4 という偶数になりますし、n が 3 という自然数ならば、 $2n$ は 6 という偶数になりますし、n が 4 という自然数ならば、 $2n$ は 8 という偶数になりますし $\cdots$ というように、$2n$ という式でどんな偶数も扱うことができるようになっているわけです。

(2) 奇数とはそもそも 2 でわり切れない数のことでしたね。「2 で割り切れない数」は「2 でわり切れる数」のとなりにある数です。つまり「2 で割り切れない数」は「2 でわり切れる数」から 1 をひいて作ることができます。ところで偶数は 2 で割りけれる数でした。ですから、「そもそも奇数とは偶数より 1 小さい数である」と考えることもできます。「偶数は、ある自然数 n を使って $2n$ の形にあらわすことのできる数」だったわけですから、「そもそも奇数とはある自然数 n を使って $2n-1$ の形にあらわすことのできる数」ということになります。実際、n が 1 という自然数ならば、$2n-1$ は 1 という奇数になりますし、n が 2 という自然数ならば、$2n-1$ は 3 という奇数になりますし、n が 3 という自然数ならば、 $2n-1$ は 5 という奇数になりますし、n が 4 という自然数ならば、 $2n-1$ は 7 という奇数になりますし $\cdots$ というように、$2n-1$ という式でどんな奇数も扱うことができるようになっているわけです。

(3) 4 の倍数とはそもそも 4 で割り切れる数のことでしたね。別の言い方をすると、「あ

る自然数を 4 倍してできている数」のことです。ですから、「そもそも 4 の倍数とは、ある自然数 n を使って、$4n$ の形に表すことのできる数」ということです。実際、n が 1 という自然数ならば、 $4n$ は 4 という 4 の倍数になりますし、n が 2 という自然数ならば、 $4n$ は 8 という 4 の倍数になりますし、n が 3 という自然数ならば、 $4n$ は 12 という 4 の倍数なりますし、n が 4 という自然数ならば、 $4n$ は 16 という 4 の倍数になりますし $\cdots$ というように、$4n$ という式でどんな 4 の倍数も扱うことができるようにっているわけです。

問 69. 次の文の空欄に正しい言葉、数、式を書きなさい。

5 の倍数とはそもそも $\boxed{}$ で割り切れる数のことです。別の言い方をすると、「ある自然数を $\boxed{}$ 倍してできている数」のことです。ですから、「そもそも 5 の倍数とは、ある自然数 n を使って、 $\boxed{}$ の形に表すことのできる数」ということになります。実際、n が 1 という自然数ならば、 $5n$ は $\boxed{}$ という 5 の倍数になりますし、n が 2 という自然数ならば、 $5n$ は $\boxed{}$ という 5 の倍数になりますし、n が 3 という自然数ならば、 $5n$ は $\boxed{}$ という 5 の倍数なりますし、n が 4 という自然数ならば、 $5n$ は $\boxed{}$ という 5 の倍数になりますし $\cdots$ というように、 $\boxed{}$ という式でどんな 5 の倍数も扱うことができるようにっているわけです。

答えを見る

次も、ある数たちを文字であらわす練習です。

例題 31　次の数たちを文字で表すとしたら、どうすればよいですか。

(1)　4 つの続いている自然数　　(2)　2 つの偶数

(3)　2 つの続いている偶数

解答

(1) 「4 つの続いている自然数」ですから、例えば「7、8、9、10」とか「54、55、56、57」とか「2514、2515、2516、2517」とかがあるわけです。もちろん他にもいくらでもあります。しかし、「続いている」自然数なのですから、4 つの自然数は必ず 1 ずつ増えているわけです。ですから「4 つの自然数のうち一番小さいもの」を n

としておけば、次のは $n+1$、その次のは $n+2$、最後のは $n+3$ とあらわすことができるわけです。まとめておくと、

> 4 つの続いている自然数のうち一番小さいものを n とすると、4 つの続いている自然数は、n、$n+1$、$n+2$、$n+3$ とあらわされるということです。

補足 :「4 つの続いている自然数のうち二番目に小さいもの」を n として考えることもできます。そうすると、一番小さいものは $n-1$ とあらわされます。また 3 番目に大きいものは $n+1$、一番大きいものは $n+2$ とあらわされるのです。まとめておくと、

> 4 つの続いている自然数のうち二番目に小さいものを n とすると、4 つの続いている自然数は、$n-1$、n、$n+1$、$n+2$ とあらわされる

ということです。

(2) 「2 つの偶数」ですから、例えば「24 と 80」とか「4 と 624」とか「8624 と 580」とかいろいろあるわけです。（この問題では、2 つの偶数の間には特に関係はありません。2 つの偶数は、続いていなくても良いわけです。）

前に例題 30 で学んだように、そもそも偶数とはある自然数を使って $2\times$ 自然数の形にあらわすことのできる数でしたね。ところで今、この問題では偶数が 2 つ出てきます。そして 2 つの偶数の間には特に関係はありません。ですから 2 つの文字が必要になります。そこで文字 m と 文字 n を使うことにします。そうすると、

> 2 つの偶数は、ある自然数 m と n を使って、それぞれ $2m$、$2n$ とあらわすことができる

ということになります。

(3) 「2 つの続いている偶数」ですから、例えば「24 と 26」とか「6 と 8」とか「8624 と 8626」とかいろいろあるわけです。

前に例題 30 で学んだように、そもそも偶数とはある自然数を使って $2\times$ 自然数の形にあらわすことのできる数でした。この問題には 2 つの偶数が出てきますが、2 つの偶数は「続いている」のですから、大きいほうの偶数は小さいほうの偶数よ

り必ず 2 増えているはずです。ですから、ある自然数 n を使って小さいほうの偶数を $2n$ とあらわすことにすれば、大きいほうの偶数は $2n+2$ とあらわされることになるのです。つまり、

> 2 つの続いている偶数は、ある自然数 n を使って、$2n$、$2n+2$ とあらわすことができる

ということです。

問 70. 例題の説明がよく理解出来た人のための問題です。

次の数たちを文字で表すとしたら、どうすればよいですか。

(1) 5 つの続いている自然数　　(2) 2 つの奇数

(3) 2 つの続いている奇数

答えを見る

それでは本題に入ることにしましょう。

例題 32　ある人が次のような主張をしました。

> 2 つの続いている偶数があるとします。「その 2 つの偶数をかけてできる数」と「その 2 つの偶数の間にある奇数を 2 乗してから 1 をひいてできる数」は必ず同じになります。

さて、この人の主張は本当でしょうか。本当だと思う人は証拠を見せなさい。うそだと思う人も証拠を見せなさい。

解答

念のため確認しておきます。この人の主張に出てくる 2 つの偶数は、続いている偶数ですね。例えば、2 と 4 とか、4 と 6 とか、6 と 8 とか、8 と 10 とか $\cdots$ というようになっているときの話です。（ですから 2 つの偶数が 4 と 8 とか、8 と 14 のようになっていてはいけません）

それでは本題に入りましょう。

まず、この人の主張が本当っぽいか、うそっぽいか、少し探りを入れたほうが良いですね。そこで、何でも良いから 2 つ、続いている偶数を思い浮かべて見ます。そうです

ねぇ、4 と 6 にしてみましょうか。そうすると、「2 つの偶数をかけてできる数」を計算してみると $4 \times 6 = 24$ になりますね。また、「2 つの偶数の間にある奇数」は 5 ですから「2 つの偶数の間にある奇数を 2 乗してから 1 をひいてできる数」を計算してみると $5^2 - 1 = 25 - 1 = 24$ ですね。あっ、この人の言っていたとおり同じになりました。

もう少し探りを入れましょうか。次は、2 つの続いている偶数を 8 と 10 にしてみましょう。そうすると、「2 つの偶数をかけてできる数」を計算してみると $8 \times 10 = 80$ になりますね。また、「2 つの偶数の間にある奇数」は 9 ですから「2 つの偶数の間にある奇数を 2 乗してから 1 をひいてできる数」を計算してみると $9^2 - 1 = 81 - 1 = 80$ ですね。あっ、やっぱりこの人の言っていたとおり同じになりました。どうも、この人の主張は本当っぽい気がしてきました。そこで、文字を使って説明ができるかチャレンジしてみます。

この人の主張には 2 つの続いている偶数が出てきます。ところで、そもそも偶数ってなんでしょう。「2 とか 4 とか 6 とか 8 とかのこと」などと言っていてもしかたがありませんね。例題 30 をちゃんと学んだ人はもうわかるはずですが、そもそも偶数とは「$2\times$ 自然数」の形に表すことのできる数なのでしたね。言葉で言うと、「ある自然数に 2 をかけてできている数」のことを、そもそも偶数と呼んでいるのです。（だって、ある自然数を 1 にすれば 2 という偶数ができますし、ある自然数を 2 にすれば 4 という偶数ができますし、ある自然数を 3 にすれば 6 という偶数ができますし、ある自然数を 4 にすれば 8 という偶数ができますし、ある自然数を 5 にすれば 10 という偶数ができますし $\cdots$ というようになっているからです。）

一番初めに確認したように、この人の主張には 2 つの続いている偶数がでてくるわけです。「続いている」のですから、大きいほうの偶数は小さいほうの偶数より必ず 2 だけ大きいわけです。そこで、この人の主張に出てくる 2 つの続いている偶数を、それぞれ $2n$ と $2n+2$ としてみることにします。ただし、ここで出てきた n は自然数でなくてはいけませんよね。（こうしておけば全ての場合を扱っていることになりますね。）

それでは、2 つ続いている偶数 $2n$、$2n+2$ を使って、この人のいうとおりになるのかどうか確認することにしましょう。

まず、「2 つの偶数をかけてできる数」を計算してみると、

$$2n \times (2n+2) = 4n^2 + 4n$$

となりますね。

次は、「2 つの偶数の間にある奇数を 2 乗してから 1 をひいてできる数」を計算することにします。ところで「2 つの偶数の間にある奇数」は何かというと、2 つの偶数が $2n$ と $2n+2$ なのですから、間にある数は $2n+1$ ですね。というわけで、「2 つの偶数の間にある奇数を 2 乗してから 1 をひいてできる数」は、

$$(2n+1)^2 - 1 = (4n^2 + 4n + 1) - 1 = 4n^2 + 4n$$

となりますね。

どうですか、「2 つの偶数をかけてできる数」と「2 つの偶数の間にある奇数を 2 乗してから 1 をひいてできる数」はどちらも $4n^2 + 4n$ になるので同じ数です。つまりこの人の主張は正しいという証拠が見つかったのです。

問 71. 例題 32 がきちんと理解できた人のための問題です。以下の文の空欄に正しい式、数、言葉を記入しなさい。

ある人が次のような主張をしました。

> 3 つの続いている自然数があるとします。「一番大きい自然数を 2 乗したものから一番小さい自然数を 2 乗したものをひいてできる数」と「真ん中の自然数を 4 倍してできる数」は必ず同じになります。

さて、いろいろ探りを入れたところ、どうもこの人の主張は本当であるという気がしてきました。そこで、証拠をきちんと見せようと思います。ただし、ここでは「テストの答案っぽく」説明を書いてみようと思います。

3 つの続いている自然数のうち、一番小さい自然数を n とします。すると、真ん中の自然数は $\boxed{}$ 、一番大きい自然数は $\boxed{}$ とあらわされます。

「一番大きい自然数を 2 乗したものから一番小さい自然数を 2 乗したものをひいてでき

る数」を計算してみると、

$$\begin{aligned}\left(\boxed{}\right)^2 - \boxed{}^2 &= \left(\boxed{}\right) - \boxed{} \\ &= \boxed{}\end{aligned}$$

となります。

一方、「真ん中の自然数を 4 倍してできる数」を計算してみると、

$$\boxed{} \times 4 = \boxed{}$$

となります。

というわけで、「一番大きい自然数を 2 乗したものから一番小さい自然数を 2 乗したものをひいてできる数」と「真ん中の自然数を 4 倍してできる数」はどちらも $\boxed{}$ という式になりました。つまり、「一番大きい自然数を 2 乗したものから一番小さい自然数を 2 乗したものをひいてできる数」と「真ん中の自然数を 4 倍してできる数」は $\boxed{}$ じ数であるということが証明されたのです。

答えを見る

例題 33　ある人が次のような主張をしました。

> 2 つの偶数があるとします。2 つの偶数は続いていなくてもかまいません。このとき、大きいほうの偶数を 2 乗したものから小さい方の偶数を 2 乗したものをひくと必ず 4 の倍数になります。

さて、この人の主張は本当でしょうか。本当だと思う人は証拠を見せなさい。うそだと思う人も証拠を見せなさい。

解答

念のため確認しておきます。この人の主張に出てくる 2 つの偶数は、続いていなくてもよいのですね。ですから、例えば、2 と 4 とか、4 と 6 とか、6 と 8 とか、8 と 10 とか $\cdots$ というように続いている偶数でもよいですし、4 と 8 とか、8 と 14 とか、16 と 224 のように続いていない偶数でもよいわけです。

それでは本題に入りましょう。

まず、この人の主張が本当っぽいか、うそっぽいか、少し探りを入れたほうが良いですね。そこで、何でも良いから 2 つ偶数を思い浮かべて見ます。そうですねぇ、2 と 8 にしてみましょうか。そうすると、「大きいほうの偶数を 2 乗したものから小さい方の偶数を 2 乗したものをひく」と $8^2 - 2^2 = 64 - 4 = 60$ となります。ところで 60 は 4 の倍数ですよね。というわけで、この人の言っていたとおりになりました。

もう少し探りを入れましょうか。次は、2 つの続いている偶数を 6 と 10 にしてみましょう。そうすると、「大きいほうの偶数を 2 乗したものから小さい方の偶数を 2 乗したものをひく」と $10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$ となります。ところで 64 は 4 の倍数ですよね。というわけで、やはりこの人の言っていたとおりになりました。

どうも、この人の主張は本当っぽい気がしてきました。そこで、文字を使って説明ができるかチャレンジしてみます。

この人の主張には 2 つの偶数が出てきます。ところで、そもそも偶数ってなんでしょう。「2 とか 4 とか 6 とか 8 とかのこと」などと言っていてもしかたがありませんね。例題 30 をちゃんと学んだ人はもうわかるはずですが、そもそも偶数とは「$2 \times$ 自然数」の形に表すことのできる数なのでしたね。言葉で言うと、「ある自然数に 2 をかけてできている数」のことを、そもそも偶数と呼んでいるのです。（だって、ある自然数を 1 にすれば 2 という偶数ができますし、ある自然数を 2 にすれば 4 という偶数ができますし、ある自然数を 3 にすれば 6 という偶数ができますし、ある自然数を 4 にすれば 8 という偶数ができますし、ある自然数を 5 にすれば 10 という偶数ができますし $\cdots$ というようになっているからです。）

一番初めに確認したように、この人の主張には 2 つの偶数がでてくるわけです。2 つの偶数は続いていなくてもよいのですから、小さいほうの偶数と大きい方の偶数には何の関係もありません。そこで、この人の主張に出てくる 2 つの偶数では、小さいほうの偶数を $2n$、大きいほうの偶数を $2m$ としてみることにします。ただし、ここで出てきた n や m は自然数でなくてはいけません。（こうしておけば全ての場合を扱っていることになりますね。）

それでは、2 つの偶数 $2n$、$2m$ を使って、この人のいうとおりになるのかどうか確認することにしましょう。

「大きいほうの偶数を 2 乗したものから小さい方の偶数を 2 乗したものをひく」と、

$$\begin{aligned}(2m)^2 - (2n)^2 &= 4m^2 - 4n^2 \\ &= 4(m^2 - n^2)\end{aligned}$$

となりますね。（この計算では、先を見越して、最後に「4 でくくる」ということをしておきました。）

ここまでで、大きいほうの偶数 $2m$ を 2 乗したものから小さい方の偶数 $2n$ を 2 乗したものをひくと $4(m^2 - n^2)$ という数になることがわかりました。ところで $4(m^2 - n^2)$ という数は偶数なのでしょうか？こういうことを考えるため、そもそも 4 の倍数って何なのか思い出さなくてはなりませんね。30 をちゃんと学んだ人はわかるはずですが、「ある自然数を 4 倍してできる数」のことをそもそも 4 の倍数と呼んでいるのでしたね。ところでさっき計算して出てきた「$4(m^2 - n^2)$」は「$m^2 - n^2$」を 4 倍してできる数ですね。そして、n と m は自然数なのですから $m^2 - n^2$ も自然数のはずですね。ということは、$4(m^2 - n^2)$ はある自然数を 4 倍してできているということです。ですから、$4(m^2 - n^2)$ は 4 の倍数であるということになります。これで証拠がつかめました。以上考えてきたことから、大きいほうの偶数を 2 乗したものから小さい方の偶数を 2 乗したものをひくと必ず 4 の倍数になるという証拠が見つかったのです。

問 72. 例題 33 がきちんと理解できた人のための問題です。以下の文の空欄に正しい式、数、言葉を記入しなさい。

ある人が次のような主張をしました。

> 2 つの奇数があるとします。2 つの奇数は続いていなくてもかまいません。このとき、大きいほうの奇数を 2 乗したものから小さい方の奇数を 2 乗したものをひくと必ず 4 の倍数になります。

さて、いろいろ探りを入れたところ、どうもこの人の主張は本当であるという気がして

きました。そこで、証拠をきちんと見せようと思います。ただし、ここでは「テストの答案っぽく」説明を書いてみようと思います。

2 つの奇数のうち、大きいほうの奇数は文字 n を使って $2n-1$ とあらわすことにし、小さいほうの奇数は文字 m を使って $\boxed{\qquad}$ とあらわすことにします。もちろんここで n と m は $\boxed{\quad}$ 数でなくてはいけません。

大きいほうの奇数を 2 乗したものから小さい方の奇数を 2 乗したものをひくとどうなるか計算していくと、

$$\begin{aligned}\left(\boxed{\qquad}\right)^2-\left(\boxed{\qquad}\right)^2&=\left(\boxed{\qquad\quad}\right)-\left(\boxed{\qquad\quad}\right)\\&=\boxed{\qquad\qquad\qquad}\\&=4\left(\boxed{\qquad\qquad\quad}\right)\end{aligned}$$

となります。

ところで、n や m は自然数なので n^2-m^2-n+m も $\boxed{\quad}$ 数です。ということは $4(n^2-m^2-n+m)$ は $\boxed{\ }$ の倍数です。

以上より、大きいほうの奇数を 2 乗したものから小さい方の奇数を 2 乗したものをひくと必ず 4 の倍数になるという証拠がつかめました。 答えを見る

それではここから、あなた一人で証明を作文する練習をしてもらうことにしましょう。

問 73. 3 つの続いている自然数があるとします。「一番大きい自然数と一番小さい自然数をかけてできる数」と「真ん中の自然数を 2 乗してから 1 をひいてできる数」は必ず同じであることを証明しなさい。 答えを見る

問 74. 3 つの続いている偶数があるとします。一番大きい偶数を 2 乗してできる数から残りの 2 つの偶数をかけた数をひくと必ず 4 の倍数になることを証明しなさい。 答えを見る

4.3　図形の公式を発明して証明する話

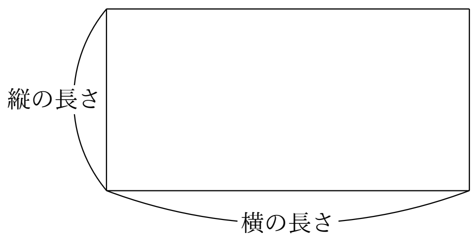
4.3.1　道の面積を求める変な方法

本題に入る前にいくつかおさらいをすることにしましょう。

おさらい：基本的な図形の面積の計算の仕方

- 長方形の面積の計算の仕方

  右の図を見てください。これは長方形です。



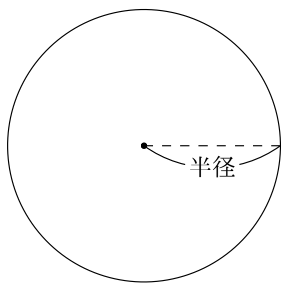
  長方形の面積は、

$$縦の長さ \times 横の長さ$$

  を計算すればよいのでしたね。

- 円の面積の計算の仕方

  右の図を見てください。これは円です。



  円の面積は、

$$円周率 \times 半径 \times 半径$$

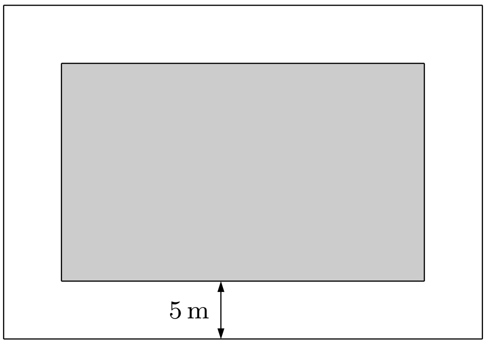
  を計算すればよいのでしたね。

おさらいおわり

それでは本題に入ることにしましょう。

まずあなたに質問です。

質問



ある町に長方形の土地があります。この土地の周りに、幅が 5 m の道がついています。右の図を見てください。これが、土地と道を図に描いたものです。（灰色で描かれている部分が土地で、白く描かれている部分が道です。）実は、道の部分の「面積」を知りたいのですが、今の所、長さがわかっているのは道の「幅」だけです。そこで長さを測る道具を何か持っていき、どこかの長さを測ってこの道の面積を求めようと思います。あなたならどこの長さを測りますか？もちろん、長さを測る所は一ヶ所だけでなく、何ヶ所でも測ってかまいません。

では 10 分待ちます。じっくりと考えてください。あなたの考えがまとまったら、何人か他の人にも考えを聞いてみる予定になっています。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・

・・・

・・・・・・・・・・・・・・・

・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

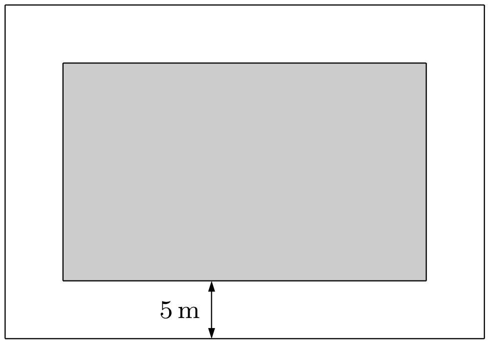
・・・

・・

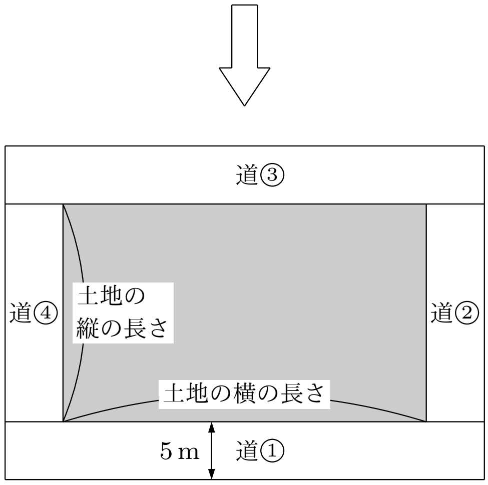
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

はい、10 分たちました。あなたの考えはまとまりましたか？それでは予定どおり、何人かの人に考えを聞いてみることにします。

A さんの意見　右の図を見てください。

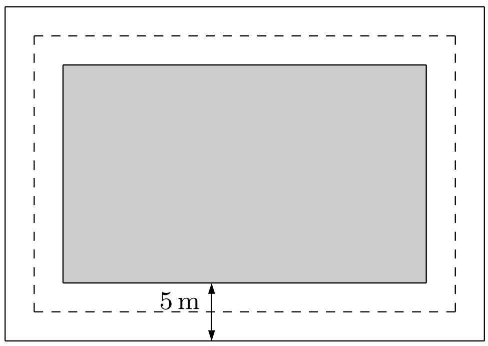


私は、道をこの図のように、道①、道②、道③、道④という 4 つの長方形に分けてみました。道全体の面積を出すには、この 4 つの長方形の面積をそれぞれ求めて合計すればよいと思います。



道①、道②、道③、道④の幅はどれも 5 m です。ですから、道①、道②、道③、道④それぞれの長さが分かればよいわけです。そのために私は土地の横の長さと縦の長さを測ろうと思います。土地の横の長さを測りその長さに 10 m たせば道①と道③の長さがでます。また、土地の縦の長さを測ると道②と道④の長さが分かります。

B さんの意見　右の図を見てください。



私は、道を分けたりしません。土地のことも無視します。道のど真ん中の 1 周分の長さを測ろうと思います。右の図の点線 1 周分の長さを測るのです。それができたらあとは道の幅 5 m をかければ道全体の面積が出る気がします。ホントは自信ないんですけど。

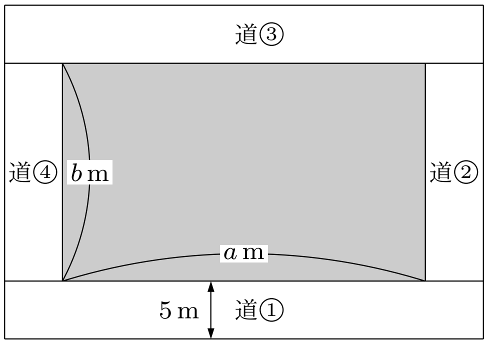
はい、A さん、B さんどうもありがとうございました。とても分かりやすい説明でしたね。さて、あなたはこの 2 人の考え、どう思いますか？たぶんあなたを含めてほとんど全

ての人は、A さんの考えは正しいと感じたでしょう。そりゃぁそうですよね。4 つの長方形に分けて面積を出して、あとで合計すれば道全体の面積が出ますよね。A さんの考えにはどこも間違いはありません。ところで、B さんの考えはどうでしょう。道のど真ん中の長さに道の幅をかければ道全体の長さが出るなんていっていましたが、なんか怪しいって気がしませんか？（B さんも自信はないって言ってましたね。）だって、まっすぐで長方形の形の道だったらその通りだと思うんですけど、この道、かどのところで曲がるんですよね。それでもこんな計算で正しい面積なんて出るのでしょうか？

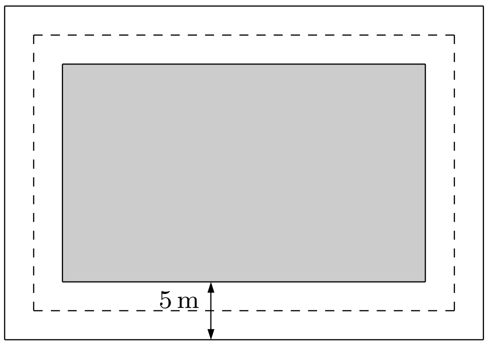
それではこれから、B さんの考えについて詳しく検証することにしましょう。

B さんの疑惑は晴れるのかな？

では右の図を見てください。



上の図は、A さんの考えをあらわしたものです。道①、道②、道③、道④という 4 つの長方形に分け、道全体の面積を出すには、この 4 つの長方形の面積をそれぞれ求めて合計すればよいと考えたわけです。そして、この考え方はどうみても正しい考え方です。



下の図は B さんの考えをあらわしたものです。道のど真ん中 1 周分のの長さ（つまり図の点線 1 周分の長さ) に道の幅をかければ道全体の長さが出るという考えです。この考え方にはかなりの疑惑があるわけです。

そこで、まず、もし、「土地の横の長さ」が a (m) で、「土地の縦の長さ」が b (m) だったら、道全体の面積がどうなるのか、A さんの考えどおり計算してみることにします。土地の横の長さや縦の長さを文字にしたのは、横の長さや縦の長さが何 m の場合でも通用する話にするためです。また A さんの考えは正しい考えであるということも忘れないでくださ

いね。

では、道①、道②道③、道④の面積をそれぞれ求めることにします。

まず道①ですが、道の長さは $a+10\,(\mathrm{m})$ ですよね。ということは、

$$\text{道①の面積} = (a+10)\times 5 = 5a+50\,(\mathrm{m}^2)$$

ですね。

次は道②ですが、道の長さは $b\,(\mathrm{m})$ ですよね。ということは、

$$\text{道②の面積} = b\times 5 = 5b\,(\mathrm{m}^2)$$

ですね。

今度は道③ですが、道①と面積は同じですよね。つまり、

$$\text{道①の面積} = (a+10)\times 5 = 5a+50\,(\mathrm{m}^2)$$

ですね。

最後に道④ですが、道②と面積は同じですよね。つまり、

$$\text{道④の面積} = b\times 5 = 5b\,(\mathrm{m}^2)$$

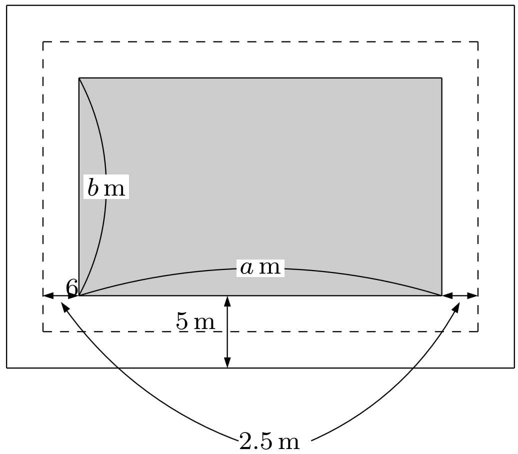
ですね。

これで、4 つの道の面積が求められました。あとはこの 4 つの道の面積を合計すれば道全体の面積が出ますね。というわけで、

$$\begin{aligned}\text{道全体の面積} &= (5a+50)+5b+(5a+50)+5b \\ &= 5a+50+5b+5a+50+5b \\ &= 10a+10b+100\,(\mathrm{m}^2)\end{aligned}$$

となりますね。

では、B さんの考えを検証しましょう。



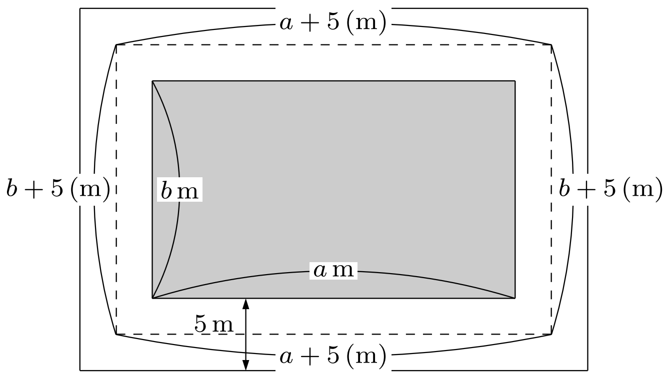
右の図を見てください。A さんの考えで出た結果と比べたいので、ここでも土地の横の長さを a m、縦の長さを b m としてあります。

道の幅は 5 m ですから、道のど真ん中を走っている点線は土地のふちから 2.5 m 離れているということに注目してください。ですから、この図からも分かるとおり、道のど真ん中を走っている点線のうち、横に描かれている部分の長さは土地の横の長さに比べて 2.5 m の 2 個分だけ長いわけです。全く同じ理由で、道のど真ん中を走っている点線のうち、縦に描かれている部分の長さも土地の縦の長さに比べて 2.5 m の 2 個分だけ長くなっています。ですから、

$$\text{点線のうち横に描かれている部分の長さ} = a + 2.5 \times 2 = a + 5\,(\text{m})$$

$$\text{点線のうち縦に描かれている部分の長さ} = b + 2.5 \times 2 = b + 5\,(\text{m})$$

ということになります。



右の図を見てください。念のため、今わかったことを図にまとめておきました。

これで、道のど真ん中を走っている点線の長さを求めることができます。今わかった長さをたせばよいわけです。というわけで、

$$\begin{aligned}\text{道のど真ん中を走っている点線の長さ} &= (a+5)+(b+5)+(a+5)+(b+5)\\ &= a+5+b+5+a+5+b+5\\ &= 2a+2b+10\,(\text{m})\end{aligned}$$

となりますね。

それでは今求められたばかりの「道のど真ん中を走っている点線の長さ」に「道の幅 5 m」をかけるとどうなるか試してみましょう。

$$(2a + 2b + 10) \times 5 = 10a + 10b + 100$$

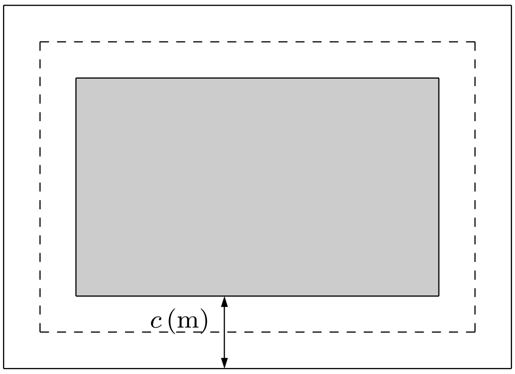
となりますね。あれ、この式、見覚えありませんか？たしか、A さんの「正しい考え」で道全部の面積を計算したら、$10a + 10b + 100$ となったんですよね。ということは、B さんの考えで計算してもちゃんと道全体の面積が正しく求められるということですね。これで B さんの疑惑は晴れました。

でも何と不思議なことでしょう。途中に曲がる部分があるのに、「道のど真ん中を走っている線の長さ」に「道の幅」をかけると「道全体の面積」が正しく求められるということのようです。しかしまだ気になることがあります。今検証したのは、「道の幅が 5 m」のときの話です。道の幅が何メートルでもやっぱり、「道のど真ん中を走っている線の長さ」に「道の幅」をかけると「道全体の面積」が正しく求められるのでしょうか？このほかにも気になることがあります。さっき検証したのは、長方形の周りについている道でした。ですから道は途中で 4 ヶ所直角に曲がる形をしています。でもこの世の中にはもっと違う曲がり方をする道だってありますよね。例えば、円形の土地の周りに道を作れば、いたるところ曲がっている道ができます。こんな形の道でも、やはり、「道のど真ん中を走っている線の長さ」に「道の幅」をかけると「道全体の面積」が正しく求められるのでしょうか？これからこのようなことを考えることにします。

ではまず、道の幅が何メートルでもやっぱり、「道のど真ん中を走っている線の長さ」に「道の幅」をかけると「道全体の面積」が正しく求められるのかどうか調べるために、次の例題を考えてみることにしましょう。

例題 34

この例題の前の説明が理解できている人のための例題です。



右の図を見てください。長方形の土地（灰色の部分）の周りに幅が c (m) の道（白い色の部分）がついています。また、この道のど真ん中を走って 1 周する線（点線）の長さは ℓ (m) であるとします。

このとき、「道の幅」と「この道のど真ん中を走って 1 周する線の長さ」をかけると「この道全体の面積」になることを証明しなさい。つまり、

$$\text{この道全体の面積} = c\ell\,(\mathrm{m}^2)$$

であることを証明しなさい。

（証明）

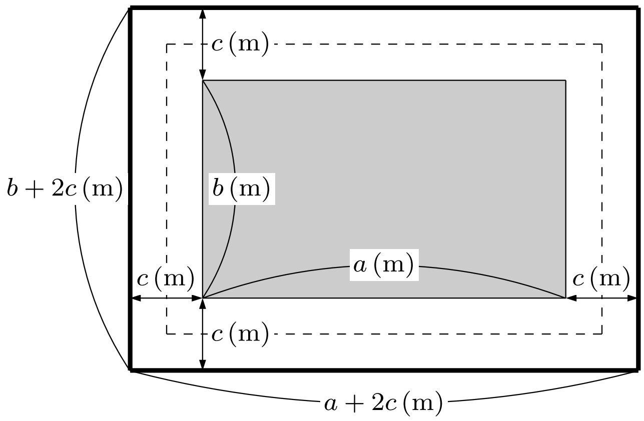
長方形の土地の横の長さや縦の長さについては何も問題文の中に書かれていません。そこで文字を使うことにして、長方形の土地の横の長さを a (m)、縦の長さを b (m) とします。（これで、長方形の土地の横の長さや縦の長さがどんな長さになっている場合も扱うことができますね。）

この例題の前の説明をしっかり理解できた人はもうおわかりだと思いますが、証明のアイデアは次のようなものです。

まず、この道全体の面積を絶対確実な方法で求めます。次に「道の幅 c」と「この道のど真ん中を走って 1 周する線の長さ ℓ」をかけるとどうなるのか調べます。そしてもし、「絶対確実な方法で求めた道全体の面積」と「道の幅 c とこの道のど真ん中を走って 1 周する線の長さ ℓ をかけたもの」が同じになっていることが確認できれば、この主張は証明されたことになるわけです。

それではまず、道全体の面積を、絶対確実な考えかたに基づいて求めていきましょう。この例題の前の説明をしっかり理解した人は、「ああ、A さんの考えのように、まず道全

体を 4 つの長方形に分けてそれぞれの面積を出して後で合計すればよいのだな。」と考えますよね。もちろんそれでよいのですが、同じ方法をここで使うのはちょっとつまらない気がします。数学の問題の解き方は 1 通りではないということを分かってもらうためにも、ここでは、A さんの考え方とは違う絶対確実な考え方で道全体の面積を出そうと思います。どのような考え方なのかというと、「長方形の土地と道全体を合わせてできる長方形の面積」から「長方形の土地の面積」をひいて「道全体の面積」」を求めようという考えです。



ではまず、「長方形の土地と道全体をあわせてできる長方形」に注目してください。分かりやすくするために、右の図では太い線で描いておきました。

この図を見ても分かるとおり、灰色の長方形の土地の周りに「幅が $c\,(\mathrm{m})$」の道がついているわけですから、「太い線で囲まれた長方形の横の長さ」は「灰色の長方形の横の長さ」より $c\,(\mathrm{m})$ の 2 個分長いわけです。全く同じ理由で、「太い線で囲まれた長方形の縦の長さ」は「灰色の長方形の横の長さ」より $c\,(\mathrm{m})$ の 2 個分長いわけです。というわけで、

$$\text{太い線で囲まれた長方形の横の長さ} = a+2c\,(\mathrm{m})\text{、}$$

$$\text{太い線で囲まれた長方形の縦の長さ} = b+2c\,(\mathrm{m})$$

ということになります。ですから、

$$\begin{aligned}\text{太い線で囲まれた長方形の面積} &= (a+2c)(b+2c)\\ &= ab+2ac+2bc+4c^2\,(\mathrm{m}^2)\end{aligned}$$

となりますね。

一方「灰色の長方形」の面積はもちろん、

$$ab\,(\mathrm{m}^2)$$

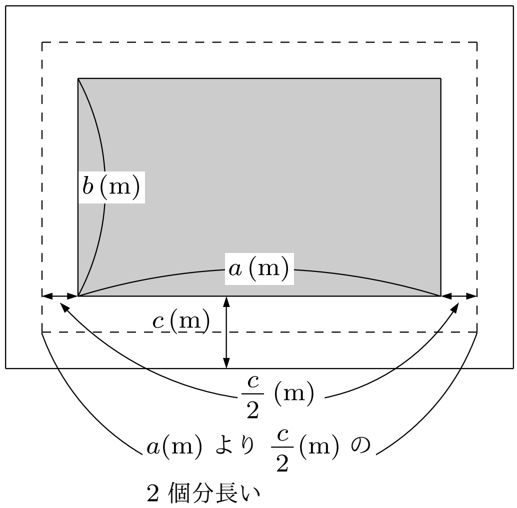
ですよね。

以上で「道全体の面積」を求める準備ができました。「道全体の面積」を求めるには、「太い線で囲まれた長方形の面積」から「灰色の長方形の面積」をひけばよいのですから、

$$\begin{aligned}\text{道全体の面積} &= (ab + 2ac + 2bc + 4c^2) - ab \\ &= 2ac + 2bc + 4c^2\,(\mathrm{m}^2)\end{aligned}$$

となります。この結果、良く覚えておいてくださいね。

これから、「道の幅 c」と「この道のど真ん中を走って 1 周する線の長さ ℓ」をかけるとどうなるのか調べます。



では、右の図を見てください。

まず、「この道のど真ん中を走って 1 周する線の長さ ℓ」を求めます。つまり、この図の点線の長さ ℓ は土地の横の長さ a、土地の縦の長さ b、道の幅 c からどのように計算されるのかを調べるわけです。点線は土地のふちから $\frac{c}{2}\,(\mathrm{m})$ 離れています。ですから右の図にも書いてありますが、点線の横の部分の長さは土地の横の長さより $\frac{c}{2}\,(\mathrm{m})$ の 2 個分長いわけです。つまり、

$$\text{点線の横の部分の長さ} = a + \frac{c}{2} \times 2 = a + c\,(\mathrm{m})$$

となるわけです。

全く同じ理由で、点線の縦の部分の長さは土地の縦の長さより $\frac{c}{2}\,(\mathrm{m})$ の 2 個分長いわ

けです。つまり、

$$\text{点線の縦の部分の長さ} = a + \frac{c}{2} \times 2 = b + c\,(\mathrm{m})$$

となるわけです。

以上で、点線 1 周分の長さ ℓ を求める準備ができました。「点線 1 周分の長さ ℓ」を求めるには、「点線の横の部分の長さ」2 個分と「点線の縦の部分の長さ」2 個分を合わせればよいのですから、

$$\begin{aligned}\ell &= (a+c) \times 2 + (b+c) \times 2 \\ &= 2a + 2c + 2b + 2c \\ &= 2a + 2b + 4c\,(\mathrm{m})\end{aligned}$$

となりますね。

次に、「道の幅 c」と「この道のど真ん中を走って 1 周する線の長さ ℓ」をかけてみます。つまり「道の幅 c」と今求めたばかりの「点線 1 周分の長さ ℓ」をかけるとどうなるのか調べます。すると、

$$\begin{aligned}c\ell &= c \times (2a + 2b + 4c) \\ &= 2ac + 2bc + 4c^2\,(\mathrm{m}^2)\end{aligned}$$

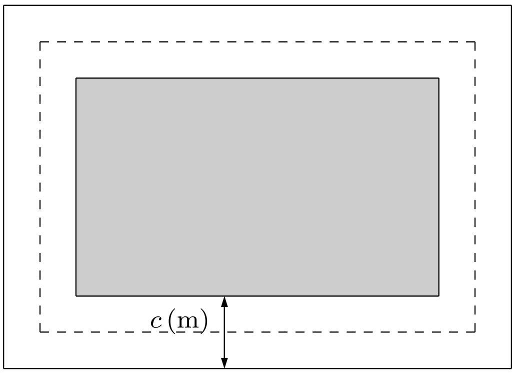
となりますね。おや、この式、見覚えありますよね。たしか、「道全体の面積」って $2ac + 2bc + 4c^2\,(\mathrm{m}^2)$ ですよね。というわけで、

$$\text{道全体の面積} = c\ell$$

であることが証明されました。

（証明おわり）

問 75. 例題 34 がきちんと理解できた人のための問題です。例題 34 の「テストの答案っぽい証明」を作文する練習をします。



『右の図を見てください。長方形の土地 (灰色の部分）の周りに幅が $c\,(\mathrm{m})$ の道（白い色の部分）がついています。また、この道のど真ん中を走って 1 周する線（点線）の長さは $\ell\,(\mathrm{m})$ であるとします。

このとき、「道の幅」と「この道のど真ん中を走って 1 周する線の長さ」をかけると「この道全体の面積」になることを証明しなさい。つまり、

$$\text{この道全体の面積} = c\,\ell\,(\mathrm{m}^2)$$

であることを証明しなさい。』という問題の答案を次のように作りました。空欄に正しい数、式、言葉を記入しなさい。

（証明）

長方形の土地の横の長さを $a\,(\mathrm{m})$、縦の長さを $b\,(\mathrm{m})$ として考えることにします。

土地の周りについている道の幅は $c\,(\mathrm{m})$ ですから、土地と道全体を合わせた長方形の横の長さは $\boxed{\qquad}$ (m) で、縦の長さは $\boxed{\qquad}$ (m) となります。

土地と道全体を合わせた長方形の面積は, この横の長さと縦の長さをかければよいので、

$$\left(\boxed{\qquad}\right) \times \left(\boxed{\qquad}\right) = \boxed{\qquad\qquad\qquad}\,(\mathrm{m}^2)$$

となります。

土地の面積はもちろん $\boxed{\quad}$ (m^2) です。

道全体の面積は、土地と道全体を合わせた長方形の面積から土地の面積をひけば求められるので、

$$\begin{aligned}\text{道全体の面積} &= \boxed{\qquad\qquad\qquad} - \boxed{\quad} \\ &= \boxed{\qquad\qquad\qquad}\,(\mathrm{m}^2)\end{aligned}$$

となります。

道のど真ん中を走っている線（点線）は土地のふちから $\dfrac{c}{2}$ (m) 離れているので、横の部分の長さも縦の部分の長さも長方形の横や縦の長さより $\dfrac{c}{2}$ (m) の 2 個分長いことになります。ですから、

$$\begin{aligned} \text{点線の横の部分の長さ} &= a + \boxed{} \times 2 \\ &= \boxed{}\,(\mathrm{m}) \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} \text{点線の縦の部分の長さ} &= \boxed{} + \boxed{} \times 2 \\ &= \boxed{}\,(\mathrm{m}) \end{aligned}$$

となります。

点線 1 周分の長さ ℓ は、点線の横の部分の長さを 2 つ分と、点線の縦の部分の長さを 2 つ分をあわせれば求められるので、

$$\begin{aligned} \ell &= \left(\boxed{}\right) \times 2 + \left(\boxed{}\right) \times 2 \\ &= \boxed{}\,(\mathrm{m}) \end{aligned}$$

となります。すると、道の幅 c と点線 1 周分の長さ ℓ をかけたものは、

$$\begin{aligned} c\ell &= c \times \left(\boxed{}\right) \\ &= \boxed{}\,(\mathrm{m}^2) \end{aligned}$$

となります。

以上の調査で、「道全体の面積」と「道の幅 c と道のど真ん中を走っている線 1 周分の長さ ℓ をかけたもの $c\,\ell$」を見比べると $\boxed{}$ じであることが分かります。

（証明おわり）

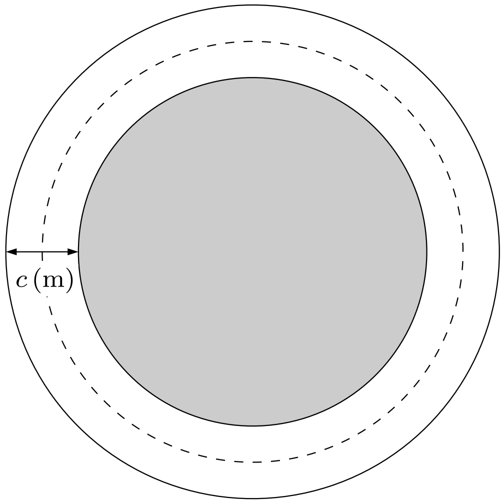
答えを見る

では次に、円形の土地の周りにできる曲がった道でも、やはり、「道のど真ん中を走っ

ている線の長さ」に「道の幅」をかけると「道全体の面積」が正しく求められるのかどうか調べることにします。そのために次の例題を学ぶことにしましょう。

例題 35　例題 34 がきちんと理解できた人のための問題です。

右の図を見てください。円形の土地（灰色の部分）の周りに幅が $c\,(\mathrm{m})$ の道（白い色の部分）がついています。また、この道のど真ん中を走って 1 周する線（点線）の長さは $\ell\,(\mathrm{m})$ であるとします。



このとき、「道の幅」と「この道のど真ん中を走って 1 周する線の長さ」をかけると「この道全体の面積」になることを証明しなさい。つまり、

$$\text{この道全体の面積} = c\ell\,(\mathrm{m}^2)$$

であることを証明しなさい。

（証明）

例題 34 と全く同じように考えてみることにします。つまり、まず、この道全体の面積を絶対確実な方法で求めます。次に「道の幅 c」と「この道のど真ん中を走って 1 周する線の長さ ℓ」をかけるとどうなるのか調べます。そしてもし、「絶対確実な方法で求めた道全体の面積」と「道の幅 c とこの道のど真ん中を走って 1 周する線の長さ ℓ をかけたもの」が同じになっていることが確認できれば、この主張は証明されたことになるわけです。

それではここから先はあなたに考えてもらうことにしましょう。数学のテストの答案っぽい証明を以下に書いておきます。空欄があるので、空欄に正しい数、式、言葉を記入しておいてください。

円形の土地の半径を $a\,(\mathrm{m})$ として考えることにします。

土地の周りについている道の幅は $c\,(\mathrm{m})$ ですから、土地と道全体を合わせた円の半径は

$\boxed{}$ (m) となります。

円の面積は「円周率 π」かける「半径」かける「半径」で求めることができます。そうすると、土地と道全体を合わせた円の面積は、

$$\begin{aligned}\pi \times \left(\boxed{}\right) \times \left(\boxed{}\right) &= \pi\left(\boxed{}\right) \\ &= \boxed{}\,(\mathrm{m}^2)\end{aligned}$$

となります。

土地の面積はもちろん $\boxed{}$ (m^2) です。

道全体の面積は、土地と道全体を合わせた長方形の面積から土地の面積をひけば求められるので、

$$\begin{aligned}\text{道全体の面積} &= \boxed{} - \boxed{} \\ &= \boxed{}\,(\mathrm{m}^2)\end{aligned}$$

となります。

道のど真ん中を走っている線（点線）は土地のふちから $\dfrac{c}{2}$ (m) 離れているので、点線で描かれている円の半径は土地の半径より $\dfrac{c}{2}$ (m) 長いことになります。ですから、

$$\text{点線で描かれている円の半径} = \boxed{}\,(\mathrm{m})$$

となります。

円の周りの長さは「円周率 π」かける「直径」で求めることができます。ですから、点線 1 周分の長さ ℓ は、

$$\begin{aligned}\ell &= \pi \times 2 \times \left(\boxed{}\right) \\ &= \boxed{}\,(\mathrm{m})\end{aligned}$$

となります。すると、道の幅 c と点線 1 周分の長さ ℓ をかけたものは、

$$\begin{aligned} c\ell &= c \times \left(\boxed{}\right) \\ &= \boxed{}\,(\mathrm{m}^2) \end{aligned}$$

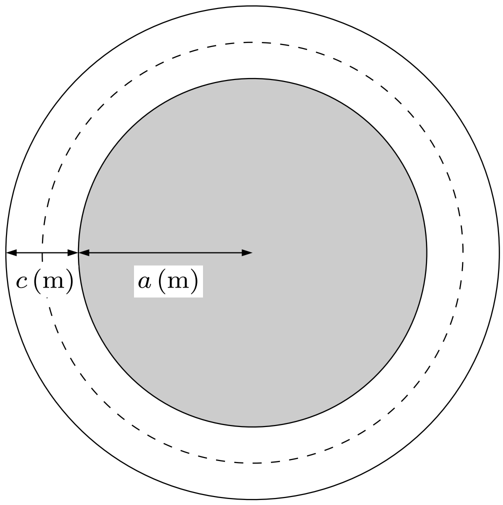
となります。

以上の調査で、「道全体の面積」と「道の幅 c と道のど真ん中を走っている線 1 周分の長さ ℓ をかけたもの $c\,\ell$」を見比べると $\boxed{}$ じであることが分かります。

（証明おわり）

補足：念のため、この例題の空欄にどんな言葉や式を記入すればよいのか答えをここに書いておきます。あなたの考えと同じになっているか確認してください。

例題 35 の証明



円形の土地の半径を $a\,(\mathrm{m})$ として考えることにします。

土地の周りについている道の幅は $c\,(\mathrm{m})$ ですから、土地と道全体を合わせた円の半径は $\boxed{a+c}$ (m) となります。

円の面積は「円周率 π」かける「半径」かける「半径」で求めることができます。そうすると、土地と道全体を合わせた円の面積は、

$$\begin{aligned} \pi \times \left(\boxed{a+c}\right) \times \left(\boxed{a+c}\right) &= \pi\left(\boxed{a^2+2ac+c^2}\right) \\ &= \boxed{\pi a^2 + 2\pi ac + \pi c^2}\,(\mathrm{m}^2) \end{aligned}$$

となります。

土地の面積はもちろん $\boxed{\pi a^2}$ (m^2) です。

道全体の面積は、土地と道全体を合わせた長方形の面積から土地の面積をひけば求めら

れるので、

$$\begin{aligned}\text{道全体の面積} &= \boxed{\pi a^2 + 2\pi ac + \pi c^2} - \boxed{\pi a^2} \\ &= \boxed{2\pi ac + \pi c^2}\,(\mathrm{m}^2)\end{aligned}$$

となります。

道のど真ん中を走っている線（点線）は土地のふちから $\dfrac{c}{2}$ (m) 離れているので、点線で描かれている円の半径は土地の半径より $\dfrac{c}{2}$ (m) 長いことになります。ですから、

$$\text{点線で描かれている円の半径} = \boxed{a + \frac{c}{2}}\,(\mathrm{m})$$

となります。

円の周りの長さは「円周率 π」かける「直径」で求めることができます。ですから、点線 1 周分の長さ ℓ は、

$$\begin{aligned}\ell &= \pi \times 2 \times \left(\boxed{a + \frac{c}{2}}\right) \\ &= \boxed{2\pi a + \pi c}\,(\mathrm{m})\end{aligned}$$

となります。すると、道の幅 c と点線 1 周分の長さ ℓ をかけたものは、

$$\begin{aligned}c\ell &= c \times \left(\boxed{2\pi a + \pi c}\right) \\ &= \boxed{2\pi ac + \pi c^2}\,(\mathrm{m}^2)\end{aligned}$$

となります。

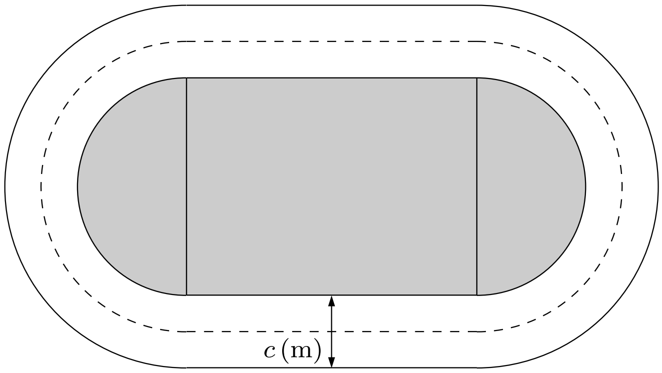
以上の調査で、「道全体の面積」と「道の幅 c と道のど真ん中を走っている線 1 周分の長さ ℓ をかけたもの $c\,\ell$」を見比べると $\boxed{\text{同}}$ じであることが分かります。

（証明おわり）

問 76. 例題 34 と例題 35 がきちんと理解できた人のための問題です。

右の図を見てください「長方形の右側と左側に半円が合わさった形をしている土地

（灰色の部分）」のまわりに、「幅が $c\,(\mathrm{m})$ の道（白い色の部分）」がついています。また、この道のど真ん中を走って 1 周する線（点線）の長さは $\ell\,(\mathrm{m})$ であるとします。



　このとき、「道の幅」と「この道のど真ん中を走って 1 周する線の長さ」をかけると「この道全体の面積」になることを証明しなさい。つまり、

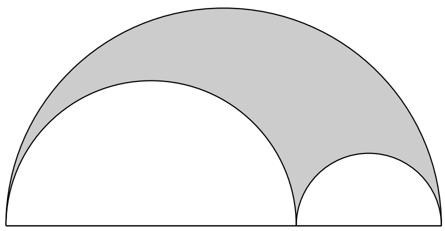
$$\text{この道全体の面積} = c\ell\,(\mathrm{m}^2)$$

であることを証明しなさい。

答えを見る

　それではもう少し、図形の面積に関する証明問題を考えることにしましょう。

例題 36　右の図を見てください。この図で灰色になっている部分は、ある半円から、その円の中にある 2 つの半円（2 つの白い半円）を除いてできた図形です。このとき実は、「円周率」かける「大きいほうの白い半円の半径」かける「小さいほうの白い半円の半径」を計算すると、灰色の部分の面積が求められてしまうということを証明しなさい。

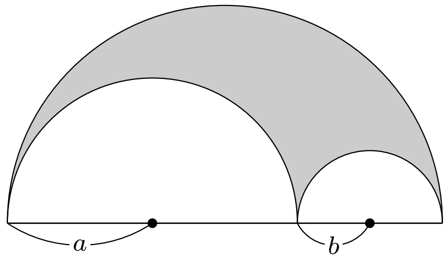


（証明）

　絶対確実な方法で灰色の部分の面積を計算していくと、結局「円周率」かける「大きいほうの白い半円の半径」かける「小さいほうの白い半円の半径」を計算したのと同じことになってしまうということをやって見せればよい

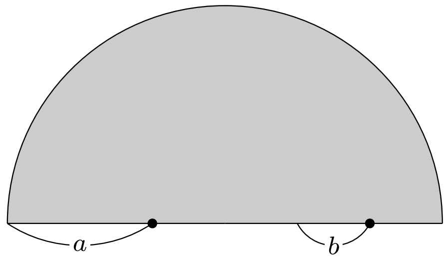
ですよね。そこで、右の図のように、文字を使って、

「大きいほうの白い半円の半径」を a、「小さいほうの白い半円の半径」を b として議論をしていくことにします。（これで、2 つの白い半円の半径がいくつになっている場合でも取り扱うことができるようになったのですよね。）



一般に、円の面積は「円周率」かける「半径」かける「半径」で求めることができるのでしたね。そして、半円の面積は円の面積を半分にすれば求めることができます。このことをまず思い出しておきましょう。

では右の図を見てください。これは、「2 つの白い半円を除く前の半円」です。この半円の面積を求めたいのですが、そのためにはこの半円の半径を知る必要がありますよね。ちょっと考えてみると、この半円の直径だったら割とすぐに分かります。もとの図とも見比べてほしいのですが、この半円の直径って $a+a+b+b$ ですよね。そして、半径は直径の半分なのですから、この「2 つの白い半円を除く前の半円」の半径は $a+b$ ということになりますね。これで、この半円の面積を求める準備ができました。

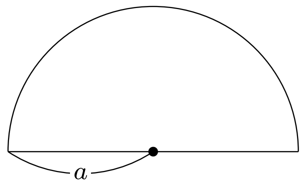


$$2\text{ つの白い半円を除く前の半円の面積} = \frac{1}{2}\pi(a+b)^2$$

となりますよね。

では次に、右の図を見てください。

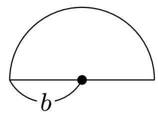
これは、「大きいほうの白い半円」です。この半円の半径を a としたのですから、



$$\text{大きいほうの白い半円の半円の面積} = \frac{1}{2}\pi a^2$$

となりますよね。

では今度は、右の図を見てください。



これは、「小さいほうの白い半円」です。この半円の半径を b としたのですから、

$$\text{小さいほうの白い半円の半円の面積} = \frac{1}{2}\pi b^2$$

となりますよね。

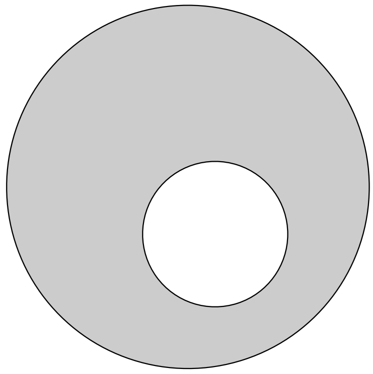
これで、絶対確実な方法でこの問題の灰色の部分の面積を求める準備ができました。もちろん、「2 つの白い半円を除く前の半円の面積」から、「大きいほうの白い半円の半円の面積」と「小さいほうの白い半円の半円の面積」をひいて計算をすればよいわけです。というわけで、

$$\begin{aligned}
\text{この問題の灰色の部分の面積} &= \frac{1}{2}\pi(a+b)^2 - \frac{1}{2}\pi a^2 - \frac{1}{2}\pi b^2 \\
&= \frac{1}{2}\pi(a+2ab+b)^2 - \frac{1}{2}\pi a^2 - \frac{1}{2}\pi b^2 \\
&= \frac{1}{2}\pi a^2 + \pi ab + \frac{1}{2}\pi b^2 - \frac{1}{2}\pi a^2 - \frac{1}{2}\pi b^2 \\
&= \pi ab
\end{aligned}$$

となりますよね。最後に得られた πab ですが、これ、どう見ても、「円周率」かける「大きいほうの白い半円の半径」かける「小さいほうの白い半円の半径」を計算をしている式ですよね。

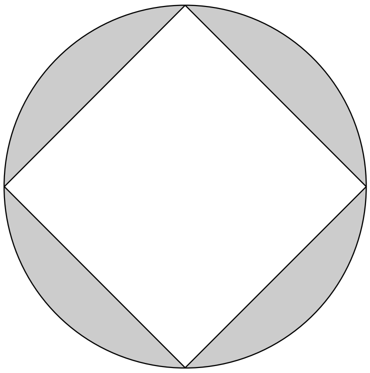
（証明おわり）

問 77. 右の図を見てください。この図で灰色になっている部分は、大きい円から、その円の中に含まれている小さい円（白い円）を除いてできた図形です。このとき実は、「円周率」かける「大きい円と小さい円の半径をたしたもの」かける「大きい円の半径から小さい円の半径を引いたもの」を計算すると、灰色の部分の面積が求められてしまうということを証明しなさい。



答えを見る

問 78. 右の図を見てください。この図で灰色になっている部分は、ある円から、その円の中にぴったり含まれている正方形（白い正方形）を除いてできた図形です。このとき実は、「円周率から 2 をひいた数」かける「円の半径」かける「円の半径」を計算すると、灰色の部分の面積が求められてしまうということを証明しなさい。



答えを見る

問の解答

問 1. $-x$ という式は、そもそも $\boxed{-1}$ という数と $\boxed{x}$ という文字をかけて出来ています。つまり、

$$-x = (-1) \times x$$

ですよね。そうすると、$-x$ という式に 7 という数をかけるということは、「$\boxed{-1}$ という数」と「$\boxed{x}$ という文字」と「$\boxed{7}$ という数」をかけるということになります。つまり、

$$-x \times 7 = (-1) \times x \times 7$$

ですよね。3 つのものをかけ算することになりましたが、この式はかけ算だけの式なので、どれとどれを先にかけ算してもよいのですね。(結合法則と交換法則のおかげですよ。) そこで、$\boxed{-1}$ と $\boxed{7}$ をまずかけてしまいましょう。だって、$\boxed{-1}$ と $\boxed{7}$ は数だから計算出来ちゃいますよね。そうすると、次のように計算が進むわけです。

$$\begin{aligned} -x \times 7 &= (-1) \times x \times 7 \\ &= (-1) \times 7 \times x \\ &= \boxed{-7} \times \boxed{x} \\ &= \boxed{-7x} \end{aligned}$$

本文へ戻る

問 2. 答えだけ書いておきます。

(1) $5x \times 6 = 30x$　　(2) $3a \times (-7) = -21a$

(3) $-a \times 5 = -5a$

(4) $-2x \times (-3) = 6x$

(5) $10x \times \dfrac{2}{5} = 4x$

(6) $-\dfrac{3}{8}a \times 24 = -9a$

(7) $15x \times \left(-\dfrac{2}{3}\right) = -10x$

(8) $-\dfrac{3}{10}a \times \dfrac{5}{9} = -\dfrac{1}{6}a$

本文へ戻る

問 3. 「$\div\left(-\dfrac{4}{7}\right)$」をすることと、「$\times\left(\boxed{-\dfrac{7}{4}}\right)$」をすることは同じことです。ですから、次のように計算を進めることが出来ます。

$$\begin{aligned} 4a \div \left(-\frac{4}{7}\right) &= 4a \times \left(\boxed{-\frac{7}{4}}\right) \\ &= 4 \times a \times \left(-\frac{7}{4}\right) \\ &= 4 \times \left(-\frac{7}{4}\right) \times a \\ &= \boxed{-7} \times a \\ &= \boxed{-7a} \end{aligned}$$

本文へ戻る

問 4. 逆数を使うと、わり算をかけ算に直して計算できるのでしたね。

(1) $8a \div (-4) = 8a \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) = -2a$

(2) $-15x \div (-3) = -15x \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) = 5x$

(3) $9x \div \left(-\dfrac{3}{2}\right) = 9x \times \left(-\dfrac{2}{3}\right) = -6x$

(4) $-7x \div 7 = -7x \times \dfrac{1}{7} = -x$

(5) $\left(-\dfrac{3}{5}a\right) \div 6 = \left(-\dfrac{3}{5}a\right) \times \dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{10}a$

(6) $(-2a) \div \left(-\dfrac{4}{3}\right) = -2a \times \left(-\dfrac{3}{4}\right) = -\dfrac{3}{2}a$

(7) $6x \div 12 = 6x \times \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{2}x$

(8) $\dfrac{6}{7}a \div (-3) = \dfrac{6}{7}a \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{2}{7}a$

本文へ戻る

問 5. $-2x$ という式は、そもそも $\boxed{-2}$ という数と $\boxed{x}$ という文字をかけて出来ています。つまり、

$$-2x = (-2) \times x$$

ですよね。

また $7y$ という式は、そもそも $\boxed{7}$ という数と $\boxed{y}$ という文字をかけて出来ています。つまり、

$$7y = 7 \times y$$

ですよね。

そうすると、$-2x$ という式に $7y$ という式をかけるということは、「$\boxed{-2}$ という数」と「$\boxed{x}$ という文字」と「$\boxed{7}$ という数」と「$\boxed{y}$ という文字」をかけるということになります。つまり、

$$-2x \times 7y = (-2) \times x \times 7 \times y$$

ですよね。4 つのものをかけ算することになりましたが、この式はかけ算だけの式なので、どれとどれを先にかけ算してもよいですね。（結合法則と交換法則のおかげですよ。）そこで、$\boxed{-2}$ と $\boxed{7}$ をまずかけてしまいましょう。だって、$\boxed{-2}$ と $\boxed{7}$ は数だから計算出来ちゃいますよね。そうすると、次のように計算が進むわけです。

$$\begin{aligned} -2x \times 7y &= (-2) \times x \times 7 \times y \\ &= (-2) \times 7 \times x \times y \\ &= \boxed{-14} \times \boxed{xy} \\ &= \boxed{-14xy} \end{aligned}$$

本文へ戻る

問 6. $-2x$ という式は、そもそも $\boxed{-2}$ という数と $\boxed{x}$ という文字をかけて出来ています。つまり、

$$-2x = (-2) \times x$$

ですよね。

また $7x$ という式は、そもそも $\boxed{7}$ という数と $\boxed{x}$ という文字をかけて出来ています。つまり、

$$7x = 7 \times x$$

ですよね。

そうすると、$-2x$ という式に $7x$ という式をかけるということは、「$\boxed{-2}$ という数」と「$\boxed{x}$ という文字」と「$\boxed{7}$ という数」と「$\boxed{x}$ という文字」をかけるということになります。つまり、

$$-2x \times 7x = (-2) \times x \times 7 \times x$$

ですよね。4 つのものをかけ算することになりましたが、この式はかけ算だけの式なので、どれとどれを先にかけ算してもよいのですね。（結合法則と交換法則のおかげですよ。）そこで、$\boxed{-2}$ と $\boxed{7}$ をまずかけてしまいましょう。だって、$\boxed{-2}$ と $\boxed{7}$ は数だから計算出来ちゃいますよね。そうすると、次のように計算が進むわけです。

$$\begin{aligned} -2x \times 7x &= (-2) \times x \times 7 \times x \\ &= (-2) \times 7 \times x \times x \\ &= \boxed{-14} \times \boxed{x^2} \\ &= \boxed{-14x^2} \end{aligned}$$

本文へ戻る

問 7. それぞれの式は、以下のように計算を進めて見かけを簡単にすることができます。

(1) $5x \times 6y = 5 \times x \times 6 \times y$

$= 5 \times 6 \times x \times y$

$= 30 \times xy$

$= 30xy$

(2) $3a \times (-7a) = 3 \times a \times (-7) \times a$

$= 3 \times (-7) \times a \times (-7) \times a$

$= -21 \times a^2$

$= -21a^2$

(3) $-a \times 5b = 1 \times a \times 5 \times b$

$= -1 \times 5 \times a \times b$

$= -5 \times ab$

$= -5ab$

(4) $-2x \times (-3x) = -2 \times x \times (-3) \times x$

$= -2 \times (-3) \times x \times x$

$= 6 \times x^2$

$= 6x^2$

(5) $10x \times \dfrac{2}{5}y = 10 \times x \times \dfrac{2}{5} \times y$

$= 10 \times \dfrac{2}{5} \times x \times y$

$= 4 \times xy$

$= 4xy$

(6) $-\dfrac{3}{8}a \times 24b = -\dfrac{3}{8} \times a \times 24 \times b$

$= -\dfrac{3}{8} \times 24 \times a \times b$

$= -9 \times ab$

$= -9 \times ab$

(7) $15x \times \left(-\dfrac{2}{3}y\right) = 15 \times x \times \left(-\dfrac{2}{3}\right) \times y$

$= 15 \times \left(-\dfrac{2}{3}\right) \times x \times y$

$= 10 \times xy$

$= 10xy$

(8) $-\dfrac{3}{10}a \times \dfrac{5}{9}a = -\dfrac{3}{10} \times a \times \dfrac{5}{9} \times a$

$= -\dfrac{3}{10} \times \dfrac{5}{9} \times a \times a$

$= -\dfrac{1}{6} \times a^2$

$= -\dfrac{1}{6}a^2$

本文へ戻る

問 8. それぞれの式は、以下のように計算を進めて見かけを簡単にすることができます。

(1) $(-7x)^2 = (-7x) \times (-7x)$

$= (-7) \times x \times (-7) \times x$

$= (-7) \times (-7) \times x \times x$

$= 49 \times x^2$

$= 49x^2$

(2) $-(-7x)^2 = (-1) \times (-7x) \times (-7x)$

$= (-1) \times (-7) \times x \times (-7) \times x$

$= (-1) \times (-7) \times (-7) \times x \times x$

$= -49 \times x^2$

$= -49x^2$

(3) $2a \times (-5a)^2 = 2 \times a \times (-5a) \times (-5a)$

$= 2 \times a \times (-5) \times a \times (-5) \times a$

$= 2 \times (-5) \times (-5) \times a \times a \times a$

$= 50 \times a^3$

$= 50a^3$

(4) $(-7a)^2 \times 4a = (-7a) \times (-7a) \times 4 \times a$

$= (-7) \times a \times (-7) \times a \times 4 \times a$

$= (-7) \times (-7) \times 4 \times a \times a \times a$

$= 196 \times a^3$

$= 196a^3$

(5) $\dfrac{3}{5}x \times (5x)^2 = \dfrac{3}{5} \times x \times (5x) \times (5x)$

$= \dfrac{3}{5} \times x \times 5 \times x \times 5 \times x$

$= \dfrac{3}{5} \times 5 \times 5 \times x \times x \times x$

$= 15 \times x^3$

$= 15x^3$

(6) $(-3) \times (-7x)^2 = (-3) \times (-7x) \times (-7x)$

$= (-3) \times (-7) \times x \times (-7) \times x$

$= (-3) \times (-7) \times (-7) \times x \times x$

$= -147 \times xy$

$= -147xy$

本文へ戻る

問 9. かけ算のマークを使うと、そもそも $-6a^2b$ という式は $\boxed{-6} \times \boxed{a} \times \boxed{a} \times \boxed{b}$ のことで、$2ab$ という式は $\boxed{2} \times \boxed{a} \times \boxed{b}$ のことです。ですからとりあえず、

$$-6a^2b \div 2ab = \frac{\boxed{-6} \times \boxed{a} \times \boxed{a} \times \boxed{b}}{\boxed{2} \times \boxed{a} \times \boxed{b}}$$

となるわけです。

この式を約分していきます。すると、

$$\begin{aligned}
\frac{(-6) \times a \times a \times b}{2 \times a \times b} &= \frac{\overset{\boxed{-3}}{\cancel{(-6)}} \times \overset{\boxed{1}}{\cancel{a}} \times a \times \overset{\boxed{1}}{\cancel{b}}}{\underset{\boxed{1}}{\cancel{2}} \times \underset{\boxed{1}}{\cancel{a}} \times \underset{\boxed{1}}{\cancel{b}}} \\
&= \frac{\boxed{-3} \times \boxed{1} \times a \times \boxed{1}}{\boxed{1} \times \boxed{1} \times \boxed{1}} \\
&= \boxed{-3a}
\end{aligned}$$

となりますね。

本文へ戻る

問 10. それぞれの式は、以下のように計算を進めて見かけを簡単にすることができます。

(1)
$$\begin{aligned}
8xy \div 4y &= \frac{8 \times x \times y}{4 \times y} \\
&= \frac{\overset{2}{\cancel{8}} \times x \times \overset{1}{\cancel{y}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \times \underset{1}{\cancel{y}}} \\
&= \frac{2x}{1} \\
&= 2x
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
24x^2 \div 4x &= \frac{24 \times x \times x}{4 \times x} \\
&= \frac{\overset{6}{\cancel{24}} \times \underset{1}{\cancel{x}} \times x}{\underset{1}{\cancel{4}} \times \underset{1}{\cancel{x}}} \\
&= \frac{6x}{1} \\
&= 6x
\end{aligned}$$

(3) $$-18xy^2 \div 6y = \frac{-18\times x\times y\times y}{6\times y} = \frac{\overset{-3}{\cancel{-18}}\times x\times \overset{1}{\cancel{y}}\times y}{\underset{1}{\cancel{6}}\times \underset{1}{\cancel{y}}} = \frac{-3xy}{1} = -3xy$$

(4) $$-18a^2b \div (-9ab) = \frac{-18\times a\times a\times b}{-9\times a\times b} = \frac{\overset{2}{\cancel{-18}}\times \overset{1}{\cancel{a}}\times a\times \overset{1}{\cancel{b}}}{\underset{1}{\cancel{-9}}\times \underset{1}{\cancel{a}}\times \underset{1}{\cancel{b}}} = \frac{2a}{1} = 2a$$

本文へ戻る

問 11. $-\dfrac{2x}{7}$ という式について考えることにします。

$\dfrac{\triangle}{7}$ と $\dfrac{1}{7}\times\triangle$ は同じですから、

$$-\frac{2x}{7} \text{ と } -\frac{1}{7}\times\boxed{2x} \text{ は同じ}$$

であることがわかります。またもちろん、

$$-\frac{1}{7}\times 2x \text{ と } -\frac{1}{7}\times\boxed{2}\times\boxed{x} \text{ は同じ}$$

です。3 つの数のかけ算はどこを先にかけても良いのですから、

$$-\frac{1}{7}\times 2\times x \text{ と } \boxed{-\frac{2}{7}}\times x \text{ は同じ}$$

です。かけ算のマークを省略すれば、

$$-\frac{2}{7}\times x \text{ と } \boxed{-\frac{2}{7}x} \text{ は同じ}$$

です。以上で、結局、

$$-\frac{2x}{7} \text{ と } \boxed{-\frac{2}{7}x} \text{ は同じ}$$

ということがわかりました。

本文へ戻る

問 12. 問 11 をいっしょうけんめい考えると、

$$-\frac{2x}{7} \text{ と } -\frac{2}{7}x \text{ は同じ}$$

ということがわかりました。同じように考えると、

$$\frac{3a}{2} \text{ と } \boxed{\frac{3}{2}a} \text{ は同じ}$$

であることがわかります。また、

$$\boxed{-\frac{8x}{3}} \text{ と } -\frac{8}{3}x \text{ は同じ}$$

ということもわかります。 本文へ戻る

問 13. $\frac{8}{7}a^2$ は $\frac{8a^2}{7}$ と同じです。また、$-\frac{4}{7}a$ は $-\frac{\boxed{4a}}{7}$ と同じです。ですから、$\frac{8}{7}a^2$ という式を $-\frac{4}{7}a$ という式でわる代わりに、$\frac{8a^2}{7}$ という式を $-\frac{\boxed{4a}}{7}$ という式でわることにします。

「$\div\left(-\frac{4a}{7}\right)$」をすることと、「$\times\left(\boxed{-\frac{7}{4a}}\right)$」をすることは同じことです。ですから、次のように計算を進めることが出来ます。

$$\begin{aligned}\frac{8a^2}{7}\div\left(-\frac{4a}{7}\right) &= \frac{8a^2}{7}\times\left(-\boxed{\frac{7}{4a}}\right)\\ &= -\frac{8a^2\times\boxed{7}}{7\times\boxed{4a}}\end{aligned}$$

ここまでくれば、あとは 18 ページの例題 7 と同じように、かけ算のマークを復活して約分をする方法で計算を進めることができますね。ではやってみます。

$$\begin{aligned}-\frac{8a^2\times 7}{7\times 4a} &= -\frac{8\times a\times\boxed{a}\times 7}{7\times\boxed{4}\times\boxed{a}}\\ &= -\frac{\overset{\boxed{2}}{\cancel{8}}\times\overset{\boxed{1}}{\cancel{a}}\times a\times\overset{\boxed{1}}{\cancel{7}}}{\underset{\boxed{1}}{\cancel{7}}\times\underset{\boxed{1}}{\cancel{4}}\times\underset{\boxed{1}}{\cancel{a}}}\\ &= \boxed{-2a}\end{aligned}$$

となりますね。 本文へ戻る

問 14. それぞれの式は以下のように計算できます。

(1)
$$
\begin{aligned}
8a \div \frac{4}{3}a &= 8a \div \frac{4a}{3} \\
&= 8a \times \frac{3}{4a} \\
&= \frac{8a \times 3}{4a} \\
&= \frac{8 \times a \times 3}{4a} \\
&= \frac{8 \times a \times 3}{4 \times a} \\
&= \frac{\overset{2}{\cancel{8}} \times \overset{1}{\cancel{a}} \times 3}{\underset{1}{\cancel{4}} \times \underset{1}{\cancel{a}}} \\
&= 6
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
-15x^2 \div \left(-\frac{3}{2}x\right) &= -15x^2 \div \left(-\frac{3x}{2}\right) \\
&= -15x^2 \times \left(-\frac{2}{3x}\right) \\
&= \frac{15x^2 \times 2}{3x} \\
&= \frac{15 \times x \times x \times 2}{3 \times x} \\
&= \frac{\overset{5}{\cancel{15}} \times \overset{1}{\cancel{x}} \times x \times 2}{\underset{1}{\cancel{3}} \times \underset{1}{\cancel{x}}} \\
&= 10x
\end{aligned}
$$

(3)
$$
\begin{aligned}
9xy \div \left(-\frac{3}{2}x\right) &= 9xy \div \left(-\frac{3x}{2}\right) \\
&= 9xy \times \left(-\frac{2}{3x}\right) \\
&= -\frac{9xy \times 2}{3x} \\
&= -\frac{9 \times x \times y \times 2}{3 \times x} \\
&= -\frac{\overset{3}{\cancel{9}} \times \overset{1}{\cancel{x}} \times y \times 2}{\underset{1}{\cancel{3}} \times \underset{1}{\cancel{x}}} \\
&= -6y
\end{aligned}
$$

(4) $$\begin{aligned} -7xy^2 \div \frac{7}{3}x &= -7xy^2 \div \frac{7x}{3} \\ &= -7xy^2 \times \frac{3}{7x} \\ &= -\frac{7xy^2 \times 3}{7x} \\ &= -\frac{7 \times x \times y \times y \times 3}{7 \times x} \\ &= -\frac{\overset{1}{\cancel{7}} \times \overset{1}{\cancel{x}} \times y \times y \times 3}{\underset{1}{\cancel{7}} \times \underset{1}{\cancel{x}}} \\ &= -3y^2 \end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned} \left(-\frac{3}{5}a^2b\right) \div \frac{6}{5}ab &= \left(-\frac{3a^2b}{5}\right) \div \frac{6ab}{5} \\ &= \left(-\frac{3a^2b}{5}\right) \times \frac{5}{6ab} \\ &= -\frac{3a^2b \times 5}{5 \times 6ab} \\ &= -\frac{3 \times a \times a \times b \times 5}{5 \times 6 \times a \times b} \\ &= -\frac{\overset{1}{\cancel{3}} \times \overset{1}{\cancel{a}} \times a \times \overset{1}{\cancel{b}} \times \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \times \underset{2}{\cancel{6}} \times \underset{1}{\cancel{a}} \times \underset{1}{\cancel{b}}} \\ &= -\frac{a}{2} \end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned} \left(-\frac{2}{7}ab^2\right) \div \left(-\frac{4}{3}b\right) &= \left(-\frac{2ab^2}{7}\right) \div \left(-\frac{4b}{3}\right) \\ &= \left(-\frac{2ab^2}{7}\right) \times \left(-\frac{3}{4b}\right) \\ &= \frac{2ab^2 \times 3}{7 \times 4b} \\ &= \frac{2 \times a \times b \times b \times 3}{7 \times 4 \times b} \\ &= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \times a \times \overset{1}{\cancel{b}} \times b \times 3}{7 \times \underset{2}{\cancel{4}} \times \underset{1}{\cancel{b}}} \\ &= \frac{3b}{14} \end{aligned}$$

(7)
$$
\begin{aligned}
\left(-\frac{5}{18}ab\right) \div \left(-\frac{10}{9}b\right) &= \left(-\frac{5ab}{18}\right) \div \left(-\frac{10b}{9}\right) \\
&= \left(-\frac{5ab}{18}\right) \times \left(-\frac{9}{10b}\right) \\
&= \frac{5ab \times 9}{18 \times 10b} \\
&= \frac{5 \times a \times b \times 9}{18 \times 10 \times b} \\
&= \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \times a \times \overset{1}{\cancel{b}} \times \overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{2}{\cancel{18}} \times \underset{2}{\cancel{10}} \times \underset{1}{\cancel{b}}} \\
&= \frac{a}{4}
\end{aligned}
$$

(8)
$$
\begin{aligned}
\frac{2}{5}x^2y^2 \div \frac{3}{10}xy &= \frac{2x^2y^2}{5} \div \frac{3xy}{10} \\
&= \frac{2x^2y^2}{5} \times \frac{10}{3xy} \\
&= \frac{2x^2y^2 \times 10}{5 \times 3xy} \\
&= \frac{2 \times x \times x \times y \times y \times 10}{5 \times 3 \times x \times y} \\
&= \frac{2 \times \overset{1}{\cancel{x}} \times x \times \overset{1}{\cancel{y}} \times y \times \overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \times 3 \times \underset{1}{\cancel{x}} \times \underset{1}{\cancel{y}}} \\
&= \frac{4xy}{3}
\end{aligned}
$$

本文へ戻る

問 15. それぞれの式は以下のように計算できます。

(1)
$$
\begin{aligned}
(-5xy) \times 7y \div (-10x) &= (-5xy) \times 7y \times \left(-\frac{1}{10x}\right) \\
&= \frac{5xy \times 7y}{10x} \\
&= \frac{5 \times x \times y \times 7 \times y}{10 \times x} \\
&= \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \times \overset{1}{\cancel{x}} \times y \times 7 \times y}{\underset{2}{\cancel{10}} \times \underset{1}{\cancel{x}}} \\
&= \frac{7y^2}{2}
\end{aligned}
$$

(2) $7a \times 4b \div (-14a) = 7a \times 4b \times \left(-\dfrac{1}{14a}\right)$

$$= -\frac{7a \times 4b}{14a}$$

$$= -\frac{7 \times a \times 4 \times b}{14 \times a}$$

$$= -\frac{\overset{1}{\cancel{7}} \times \overset{1}{\cancel{a}} \times \overset{2}{\cancel{4}} \times b}{\underset{\underset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{14}} \times \underset{1}{\cancel{a}}}$$

$$= -2b$$

(3) $24xy \div (-6x) \times (-3xy) = 24xy \times \left(-\dfrac{1}{6x}\right) \times (-3xy)$

$$= \frac{24xy \times 3xy}{6x}$$

$$= \frac{24 \times x \times y \times 3 \times x \times y}{6 \times x}$$

$$= \frac{\overset{4}{\cancel{24}} \times \overset{1}{\cancel{x}} \times y \times 3 \times x \times y}{\underset{1}{\cancel{6}} \times \underset{1}{\cancel{x}}}$$

$$= 12xy^2$$

$-24x^2y \div (-6x) \div (-3y) = -24x^2y \times \left(-\dfrac{1}{6x}\right) \times \left(-\dfrac{1}{3y}\right)$

$$= -\frac{24x^2y}{6x \times 3y}$$

$$= -\frac{24 \times x \times x \times y}{6 \times x \times 3 \times y}$$

$$= -\frac{\overset{4}{\cancel{24}} \times \overset{1}{\cancel{x}} \times x \times \overset{1}{\cancel{y}}}{\underset{1}{\cancel{6}} \times \underset{1}{\cancel{x}} \times 3 \times \underset{1}{\cancel{y}}}$$

$$= -\frac{4x}{3}$$

本文へ戻る

問 16. それぞれの式は以下のように計算できます。

(1)
$$\begin{aligned}
\frac{3}{5}xy^2 \div \left(-\frac{3}{10}x\right) \div \left(-\frac{2}{3}y\right) &= \frac{3xy^2}{5} \div \left(-\frac{3x}{10}\right) \div \left(-\frac{2y}{3}\right) \\
&= \frac{3xy^2}{5} \times \left(-\frac{10}{3x}\right) \times \left(-\frac{3}{2y}\right) \\
&= \frac{3xy^2 \times 10 \times 3}{5 \times 3x \times 2y} \\
&= \frac{3 \times x \times y \times y \times 10 \times 3}{5 \times 3 \times x \times 2 \times y} \\
&= \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \times \overset{1}{\cancel{x}} \times \overset{1}{\cancel{y}} \times y \times \overset{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{10}} \times 3}{\underset{1}{\cancel{5}} \times \underset{1}{\cancel{3}} \times \underset{1}{\cancel{x}} \times \underset{1}{\cancel{2}} \times \underset{1}{\cancel{y}}} \\
&= 3y
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
-27a^2b \times \left(-\frac{2}{3}b\right) \div (-9ab) &= -27a^2b \times \left(-\frac{2b}{3}\right) \div (-9ab) \\
&= -27a^2b \times \left(-\frac{2b}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{9ab}\right) \\
&= -\frac{27ab^2 \times 2b}{3 \times 9ab} \\
&= -\frac{27 \times a \times b \times b \times 2 \times b}{3 \times 9 \times a \times b} \\
&= -\frac{\overset{\overset{1}{\cancel{9}}}{\cancel{27}} \times \overset{1}{\cancel{a}} \times \overset{1}{\cancel{b}} \times b \times 2 \times b}{\underset{1}{\cancel{3}} \times \underset{1}{\cancel{9}} \times \underset{1}{\cancel{a}} \times \underset{1}{\cancel{b}}} \\
&= 2b^2
\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}
\left(-\frac{5}{3}y\right) \times \frac{7}{15}xy \div \frac{5}{6}xy^2 &= \left(-\frac{5y}{3}\right) \times \frac{7xy}{15} \div \frac{5xy^2}{6} \\
&= \left(-\frac{5y}{3}\right) \times \frac{7xy}{15} \times \frac{6}{5xy^2} \\
&= -\frac{5y \times 7xy \times 6}{3 \times 15 \times 5xy^2} \\
&= -\frac{5 \times y \times 7 \times x \times y \times 6}{3 \times 15 \times 5 \times x \times y \times y} \\
&= -\frac{\overset{1}{\cancel{5}} \times \overset{1}{\cancel{y}} \times 7 \times \overset{1}{\cancel{x}} \times \overset{1}{\cancel{y}} \times \overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \times 15 \times \underset{1}{\cancel{5}} \times \underset{1}{\cancel{x}} \times \underset{1}{\cancel{y}} \times \underset{1}{\cancel{y}}} \\
&= -\frac{14}{15}
\end{aligned}$$

(4) $$\left(-\frac{3}{7}a^2b^2\right) \div 2ab \div \left(-\frac{3}{4}b\right) = \left(-\frac{3a^2b^2}{7}\right) \div 2ab \div \left(-\frac{3b}{4}\right)$$
$$= \left(-\frac{3a^2b^2}{7}\right) \times \frac{1}{2ab} \times \left(-\frac{4}{3b}\right)$$
$$= \frac{3a^2b^2 \times 4}{7 \times 2ab \times 3b}$$
$$= \frac{3 \times a \times a \times b \times b \times 4}{7 \times 2 \times a \times b \times 3 \times b}$$
$$= \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \times \overset{1}{\cancel{a}} \times a \times \overset{1}{\cancel{b}} \times \overset{1}{\cancel{b}} \times \overset{2}{\cancel{4}}}{7 \times \underset{1}{\cancel{2}} \times \underset{1}{\cancel{a}} \times \underset{1}{\cancel{b}} \times \underset{1}{\cancel{3}} \times \underset{1}{\cancel{b}}}$$
$$= \frac{2a}{7}$$

本文へ戻る

問 17.

(1) $(12+15)\times 4$ の計算結果と $12 \times \boxed{4} + 15 \times \boxed{4}$ の計算結果は同じです。

(2) $7\times 6 + 8 \times 6$ の計算結果と $(7+8)\times \boxed{6}$ の計算結果は同じです。

(3) $9\times(3+8)$ の計算結果と $\boxed{9} \times 3 + \boxed{9} \times 8$ の計算結果は同じです。

(4) $12\times 5 + 12 \times 15$ の計算結果と $\boxed{12} \times (5+15)$ の計算結果は同じです。

本文へ戻る

問 18.

(1) $(16+5)\times 12$ の計算結果と $\boxed{16} \times 12 + \boxed{5} \times 12$ の計算結果は同じです。

(2) $5\times 16 + 7 \times 16$ の計算結果と $\left(\boxed{5} + \boxed{7}\right) \times 16$ の計算結果は同じです。

(3) $9\times(3+24)$ の計算結果と $9 \times \boxed{3} + 9 \times \boxed{24}$ の計算結果は同じです。

(4) $8\times 14 + 8 \times 2$ の計算結果と $8 \times \boxed{14} + 8 \times \boxed{2}$ の計算結果は同じです。

本文へ戻る

問 19.

(1) $(5+7)\times 3 = 5 \boxed{\times} 3 \boxed{+} 7 \boxed{\times} 3$

(2) $6\times 5 + 9 \times 5 = \left(6 \boxed{+} 9\right) \times 5$

(3) $4\times(2+3) = 4 \boxed{\times} 2 \boxed{+} 4 \boxed{\times} 3$

(4) $8\times 2 + 8 \times 7 = 8 \boxed{\times} \left(2 \boxed{+} 7\right)$

本文へ戻る

問 20.

(1) $(12-3)\times 6$ の計算結果と $12\times\boxed{6}-3\times\boxed{6}$ の計算結果は同じです。

(2) $9\times 2-6\times 2$ の計算結果と $\left(\boxed{9}-\boxed{2}\right)\times 2$ の計算結果は同じです。

(3) $7\times 5-7\times 3$ の計算結果と $7\times\left(\boxed{5}-\boxed{3}\right)$ の計算結果は同じです。

(4) $4\times(8-5)=4\boxed{\times}8\boxed{-}4\boxed{\times}5$ が成り立ちます。

本文へ戻る

問 21.

(1) $(-9)\times 7+5\times 7$ の計算結果と $\{(-9)+5\}\times 7$ の計算結果は同じです。計算しなくてもわかりますね。

(2) $(-12)\times(-8)-6\times(-8)$ の計算結果と $\{(-12)-6\}\times(-8)$ の計算結果は同じです。計算しなくてもわかりますね。

本文へ戻る

問 22.

(1) -1 (2) 2
(3) -400 (4) -15
(5) -300 (6) -6400

本文へ戻る

問 23.
$$\begin{aligned}-(2a+5)&=(-1)\times(2a+5)\\&=(-1)\times 2a+(-1)\times 5\\&=-2a-5\end{aligned}$$
というわけで答えは ア. ですね。

本文へ戻る

問 24.

(1)
$$\begin{aligned}-(3x-8)&=(-1)\times(3x-8)\\&=(-1)\times 3x+(-1)\times(-8)\\&=-3x+8\end{aligned}$$

(2) $-(6a+4) = (-1)\times(6a+4)$

$= (-1)\times 6a + (-1)\times 4$

$= -6a-4$

(3) $-(-4b-3) = (-1)\times(-4b-3)$

$= (-1)\times(-4b) + (-1)\times(-3)$

$= 4b-3$

(4) $-(-7y+3) = (-1)\times(-7y+3)$

$= (-1)\times(-7y) + (-1)\times 3$

$= 7y-3$

本文へ戻る

問 25.

$$\begin{aligned}-5\times(2x-4y) &= (-5)\times\boxed{2x} + (-5)\times\left(\boxed{-4x}\right)\\ &= \boxed{-10x} + \boxed{20y}\end{aligned}$$

本文へ戻る

問 26. 分配法則を使って、それぞれの式を書きかえると以下のように計算できます。

(1) $7(8x+5y) = 7\times 8x + 7\times 5y$

$= 56x+35y$

(2) $12(3x-7y) = 12\times 3x + 12\times(-7y)$

$= 36x-84y$

(3) $-6(3x-2y) = -6\times 3x + (-6)\times(-2y)$

$= -18x+12y$

(4) $-12\left(\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}y\right) = -12\times\frac{1}{4}x + (-12)\times\frac{2}{3}y$

$= -3x-8y$

(5) $(x+2y)\times 4 = x\times 4 + 2y\times 4$

$$= 4x + 8y$$

(6) $(-3a+b)\times 5 = -3a\times 5 + b\times 5$

$$= -15a + 5b$$

(7) $(9a+6b)\times \dfrac{1}{3} = 9a\times\dfrac{1}{3} + 6b\times\dfrac{1}{3}$

$$= 3a + 2b$$

(8) $\left(-\dfrac{1}{2}x - \dfrac{2}{3}y\right)\times(-18) = -\dfrac{1}{2}x\times(-18) + \left(-\dfrac{2}{3}y\right)\times(-18)$

$$= 9x + 12y$$

本文へ戻る

問 27.

$$\begin{aligned}(9x-12y)\div(-3) &= (9x-12)\times\left(\boxed{-\frac{1}{3}}\right)\\ &= \boxed{9x}\times\left(-\frac{1}{3}\right) - \boxed{12}\times\left(-\frac{1}{3}\right)\\ &= \boxed{-3x+4}\end{aligned}$$

本文へ戻る

問 28. 分配法則を使って、それぞれの式を書きかえると以下のように計算できます。

(1) $(4a+8b)\div 2 = (4a+8b)\times\dfrac{1}{2}$

$$= 4a\times\frac{1}{2} + 8b\times\frac{1}{2}$$

$$= 2a + 4b$$

(2) $(6x-21y)\div(-3) = (6x-21)\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

$$= 6x\times\left(-\frac{1}{3}\right) - 21y\times\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= -2x + 7y$$

(3) $(-12a+8b)\div(-2)=(-12a+8b)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$$=-12a\times\left(-\frac{1}{2}\right)+8b\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=6a-4b$$

(4) $(-14a+56b)\div(-7)=(-14a+56b)\times\left(-\dfrac{1}{7}\right)$

$$=-14a\times\left(-\frac{1}{7}\right)+56b\times\left(-\frac{1}{7}\right)$$

$$=2a-8b$$

(5) $(x+2y)\div\left(-\dfrac{1}{4}\right)=(x+2y)\times(-4)$

$$=x\times(-4)+2y\times(-4)$$

$$=-4x-8y$$

(6) $(-3a+b)\div\dfrac{1}{5}=(-3a+b)\times 5$

$$=-3a\times 5+2b\times 5$$

$$=-15a+10b$$

(7) $(6x-18y)\div\dfrac{3}{5}=(6x-18y)\times\dfrac{5}{3}$

$$=6x\times\frac{5}{3}-18y\times\frac{5}{3}$$

$$=10x-30y$$

(8) $(-12a+20b)\div\left(-\dfrac{4}{3}\right)=(-12a+20b)\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)$

$$=-12a\times\left(-\frac{3}{4}\right)+20b\times\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$=9a-15b$$

本文へ戻る

問 29. 『$2x+4y$ という式と $-5y$ という式をかけるとどうなるのか考えることにします。次の計算の空欄に正しい数や式を書きなさい。』という問題でしたね。

$$(2x+4y)\times(-5y)=\boxed{2x}\times(-5y)+\boxed{4y}\times(-5y)$$
$$=\boxed{-10xy}-\boxed{20y^2}$$

となります。

本文へ戻る

問 30. 『$-5y$ という式と $2x-4y$ という式をかけるとどうなるのか考えることにします。次の計算の空欄に正しい数や式を書きなさい。』という問題でしたね。

$$\begin{aligned} -5y \times (2x-4y) &= (-5y) \times \boxed{2x} - (-5y) \times \boxed{4y} \\ &= \boxed{-10xy} + \boxed{20y^2} \end{aligned}$$

となります。

本文へ戻る

問 31. 分配法則を使って、式の見かけをかえる問題でしたね。

(1) $7x(8x+5y) = 7x \times 8x + 7x \times 5y = 56x^2 + 35xy$

(2) $12y(3x-7y) = 12y \times 3x - 12y \times 7y = 36xy - 84y^2$

(3) $-6x(3x-2y) = -6x \times 3x + 6x \times 2y = 18x^2 + 12xy$

(4) $-12y\left(\dfrac{1}{4}x + \dfrac{2}{3}y\right) = -12y \times \dfrac{1}{4}x - 12y \times \dfrac{2}{3}y = -3xy - 8y^2$

(5) $(x+2y) \times 4a = x \times 4a + 2y \times 4a = 4ax + 8ay$

(6) $(-3a+b) \times 5y = -3a \times 5y + b \times 5y = -15ay + 5by$

(7) $(9a+6b) \times \dfrac{1}{3}b = 9a \times \dfrac{1}{3}b + 6b \times \dfrac{1}{3}b = 3ab + 2b^2$

(8) $\left(-\dfrac{1}{2}x - \dfrac{2}{3}y\right) \times (-18y) = \dfrac{1}{2}x \times 18y + \dfrac{2}{3}y \times 18y = 9xy + 12y^2$

本文へ戻る

問 32. 『$9x^2-12x$ という式を $-3x$ でわるとどうなるのか考えることにします。次の文の空欄に正しい数や式を書きなさい。』という問題でしたね。

$$\begin{aligned} (9x^2-12x) \div (-3x) &= (9x^2-12x) \times \left(\boxed{-\frac{1}{3x}}\right) \\ &= \boxed{9x^2} \times \left(-\frac{1}{3x}\right) - \boxed{12x} \times \left(-\frac{1}{3x}\right) \\ &= \boxed{-3x+4} \end{aligned}$$

となります。

本文へ戻る

問 33. 『$9x^2 - 12x$ という式を $-\dfrac{3}{5}x$ でわるとどうなるのか考えることにします。次の文の空欄に正しい数や式を書きなさい。』という問題でしたね。

$$\begin{aligned}(9x^2 - 12x) \div \left(-\frac{3}{5}x\right) &= (9x^2 - 12x) \times \left(\boxed{-\frac{5}{3x}}\right) \\ &= 9x^2 \times \left(\boxed{-\frac{5}{3x}}\right) - 12x \times \left(\boxed{-\frac{5}{3x}}\right) \\ &= \boxed{-15x + 20}\end{aligned}$$

本文へ戻る

問 34. 分配法則を使って式の見かけをかえる問題でしたね。

(1) $$\begin{aligned}(4ab + 8b^2) \div 2b &= (4ab + 8b^2) \times \left(\frac{1}{2b}\right) \\ &= 4ab \times \frac{1}{2b} + 8b^2 \times \frac{1}{2b} \\ &= 2a + 4b\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}(6x^2 - 21x) \div (-3x) &= (6x^2 - 21x) \times \left(-\frac{1}{3x}\right) \\ &= 6x^2 \times \left(-\frac{1}{3x}\right) - 21x \times \left(-\frac{1}{3x}\right) \\ &= -2x + 7\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}(-12a^2 + 8ab) \div (-2a) &= (-12a^2 + 8ab) \times \left(-\frac{1}{2a}\right) \\ &= -12a^2 \times \left(-\frac{1}{2a}\right) + 8ab \times \left(-\frac{1}{2a}\right) \\ &= 6a - 4b\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}(-14ab + 56b) \div (-7b) &= (-14ab + 56b) \times \left(-\frac{1}{7b}\right) \\ &= -14ab \times \left(-\frac{1}{7b}\right) + 56b \times \left(-\frac{1}{7b}\right) \\ &= 2a - 8\end{aligned}$$

(5) $(x^2+2xy)\div\left(-\dfrac{1}{4}x\right)=(x^2+2xy)\times\left(-\dfrac{4}{x}\right)$

$$=x^2\times\left(-\frac{4}{x}\right)+2xy\times\left(-\frac{4}{x}\right)$$

$$=-4x-8y$$

(6) $(-3ab^2+b^2)\div\dfrac{1}{5}b=(-3ab^2+b^2)\times\dfrac{5}{b}$

$$=-3ab^2\times\frac{5}{b}+b^2\times\frac{5}{b}$$

$$=-15ab+5b$$

(7) $(6xy^2-18x^2y)\div\left(\dfrac{3}{5}xy\right)=(6xy^2-18x^2y)\times\dfrac{5}{3xy}$

$$=6xy^2\times\frac{5}{3xy}-18x^2y\times\frac{5}{3xy}$$

$$=10y-30x$$

(8) $(-12a^2b+20ab)\div\left(-\dfrac{4}{3}a\right)=(-12a^2b+20ab)\times\left(-\dfrac{3}{4a}\right)$

$$=-12a^2b\times\left(-\frac{3}{4a}\right)+20ab\times\left(-\frac{3}{4a}\right)$$

$$=9ab-15b$$

本文へ戻る

問 35. 式を展開する問題でしたね。

(1) 例えば $a-b$ を M とおいて、分配法則を使って次のように展開していくことができます。

$$\begin{aligned}(a-b)(c+d)&=M(c+d)\\&=Mc+Md\\&=(a-b)c+(a-b)d\\&=ac-bc+ad-bd\end{aligned}$$

(2) 例えば $a-b$ を M とおいて、分配法則を使って次のように展開していくことがで

きます。

$$\begin{aligned}(a-b)(c-d) &= M(c-d)\\ &= Mc - Md\\ &= (a-b)c-(a-b)d\\ &= ac-bc-ad+bd\end{aligned}$$

(3) 例えば $x-3$ を M とおいて、分配法則を使って次のように展開していくことができます。

$$\begin{aligned}(x+3)(y-5) &= M(y-5)\\ &= My-5M\\ &= (x-3)y-5(x-3)\\ &= xy-3y-5x+15\end{aligned}$$

(4) 例えば $y-2$ を M とおいて、分配法則を使って次のように展開していくことができます。

$$\begin{aligned}(x-5)(y-2) &= (x-5)M\\ &= xM-5M\\ &= x(y-2)-5(y-2)\\ &= xy-2x-5y+10\end{aligned}$$

本文へ戻る

問 36. 式を展開して見かけを変える問題でしたね。

(1) 例えば $a-2$ を M とおいて、分配法則を使って次のように展開していくことがで

きます。

$$\begin{aligned}(a-2)(a-3) &= M(a-3)\\ &= Ma-3M\\ &= (a-2)a-3(a-2)\\ &= a^2-2a-3a+6\\ &= a^2-5a+6\end{aligned}$$

(2) 例えば $x+5$ を M とおいて、分配法則を使って次のように展開していくことができます。

$$\begin{aligned}(x+5)(x+9) &= M(x+9)\\ &= Mx+9M\\ &= (x+5)x+9(x+5)\\ &= x^2+5x+9x+45\\ &= x^2+14x+45\end{aligned}$$

(3) 例えば $a-5$ を M とおいて、分配法則を使って次のように展開していくことができます。

$$\begin{aligned}(2a+3)(a-5) &= (2a+3)M\\ &= 2aM+3M\\ &= 2a(a-5)+3(a-5)\\ &= 2a^2-10a+3a-15\\ &= a^2-7a-15\end{aligned}$$

(4) 例えば $3x-5$ を M とおいて、分配法則を使って次のように展開していくことがで

きます。

$$
\begin{aligned}
(3x-5)(4x-2) &= M(4x-2)\\
&= 4xM-2M\\
&= 4x(3x-5)-2(3x-5)\\
&= 12x^2-20x-6x+10\\
&= 12x^2-26x+10
\end{aligned}
$$

本文へ戻る

問 37. 式を展開して見かけを変える問題でしたね。

(1) 例えば $3a-8b$ を M とおいて、分配法則を使って次のように展開していくことができます。

$$
\begin{aligned}
(5a+4b)(3a-8b) &= (5a+4b)M\\
&= 5aM+4bM\\
&= 5a(3a-8b)+4b(3a-8b)\\
&= 15a^2-40ab+12ab-32b^2\\
&= 15a^2-28ab-32b^2
\end{aligned}
$$

(2) 例えば $3x-y$ を M とおいて、分配法則を使って次のように展開していくことができます。

$$
\begin{aligned}
(3x-y)(8x-3y) &= M(8x-3y)\\
&= 8xM-3yM\\
&= 8x(3x-y)x-3y(3x-y)\\
&= 24x^2-8xy-9xy+3y^2\\
&= 24x^2-17xy+3y^2
\end{aligned}
$$

本文へ戻る

問 38. 式を展開して見かけを変える問題でしたね。

(1) 例えば $2a-5b+3$ を M とおいて、分配法則を使って次のように展開していくこ

とができます。

$$
\begin{aligned}
(3a+4)(2a-5b+3) &= (3a+4)M \\
&= 3aM+4M \\
&= 3a(2a-5b+3)+4(2a-5b+3) \\
&= 6a^2-15ab+9a+8a-20b+12 \\
&= 6a^2-15ab+17a-20b+12
\end{aligned}
$$

(2) 例えば $3x-2y-1$ を M とおいて、分配法則を使って次のように展開していくことができます。

$$
\begin{aligned}
(3x-2y-1)(4x-3y) &= M(4x-3y) \\
&= 4xM-3yM \\
&= 4x(3x-2y-1)-3y(3x-2y-1) \\
&= 12x^2-8xy-4x-9xy+6y^2+3y \\
&= 12x^2-17xy+6y^2-4x+3y
\end{aligned}
$$

本文へ戻る

問 39. 右のような計算方法で式を展開して見かけを変える問題でしたね。

それぞれ以下のように計算できます。

$$(\bigstar+\square)(\blacklozenge+\triangle)=\overset{①}{\bigstar\blacklozenge}+\overset{②}{\bigstar\triangle}+\underset{③}{\square\blacklozenge}+\underset{④}{\square\triangle}$$

(1) $(y-5)(x-9)=\overset{①}{xy}-\overset{②}{9y}-\underset{③}{5x}+\underset{④}{45}$

(2) $(2y-7)(5x-9)=\overset{①}{10xy}-\overset{②}{18y}-\underset{③}{35x}+\underset{④}{63}$

(3) $(3a-4)(4b-1)=\overset{①}{12ab}-\overset{②}{3a}-\underset{③}{16b}+\underset{④}{4}$

(4) $(2a+7b)(5c-9d) = \overset{①}{10ac} - \overset{②}{18ad} + \underset{③}{35bc} - \underset{④}{63bd}$

本文へ戻る

問 40. 右をような計算方法で式を展開して見かけを変える問題でしたね。

それぞれ以下のように計算できます。

$$(★+□)(♦+△) = \overset{①}{★♦} + \overset{②}{★△} + \underset{③}{□♦} + \underset{④}{□△}$$

(1) $(y-5)(y+9) = \overset{①}{y^2} + \overset{②}{9y} - \underset{③}{5y} - \underset{④}{45} = y^2 + 4y - 45$

(2) $(2x-7)(5x-9) = \overset{①}{10x^2} - \overset{②}{18x} - \underset{③}{35x} + \underset{④}{63} = 10x^2 - 53x + 63$

(3) $(3a+4)(4a+1) = \overset{①}{12a^2} + \overset{②}{3a} + \underset{③}{16a} + \underset{④}{4} = 12a^2 + 19a + 4$

(4) $(2a+7b)(5a-9b) = \overset{①}{10a^2} - \overset{②}{18ab} + \underset{③}{35ab} - \underset{④}{63b^2} = 10a^2 + 17ab - 63b^2$

本文へ戻る

問 41. 例 3 の説明がしっかり理解できた人のための問題でしたね。

(1) $(a+4)(b-6)$ という式と $(a+4)(a-6)$ という式では、右のような計算方法で展開していくとき仲間の部品（専門用語で言うと同類項）が出てくるのは

$$(★+□)(♦+△) = \overset{①}{★♦} + \overset{②}{★△} + \underset{③}{□♦} + \underset{④}{□△}$$

$$(a+4)(a-6)$$

です。

(2) それぞれの式を展開すると次のようになります。

$$(a+4)(b-6) = \overset{①}{ab} - \overset{②}{6a} + \underset{③}{4b} - \underset{④}{24}$$

$$(a+4)(a-6) = \overset{①}{a^2} - \overset{②}{6a} + \underset{③}{4a} - \underset{④}{24} = a^2 - 2a - 24$$

本文へ戻る

問 42. $(x+7)(x-5)$ という式の展開について詳しく分析する問題でしたね。

(1) $(x+7)(x-5)$ という式を展開していくと、必ず最後には、

$$x^2 + \text{ナントカ}\ x + \text{ほにゃらら}$$

という形の式になりますが

「ほにゃらら」は -35 （$+7$ と -5 をかけると求めることができる）

「ナントカ」は $+2$ （$+7$ と -5 をたすと求めることができる）

です。

(2) 「ほにゃらら」は -35、「ナントカ」は $+2$ であることがわかったのですから、$(x+7)(x-5)$ という式を展開すると

$$(x+7)(x-5) = x^2 + 2x - 35$$

となるはずですね。

本文へ戻る

問 43. $(x-7)(x+5)$ という式の展開について詳しく分析する問題でしたね。

(1) $(x-7)(x+5)$ という式を展開していくと、必ず最後には、

$$x^2 + \text{ナントカ}\ x + \text{ほにゃらら}$$

という形の式になりますが

「ほにゃらら」は -35 （-7 と $+5$ をかけると求めることができる）

「ナントカ」は -2 （-7 と $+5$ をたすと求めることができる）

です。

(2) 「ほにゃらら」は -35、「ナントカ」は -2 であることがわかったのですから、$(x-7)(x+5)$ という式を展開すると

$$(x-7)(x+5) = x^2 - 2x - 35$$

となるはずですね。

本文へ戻る

問 44. $(x-7)(x-5)$ という式の展開について詳しく分析する問題でしたね。

(1) $(x-7)(x-5)$ という式を展開していくと、必ず最後には、

$$x^2 + \text{ナントカ}\ x + \text{ほにゃらら}$$

という形の式になりますが

「ほにゃらら」は $+35$ （-7 と -5 をかけると求めることができる）

「ナントカ」は -12 （-7 と -5 をたすと求めることができる）

です。

(2) 「ほにゃらら」は $+35$、「ナントカ」は -12 であることがわかったのですから、$(x-7)(x-5)$ という式を展開すると

$$(x-7)(x-5) = x^2 - 12x + 35$$

となるはずですね。

本文へ戻る

問 45. 式を展開して見かけを変える問題でしたね。

(1) $(x+9)(x+4)=x^2+13x+36$ (2) $(x-6)(x+5)=x^2-x-30$

(3) $(a+2)(a-5)=a^2-3a-10$ (4) $(a-3)(a-4)=a^2-7a+12$

本文へ戻る

問 46.

(1) $(x-2)(x-9)$ を展開すると

$$(x-2)(x-9)=x^2-11x+18$$

となります。

(2) $(x-2y)(x-9y)$ を展開すると

$$(x-2y)(x-9y)=x^2-11xy+18y^2$$

となります。

(3) (1) と (2) の答えをよく見て比べてみます。すると、展開した結果はよく似ていますが、違いは、「真ん中にできた部品に y がつくかつかないか」ということと、「最後の部品に y^2 がつくかつかないか」ということです。

本文へ戻る

問 47.

(1) $(a+6)(a+9)$ を展開すると

$$(a+6)(a+9)=a^2+15a+54$$

となります。

(2) $(a+6b)(a+9b)$ を展開すると

$$(a+6b)(a+9b)=a^2+15ab+54b^2$$

となります。

(3) (1) と (2) の答えをよく見て比べてべてみます。すると、展開した結果はよく似ていますが、違いは、「真ん中にできた部品に b がつくかつかないか」ということと、「最後の部品に b^2 がつくかつかないか」ということです。

本文へ戻る

問 48. $(x-5)^2$ という式の展開について考えてみることにします。

そもそも、「にじょう」というのは、同じモノを 2 つかけるという意味です。ですから、$(x-5)^2$ とは、$\left(\boxed{x-5}\right)\left(\boxed{x-5}\right)$ のことです。そうすると、ちょっと前に学んだ方法で、この式を展開することができます。前に、

$(x+\square)(x+\triangle)$ という形の式を展開していくと、必ず最後には、

$$x^2 + \text{ナントカ}\ x + \text{ほにゃらら}$$

という形の式になり、

「ナントカ」という数は「$+\square$ と $+\triangle$ をたした数」になっていて、「ほにゃらら」という数は「$+\square$ と $+\triangle$ をかけた数」になっている

ということを学びました。ですから、

$$(x-5)(x-5) = x^2 - \boxed{10}\,x + \boxed{25}$$

って展開できますよね。

ところで今、$(x+\square)(x+\triangle)$ という形の式の展開のことを思い出して考えてみたわけですが、この $(x-5)(x-5)$ という式では $\square$ と $\triangle$ は $\boxed{\text{同じ}}$ 数でした。どちらも -5 だったわけです。こういうときは、「ナントカ」という数は「$\square$ を 2 つたした数」なので結局「$+\square$ の $\boxed{2}$ 倍」になり、「ほにゃらら」という数は「$\square$ を 2 つかけた数」なので結局「$+\square$ の $\boxed{2}$ 乗」になってしまうのです 。

本文へ戻る

問 49. $(x-5y)^2$ という式の展開について考えてみることにします。

そもそも、「にじょう」というのは、同じモノを 2 つかけるという意味です。ですから、$(x-5y)^2$ とは、$\left(\boxed{x-5y}\right)\left(\boxed{x-5y}\right)$ のことです。

では、右の図を見てください。初心に帰ってこのように展開することにします。

$$(x-5y)(x-5y)$$

①のかけ算では $\boxed{x^2}$ ができます。

②と③のかけ算ではどちらも $\boxed{-5xy}$ ができます。つまり、$-5xy$ が 2 つできるわけですから、$-5xy$ を $\boxed{2}$ 倍しておけばよいわけです。

④のかけ算では $-5y$ と $-5y$ をかけます。同じモノを 2 つかけるのですから $-5y$ を $\boxed{2}$ 乗しておけばよいのです。

このように考えると、

$$(x-5y)^2 = x^2 + 2 \times \left(\boxed{-5xy}\right) + \left(\boxed{-5y}\right)^2 = x^2 - \boxed{10xy} + \boxed{25y^2}$$

と計算することができますね。

本文へ戻る

問 50. 式を展開して見かけを変える問題でしたね。

(1) $(a+5)^2 = a^2 + 10a + 25$　(2) $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

(3) $(a+5b)^2 = a^2 + 10ab + 25b^2$　(4) $(x-3y)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2$

(5) $(3a+5)^2 = 9a^2 + 30a + 25$　(6) $(2x-7)^2 = 4x^2 - 28x + 49$

(7) $(3a+5b)^2 = 9a^2 + 30ab + 25b^2$　(8) $(2x-7y)^2 = 4x^2 - 28xy + 49y^2$

本文へ戻る

問 51. $(a+b)(a-b)$ という式を展開してみようと思います。

右を見てください。初心に帰ってこのように展開することにします。

$$(a+b)(a-b)$$

①のかけ算では $\boxed{a^2}$ ができます。

②のかけ算では $\boxed{-ab}$ ができ、③のかけ算では $\boxed{ab}$ ができます。つまり、「プラスマイナスが違っているだけの仲間の部品」ができるわけです。ですから、この 2 つの仲間の部品を合わせると何もなくなってしまうのです。

④のかけ算では $\boxed{b}$ と $\boxed{-b}$ をかけます。「プラスマイナスが違っているだけの文字」をを 2 つかけるのですからその文字を 2 乗してさらにマイナスのマークを付ければよいのです。

このように考えると、

$$(a+b)(a-b) = \boxed{a^2} - \boxed{b^2}$$

と計算することができますね。

本文へ戻る

問 52. 式を展開して見かけを変える問題でしたね。

(1) $(x+8)(x-8) = x^2 - 64$

(2) $(x-8)(x+8) = x^2 - 64$

(3) $(8+x)(8-x) = 64 - x^2$

(4) $(x+8y)(x-8y) = x^2 - 64y^2$

(5) $(2x+1)(2x-1) = 4x^2 - 1$

(6) $(2x+5y)(2x-5y) = 4x^2 - 25y^2$

(7) $(a-5b)(a+5b) = a^2 - 25b^2$

(8) $(3a+2b)(3a-2b) = 9a^2 - 4b^2$

本文へ戻る

問 53. 展開などをして式の見かけをマシにする問題でしたね。

(1)
$$\begin{aligned} (x+2)(x+5) - x(x-8) &= (x^2 + 7x + 15) - (x^2 - 8x) \\ &= x^2 + 7x + 15 - x^2 + 8x \\ &= 15x + 15 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} (x-6)(x+6) + (x-3)(x-8) &= (x^2 - 36) + (x^2 - 11x + 24) \\ &= x^2 - 36 + x^2 - 11x + 24 \\ &= 2x^2 - 11x - 8 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} (a+5)^2 + (a-7)(a-8) &= (a^2 + 10a + 25) + (a^2 - 15a + 56) \\ &= a^2 + 10a + 25 + a^2 - 15a + 56 \\ &= 2a^2 + 5a + 81 \end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}(2x+3y)(2x+5y)-x(3x-8) &= (4x^2+16xy+15y^2)-(3x^2+8x)\\ &= 4x^2+16xy+15y^2-3x^2-8x\\ &= x^2+16xy+7y^2\end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned}(a+b)(a-b)-(a-b)^2 &= (a^2-b^2)-(a^2-2ab+b^2)\\ &= a^2-b^2-a^2+2ab-b^2\\ &= -2b^2+2ab\end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned}(2x+3y)(5x-2y)-(3x+1)^2 &= (10x^2+11xy-6y^2)-(9x^2+6x+1)\\ &= 10x^2+11xy-6y^2-9x^2-6x-1\\ &= x^2+11xy-6y^2-6x-1\end{aligned}$$

本文へ戻る

問 54. 式を因数分解して見かけを変える問題でしたね。

(1) $6x+8x$ ですね。この式を詳しく分析してみましょう。

まず、この式の中にある $6x$ と $8y$ という部品を分析します。すると右のようになっていることがわかります。

$6x \cdots\cdots 2\times 3\times x$

$8y \cdots\cdots 2\times 4\times y$

この分析結果をよく見ると、どちらの部品にも 2 が共通に含まれていることがわかります。その他に共通に含まれているものはありません。ということは $6x+8y$ という式では、分配法則を使って 2 だけをくくりだせることになります。ですから、次のように因数分解の計算をしていくことができます。

$$\begin{aligned}6x+8y &= 2\times 3x+2\times 4x\\ &= 2(3x+4y)\end{aligned}$$

(2) $6x+8$ ですね。この式を詳しく分析してみましょう。

まず、この式の中にある $6x$ と 8 という部品を分析します。すると右のようになっていることがわかり

$6x \cdots\cdots 2\times 3\times x$

$8 \quad \cdots\cdots 2\times 4$

ます。

この分析結果をよく見ると、どちらの部品にも 2 が共通に含まれていることがわかります。その他に共通に含まれているものはありません。ということは $6x+8$ という式では、分配法則を使って 2 だけをくくりだせることになります。ですから、次のように因数分解の計算をしていくことができます。

$$\begin{aligned} 6x+8 &= 2\times 3x+2\times 4x \\ &= 2(3x+4) \end{aligned}$$

(3) $6x^2+8x$ ですね。この式を詳しく分析してみましょう。

まず、この式の中にある $6x^2$ と $8x$ という部品を分析します。すると右のようになっていることがわかります。

$$\begin{aligned} &6x^2 \cdots\cdots 2\times 3\times x\times x \\ &8x \quad \cdots\cdots 2\times 4\times x \end{aligned}$$

この分析結果をよく見ると、どちらの部品にも 2 と x が共通に含まれていることがわかります。その他に共通に含まれているものはありません。ということは $6x^2+8x$ という式では、分配法則を使って 2 と x だけをくくりだせることになります。ですから、次のように因数分解の計算をしていくことができます。

$$\begin{aligned} 6x^2+8x &= 2x\times 3x+2x\times 4 \\ &= 2x(3x+4) \end{aligned}$$

(4) $6x^2y+8y$ ですね。この式を詳しく分析してみましょう。

まず、この式の中にある $6x^2y$ と $8y$ という部品を分析します。すると右のようになっていることがわかります。

$$\begin{aligned} &6x^2y \cdots\cdots 2\times 3\times x\times x\times y \\ &8y \quad\ \cdots\cdots 2\times 4\times y \end{aligned}$$

この分析結果をよく見ると、どちらの部品にも 2 と y が共通に含まれていることがわかります。その他に共通に含まれているものはありません。ということは

$6x^2y+8y$ という式では、分配法則を使って 2 と y だけをくくりだせることになります。ですから、次のように因数分解の計算をしていくことができます。

$$\begin{aligned}6x^2y+8y &= 2y\times 3x^2+2y\times 4\\ &= 2y(3x^2+4)\end{aligned}$$

本文へ戻る

問 55. 式を因数分解して見かけを変える問題でしたね。くどい説明はやめて、あっさり計算だけをお見せします。

(1) $2mx-3my=m(2x-3y)$

(2) $4ax+2a=2a(x+1)$

(3) $12a^2b-8b^2=4b(3a^2-2b)$

(4) $ma-na=a(m-n)$

本文へ戻る

問 56. 式を因数分解して見かけを変える問題でしたね。

この問題の式はどれも、

$$x^2+\text{ナントカ}\ x+\text{ほにゃらら}$$

という形をしています。ですから、これらの式は、展開される前、

$$(x+\square)(x+\triangle)$$

という形をしていたはずです。そして、$\square$ と $\triangle$ を見つけるには、かけると「ほにゃらら」になり、たすと「ナントカ」になる 2 つの数を探せばよいのですよね。

(1) x^2+3x+2

かけると +2、たすと +3 になる 2 つの数を探すと、+1 と +2 が見つかります。ですから、

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

と因数分解できます。

(2) $x^2 - 4x + 3$

かけると $+3$、たすと -4 になる 2 つの数を探すと、-1 と -3 が見つかります。ですから、

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

と因数分解できます。

(3) $x^2 + 7x - 8$

かけると -8、たすと $+7$ になる 2 つの数を探すと、$+8$ と -1 が見つかります。ですから、

$$x^2 + 7x - 8 = (x + 8)(x - 1)$$

と因数分解できます。

(4) $x^2 + 2x + 1$

かけると $+1$、たすと $+2$ になる 2 つの数を探すと、$+1$ と $+1$ が見つかります。ですから、

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1) = (x + 1)^2$$

と因数分解できます。

(5) $x^2 + 7x + 6$

かけると $+6$、たすと $+7$ になる 2 つの数を探すと、$+1$ と $+6$ が見つかります。ですから、

$$x^2 + 7x + 6 = (x + 1)(x + 6)$$

と因数分解できます。

(6) $x^2 - 8x + 7$

かけると $+7$、たすと -8 になる 2 つの数を探すと、-7 と -1 が見つかります。ですから、

$$x^2 - 8x + 7 = (x - 7)(x - 1)$$

と因数分解できます。

(7) $x^2 - x - 6$

かけると -6、たすと -1 になる 2 つの数を探すと、-3 と $+2$ が見つかります。ですから、

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

と因数分解できます。

(8) $x^2 - 4x + 4$

かけると $+4$、たすと -4 になる 2 つの数を探すと、-2 と -2 が見つかります。ですから、

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x-2) = (x-2)^2$$

と因数分解できます。

(9) $x^2 + 8x + 12$

かけると $+12$、たすと $+8$ になる 2 つの数を探すと、$+2$ と $+6$ が見つかります。ですから、

$$x^2 + 8x + 12 = (x+2)(x+6)$$

と因数分解できます。

(10) $x^2 - 9x + 18$

かけると $+18$、たすと -9 になる 2 つの数を探すと、-3 と -6 が見つかります。ですから、

$$x^2 - 9x + 18 = (x-3)(x-6)$$

と因数分解できます。

(11) $x^2 + 3x - 10$

かけると -10、たすと $+3$ になる 2 つの数を探すと、-2 と $+5$ が見つかります。ですから、

$$x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5)$$

と因数分解できます。

(12) $x^2 + 14x + 49$

かけると $+49$、たすと $+14$ になる 2 つの数を探すと、$+7$ と $+7$ が見つかります。

ですから、

$$x^2 + 14x + 49 = (x + 7)(x + 7) = (x + 7)^2$$

と因数分解できます。

(13) $x^2 + 11x - 12$

かけると -12、たすと $+11$ になる 2 つの数を探すと、$+12$ と -1 が見つかります。

ですから、

$$x^2 + 11x - 12 = (x + 12)(x - 1)$$

と因数分解できます。

(14) $x^2 - 10x + 16$

かけると $+16$、たすと -10 になる 2 つの数を探すと、-2 と -8 が見つかります。

ですから、

$$x^2 - 10x + 16 = (x - 2)(x - 8)$$

と因数分解できます。

(15) $x^2 + 2x - 35$

かけると -35、たすと $+2$ になる 2 つの数を探すと、$+7$ と -5 が見つかります。

ですから、

$$x^2 + 2x - 35 = (x + 7)(x - 5)$$

と因数分解できます。

(16) $x^2 - 12x + 36$

かけると $+36$、たすと -12 になる 2 つの数を探すと、-6 と -6 が見つかります。

ですから、

$$x^2 - 12x + 36 = (x - 6)(x - 6) = (x - 6)^2$$

と因数分解できます。

最後に念のため言っておきます。本文の中でも言ったことですが、因数分解は展開より 1 ランク上の難しい計算です。自分の行った因数分解が正しくできているかどうか心配になることも多いと思います。ですから、因数分解をしたときは、自分の出した答えを展開しなおして、もとの式に戻るかどうか確認するようにしましょう。 本文へ戻る

問 57. この問題の式はどれも

$$\bigstar^2 - \triangle^2$$

という形をしています。ですから展開する前は、

$$(\bigstar + \triangle)(\bigstar - \triangle)$$

という形だったわけです。ということは、式をよく見て ★ と △ を発見できれば因数分解ができることになります。

(1) $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$

(2) $9x^2 - 16 = (3x + 4)(3x - 4)$

(3) $x^2 - 16y^2 = (x + 4y)(x - 4y)$

(4) $49x^2 - 16y^2 = (7x + 4y)(7x - 4y)$

最後に念のため言っておきます。本文の中でも言ったことですが、因数分解は展開より 1 ランク上の難しい計算です。自分の行った因数分解が正しくできているかどうか心配になることも多いと思います。ですから、因数分解をしたときは、自分の出した答えを展開しなおして、もとの式に戻るかどうか確認するようにしましょう。 本文へ戻る

問 58. 式を因数分解して見かけを変える問題でしたね。

もうお分かりだと思いますが、

$$\text{前の部品}^2 + 2 \times \text{後ろの部品} \times \text{前の部品} + \text{後ろの部品}^2$$

という形の式は、展開する前は、

$$(\text{前の部品} + \text{後ろの部品})^2$$

という式だったのである

ということでしたね。ですから、「因数分解をしようとしている 1 番目の部品と 3 番目の部品」をよく見て、「前の部品」と「後ろの部品」が何なのか予想をたて、その予想が正しいことを「因数分解をしようとしている式の 2 番目の部品」で確かめれば良いわけです。

(1) $4x^2 + 12x + 9$

1 番目の部品は $4x^2$ ですが、これは $2x$ を二乗したものです。

3 番目の部品は 9 ですが、これは 3 を二乗したものです。

ですから、1 番目と 3 番目の部品を見る限り、$4x^2 + 12x + 9$ という式は、

$$\text{前の部品}^2 + 2 \times \text{後ろの部品} \times \text{前の部品} + \text{後ろの部品}^2$$

という形をしているわけです。つまり、「前の部品」が $2x$ で「後ろの部品」が 3 だと考えればよいわけです。

というわけで、残されている問題は、2 番目の部品も形が合っていのるかということです。そこで、確認してみることにしましょう。

「前の部品」は $2x$ になる予定で、「後ろの部品」は 3 になる予定です。そして、$2 \times \text{後ろの部品} \times \text{前の部品}$ を作ってみると $2 \times 3 \times 2x = 12x$ となります。ちゃんと $4x^2 + 12x + 9$ という式の 2 番目の部品になっていますね。これで全て確認できました。

というわけで、

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$$

と因数分解できます。

(2) $4x^2 - 12x + 9$

1 番目の部品は $4x^2$ ですが、これは $2x$ を二乗したものです。

3 番目の部品は 9 ですが、これは 3 を二乗したものです。

ですから、1 番目と 3 番目の部品を見る限り、$4x^2 - 12x + 9$ という式は、

$$\text{前の部品}^2 + 2 \times \text{後ろの部品} \times \text{前の部品} + \text{後ろの部品}^2$$

という形をしているわけです。つまり、「前の部品」が $2x$ で「後ろの部品」が 3 だと考えればよいわけです。

というわけで、残されている問題は、2 番目の部品も形が合っていのるかということです。そこで、確認してみることにしましょう。

「前の部品」は $2x$ になる予定で、「後ろの部品」は 3 になる予定です。そして、$2 \times$ 後ろの部品 $\times$ 前の部品 を作ってみると $2 \times 3 \times 2x = 12x$ となります。$4x^2 - 12x + 9$ という式の 2 番目の部品にはなりません。ですが違いはプラスマイナスだけです。こういう時は、「後ろの部品」の予想を少し修正すればよいですね。ここでは「後ろの部品」の予想を 3 から -3 へ修正すれば良いのです。そうすると、$2 \times$ 後ろの部品 $\times$ 前の部品 を作ってみると $2 \times (-3) \times 2x = -12x$ となります。$4x^2 - 12x + 9$ という式の 2 番目の部品にはなりました。これで全て確認できました。

というわけで、

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$$

と因数分解できます。

(3) $25a^2 + 40a + 16$

(1) と (2) の説明が理解出来た人のために答えだけ書いておきましょう。

$$25a^2 + 40a + 16 = (5a + 4)^4$$

と因数分解できます。

(4) $25a^2 - 40a + 16$

(1) と (2) の説明が理解出来た人のために答えだけ書いておきましょう。

$$25a^2 - 40a + 16 = (5a - 4)^4$$

と因数分解できます。

本文へ戻る

問 59. 式を因数分解して見かけを変える問題でしたね。

例 24 や例 25 の説明が理解できた人はもうお分かりだと思います。因数分解では、まず、「共通因数をくくる」ということを忘れてはいけませんね。そして、共通因数が全てくくれたら、かっこの中の式をよく見てさらに因数分解できないか考えるのですね。

(1) $ax^2 + 4ax + 3a = a(x^2 + 4x + 3)$

$$= a(x + 1)(x + 3)$$

(2) $-2ax^2 - 8ax - 6a = -2a(x^2 + 4x + 3)$

$$= -2a(x + 1)(x + 3)$$

$6x^2 - 54 = 6(x^2 - 9)$

$$= 6(x + 3)(x - 3)$$

(3) $2bx^2 - 4bx - 16b = 2b(x^2 - 2x - 8)$

$$= 2b(x - 4)(x + 2)$$

(4) $4a^2b - bx^2 = b(4a^2 - x^2)$

$$= b(2a - x)(2a + x)$$

(5) $x^2y - y = y(x^2 - 1)$

$$= y(x+1)(x-1)$$

この解答を見ても計算の仕方がよくわからない人は、例 24 や例 25 の説明をもう一度よく読んでじっくり悩んでください。

本文へ戻る

問 60. 例 26 と例 27 の説明にでてきた方法を真似して計算する問題でしたね。

私たちは展開の学習で、

$$(\text{前の部品} + \text{後ろの部品})^2$$

という形の式を展開すると

$$\text{前の部品}^2 + 2 \times \text{後ろの部品} \times \text{前の部品} + \text{後ろの部品}^2$$

という形の式になる

ということを学んでいることを思い出しましょう。

(1) 68^2

68 は 70 に近い数です。そこで、

$$68 = 70 - 2$$

と考えます。そうすると、

$$68^2 = (70-2)^2$$

と思うことができます。$(70-2)^2$ という式は展開の学習で出てきた形をしています。ですから

$$\begin{aligned} 68^2 &= (70-2)^2 \\ &= 4900 - 280 + 4 \\ &= 4624 \end{aligned}$$

と計算できます。

(2) 301^2

301 は 300 に近い数です。そこで、

$$301 = 300 + 1$$

と考えます。そうすると、

$$301^2 = (300 + 1)^2$$

と思うことができます。$(300 + 1)^2$ という式は展開の学習で出てきた形をしています。ですから

$$\begin{aligned} 301^2 &= (300 + 1)^2 \\ &= 90000 + 600 + 1 \\ &= 90601 \end{aligned}$$

と計算できます。

本文へ戻る

問 61. 例 28 の説明にでででてきた方法を真似して計算する問題でしたね。

私たちは展開の学習で、

$(\bigstar + \triangle)(\bigstar - \triangle)$ という形の式を展開すると $\bigstar^2 - \triangle^2$ という形になる

ということを学んでいることを思い出しましょう。

(1) 81×79

81 は 80 に近い数です。79 も 80 に近い数です。そしてどちらも 80 から 1 ずれています。そこで、

$$81 \times 79 = (80 + 1)(80 - 1)$$

と考えます。

$(80+1)(80-1)$ という式は展開の学習で出てきた形をしています。ですから

$$\begin{aligned} 81 \times 79 &= (80+1)(80-1) \\ &= 1600 - 1 \\ &= 1599 \end{aligned}$$

と計算できます。

(2) 301^2

301 は 300 に近い数です。そこで、

$$301 = 300 + 1$$

と考えます。そうすると、

$$301^2 = (300+1)^2$$

と思うことができます。$(300+1)^2$ という式は展開の学習で出てきた形をしています。ですから

$$\begin{aligned} 301^2 &= (300+1)^2 \\ &= 90000 + 600 + 1 \\ &= 90601 \end{aligned}$$

と計算できます。

本文へ戻る

問 62. 例 29 と例 30 の説明にでてきた方法を真似して計算する問題でしたね。

私たちは展開の学習で、

★$^2 - $△^{2} という形の式を因数分解すると (★ + △)(★ − △) という形になる

ということを学んでいることを思い出しましょう。

(1) $18^2 - 12^2 = (18+12)(18-12) = 30 \times 6 = 180$

この計算では最後に 30 と 6 というかけ算のしやすい数ができました。特に 30 と

いう数ができたのはラッキーです。どうしてこのようなラッキーなことになったのかというと、もともとあった 2 つの数である 18 と 12 をたすと 1 の位が 0 になるからです。だから 30 のように 1 の位が 0 の数ができて最後のかけ算が楽になるのです。

(2) $76^2 - 24^2 = (76+24)(76-24) = 100 \times 52 = 5200$

この計算では最後に 100 と 52 いうかけ算のしやすい数がでてきました。特に 100 という数ができたのはラッキーです。どうしてこのようなラッキーなことになったのかというと、もともとあった 2 つの数である 76 に 24 をたすと 1 の位や 10 の位が 0 になるからです。だから 100 のような数ができて最後のかけ算が楽になるのです。

本文へ戻る

問 63. $a = 24$、$b = 19$ のとき、$(a-2b)(a-3b) - a(a+6b)$ という式の値はいくつになるのか計算する問題でしたね。

いきなり代入して計算すると計算間違いがたくさん起こりそうです。こういう時は、式をマシにしてから代入すると少し計算が楽になるのでしたね。

ではまず式をマシにしていくと

$$\begin{aligned}(a-2b)(a-3b) - a(a+6b) &= (a^2 - 5ab + 6b^2) - (a^2 - 6ab) \\ &= a^2 - 5ab + 6b^2 - a^2 + 6ab \\ &= ab + 6b^2\end{aligned}$$

となりますよね。

では次に、この式に $a = 24$、$b = 19$ を代入しましょう。すると

$$\begin{aligned}24 \times 19 + 6 \times 19 \times 19 &= 456 + 2166 \\ &= 2622\end{aligned}$$

となりますね.

本文へ戻る

問 64. 29 の説明にでてできた方法を真似して $a = 302$ のとき、$x^2 - 4x + 4$ という式の値を求める問題でしたね。

いきなり代入して計算すると計算間違いがたくさん起こりそうです。こういう時は、式をマシにしてから代入すると少し計算が楽になるのでしたね。

ラッキーなことにこの式は

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

と因数分解できます。

ここで $x = 302$ を代入すると、

$$(302 - 2)^2 = 300^2 = 90000$$

となりますね。

この計算の仕方では、ラッキーなことに途中で 300 という数が出てきましたね。どうして出てきたのかというと、もちろん 302 から 2 をひいたからですよね。どうして 2 をひくことになったのかというと、この問題の式は見かけを変えると、$(x - 2)^2$ という式だからですよね。つまり、302 という式と $(x - 2)^2$ という式は相性がよかったのです。（というより、こんな問題を作る人は、相性がよい数と式をあらかじめ用意してから問題を作るわけです。）

本文へ戻る

問 65. $x = 4.75$、$y = 3.25$ のとき $x^2 - y^2$ の値を因数分解を利用して求める問題でしたね。

まず $x^2 - y^2$ を因数分解すると

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

と因数分解できます。

ここで $x = 4.75$、$y = 3.25$ を代入すると、

$$(4.75 + 3.25)(4.75 - 3.25) = 8 \times 1.5 = 12$$

となりますね。

この計算の仕方では、ラッキーなことに途中で 8 や 1.5 という数が出てきましたね。特に 8 がラッキーです。どうして 8 が出てきたのかというと、もちろん 4.75 に 3.25 をたしたからですよね。どうしてそんなくことになったのかというと、この問題の式は見かけを変えると、$(x + y)(x - y)$ という式だからですよね。つまり、4.75 や 3.25 という数と $(x + y)(x - y)$ という式は相性がよかったのです。（というより、こんな問題を作る人は、相性がよい数と式をあらかじめ用意してから問題を作るわけです。）

本文へ戻る

問 66. A：私は、とても面白いことを発見しました。それは

> 続いている 2 つの自然数を用意して、「大きい方の自然数を 2 乗してできる数」から「小さい方の自然数を 2 乗してできる数」をひくと、必ず答えは「初めに用意した 2 つの自然数の合計」になっている。

ということです。

B：へー、そうなんですか。でも本当ですか？

A：本当ですよ。じゃあ、続いている 2 つの自然数として 4 と 5 を用意してやってみますね。まず $5^2 - 4^2$ を計算してみます。5 を 2 乗すると 25 ができて 4 を 2 乗すると 16 ができるので、さらにひき算をすると $25 - 16 = 9$ ってなりますよね。一方、$5 + 4$ って 9 ですよね。ほら同じ数になったでしょ。

B：それだけじゃぁ。まだまだ信じられないですよ。だって、続いている 2 つの自然数って、他にもあるでしょ。あなたがやって見せたのは、4 と 5 のときの話だけでしょ。

A：いいですよ。じゃあ、今度は 6 と 7 でやってあげますね。まず $7^2 - 6^2$ を計算してみます。7 を 2 乗すると 49 ができて 6 を 2 乗すると 36 ができるので、さらにひき算をすると $49 - 36 = 13$ ってなりますよね。一方、$7 + 6$ って 13 ですよね。ほら同じ数になっ

たでしょ。どうですか？これで信じてもらえますか？

B：ダメですよ。続いている 2 つの自然数なんて、他にもまだまだあるじゃないですか。いくらそんな計算見せられても私は反論できますよ。「じゃあ、895 と 896 のときは？」とか言えばいいんですから。そうしたら、きっとあなたは $896^2 - 895^2$ と $896 + 895$ を計算して見せて、「ほら同じ数になったでしょ。」とか言うんでしょうけど、私はまた「 じゃあ、5244 と 5245 のときは？」とか言えば反撃できますよね。これじゃあ、いつまでたっても決着つかないですよ。

A：確かにそうですね。では、私に提案があります。続いている 2 つの自然数をはっきり決めてしまうと、その場合の話しかできなくなるので、続いている 2 つの自然数を、文字を使って n、 $\boxed{n+1}$ とすることにしましょう。

B：いいですよ。続いている 2 つの自然数ですから、大きいほうの数は小さいほうの数より必ず 1 増えているのでそうしたのですね。小さい方の自然数を n としておけば、次の自然数は $n+1$ のはずですからね。

A：じゃぁ、話を進めますね。私は、『続いている 2 つの自然数を用意して、「大きい方の自然数を 2 乗してできる数」から「小さい方の自然数を 2 乗してできる数」をひくと、必ず答えは「初めに用意した 2 つの自然数の合計」になっている』と主張しているのですから、今用意した n と $n+1$ を使って『「大きい方の自然数を 2 乗してできる数」から「小さい方の自然数を 2 乗してできる数」をひいてできる数』と『初めに用意した 2 つの自然数の合計』を計算してみることにします。つまり $(n+1)^2 - n^2$ と $(n+1)+n$ を計算することにします。

　まず、$(n+1)^2 - n^2$ を計算すると、

$$\begin{aligned}(n+1)^2 - n^2 &= \left(\boxed{n^2+2n+1} \right) - n^2 \\ &= \boxed{2n+1}\end{aligned}$$

ってなりますよね。

一方、$(n+1)+n$ を計算すると

$$(n+1)+n=\boxed{2x+1}$$

ってなりますよね。どうですか、ちゃんと同じになったでしょ。

ですから、続いている 2 つの自然数があるときに、『「大きい方の自然数を 2 乗してできる数」から「小さい方の自然数を 2 乗してできる数」をひいてできる数』と『初めに用意した 2 つの自然数の合計』は必ず同じ数になるのです。 本文へ戻る

問 67. 『ある人がいいました。

続いている 2 つの「偶数」を用意して、「大きい方の偶数を 2 乗してできる数」から「小さい方の偶数を 2 乗してできる数」をひくと、必ず答えは「初めに用意した 2 つの偶数の合計」になっている。

さて、この人のいっていることは本当でしょうか。本当だと思う人は証拠を見せなさい。うそだと思う人も証拠を見せなさい。』という問題でしたね。

まあ。こういう時は探りを入れないと本当かどうか予想ができないですよね。そこで、いくつか試してみることにします。

- たとえば、続いている 2 つの「偶数」として、2 と 4 で試してみましょう。

  「大きい方の偶数を 2 乗してできる数」から「小さい方の偶数を 2 乗してできる数」をひいてできる数は
  $$4^2-2^2=16-4=12$$

  となります。

  一方「初めに用意した 2 つの偶数の合計」は

  $$2+4=6$$

  となります。

  「大きい方の偶数を 2 乗してできる数」から「小さい方の偶数を 2 乗してできる

数」をひいてできる数と、「初めに用意した 2 つの偶数の合計」は同じになりませんでした。

というわけで、この人の言っていることはウソであるという証拠が見つかりましたね。

本文へ戻る

問 68. 『ある人がいいました。

続いている 2 つの「奇数」をかけて、さらに 1 をたすと必ず 4 の倍数ができる。

さて、この人のいっていることは本当でしょうか。本当だと思う人は証拠を見せなさい。うそだと思う人も証拠を見せなさい。』という問題でしたね。

まあ。こういう時は探りを入れないと本当かどうか予想ができないですよね。そこで、いくつか試してみることにします。

- たとえば、続いている 2 つの「奇数」として、1 と 3 で試してみましょう。

  続いている 2 つの「奇数」をかけて、さらに 1 をたすと

  $$1 \times 3 + 1 = 3 + 1 = 4$$

  となります。ちゃんと 4 の倍数ができました。今の所この人の言うとおりになっています。

- たとえば、続いている 2 つの「奇数」として、3 と 5 で試してみましょう。

  続いている 2 つの「奇数」をかけて、さらに 1 をたすと

  $$3 \times 5 + 1 = 15 + 1 = 16$$

  となります。ちゃんと 4 の倍数ができました。今の所この人の言うとおりになっています。

- たとえば、続いている 2 つの「奇数」として、5 と 7 で試してみましょう。

続いている 2 つの「奇数」をかけて、さらに 1 をたすと

$$5 \times 7 + 1 = 35 + 1 = 36$$

となります。ちゃんと 4 の倍数ができました。今の所この人の言うとおりになっています。

- たとえば、続いている 2 つの「奇数」として、7 と 9 で試してみましょう。

  続いている 2 つの「奇数」をかけて、さらに 1 をたすと

  $$7 \times 9 + 1 = 63 + 1 = 64$$

  となります。ちゃんと 4 の倍数ができました。今の所この人の言うとおりになっています。

まだ 4 パターンしか試していませんが、どうも、この人の言っていることは本当のような感じがしてきました。そこで、きちんとした証拠を見つけようと思います。そうです、文字を使った議論をして、証拠が見つかるかどうかチャレンジするのです。ではやってみます。

続いている 2 つの奇数は、ある自然数 n を使えば、$2n-1$、$2n+1$ とあらわすことができますよね。それでは、この、続いている 2 つの奇数をかけて、さらに 1 をたしてみましょう。すると

$$(2n-1)(2n+1) + 1 = (4n^2 - 1) + 1 = 4n^2$$

となりますよね。計算の答えは $4n^2$ になりました。ところで n は自然数ですから n^2 だって自然数です。ということは $4n^2$ って $4 \times$ 自然数 という形の数（つまり言いかえると自然数を 4 倍してできている数）ということになります。これはどう考えても 4 の倍数ですね。これでめでたくきちんとした証拠が見つかりました。

本文へ戻る

問 69. 5 の倍数とはそもそも $\boxed{5}$ で割り切れる数のことです。別の言い方をすると、「ある自然数を $\boxed{5}$ 倍してできている数」のことです。ですから、「そもそも 5 の倍数とは、ある自然数 n を使って、 $\boxed{5n}$ の形に表すことのできる数」ということになります。実際、n が 1 という自然数ならば、 $5n$ は $\boxed{5}$ という 5 の倍数になりますし、n が 2 という自然数ならば、 $5n$ は $\boxed{10}$ という 5 の倍数になりますし、n が 3 という自然数ならば、 $5n$ は $\boxed{15}$ という 5 の倍数なりますし、n が 4 という自然数ならば、 $5n$ は $\boxed{20}$ という 5 の倍数になりますし $\cdots$ というように、 $\boxed{5n}$ という式でどんな 5 の倍数も扱うことができるようにっているわけです。

本文へ戻る

問 70. 数たちを文字で表す問題でしたね。

(1) 5 つの続いている自然数は、一番小さい自然数を n とすると、n、$n+1$、$n+2$、$n+3$、$n+4$ とあらわすことができます。

補足：例えば「5 つの続いている自然数のうち三番目に小さいもの」を n として考えることもできます。このときは

> 5 つの続いている自然数のうち三番目に小さいものを n とすると、5 つの続いている自然数は、$n-2$、$n-1$、n、$n+1$、$n+2$ とあらわされる

ということになります。

この他、「5 つの続いている自然数のうち二番目に小さいもの」を n として考えたり、「5 つの続いている自然数のうち四番目に小さいもの」を n として考えたり、「5 つの続いている自然数のうち五番目に小さいもの」を n として考えたりすることもできます。

(2) 2 つの奇数は、ある自然数 m と n を使って、それぞれ $2m-1$、$2n-1$ とあらわすことができます。

(3) 2 つの続いている奇数はある自然数 n を使って、それぞれ $2n-1$、$2n+1$ とあらわすことができます。

本文へ戻る

問 71. ある人が次のような主張をしました。

> 3 つの続いている自然数があるとします。「一番大きい自然数を 2 乗したものから一番小さい自然数を 2 乗したものをひいてできる数」と「真ん中の自然数を 4 倍してできる数」は必ず同じになります。

さて、いろいろ探りを入れたところ、どうもこの人の主張は本当であるという気がしてきました。そこで、証拠をきちんと見せようと思います。ただし、ここでは「テストの答案っぽく」説明を書いてみようと思います。

3 つの続いている自然数のうち、一番小さい自然数を n とします。すると、真ん中の自然数は $\boxed{n+1}$ 、一番大きい自然数は $\boxed{n+2}$ とあらわされます。

「一番大きい自然数を 2 乗したものから一番小さい自然数を 2 乗したものをひいてできる数」を計算してみると、

$$\begin{aligned}\left(\boxed{n+2}\right)^2 - \boxed{n}^2 &= \left(\boxed{n^2+4n+4}\right) - \boxed{n^2} \\ &= \boxed{4n+4}\end{aligned}$$

となります。

一方、「真ん中の自然数を 4 倍してできる数」を計算してみると、

$$\boxed{n+1} \times 4 = \boxed{4n+4}$$

となります。

というわけで、「一番大きい自然数を 2 乗したものから一番小さい自然数を 2 乗したものをひいてできる数」と「真ん中の自然数を 4 倍してできる数」はどちらも $\boxed{4n+4}$ という式になりました。つまり、「一番大きい自然数を 2 乗したものから一番小さい自然数を 2 乗したものをひいてできる数」と「真ん中の自然数を 4 倍してできる数」は $\boxed{\text{同}}$ じ数であるということが証明されたのです。

本文へ戻る

問 72. ある人が次のような主張をしました。

> 2 つの奇数があるとします。2 つの奇数は続いていなくてもかまいません。このとき、大きいほうの奇数を 2 乗したものから小さい方の奇数を 2 乗したものをひくと必ず 4 の倍数になります。

さて、いろいろ探りを入れたところ、どうもこの人の主張は本当であるという気がしてきました。そこで、証拠をきちんと見せようと思います。ただし、ここでは「テストの答案っぽく」説明を書いてみようと思います。

2 つの奇数のうち、大きいほうの奇数は文字 n を使って $2n-1$ とあらわすことにし、小さいほうの奇数は文字 m を使って $\boxed{2m-1}$ とあらわすことにします。もちろんここで n と m は $\boxed{\text{自然}}$数でなくてはいけません。

大きいほうの奇数を 2 乗したものから小さい方の奇数を 2 乗したものをひくとどうなるか計算していくと、

$$\begin{aligned}\left(\boxed{2n-1}\right)^2-\left(\boxed{2m-1}\right)^2&=\left(\boxed{4n^2-4n+1}\right)-\left(\boxed{4m^2-4m+1}\right)\\&=\boxed{4n^2-4m^2-4n+4m}\\&=4\left(\boxed{n^2-m^2-n+m}\right)\end{aligned}$$

となります。

ところで、n や m は自然数なので n^2-m^2-n+m も $\boxed{\text{自然}}$ 数です。ということは $4(n^2-m^2-n+m)$ は $\boxed{4}$ の倍数です。

以上より、大きいほうの奇数を 2 乗したものから小さい方の奇数を 2 乗したものをひくと必ず 4 の倍数になるという証拠がつかめました。 本文へ戻る

問 73. 『3 つの続いている自然数があるとします。「一番大きい自然数と一番小さい自然数をかけてできる数」と「真ん中の自然数を 2 乗してから 1 をひいてできる数」は必ず同じであることを証明しなさい。』という問題でしたね。

「テストの答案っぽく」証明を書いてみようと思います。

3 つの続いている自然数のうち、真ん中の自然数を n とあらわすと、一番小さい自然数は $n-1$、一番大きい自然数は $n+1$ とあらわされます。

「一番大きい自然数と一番小さい自然数をかけてできる数」を計算してみると、

$$(n+1)(n-1) = n^2 - 1$$

となります。

「真ん中の自然数を 2 乗してから 1 をひいてできる数」を計算してみると、

$$n^2 - 1$$

となります。

「一番大きい自然数と一番小さい自然数をかけてできる数」と「真ん中の自然数を 2 乗してから 1 をひいてできる数」はどちらも $n^2 - 1$ となり、同じであることがわかりました。

これで、3 つの続いている自然数があるとき「一番大きい自然数と一番小さい自然数をかけてできる数」と「真ん中の自然数を 2 乗してから 1 をひいてできる数」は必ず同じであることが証明できました。 本文へ戻る

問 74. 『3 つの続いている偶数があるとします。一番大きい偶数を 2 乗してできる数から残りの 2 つの偶数をかけた数をひくと必ず 4 の倍数になることを証明しなさい。』という問題でしたね。

「テストの答案っぽく」証明を書いてみようと思います。

3 つの続いている偶数のうち、真ん中の自然数を $2n$ とあらわすと、一番小さい自然数は $2n-2$、一番大きい自然数は $2n+2$ とあらわされます。もちろんここで n は自然数でなければなりません。

一番大きい偶数を 2 乗してできる数から残りの 2 つの偶数をかけた数をひくと、

$$\begin{aligned}(2n+2)^2-2n(2n-2) &= (4n^2+4n+4)-(4n^2-4n)\\ &= 4n^2+4n+4-4n^2+4n\\ &= 8n+4\\ &= 4(2n+1)\end{aligned}$$

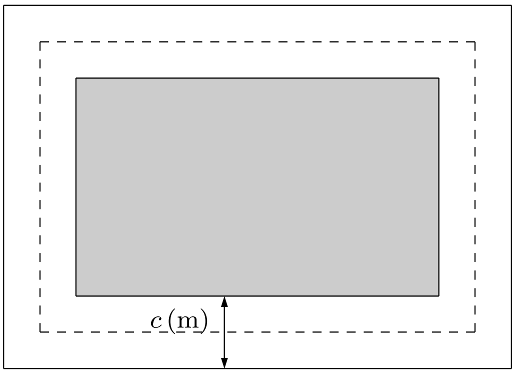
となります。

n は自然数ですから $2n+1$ も自然数です。ということは、$4(2n+1)$ は $4\times$ 自然数 という形をしていることになるので 4 の倍数です。

これで、3 つの続いている偶数があるとき、一番大きい偶数を 2 乗してできる数から残りの 2 つの偶数をかけた数をひくと必ず 4 の倍数になるということが証明できました。

本文へ戻る

問 75. 『右の図を見てください。長方形の土地 (灰色の部分) の周りに幅が $c\,(\mathrm{m})$ の道 (白い色の部分) がついています。また、この道のど真ん中を走って 1 周する線 (点線) の長さは $\ell\,(\mathrm{m})$ であるとします。



このとき、「道の幅」と「この道のど真ん中を走って 1 周する線の長さ」をかけると「この道全体の面積」になることを証明しなさい。つまり、

$$\text{この道全体の面積} = c\,\ell\,(\mathrm{m}^2)$$

であることを証明しなさい。』という問題の答案を次のように作りました。

(証明)

長方形の土地の横の長さを $a\,(\mathrm{m})$、縦の長さを $b\,(\mathrm{m})$ として考えることにします。

土地の周りについている道の幅は $c\,(\mathrm{m})$ ですから、土地と道全体を合わせた長方形の横

の長さは $\boxed{a+2c}$ (m) で、縦の長さは $\boxed{b+2c}$ (m) となります。

土地と道全体を合わせた長方形の面積は, この横の長さと縦の長さをかければよいので、

$$\left(\boxed{a+2c}\right) \times \left(\boxed{b+2c}\right) = \boxed{ab+2ac+2bc+4c^2}\,(\mathrm{m}^2)$$

となります。

土地の面積はもちろん $\boxed{ab}$ (m^2) です。

道全体の面積は、土地と道全体を合わせた長方形の面積から土地の面積をひけば求められるので、

$$\begin{aligned}\text{道全体の面積} &= \boxed{ab+2ac+2bc+4c^2} - \boxed{ab} \\ &= \boxed{2ac+2bc+4c^2}\,(\mathrm{m}^2)\end{aligned}$$

となります。

道のど真ん中を走っている線（点線）は土地のふちから $\dfrac{c}{2}$ (m) 離れているので、横の部分の長さも縦の部分の長さも長方形の横や縦の長さより $\dfrac{c}{2}$ (m) の 2 個分長いことになります。ですから、

$$\begin{aligned}\text{点線の横の部分の長さ} &= a + \boxed{\dfrac{c}{2}} \times 2 \\ &= \boxed{a+c}\,(\mathrm{m})\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}\text{点線の縦の部分の長さ} &= \boxed{b} + \boxed{\dfrac{c}{2}} \times 2 \\ &= \boxed{b+c}\,(\mathrm{m})\end{aligned}$$

となります。

点線 1 周分の長さ ℓ は、点線の横の部分の長さを 2 つ分と、点線の縦の部分の長さを 2

つ分をあわせれば求められるので、

$$\begin{aligned}\ell &= \left(\boxed{a+c}\right)\times 2 + \left(\boxed{b+c}\right)\times 2 \\ &= \boxed{2a+2b+4c}\,(\mathrm{m})\end{aligned}$$

となります。すると、道の幅 c と点線 1 周分の長さ ℓ をかけたものは、

$$\begin{aligned}c\,\ell &= c\times\left(\boxed{2a+2b+4c}\right) \\ &= \boxed{2ac+2bc+4c^2}\,(\mathrm{m}^2)\end{aligned}$$

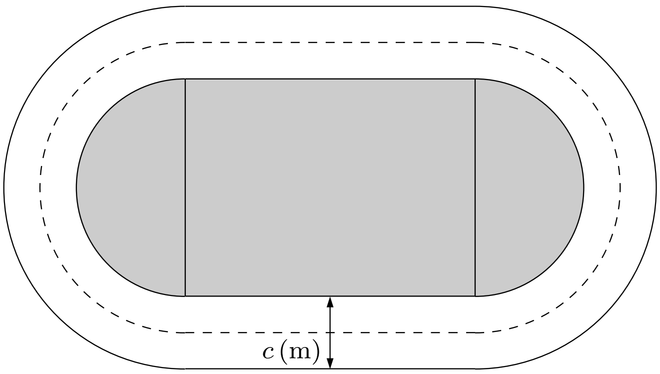
となります。

以上の調査で、「道全体の面積」と「道の幅 c と道のど真ん中を走っている線 1 周分の長さ ℓ をかけたもの $c\,\ell$」を見比べると $\boxed{\text{同}}$ じであることが分かります。

（証明おわり）

本文へ戻る

問 76. 『右の図を見てください「長方形の右側と左側に半円が合わさった形をしている土地（灰色の部分）」のまわりに、「幅が $c\,(\mathrm{m})$ の道（白い色の部分）」がついています。また、この道のど真ん中を走って 1 周する線（点線）の長さは $\ell\,(\mathrm{m})$ であるとします。



このとき、「道の幅」と「この道のど真ん中を走って 1 周する線の長さ」をかけると「この道全体の面積」になることを証明しなさい。つまり、

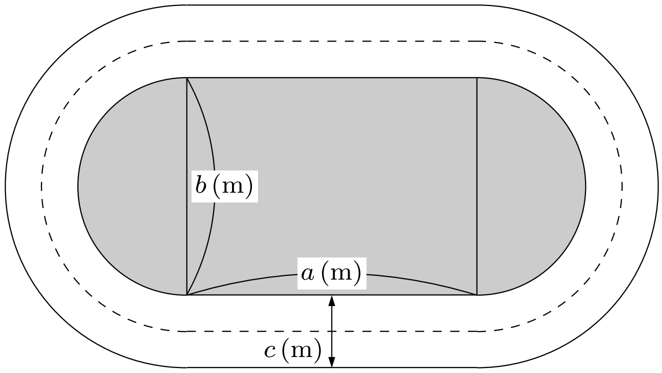
$$\text{この道全体の面積} = c\,\ell\,(\mathrm{m}^2)$$

であることを証明しなさい。』という問題でしたね。

（証明）

まず、この道全体の面積を絶対確実な方法で求めます。次に「道の幅 c」と「この道のど真ん中を走って 1 周する線の長さ ℓ」をかけるとどうなるのか調べます。そしてもし、「絶対確実な方法で求めた道全体の面積」と「道の幅 c とこの道のど真ん中を走って 1 周する線の長さ ℓ をかけたもの」が同じになっていることが確認できれば、この主張は証明されたことになるわけです。

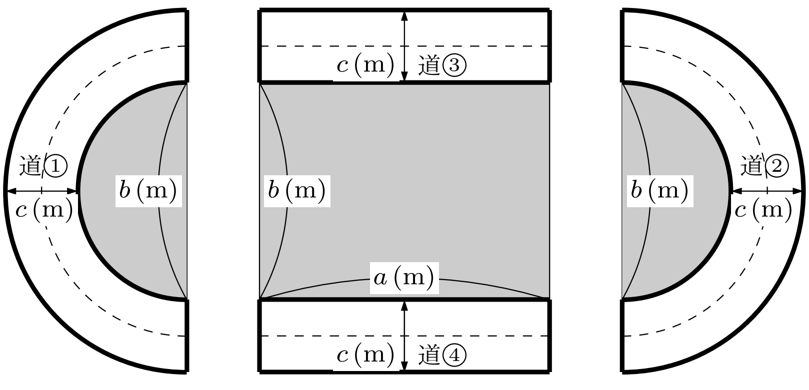
右の図のように、土地の長方形の部分の「横の長さ」を a m、「縦の長さ」を b m とおいて考えることにします。



- この道全体の面積を絶対確実な方法で求めてみると・・・

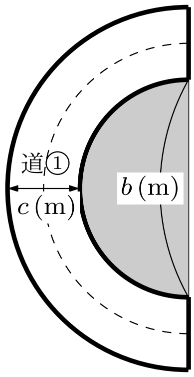
  この土地は半円と長方形が合わさってできているので、道も半円の外側に付いている部分と長方形の外側に付いている部分があります。そこで、道全体を「半円の外側に付いている部分」と「長方形の外側に付いている部分」にわけて考えることにしましょう。

  では次の図を見てください。



「半円の外側に付いている部分」を「道①」、「道②」と呼び、「長方形の外側に付いている部分」を「道③」、「道④」と呼ぶことにしました。

道①の面積の計算　この道の面積を求めるためには、「半円の土地と半円の土地の外側に付いている道を合わせてできる半円の面積」から「半円の土地の面積」を引けばよいわけです。（念のための注意です。半円の面積はその半円と同じ半径をもつ円の面積を求めてから半分にすればよいですよね。また、「円の面積は半径かける半径かける円周率」で求めるのでしたね。）



「半円の土地と半円の土地の外側に付いている道を合わせてできる半円」の半径は $\dfrac{b}{2}+c$ (m) ですよね。ですから、

$$\begin{aligned}\text{半円の土地と半円の土地の外側に付いて}&\\ \text{いる道を合わせてできる半円の面積} &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}+c\right)^2\\ &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{4}b^2+bc+c^2\right)\\ &= \frac{1}{8}\pi b^2+\frac{1}{2}\pi bc+\frac{1}{2}\pi c^2\ (\mathrm{m}^2)\end{aligned}$$

となります。

「半円の土地」の半径は $\dfrac{b}{2}$ (m) ですから、

$$\begin{aligned}\text{半円の土地の面積} &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2\\ &= \frac{1}{2}\pi\times\frac{b^2}{4}\\ &= \frac{1}{8}\pi b^2\ (\mathrm{m}^2)\end{aligned}$$

となります。

よって

$$\begin{aligned}
道①の面積 &= \left(\frac{1}{8}\pi b^2 + \frac{1}{2}\pi bc + \frac{1}{2}\pi c^2\right) - \left(\frac{1}{8}\pi b^2\right) \\
&= \frac{1}{8}\pi b^2 + \frac{1}{2}\pi bc + \frac{1}{2}\pi c^2 - \frac{1}{8}\pi b^2 \\
&= \frac{1}{2}\pi bc + \frac{1}{2}\pi c^2 \ (\mathrm{m}^2)
\end{aligned}$$

となります。

道②の面積の計算　道②の面積と道①の面積は同じですよね。ですから、

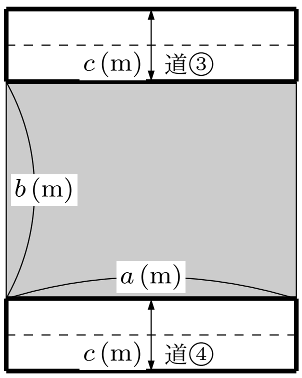
$$道②の面積 = \frac{1}{2}\pi bc + \frac{1}{2}\pi c^2 \ (\mathrm{m}^2)$$

となります。

道③の面積の計算　道③は横の長さが $a\,(\mathrm{m})$、縦の長さが $c\,(\mathrm{m})$ の長方形です。ですから、

$$道③の面積 = ac \ (\mathrm{m}^2)$$

となります。



道④の面積の計算　道④の面積と道③の面積は同じですよね。ですから、

$$道③の面積 = ac \ (\mathrm{m}^2)$$

となります。

それでは道全体の面積を計算しましょう。道①から道④までの面積を合計すれば

よいわけですから、

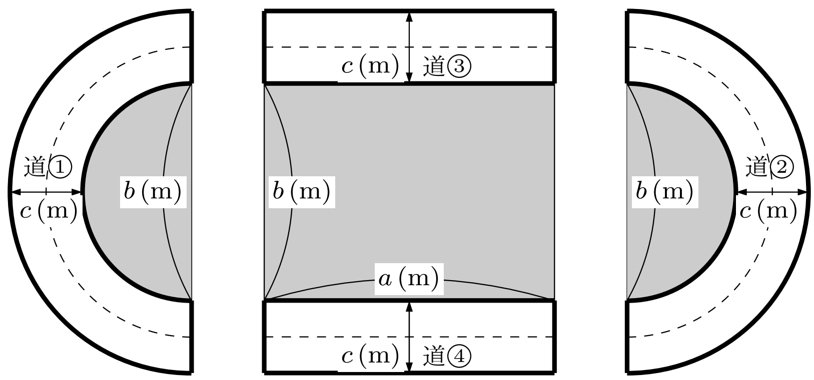
$$
\begin{aligned}
\text{道全体の面積} &= \left(\frac{1}{2}\pi bc + \frac{1}{2}\pi c^2\right) + \left(\frac{1}{2}\pi bc + \frac{1}{2}\pi c^2\right) + ab + ab \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\pi bc + \frac{1}{2}\pi c^2\right) + 2ab \\
&= \pi bc + \pi c^2 + 2ab \ (\mathrm{m}^2)
\end{aligned}
$$

となりますね。これで、絶対確実な方法で道全体の面積を計算することができました。

- 「道の幅 c とこの道のど真ん中を走って 1 周する線の長さ ℓ をかけたもの」を求めてみると・・・

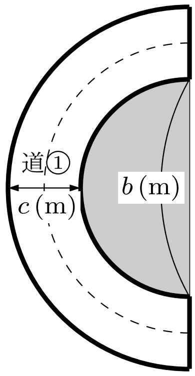
これを計算するにあたって、道の幅 c は c のまま計算に使うことができますが、ℓ はそのまま使っても意味がありません。そこで ℓ を計算して a や b であらわすことにします。

では次の図を見てください。



「道①」、「道②」、「道③」、「道④」にわけて考えていくことにします。

道①の点線の長さの計算　この点線の長さを求めるためには、「半円の土地より半径が $\dfrac{c}{2}$ (m) だけ大きい半円の弧の長さ」を求めれば良いわけです。（念のための注意です。半円の弧の長さを計算するには、その半円と同じ半径の円の周りの長さを計算してから半分にすればよいですね。また、円の周りの長さは「直径かける円周率」で計算するのでしたね。）



「半円の土地」の半径は $\dfrac{b}{2}$ (m) ですから、「半円の土地より半径が $\dfrac{c}{2}$ (m) だけ大きい半円」の半径は $\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{2}$ (m) ですね。ですから、

$$\begin{aligned}\text{道①の点線の長さ} &= \frac{1}{2}\times 2\times\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)\times\pi \\ &= \left(\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)\times\pi \\ &= \frac{1}{2}\pi b+\frac{1}{2}\pi c\ (\mathrm{m})\end{aligned}$$

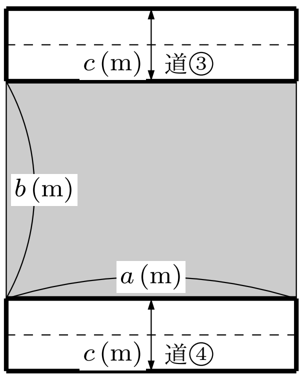
となります。

道②の点線の長さの計算　道②の点線の長さと道①の点線の長さは同じですよね。ですから、

$$\text{道②の点線の長さ} = \frac{1}{2}\pi b+\frac{1}{2}\pi c\ (\mathrm{m})$$

となります。

道③の点線の長さの計算　道③の点線の長さはどう考えても a (m) ですね。



道④の点線の長さの計算　道④の点線の長さと道③の点線の長さは同じ、つまり、

道④の点線の長さは $a\,(\mathrm{m})$ です。

それでは「道のどまんなかを走って 1 周する線の長さ ℓ」を計算しましょう。道①の点線の長さから道④の点線の長さまで合計すればよいわけですから、

$$\begin{aligned}\ell &= \left(\frac{1}{2}\pi b + \frac{1}{2}\pi c\right) + \left(\frac{1}{2}\pi b + \frac{1}{2}\pi c\right) + a + a \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\pi b + \frac{1}{2}\pi c\right) + 2a \\ &= \pi b + \pi c + 2a\ (\mathrm{m})\end{aligned}$$

となりますね。これで ℓ を a や b であらわすことができました。

そうすると、「道の幅 c とこの道のど真ん中を走って 1 周する線の長さ ℓ をかけたもの」を計算してみると、

$$\begin{aligned}c\ell &= c\,(\pi b + \pi c + 2a) \\ &= \pi bc + \pi c^2 + 2ac\ (\mathrm{m})\end{aligned}$$

となることがわかります。

以上の議論で、

$$\begin{aligned}\text{道全体の面積} &= \left(\frac{1}{2}\pi bc + \frac{1}{2}\pi c^2\right) + \left(\frac{1}{2}\pi bc + \frac{1}{2}\pi c^2\right) + ab + ab \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\pi bc + \frac{1}{2}\pi c^2\right) + 2ab \\ &= \pi bc + \pi c^2 + 2ab\ (\mathrm{m}^2)\end{aligned}$$

と計算できるということと、

$$\begin{aligned}c\ell &= c\,(\pi b + \pi c + 2a) \\ &= \pi bc + \pi c^2 + 2ac\ (\mathrm{m})\end{aligned}$$

と計算できるということが突き止められました。

どちらも $\pi bc + \pi c^2 + 2ac$ になりました。ですから、

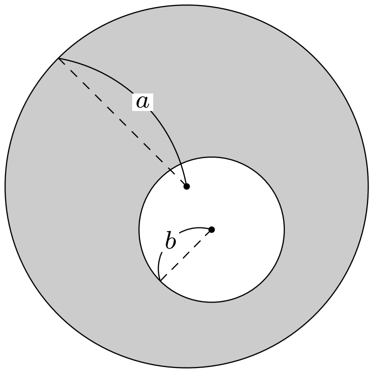
$$\text{この道全体の面積} = c\ell$$

が成り立っていることが証明できたことになります。

（証明おわり）

本文へ戻る

問 77. 『右の図を見てください。この図で灰色になっている部分は、大きい円から、その円の中に含まれている小さい円（白い円）を除いてできた図形です。このとき実は、「円周率」かける「大きい円と小さい円の半径をたしたもの」かける「大きい円の半径から小さい円の半径を引いたもの」を計算すると、灰色の部分の面積が求められてしまうということを証明しなさい。』と言う問題でしたね。



（証明）

大きい円の半径を a、小さい円の半径を b としましょう。a と b を使って、『灰色の部分の面積を絶対確実な方法で計算したもの』と『「円周率」かける「大きい円と小さい円の半径をたしたもの」かける「大きい円の半径から小さい円の半径を引いたもの」を計算したもの』が実は同じになっているという証拠を見つければよいですね。

ではまず、『灰色の部分の面積』を絶対確実な方法で計算してみます。そのためには、大きい円の面積から小さい円の面積をひけばよいですね。

大きい円の半径は a ですから大きい円の面積は πa^2 です。また、小さい円の半径は b ですから小さい円の面積は πb^2 です。ということは、

$$\text{灰色の部分の面積} = \pi a^2 - \pi b^2$$

となります。

次は、「円周率」かける「大きい円と小さい円の半径をたしたもの」かける「大きい円の半径から小さい円の半径を引いたもの」を計算してみます。すると、

「円周率」かける
「大きい円と小さい円の半径をたしたもの」かける
「大きい円の半径から小さい円の半径を引いたもの」$= \pi \times (a+b) \times (a-b)$
$$= \pi(a^2 - b^2)$$
$$= \pi a^2 - \pi b^2$$

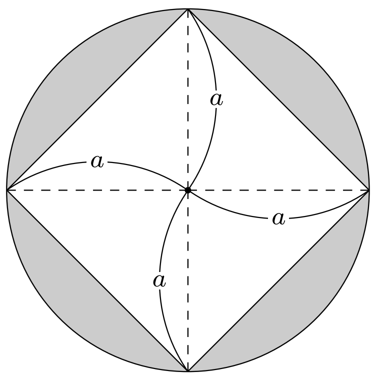
となります。

『灰色の部分の面積を絶対確実な方法で計算したもの』と『「円周率」かける「大きい円と小さい円の半径をたしたもの」かける「大きい円の半径から小さい円の半径を引いたもの」を計算したもの』はどちらも $\pi a^2 - \pi b^2$ になりました。ですから、「円周率」かける「大きい円と小さい円の半径をたしたもの」かける「大きい円の半径から小さい円の半径を引いたもの」を計算すると、灰色の部分の面積が求められてしまうということが証明できたわけです。

（証明おわり）

本文へ戻る

問 78. 『右の図を見てください。この図で灰色になっている部分は、ある円から、その円の中にぴったり含まれている正方形（白い正方形）を除いてできた図形です。このとき実は、「円周率から 2 をひいた数」かける「円の半径」かける「円の半径」を計算すると、灰色の部分の面積が求められてしまうということを証明しなさい。』という問題でしたね。



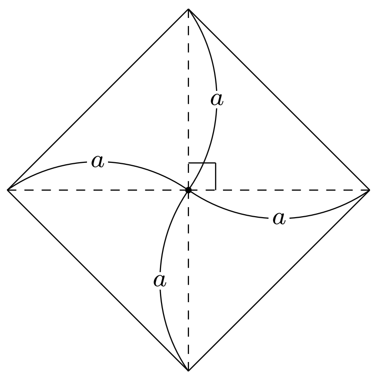
（証明）

円の半径を a としましょう。a を使って、『灰色の部分の面積を絶対確実な方法で計算したもの』と『「円周率から 2 をひいた数」かける「円の半径」かける「円の半径」を計算したもの』が実は同じになっているという証拠を見つければよいですね。

ではまず、『灰色の部分の面積』を絶対確実な方法で計算してみます。そのためには円の面積から正方形の面積をひけばよいですね。

円の半径は a ですから円の面積は πa^2 です。

正方形は右の図のように、4 つの合同な直角二等辺三角形が合わさってできています。直角二等辺三角形は底辺の長さと高さは a ですから、



$$\begin{aligned}\text{直角二等辺三角形 1 つの面積} &= \frac{1}{2} \times a \times a \\ &= \frac{1}{2}a^2\end{aligned}$$

です。ですからこの面積 4 つ分で、

$$\begin{aligned}\text{正方形の面積} &= 4 \times \frac{1}{2}a^2 \\ &= 2a^2\end{aligned}$$

となるわけです。よって、

$$\text{灰色の部分の面積} = \pi a^2 - 2a^2$$

となります。

次は、「円周率から 2 をひいた数」かける「円の半径」かける「円の半径」を計算してみ

ます。すると、

$$
\begin{aligned}
&\text{「円周率から 2 をひいた数」かける} \\
&\qquad\qquad\text{「円の半径」かける} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\text{「円の半径」} = (\pi - 2) \times a \times a \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = (\pi - 2) \times a^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \pi a^2 - 2a^2
\end{aligned}
$$

となります。

『灰色の部分の面積を絶対確実な方法で計算したもの』と『「円周率から 2 をひいた数」かける「円の半径」かける「円の半径」を計算したもの』はどちらも $\pi a^2 - 2a^2$ になりました。ですから、「円周率から 2 をひいた数」かける「円の半径」かける「円の半径」を計算すると、灰色の部分の面積が求められてしまうということが証明できたわけです。

（証明おわり）

本文へ戻る