三平方の定理

2015 年 2 月 12 日

目次

このテキストの使いかた 3

第 1 章　三平方の定理 7

1.1　三平方の定理ってなに？証明はどうするの？ 7

1.1.1　三平方の定理とは 7

1.1.2　三平方の定理の証明 8

1.1.3　三平方の定理を使って辺の長さを求める練習をしよう 14

1.2　どんなことが判明すれば直角三角形であると断言できるの？（三平方の定理の逆） 18

1.3　三平方の定理を応用してみよう 25

1.4　三平方の定理をさらにいろいろな問題へ利用してみよう 56

問の解答 75

このテキストの使いかた

日頃の学習では・・・

- テキストをていねいに読んでいきましょう。

  このテキストは、きちんと言葉を使っててていねいな説明が書かれています。記号や数式が並んでいるだけの、意味不明のものではありません。ひとことひとこと言葉を大切にして、解き方ではなく考え方を学び取るようにしてください。そして、書いてあることに対して、「あーそういうことか」とか「えーよくわからない」とか「これ、ちがうんじゃないの？」といった反応をしてください。数学は自分の頭を使って考えていく科目ですから立ち止まって考えることがとても大切なのです。

- テスト直前に勉強を始めるのではなく、テストで力を発揮できるように前もって準備をしておきましょう。

  数学のように、自分の頭を使って「あーでもない、こーでもない」と考えながら学んでいく科目では、学習を始めてからしばらくの間はなかなか成果が出ない事があります。しかし少し我慢をして学習を続けていくうちに、あるとき、驚くような力が付いていることに気づくことがあります。 つまり、実力は初めのうちはゆっくり伸びていき、あとからぐんと伸びることが多いのです。

- 例題を学ぶときには、解答を読む前に、できればまず自分の力で解くことができるかどうか試してみましょう。

  数学の学習では、誰かから教わっただけのことよりも自分で悩んで考えたことの

ほうがよく身につきます。紙と筆記用具を使って実際に答案を書いてみてください。それができたらテキストの解答をていねいに読んで自分の考えと比べてみましょう。

- 例題の学習ができたら、この問題がテストに出ても自分の力だけで解けるかどうか想像してみましょう。そして心配なものには印を付けておきましょう。

  日頃から自分の実力をつかんでおくとテスト対策がしやすくなります。

- 問はもちろん、まず自分の力で解くことができるかどうか試してみてください。

  紙と筆記用具を使って実際に答案を書いてみてください。それができたらテキストの解答をていねいに読んで自分の考えと比べてみましょう。そうすれば理解が深まるでしょう。

- 問を解き終わって答え合わせをしたら、間違ったものには印を付けておきましょう。

  日頃から自分の実力をつかんでおくとテスト対策がしやすくなります。

- ひとつのひとつの節を読み終わったら、どんなことをその節で学んだのか思い出して「あらすじ」を言えるようにしておきましょう。紙と筆記用具を用意して、誰かにあらすじを伝えるにはどんなふうに説明すればよいか考え、文章を書いてみるととても効果があります。

  中学生に「今日は学校の数学の授業でどんなことを勉強したの？」と聞いてみると、「えーと、何だっけ、そうだ、傾きとか習った。」と断片的なことを言えたりすることはあるのですが、改めて、「へぇ、ところで傾きってなんなの？」と聞いてみると「えー、何だっけ、そうだ、なんか計算したり直線を描いてた。」ぐらいの答えしか返ってこないことが多いのです。専門用語を正しく言えるようになることも必要なことかもしれませんが、そんなことより大切なのは「どんなお話を学んだのか」ということです。数学は意味の無い記号操作を学ぶ科目ではなく、ちゃんとしたストーリーがあるものを学んでいるのです。ですから「お話のあらすじ」を理

解しておくことが大切なのです。

定期テスト対策では・・・

「日頃の学習」のところにも書いてありますが、数学のような科目は力がつくまでに時間のかかる科目です。テストに備えて十分な日数を確保しておきましょう。そして、「日頃の学習」で心配な例題や間違った問にちゃんと印を付けているとテスト対策が楽になります。

- テキストから試験範囲の例題や問を探して、印のついていないものがちゃんと解けるかどうか試してみましょう。
- 印を付けた例題や問を繰り返し復習して、テストに出ても大丈夫な問題を少しでも増やしておきましょう。

第1章

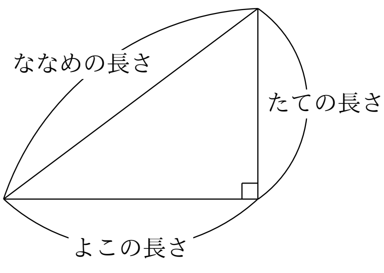
三平方の定理

1.1　三平方の定理ってなに？証明はどうするの？

1.1.1　三平方の定理とは

このお話の主役は直角三角形です。実は何千年も前から、「直角三角形の 3 つの辺の長さには、どうもある関係があるらしい」ということが知られています。どんな関係があるのかこれから説明することにしましょう。

右の図を見てください。直角三角形が描かれていますね。説明していく都合で、この図では「直角」が右下に来るように三角形を描いておきました。そして、それぞれの辺の長さをこの図のように、「よこの長さ」とか「たての長さ」とか「ななめの長さ」と呼ぶことにします。



実は、昔の人は次のような驚くべき事実に気がついたのです。

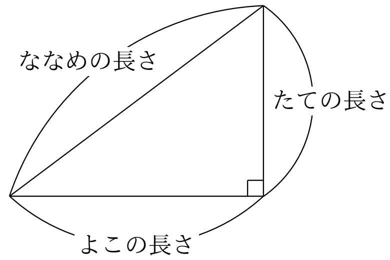
驚くべき事実：三平方の定理

どんな直角三角形でも、「よこの長さを 2 乗した数」と「たての長さを 2 乗した数」をたすと、必ず「ななめのの 2 乗した数」と等しくなっています。

つまり、右の図のような直角三角形では、必ず、

$$(\text{よこの長さ})^2+(\text{たての長さ})^2=(\text{ななめの長さ})^2$$

が成り立っています。



この「驚くべき事実」は何千年も前から古代エジプトや古代中国で知られていたようなのですが、今からだいたい 2500 年前、ギリシャの数学者であるピタゴラスという人によって初めて証明されたと言われています。彼の名にちなんで、「ピタゴラスの定理」と呼ばれることもあります。

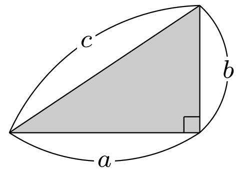
さて、今あなたは数学を学んでいるのですから、いくらこのことが正しいように思えたとしても証拠がなければなりません。というわけで、これから三平方の定理の証明を学ぶことにしましょう。

1.1.2　三平方の定理の証明

多くの人の努力によって、現在までに、とても多くの「三平方の定理の証明法」が見つかっています。ですからこれから私たちが学ぶのはほんの一例です。ここで紹介するのは、「辺の長さ」を「図形の面積」と関連させて議論する証明法です。つまり、本来は「辺の長さの話」をしたいのですが、物の見方を工夫して「図形の面積の話」をするわけです。そうするととてもあっさりとケリがつくのです。それでは前置きはこれぐらいにしておいて、証明にとりかかりましょう。

三平方の定理の証明

では右の図を見てください。これまでのように、「よこの長さ」とか「たての長さ」とか「ななめの長さ」と書いていると大変なので、この図のように辺の長さをそれぞれ a、b、c と書くことにしました。

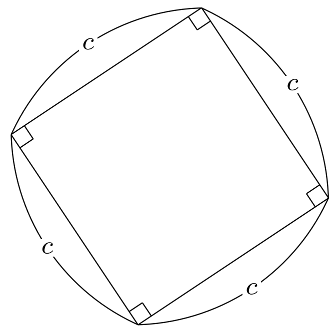


ですから、これから、

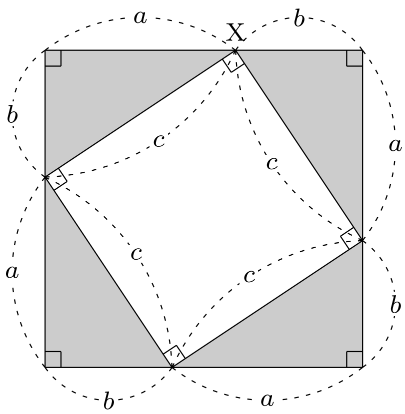
$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立つことを証明するわけです。

まず右の図のように、1 辺の長さが c（つまり、直角三角形のななめの長さ）となっている正方形を描いてみることにしましょう。正方形が傾いて描かれていますが深い意味はありません。この先のことを考えると、この方が見やすいから傾けただけです。

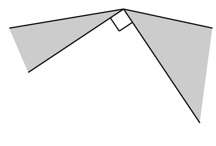


次は、この正方形のまわりに、今考えている直角三角形を 4 つ置いてみることにします。そうすると、右の図のようになります。もともとあった白い正方形の外側に大きな正方形ができました。



いま、「外側に大きな正方形ができました。」なんて言いましたが、実は注意することがあります。例えば、右の図の点 X のところは本当にまっすぐになるのでしょうか。

つまり、右の図のように、X のところで外側の線が折れ曲がっているおそれはないのでしょうか。言われてみればそうですよねぇ。何も保証はないですよね。だって、灰色の直角三角形を「X のところでまっすぐになるように白い正方形の外側にくっつけた」わけではなく、とにかく白い正方形の外側にピッタリくっつけただけなのですから。というわけで、あなたにはこのことをしっかり悩んでもらうことにしましょう。本当に X のところはまっすぐになるのでしょうか。証拠はあるのでしょうか。では 10 分待ちます。



・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

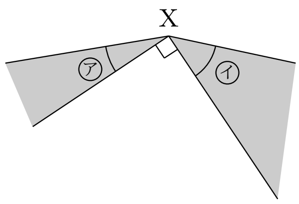
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

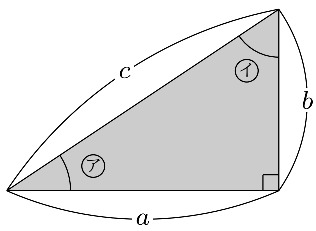
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

はい、10 分たちました。結論はでましたか？

しっかり自分の頭を使って悩んでくれた人だけ次の図を見てください。答えを教えることにします。





左の図の㋐や㋑の角は、いくつかある右の図のような直角三角形の㋐や㋑のところにあった角です。直角三角形では 1 つの角が直角ですから、残りの 2 つの角の大きさをたすと 90° になるはずですね。ですから、㋐と㋑をたすと 90° になっているわけです。このことを頭に入れて左の図を見ることにしましょう。そうすると、㋐と㋑と直角マークのついている角の大きさをたすと 180° になっているはずですね。ということは X のところはまっすぐになっていると断言できますよね。

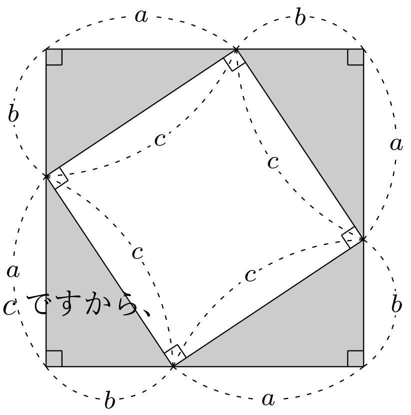
では本題に戻りましょう。

右にもう一度、前と同じ図を描いておきました。1 辺の長さが c の正方形のまわりに、今問題になっている直角三角形を 4 つくっつけたのでしたね。

ではこの図を見ながら、図形の面積を考えることにし

ましょう。

外側にできている正方形は 1 辺の長さは $a+b$ ですよね。



ですから、

$$\text{外側にできている正方形の面積} = (a+b)^2$$

となりますね。

白い正方形（つまり内側にある正方形）の 1 辺の長さは c ですから、

$$\text{白い正方形の面積} = c^2$$

となりますね。

灰色の直角三角形（つまり、問題にしている直角三角形）のよこの長さは a で 1 たての長さは b ですから、

$$\text{灰色の直角三角形 1 つの面積} = \frac{1}{2}ab$$

ですね。

ところで、当然、「白い正方形の面積」と「灰色の直角三角形 4 つ分の面積」を合わせると「外側にできている正方形の面積」と等しくなるはずですね。つまり、

$$c^2 + 4 \times \frac{1}{2}ab = (a+b)^2$$

が成り立っているはずですね。

それではこの式を変形して見かけをマシにしてみることにしましょう。（いいですか、この式は等式ですからかなり昔に学んだ「等式を変形るするときにやっても良いこと」を使って変形するのですよ。）

まず、

$$c^2 + \underline{4 \times \frac{1}{2}}ab = (a+b)^2$$

という式の　　　　のかけ算をすると、

$$c^2 + 2ab = (a+b)^2$$

となります。次は、この式の両辺から $2ab$ をひくと、

$$c^2 + 2ab - 2ab = (a+b)^2 - 2ab$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

となりますね。次は右辺の $(a+b)^2$ のところを展開してみかけを変えます。すると、

$$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

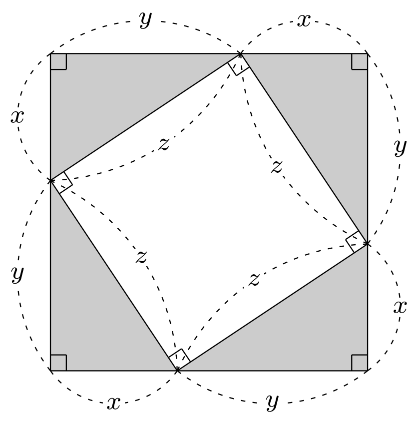
$$c^2 = a^2 + b^2$$

となりますね。これでめでたく、$a^2 + b^2 = c^2$ が成り立っているということが証明できてしまいました。

三平方の定理の証明終わり

問 1. この問の前で詳しく説明した三平方の定理の証明が理解できたかどうか確認する問題です。

右の図は、1 つの辺の長さが z である正方形（図の白い正方形）のまわりに、直角をはさむ 2 辺の長さがそれぞれ x、y である直角三角形（図の灰色の直角三角形）を 4 枚ピッタリとくっつけて並べたものです。この図を見ながら、三平方の定理を証明することにします。次の文の空欄に正しい記号、言葉を記入しなさい。



（証明）

外側にできている正方形の 1 辺の長さは $\boxed{}$ です

から、

$$\text{外側にできている正方形の面積} = \boxed{}$$

となります。

内側にある正方形の1辺の長さは $\boxed{}$ ですから、

$$\text{内側にできている正方形の面積} = \boxed{}$$

となります。

直角三角形の直角をはさむ2辺の長さはそれぞれ $\boxed{}$ 、$\boxed{}$ ですから、

$$\text{直角三角形1つの面積} = \boxed{}$$

となります。

これらの面積の間には、

$$\begin{aligned}&\text{内側にできている正方形の面積}\\ &= \boxed{\text{の面積}} - \boxed{\text{の面積}} \times 4\end{aligned}$$

という関係があります。ですから、

$$\begin{aligned}z^2 &= \boxed{} - \boxed{} \times 4\\ &= \boxed{}^2 + 2\boxed{} + \boxed{}^2 - \boxed{}\\ &= \boxed{}^2 + \boxed{}^2\end{aligned}$$

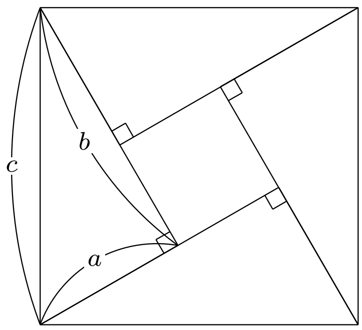
となることがわかります。つまり、灰色の直角三角形では、

$$x^2 + y^2 = z^2$$

が成り立っていることが判明したのです。（証明終わり）

答えを見る

問 2. 右の図は、直角をはさむ 2 辺の長さがそれぞれ a、b で斜辺の長さが c である直角三角形を 4 つ並べたものである。この図をつかって、三平方の定理を証明しなさい。



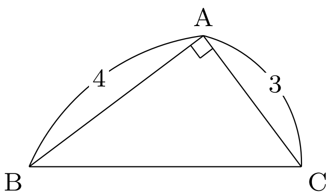
答えを見る

1.1.3　三平方の定理を使って辺の長さを求める練習をしよう

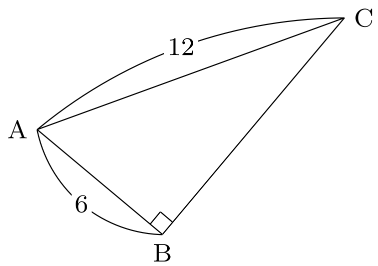
数学では、一度きちんと証明された事実はいろいろな問題を解くときに自由に使うことができます。さっき私たちは三平方の定理を証明したのですから、これからいろいろな問題を解くときにこの定理を自由に使うことができるのです。

例題 1　次の図の直角三角形で、辺 BC の長さを求めなさい。

(1)



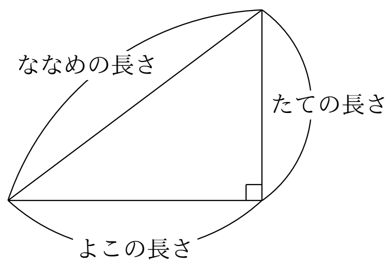
(2)



解答

右の図を見てください。三平方の定理は、どんな直角三角形でも、

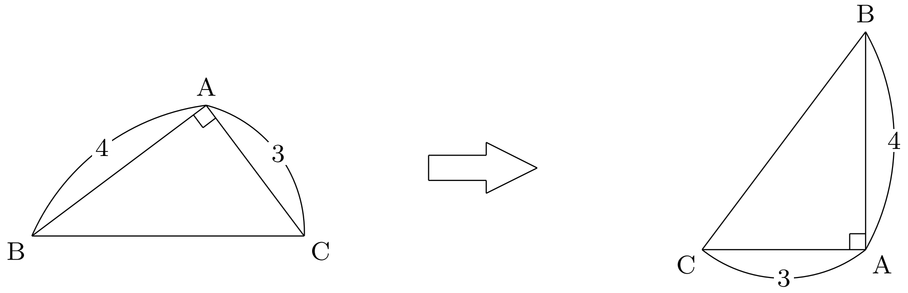
$$(\text{よこの長さ})^2 + (\text{たての長さ})^2 = (\text{ななめの長さ})^2$$



が成り立つという定理でした。ですから、「横の長さ」、「たての長さ」、「ななめの長さ」のうちどれか 2 つがわかっていれば、残りの長さも求め

られそうですよね。ただし、この定理を使うときはどこが「よこ」でどこが「たて」でどこが「ななめ」なのか十分気をつけて使うことが重要です。「よこ」とか「たて」とか「ななめ」という言葉は、直角を右下に持ってきたときの呼び方だからです。

(1) 次の図を見てください。



これは、どこが「よこ」でどこが「たて」でどこが「ななめ」なのか間違えないようにするために、この問題の直角三角形の向きを変え、直角が右下になるようにしている図です。(「こんなことをしなくても私は間違えない」という人はこのような図を描かなくても良いかもしれません。また、このような図を書く代わりに、テキストを回転させて図の向きを変えても良いですね。)

この図を見るとわかるように、BC は「ななめ」ですよね。ですから、三平方の定理によると、

$$3^2 + 4^2 = \text{BC の長さ}^2$$

が成り立っているはずです。この式をもとに「BC の長さ」を求めることができますね。どうするのかというと、まず、3^2 や 4^2 のところを計算して、

$$9 + 16 = \text{BC の長さ}^2$$

とします。次は、$9 + 16$ ののところを計算して、

$$25 = \text{BC の長さ}^2$$

とします。この式は、「BC の長さを 2 乗すると 25 になるんだよ」という意味の式ですよね。ですから、2 乗すると 25 になる数を一生懸命探すことにします。そう

すると、5 と -5 が見つかりますね。つまり、

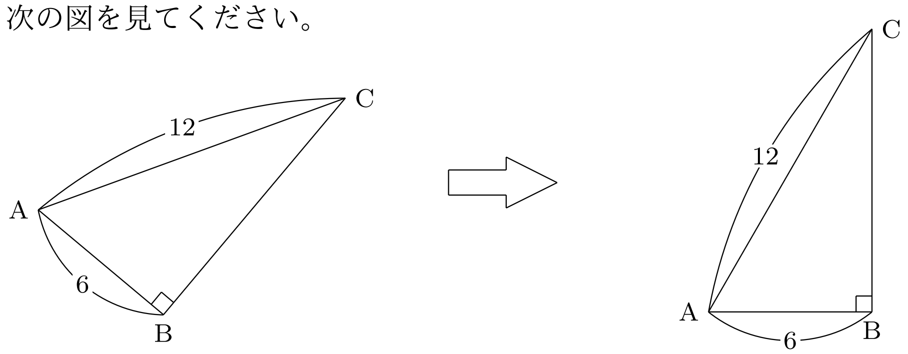
$$\text{BC の長さ} = 5 \quad \text{または} \quad \text{BC の長さ} = -5$$

ということになります。ところでここで、「BC の長さは辺の長さなのでマイナスにはならない」ということに注意すると、

$$\text{BC の長さ} = 5$$

であると結論できますね。

(2) 次の図を見てください。



ここでもやはり、どこが「よこ」でどこが「たて」でどこが「ななめ」なのか間違えないようにするために、この問題の直角三角形の向きを変え、直角が右下になるようにして見ました。(「こんなことをしなくても私は間違えない」という人はこのような図を描かなくても良いかもしれません。また、このような図を書く代わりに、テキストを回転させて図の向きを変えても良いですね。)

この図を見るとわかるように、BC は「たて」ですよね。ですから、三平方の定理によると、

$$6^2 + \text{BC の長さ}^2 = 12^2$$

が成り立っているはずです。この式をもとに「BC の長さ」を求めることができますね。どうするのかというと、まず、6^2 や 12^2 のところを計算して、

$$36 + \text{BC の長さ}^2 = 144$$

とします。次は、両辺から 36 をひいて、

$$36 + \mathrm{BC}\text{ の長さ}^2 - 36 = 144 - 36$$

となるわけですが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$\mathrm{BC}\text{ の長さ}^2 = 108$$

となりますね。この式は、「BC の長さを 2 乗すると 108 になるんだよ」という意味の式ですよね。ですから、2 乗すると 108 になる数を一生懸命探すことにします。そうすると、とりあえず $\sqrt{108}$ と $-\sqrt{108}5$ が見つかりますね。つまり、

$$\mathrm{BC}\text{ の長さ} = \sqrt{108} \quad \text{または} \quad \mathrm{BC}\text{ の長さ} = -\sqrt{108}$$

ということになります。ところでここで、「BC の長さは辺の長さなのでマイナスにはならない」ということに注意すると、

$$\mathrm{BC}\text{ の長さ} = \sqrt{108}$$

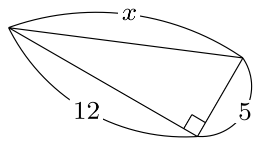
であることがわかります。ところで $\sqrt{108}$ という数はさらに見かけをましにすることができますね。$\sqrt{108}$ は $6\sqrt{3}$ に見かけを変えることができますよね。ですから、

$$\mathrm{BC}\text{ の長さ} = 6\sqrt{3}$$

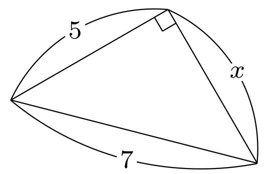
と結論できますね。

問 3. 次の図の直角三角形で、x の値を求めなさい。

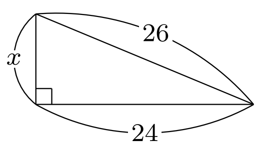
(1)



(2)



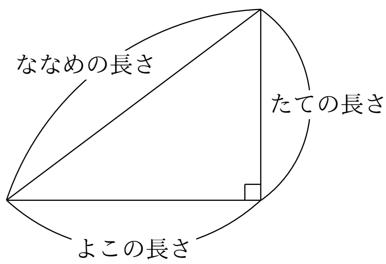
(3)



答えを見る

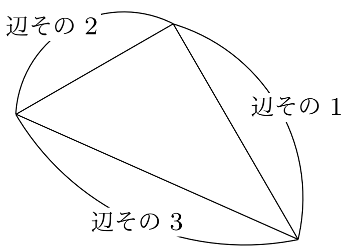
1.2　どんなことが判明すれば直角三角形であると断言できるの？（三平方の定理の逆）

これまで、どんな直角三角形でも必ず、



$$(\text{よこの長さ})^2 + (\text{たての長さ})^2 = (\text{ななめの長さ})^2$$

が成り立っているということを学んできました。ではここであなたに質問です。



質問　ところで今、直角三角形なのか直角三角形ではないのかよくわからない三角形があるとします。右の図を見てください。説明のため、ここではこの三角形の辺を「辺その 1」、「辺その 2」、「辺その 3」と呼ぶことにします。もし、この三角形の辺の長さについて、

$$(\text{辺その 1 の長さ})^2 + (\text{辺その 2 の長さ})^2 = (\text{辺その 3 の長さ})^2$$

が成り立っていたら、この三角形は直角三角形であると断言してよいのでしょうか？

補足：別の言い方をすると、この質問は、

直角三角形ではない三角形でも、

$$(\text{辺その 1 の長さ})^2 + (\text{辺その 2 の長さ})^2 = (\text{辺その 3 の長さ})^2$$

が成り立っていることはあるのでしょうか？

ということになります。

ではこの質問についてこれから丁寧に考えていくことにしましょう。

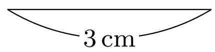
A さんの考察

今、A さんは、さっきの質問についてじっくりと考えるため、ためしにまず、辺の長さ

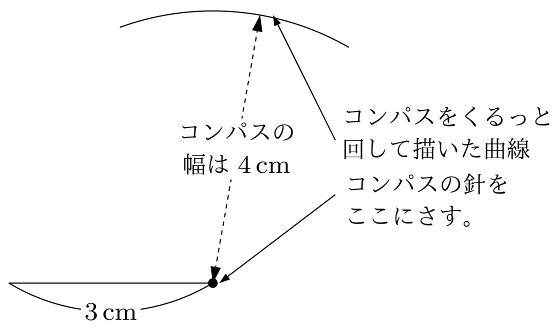
が 3 cm、4 cm、5 cm である三角形を定規とコンパスを使ってできるだけ正確に描いてみることにしました。（分度器は使わないんですよ。いいですか。）どうしてこんな三角形を描こうとしたのかというと、$3^2 + 4^2 = 5^2$ が成り立つからです。（本当ですよ。あなたも計算して確かめてくださいね。）つまり、辺の長さが 3 cm、4 cm、5 cm である三角形では、(辺その 1 の長さ)^2 + (辺その 2 の長さ)^2 = (辺その 3 の長さ)^2 が成り立っているわけです。

　では A さんがどのようにこの三角形を描いたのか説明しましょう。

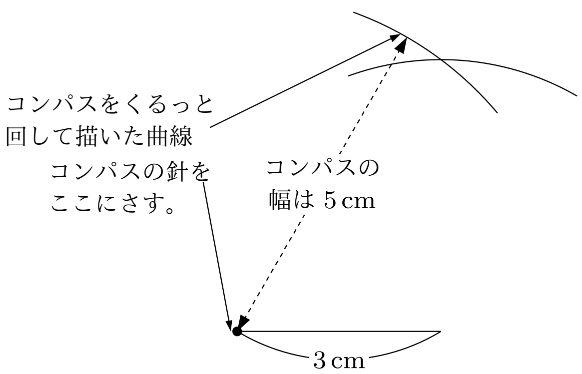
　右の図を見てください。まず、目盛りのついた定規を使って長さが 3 cm の線分を描きます。



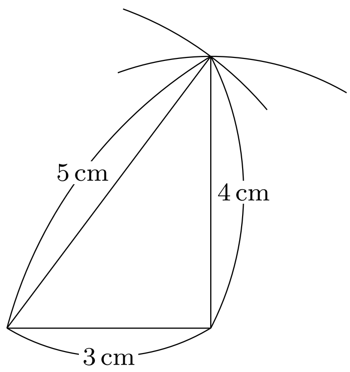
　次は右の図のように、コンパスの幅を 4 cm に開き、コンパスの針を長さが 3 cm の線分の右端にさし、コンパスをくるっと回して適当な長さの曲線を描きます。



　次は右の図のように、コンパスの幅を 5 cm に開き、コンパスの針を長さが 3 cm の線分の左端にさし、コンパスをくるっと回して適当な長さの曲線を描きます。



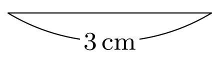
右の図を見てください。最後に、「コンパスの幅を 4 cm に開いて描いた曲線」と「コンパスの幅を 5 cm に開いて描いた曲線」の交点をそれぞれ「3 cm の長さの線分」の両端と定規でまっすぐ結びます。これで完成です。



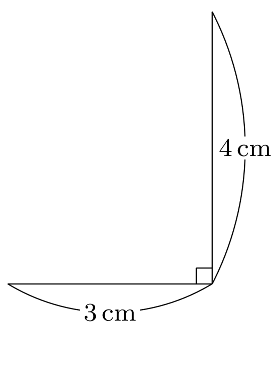
どうですか。このようにして A さんは辺の長さが 3 cm、4 cm、5 cm である三角形を定規とコンパスを使って正確に描いたのです。ここで念のため、重要な注意をしておきます。それは、この三角形を描いていくときに分度器は使っていないということです。ですから、この三角形ではどこの角が何度になっているのか今のところ全くわからないのです。でも A さんはこの三角形をじっと見ているうちに、どうもこの三角形は直角三角形であるように思えてきました。右下の角が直角になっているように見えるからです。しかし、さっきも言ったように、今のところ右下の角が直角になっている証拠はありませんね。そこで A さんは、何とかして、この三角形が直角三角形なのかどうかケリをつけようと思いました。

A さんは分度器も使ってさっきとは別のやり方で、2 つの辺の長さが 3 cm と 4 cm でその間の角の大きさが 90° である直角三角形を描いてみることにしました。

右の図を見てください。どうするのかというと、まず、目盛りのついた定規を使って長さが 3 cm の線分を描きます。

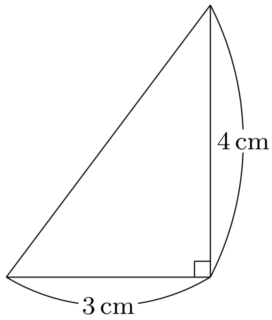


次は右の図のように、分度器を使って「長さが 3 cm の線分」の右端に 90° をはかりとり、定規を使ってまっすぐ上に「長さが 4 cm の線分」を描きます。

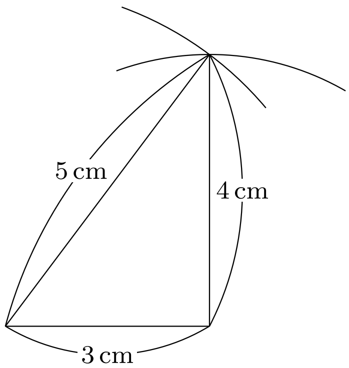


右の図を見てください。最後に斜めの辺を付け加えます。これで完成です。

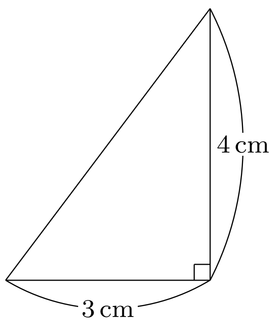
この三角形は確実に直角三角形です。分度器を使って右下の角が直角になるように描いたからです。



A さんはここで、初めに描いた「辺の長さが 3 cm、4 cm、5 cm である（直角三角形だかどうか分からない）三角形」と今描いてみた「2 つの辺の長さが 3 cm と 4 cm でその間の角の大きさが 90° である直角三角形」を比べてみることにしました。次の図を見てください。



辺の長さが 3 cm、4 cm、5 cm である（直角三角形だかどうか分からない）三角形



2 つの辺の長さが 3 cm と 4 cm でその間の角の大きさが 90° である直角三角形

どうですか？ A さんはかなり正確に図を作っています。A さんは、自分の描いた 2 つの三角形を見て、どうもこの 2 つの三角形は合同なのではという気がしてきました。大きさも形も同じになっている気がしてきたのです。そしてもし、本当にこの 2 つの三角形が合同であるとしたら、左の三角形は直角三角形であると断言できることになりますよね。だって、右下の角がぴったり重なるのですから。

というわけで、A さんは 2 つの三角形が合同であるという証拠を見つけようと思いました。

問 4. 上の話に出てきた 2 つの三角形が合同であるかどうか、A さんの代わりにあなたが証拠を探すことにします。次の順番で考えなさい。

(1) 「2 つの辺の長さが 3 cm と 4 cm でその間の角の大きさが 90° である直角三角形」

の斜めの辺の長さを求めなさい。

(2) 上の話に出てきた2つの三角形は、実は合同であることを証明しなさい。

答えを見る

問4がきちんとできた人はもう、Aさんが初めに描いた「辺の長さが3cm、4cm、5cmである（直角三角形だかどうか分からない）三角形」は実は直角三角形であると断言できますね。

それではここで、これまでの話を整理しておくことにします。

まず、直角三角形なのかどうかよくわからない三角形があるのでした。そして、この三角形では、

$$(\text{辺その 1 の長さ})^2 + (\text{辺その 2 の長さ})^2 = (\text{辺その 3 の長さ})^2$$

が成り立っているのでした。

次に直角三角形が出てきました。この三角形では、「辺その1」と「辺その2」の長さは「直角三角形なのかどうかよくわからない三角形」の「辺その1」と「辺その2」の長さと同じで、「辺その1」と「辺その2」の間の角は直角になっているのでした。

そして、この2つの三角形を比べてみると、実は合同になっているということが判明しました。ですから、初めにあった「直角三角形なのかどうかよくわからない三角形」も、直角三角形であることが証明できたわけです。つまり、

$$(\text{辺その 1 の長さ})^2 + (\text{辺その 2 の長さ})^2 = (\text{辺その 3 の長さ})^2$$

が成り立っている三角形は、

「辺その1」と「辺その2」の間の角が直角になっている直角三角形なのである

ということが証明できたのです。

重要な事実：直角三角形であると断言するには (三平方の定理の逆)

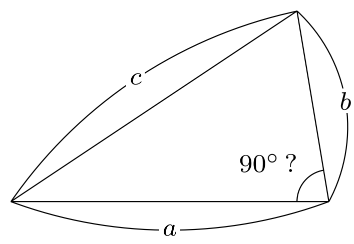
三角形の 3 辺の長さをここではそれぞれ a、b、c とします。もし、この三角形で、

$$a^2+b^2=c^2$$

という関係が成り立っていたら、実はこの三角形は、

長さ a の辺と長さ b の辺の間の角が直角になっていて、長さが c の辺が斜辺になっている直角三角形である

と断言してよいのです。



この三角形で、もし、$a^2+b^2=c^2$ が成り立っていたら、実は a と b の間の角は直角

例題 2　3 つの辺の長さがそれぞれ 13、5、12 である三角形は直角三角形ですか？

解答

23 ページで「重要な事実：直角三角形であると断言するには（三平方の定理の逆)」を学んだ人は、きっと、

$$13^2+5^2 \text{ と } 12^2 \text{ ってひとしくなるのかなぁ？}$$

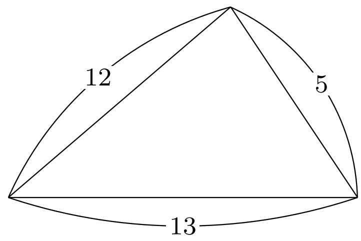
なんてことを考えるかもしれませんね。でもちょっと待ってくださいね。人によっては、

$$13^2+12^2 \text{ と } 5^2 \text{ ってひとしくなるのかなぁ？}$$

とか、

$$5^2+12^2 \text{ と } 13^2 \text{ ってひとしくなるのかなぁ？}$$

って考えるかもしれませんね。一体どの考えがよいのでしょう。全部計算して確かめなくてはいけないのでしょうか。それともこのうちのどれかだけを計算して確かめれば良いのでしょうか。



では右の図を見てください。あまり正確な図ではないかもしれませんが、辺の長さを結構気にしてこの問題の三角形を描いてみました。つまり、長さ 13 の辺を一番長く描き、長さ 12 の辺をその次に長く描き、長さ 5 の辺を一番短く描いたのです。それ以外のことはあまり気を使わずに描きました。

直角三角形では一番長い辺は斜辺ですよね。ですから、もしこの三角形が直角三角形だとすると、斜辺は長さが 13 の辺のはずです。このことに気づけば、計算して確かめなくてはならないのは、

$$5^2+12^2 \text{ と } 13^2 \text{ ってひとしくなるのかなぁ？}$$

ということだけですよね。では確かめることにします。

まず、5^2+12^2 を計算するといくつになるのか調べます。すると、

$$5^2+12^2=25+144=169$$

ですよね。

いっぽう、13^2 を計算するといくつになるのか調べると、

$$13^2=169$$

ですね。どうですか？ 5^2+12^2 と 13^2 って等しくなっていることが判明しましたね。ですから、23 ページで学んだ「重要な事実：直角三角形であると断言するには（三平方の定理の逆）」によると、この三角形は直角三角形であると断言できますね。ところで、どこが直角になっているのかというと、もちろん長さ 5 の辺と長さ 12 の辺の間の角ですよね。

問 5. 三角形の 3 つの辺の長さが次のようになっているとき、その三角形が直角三角形なのかどうか判定しなさい。

(1) 4 cm、5 cm、6 cm　　(2) 17 cm、15 cm、9 cm

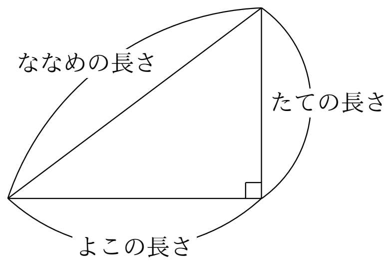
(3) $3\sqrt{2}$ cm、$\sqrt{7}$ cm、$\sqrt{11}$ cm　　(4) 24 cm、25 cm、7 cm

答えを見る

1.3　三平方の定理を応用してみよう

　これから、「三平方の定理をうまく使うと、今までなかなか求めることができなかった長さが求められるようになる」という話をします。ではまず、本題に入る前に、三平方の定理を思い出しておきましょう。次の文の空欄に正しい言葉を記入してください。

三平方の定理とは、直角三角形の 3 つの辺の長さの間には、驚くべき関係が成り立っているという定理です。はっきり言うと、

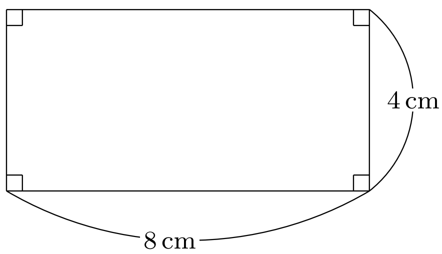


　$\boxed{}$ を 2 乗した数と $\boxed{}$ を 2 乗した数をたすと、必ず $\boxed{}$ を 2 乗した数になっている

　という定理です。ですから直角三角形では、例えばよこの長さとたての長さがわかっていれば、$\boxed{}$ の長さを計算で求めることができるのです。

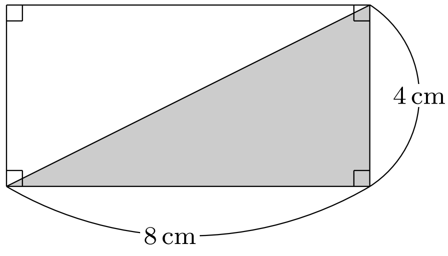
　では本題に入ることにしましょう。

例題 3　右の図のように、よこの長さが 8 cm、たての長さが 4 cm の長方形があるとします。この長方形の対角線の長さを求めなさい。



解答

　対角線の長さを求めるのですから、この長方形に対角線を引いてみましょう。すると右の図のようになります。この図には直角三角形が 2 つ現れていますが、そのうちの 1 つを灰色にしておきました。この三角形はよこの長さが 8 cm、たての長さ



が 4 cm とわかっていますから、三平方の定理を使えば斜めの長さが計算できますね。

三平方の定理によると、

$$8^2 + 4^2 = (\text{斜めの長さ})^2$$

が成り立っているはずです。この式をもとに斜めの長さを求めることにしましょう。左辺を計算していくとこの式の見かけは、

$$64 + 16 = (\text{斜めの長さ})^2$$

となり、さらに、

$$80 + (\text{斜めの長さ})^2$$

となります。これで、「斜めの長さを 2 乗すると 80 になる」ということがわかりました。ところで、2 乗すると 80 になる数っていくつなのかあなたはわかりますか？平方根のことをしっかり学んだ人はおわかりですね。2 乗すると 80 になる数は $\sqrt{80}$ と $-\sqrt{80}$ ですよね。ですから、

$$\text{斜めの長さ} = \sqrt{80} \quad \text{または} \quad -\sqrt{80}$$

ということになります。しかし、「長さ」がマイナスになることはないので、

$$\text{斜めの長さ} = \sqrt{80}$$

であると断言できます。ところで $\sqrt{80}$ という数は $4\sqrt{5}$ に見かけを変えることができますよね。ですから、

$$\text{斜めの長さ} = 4\sqrt{5}$$

ということになりますね。これでめでたく、この問題の長方形の対角線の長さは $4\sqrt{5}$ cm であることがわかりました。

問 6. 次の四角形の対角線の長さを求めなさい。

(1) 1 辺の長さが 7 cm である正方形

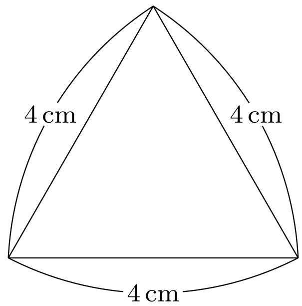
(2) 1 辺の長さが 8 cm である正方形

(3) よこの長さが 9 cm、たての長さが 3 cm である長方形

(4) よこの長さが a cm、たての長さが b cm である長方形

答えを見る

例題 4　右の図のような、1 辺の長さが 4 cm の正三角形があるとします。この正三角形の高さを求めなさい。

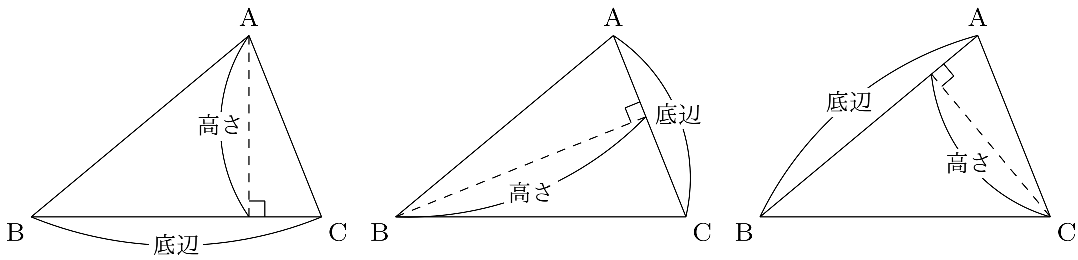


解答

この問題には「思い出しておくべき大切なこと」が色々と含まれています。ですからこの解答の中で、あなたにいくつか質問をすることにします。質問にしっかり答えてください。そして、大事なことをきちんと思いだすようにしましょう。

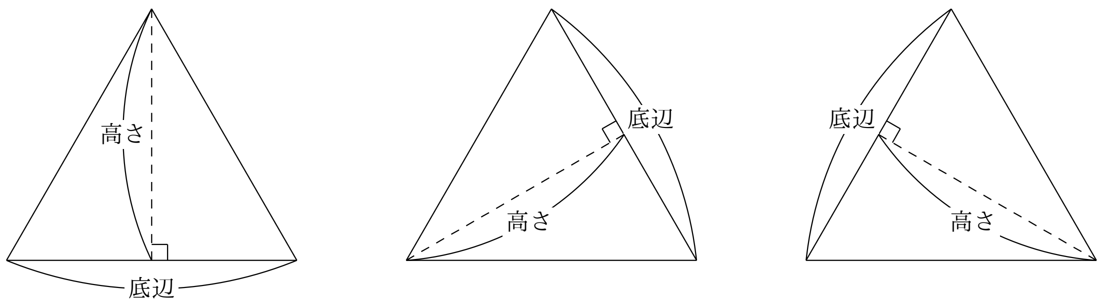
質問　さて、この問題には「三角形の高さ」という言葉が出てきました。ところで「三角形の高さ」ってどこのことなのかわかりますか？

質問の答え　念のため説明しておきましょう。次の図を見てください。



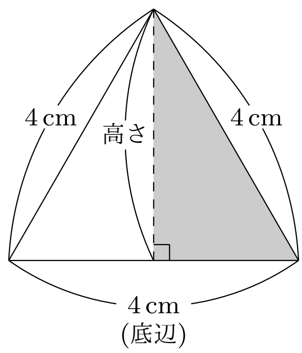
この図の三角形は正三角形ではありませんが、ある同じ △ABC に対して、「底辺」と「高さ」がどこなのかを書き込んでみました。この図を見ると分かるように、一口で「高さ」と言っても 3 通りの可能性があるわけです。つまり、どこを「高さ」と考えるのかということは、人によって違うことがあるわけです。ただし、もちろんどの考え方をするとしても、「高さ」をあらわす線は必ず「底辺」に垂直でなくてはなりません。

では話をもとに戻してこの例題を考えることにしましょう。この例題にでてくる三角形は「正三角形」でしたね。次の図を見てください。

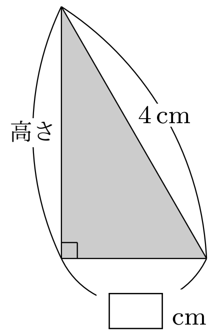


さっき説明したように、どこを「底辺」と考え、どこを「高さ」と考えるかは、上の図のように 3 通りの可能性がありますね。でも、この三角形はただの三角形ではなく「正三角形」です。ですから上の 3 つの図に描き込まれている「高さ」はすべて等しくなりますよね。というわけで、一番見やすそうな、一番左の図を使って考えていくことにしましょう。

右の図を見てください。この図には、今のところわかっている長さがすべて書き込まれています。また、役に立ちそうな直角三角形があるので灰色にしておきました。この直角三角形に三平方の定理を使えば「高さ」が求められそうですね。



質問　右の図を見てください。使うことにした直角三角形だけ取り出してみました。この直角三角形に三平方の定理を使おうとしているわけですが、困ったことが 1 つあります。この図の $\boxed{\quad}$ cm のところがわからないのです。だって、問題には何も書いてないですよね。でももしかして、「そんなの簡単じゃん。2 cm に決まってるよ。」なんて思いませんでしたか？あえてそんな人に聞いてみようと思います。何を根拠に 2 cm であると判断したのですか？きちんと理由を言ってください。

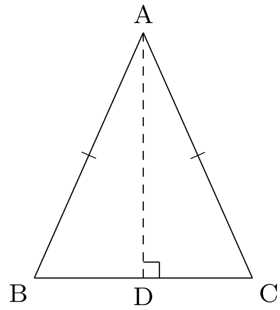


質問の答え　どうですか？理由はわかりましたか？どうしても理由が言えない人のために

説明します。これは大事なことですからここでしっかり思い出しておいてください。どんなことかというと、

驚くべき事実（おさらい）: 二等辺三角形の性質

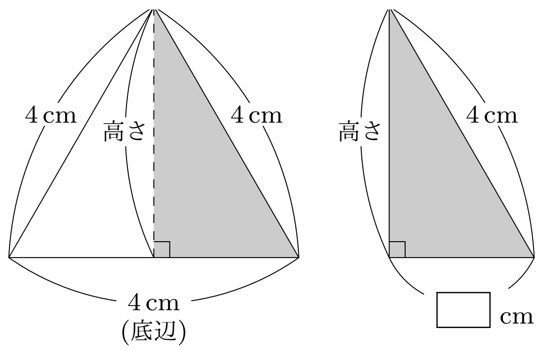
右の図を見てください。この図は、辺 AB と辺 AC の長さが等しい二等辺三角形で、頂点 A から辺 BC へ垂直な線 AD を引いたものです。（辺 BC のどまんなかへ向けて引いたわけではありません。）そうすると、驚くべきことに、点 D は必ず底辺 BC のどまんなかになっているのです。



問　この「驚くべき事実（おさらい）」を証明しなさい。

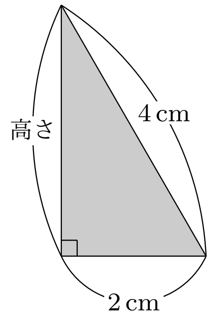
さて、「驚くべき事実（おさらい）」に書いてあることの意味はわかりましたか？またその後にあった「問」はできましたか？大丈夫だった人は話を先に進めることにしましょう。

右の図を見てください。あなたのためにまたまたさっきの図を描いておきました。正三角形は二等辺三角形の仲間ですよね。ですからさっきおさらいした「驚くべき事実（おさらい）: 二等辺三角形の性質」が理解できた人は、今度こそ $\boxed{\quad}$ cm のところが何 cm なのかわかったと思います。この例題の正三角形では、高さをあらわす線は「二等辺三角形の頂点から底辺へ向かって垂直に描かれている」のですから底辺のどまんなかに来ると言えるのです。



この質問とその答えが理解できた人はいよいよ三平方の定理を使ってこの例題の正三角形の高さを求めることができます。

右の図を見てください。三平方の定理によると、



$$2^2 + (\text{高さ})^2 = 4^2$$

が成り立っているはずですね。この式をもとに高さを求めていきます。すると、

$$4 + (\text{高さ})^2 = 16$$

となり、

$$(\text{高さ})^2 = 12$$

となります。ですから、「高さ」は「2 乗すると 12 になる数」であることがわかりました。平方根をしっかり学んだ人は、「ああ、だったら高さは $\sqrt{12}$ か $-\sqrt{12}$ だな。だけど高さがマイナスのはずはないから高さは $\sqrt{12}$ だな。」と考えますね。そしてさらに、「でも、$\sqrt{12}$ って $2\sqrt{3}$ と同じだから・・・」って考えて、結局、

$$\text{高さ} = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$$

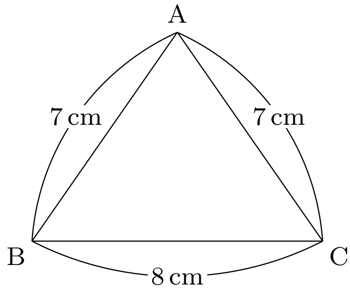
ということになりますね。

問 7. 以下の問に答えなさい。

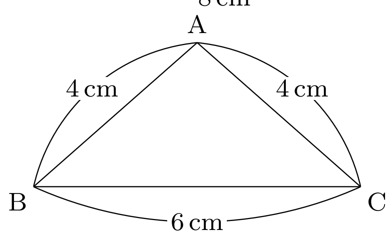
(1) 一辺の長さが $2\,\text{cm}$ の正三角形の高さを求めなさい。

(2) 一辺の長さが $a\,\text{cm}$ の正三角形の高さを求めなさい。

(3) 右の図の二等辺三角形で、辺 BC を底辺と考えたときの高さを求めなさい。



(4) 右の図の二等辺三角形で、辺 BC を底辺と考えたときの高さを求めなさい。また、この三角形の面積を求めなさい。

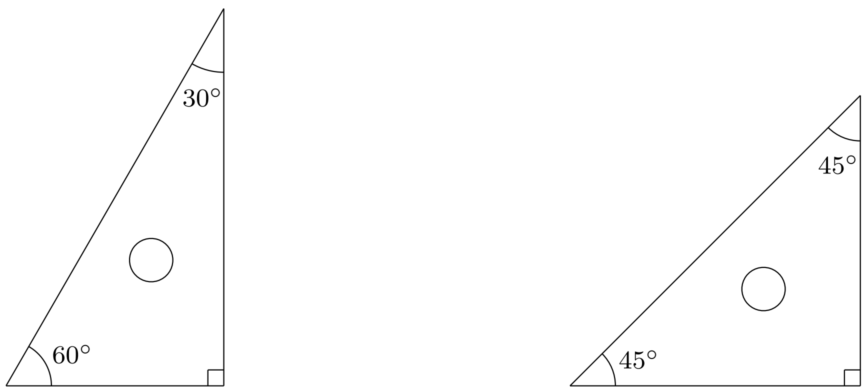


答えを見る

ここまでの学習で、「図形の中にうまく直角三角形を見つけると、長方形の対角線の長さや三角形の高さを求めることができる。」ということがわかりましたね。これからもそういう話を学習していきますが、その前に、「知っていると計算が楽になる」という話を学ぶことにします。

寄り道の話：特別な直角三角形の辺の長さの比について

あなたは三角定規を使ったことはありますよね。そして、三角定規には 2 種類あることを知っていますよね。でも知ってきますか？その 2 種類の三角定規にはどんな特徴があるのかということを。次の図を見てください。

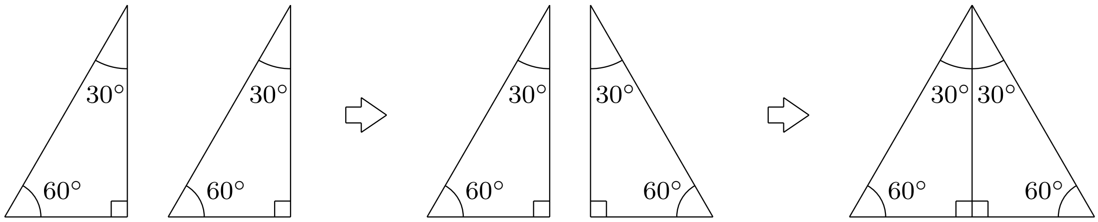


30°、60°、90° タイプ　　45°、45°、90° タイプ

三角定規を買ってくると、これらの形の 2 枚の三角定規が入っていますね。片方は、「角の大きさが 30°、60°、90° の三角形」もう片方は「角の大きさが 45°、45°、90° の三角形」です。この 2 つの三角形はどちらも直角三角形ですよね。そこで、三平方の定理を使って辺の長さのことを調べることにしましょう。そうると、なにか役立つことが発見できるかもしれません。

30°、60°、90° タイプの直角三角形について辺の長さのことを調べてみよう

次の図を見てください。



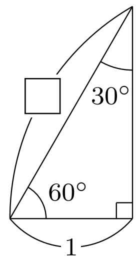
まず、2 枚用意する　　1 枚を裏返す　　くっつける

この図は、まず 30°、60°、90° タイプの三角定規を 2 枚用意し、次にそのうちの 1 枚を裏返し、最後に 2 枚をぴったりくっつけていることを表しています。このようにすると、最後に正三角形ができますよね。

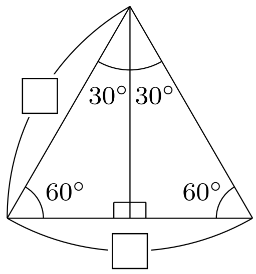
問①　いま、気楽に「最後に正三角形ができる」なんて言いましたが、最後にできた三角形は本当に正三角形なのでしょうか。証拠を見つけなさい。

問②　もともとあった、30°、60°、90° タイプの直角三角形の「よこの長さ」を 1 とします。このとき、右の図の空欄に、正しい数を記入しなさい。

ヒント：図をよく見て考えてくださいね。まずどこが分かるのかというと、「2 まいくっつけてできた正三角形のよこの長さ」ですよ。おんなじ直角三角形を 2 枚くっつけたのですから、どうなるのかすぐにわかりますね。



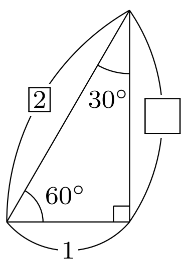
30°、60°、90° タイプの直角三角形



2 枚くっつけてできた正三角形

問③　右の図はさっきの問②で出てきた、よこの長さが 1 になっている 30°、60°、90° タイプの直角三角形です。ただし、さっきの問②ができた人のために、すでに「ななめの長さ」を記入してあります。

三平方の定理を使ってこの図の空欄の値、つまりこの直角三角形の「たての長さ」を求めなさい。



30°、60°、90° タイプの直角三角形

以上、問①から問③までを正しく考えることができた人は、30°、60°、90° タイプの直角三角形の 3 つの辺の長さの間にどのような関係があるのかわかったと思います。わかっ

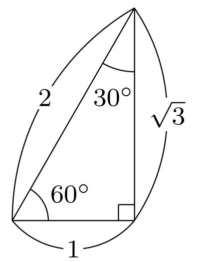
たことをまとめておきます。

30°、60°、90° タイプの直角三角形の辺の長さについて

右の図を見てください。30°、60°、90° タイプの直角三角形では、横の長さが 1 のときは、

$$\text{ななめの長さ} = 2$$

$$\text{たての長さ} = \sqrt{3}$$



30°、60°、90° タイプの直角三角形

となっています。ですから、よこの長さが 1 ではないときでも、3 つの辺の長さの比は、

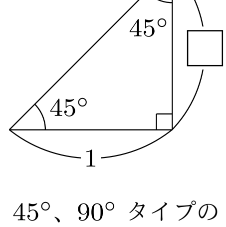
$$\text{よこの長さ} : \text{ななめの長さ} : \text{たての長さ} = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

となっているのです。

45°、45°、90° タイプの直角三角形について辺の長さのことを調べてみよう

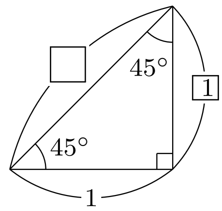
今度は 30°、60°、90° タイプの直角三角形のときのように、三角形を 2 枚用意して調べる必要はありません。もっと簡単に調べることができるからです。どういうことかというと、45°、45°、90° タイプの直角三角形は 2 つの角が 45° と等しくなっているので、この直角三角形は二等辺三角形でもあるからです。

問①　右の図は、よこの長さが 1 になっている 45°、45°、90° タイプの直角三角形です。この図の空欄の値、つまりこの直角三角形の「たての長さ」を求めなさい。



45°、45°、90° タイプの直角三角形

問②　右の図は、さっきの問①で出てきた、よこの長さが 1 になっている 45°、45°、90° タイプの直角三角形です。ただし、さっきの問①ができた人のために、すでに「ななめの長さ」を記入してあります。



45°、45°、90° タイプの直角三角形

三平方の定理を使ってこの図の空欄の値、つまりこの直角三角形の「ななめの長さ」を求めなさい。

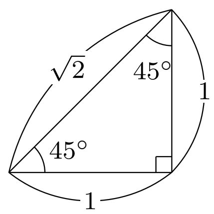
以上、問①から問②までを正しく考えることができた人は、45°、45°、90° タイプの直角三角形の 3 つの辺の長さの間にどのような関係があるのかわかったと思います。わかったことをまとめておきます。

45°、45°、90° タイプの直角三角形の辺の長さについて

右の図を見てください。45°、45°、90° タイプの直角三角形では、横の長さが 1 のときは、

$$\text{たての長さ} = 1$$

$$\text{ななめの長さ} = \sqrt{2}$$



45°、45°、90° タイプの直角三角形

となっています。ですから、よこの長さが 1 ではないときでも、3 つの辺の長さの比は、

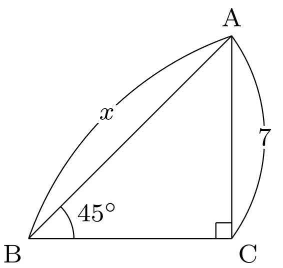
$$\text{よこの長さ} : \text{たての長さ} : \text{ななめの長さ} = 1 : 1 : \sqrt{2}$$

となっているのです。

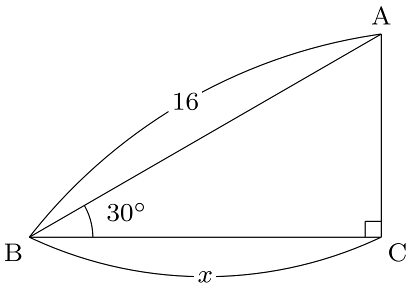
以上、覚えておくと役に立つかもしれない事実を 2 つ紹介しました。それではこれらの事実を活用する練習を少ししてみましょう。

例題 5　次の図で、x の値を求めなさい。

(1)

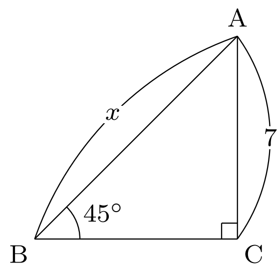


(2)



解答

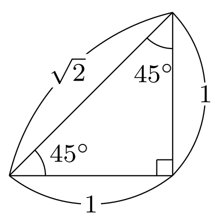
(1) この問題の三角形の図には ∠B の大きさは 45° で、∠C の大きさは 90° と書かれています。しかし ∠A の大きさが書いてありません。でも ∠A の大きさはすぐにわかりますね。三角形の内角の和は 180° ですから、



$$
\begin{aligned}
\angle \mathrm{A} &= 180^\circ - (\angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C}) \\
&= 180^\circ - (45^\circ + 90^\circ) \\
&= 45^\circ
\end{aligned}
$$

となりますよね。というわけで、この三角形は 45°、45°、90° タイプの直角三角形であることが判明しました。

ここで 34 ページで学んだ「45°、45°、90° タイプの直角三角形の辺の長さについて」を思い出してみましょう。（右の図を見てください。）すると、



45°、45°、90° タイプの直角三角形

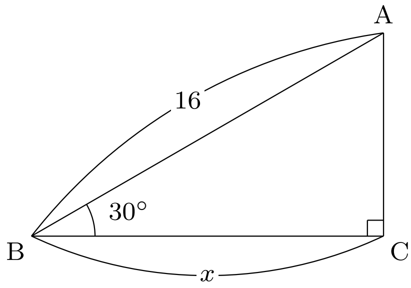
「ななめの長さ」は「たての長さ」の $\sqrt{2}$ 倍

となっているのでしたね。ですから、この問題の直角三角形では、

$$x = 7 \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

となりますね。

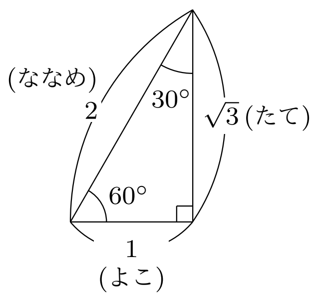
(2) この問題の三角形の図には $\angle$B の大きさは 30° で、$\angle$C の大きさは 90° と書かれています。しかし $\angle$A の大きさが書いてありません。でも $\angle$A の大きさはすぐにわかりますね。三角形の内角の和は 180° ですから、



$$\begin{aligned}\angle \mathrm{A} &= 180^\circ - (\angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C}) \\ &= 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) \\ &= 60^\circ\end{aligned}$$

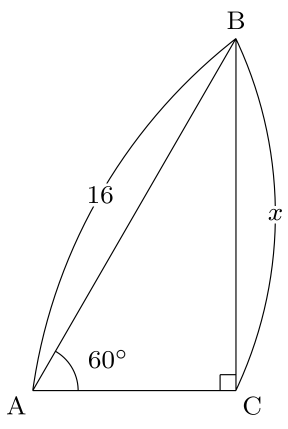
となりますよね。というわけで、この三角形は 30°、60°、90° タイプの直角三角形であることが判明しました。

ここで、33 ページで学んだ「30°、60°、90° タイプの直角三角形の辺の長さについて」を思い出して見ましょう。3 つの辺の長さの比は右の図のようになっているのでしたね。右の図と、この問題の図を慎重に比べて考えたいので、比べやすくするために、この問題の図の三角形を裏返して向きを変えた図を描いてみることにします。



30°、60°、90° タイプの
直角三角形

すると右の図のようになりますね。この図とさっきの図を比べながら間違わないように考えてみましょう。いきなり x（つまり「たての長さ」）を求めても良いのですが、ここでは計算を楽にするためにまず「よこの長さ」のことを考えることにします。30°、60°、90° タイプの直角三角形では、



いま解いている問題の三角形を
裏返して向きを変えた図

「よこの長さ」は「ななめの長さ」の半分

になっていますね。ですから、

$$\text{よこの長さ} = 16 \times \frac{1}{2} = 8$$

となりますね。

次は「よこの長さ」と「たての長さ」の関係を考えてみます。30°、60°、90° タイプの直角三角形では、

「たての長さ」は「よこの長さ」の $\sqrt{3}$ 倍

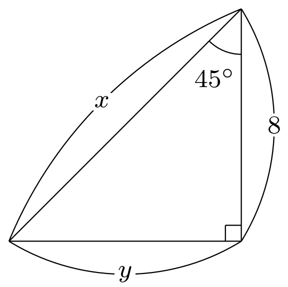
となっているのでしたね。ですから、

$$x = 8 \times \sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

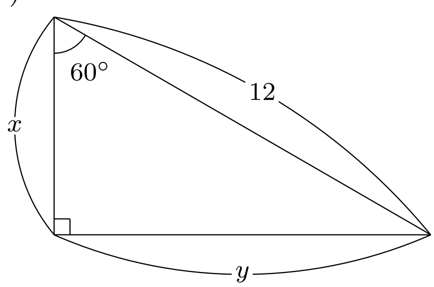
ですね。

問 8. 次の図で x と y の値を求めなさい。

(1)

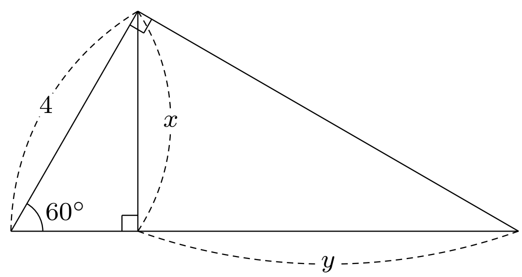


(2)



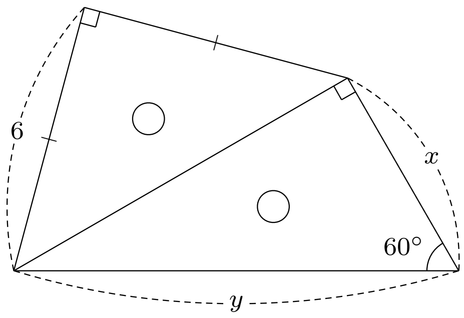
答えを見る

問 9. 右の図で x と y の値を求めなさい。



答えを見る

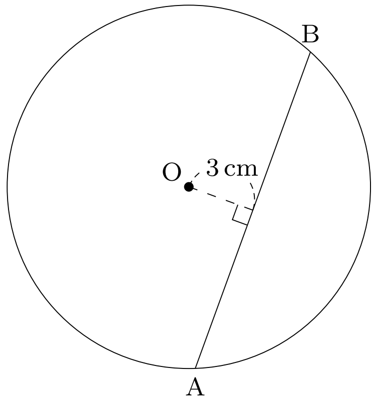
問 10. 右の図は三角定規を組み合わせてみたものです。x と y の値を求めなさい。



答えを見る

以上で寄り道の話を終わり、本題に戻ります。

例題 6　右の図のような円 O があり、円 O に弦 AB が描かれているとします。ただし、この円 O の半径は 8 cm であるとします。また、この円 O の中心から弦 AB に垂直な線を引いていったところ、O から弦 AB までの距離は 3 cm であることがわかりました。ではこれから弦 AB の長さを求めていくことにします。次の問に順に答えることにより、弦 AB の長さを求めていってください。

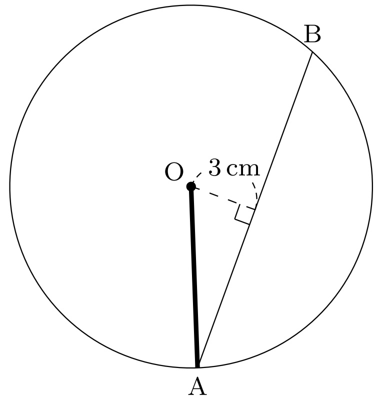


(1) 問題の図に、弦 AB の長さを求めるときに役に立ちそうなまっすぐな線を 1 本つけくわえようと思います。あなたならどこにどんな線を描きますか。

(2) ちゃんと役に立つ線を (1) で描いた人は図の中に直角三角形があらわれているはずです。その直角三角形をうまく活用して弦 AB の長さを求めなさい。

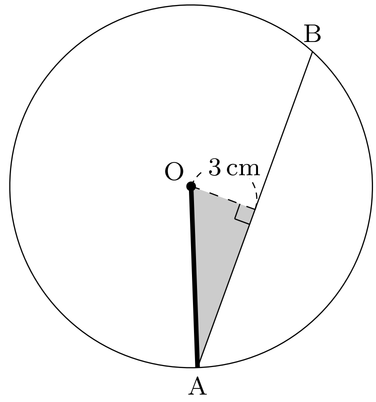
解答

(1) 図のどこかに「弦 AB の長さを求めるときに役に立ちそうなまっすぐな線」を描くのでしたね。例えば、右の図のように、円の中心 O と弦の端の点 A を結ぶととても役にたちます。どうしてなのかというと、とても役に立つ直角三角形が現れるからです。



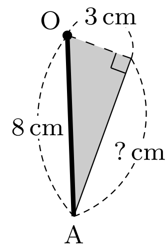
(2) この問題にはきちんとおさらいしておきたい大事なことが隠れています。ですからこの解答の中であなたに質問をすることにします。その質問もきちんと考えてこの解答を読んでください。

(1) ができた人は、どれが「役に立つ直角三角形」なのかもうおわかりですね。右の図を見てください。「役に立つ直角三角形」を灰色にしておきました。



この灰色の直角三角形では辺 OA の長さは書いてありませんが、何 cm なのかわかりますよね。円 O の半径は 8 cm なのですから辺 OA の長さも 8 cm のはずですね。

では右の図を見てください。灰色の直角三角形だけを取り出してみました。そしてわかっている辺の長さも書き込んでみました。ところで、長さのわかっていない辺が 1 つありますね。この図で ? cm と書いてある辺です。これは何 cm なのでしょうか。三平方の定理を知っているあなたなら求めることができますね。では次の計算の空欄を埋めていってください。



この灰色の直角三角形では、三平方の定理より、

$$?^2 + \square^2 = \square^2$$

が成り立っているはずです。つまり、

$$?^2 + 9 = 64$$

が成り立っています。これより、

$$?^2 = \square$$

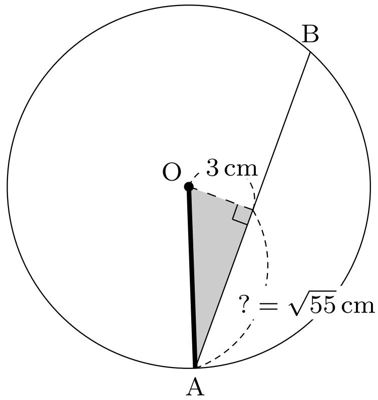
であることがわかります。? は辺の長さなのでマイナスになることはありません。ですから、

$$? = \square$$

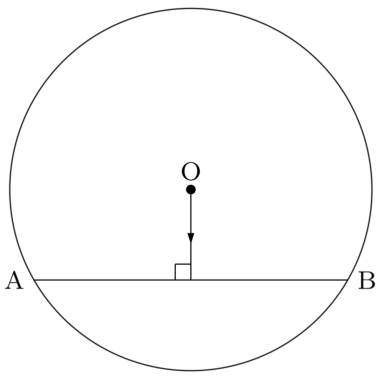
であることがわかります。

これで、? は $\sqrt{55}\,\mathrm{cm}$ であることがわかりましたが、まだこの問題は終わりではないですね。

では右の図を見てください。? のところを $\sqrt{55}\,\mathrm{cm}$ にしておきました。 では弦 AB の長さは何 cm なのでしょうか。「そんなの簡単じゃん。2 倍すればいいんだよ。だから AB は $2\sqrt{55}\,\mathrm{cm}$ だよ。」って思った人はいますか？実は、そのとおりなのですが、そんなあなたにはあえて次の質問に答えてもらうことにします。



質問　右の図のように円 O があり、この円に弦 AB が描かれているとします。このとき、中心 O から弦 AB に垂直になるような線を引いていくと、その線は必ず弦 AB のど真ん中で交わると断言してよいですか。断言してよいと思う場合は証明をしなさい。断言できないと思う場合も理由をきちんと言いなさい。



質問の答え　もう、こういうことはとっくの昔に詳しく学習しているはずです。ですからあっさりと説明します。

答えは「断言できる」です。

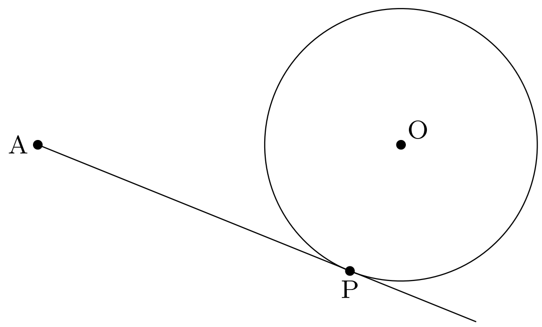
証明のあらすじを教えましょう。O と A を結ぶと直角三角形ができます。また、O と B を結ぶと直角三角形ができます。この 2 つの直角三角形が合同であることを証明すればよいですよね．もしあなたが「直角三角形だけに使うことができる三角形の合同条件」をちゃんと憶えていたら、「斜辺と他の 1 組の辺の長さが等しい」という証拠を見つけて証明ができるはずです。

さて、この質問とその答えがきちんと理解できた人は今度こそ、この例題の答えを自信を持って答えられますね。弦 AB の長さは $2\sqrt{55}$ cm ですね。

問 11.　半径が 7 cm の円で中心からの距離が 2 cm である弦 AB の長さを求めなさい。

答えを見る

例題 7　右の図のように円 O があり、 円 O の外にある点 A から、円 O に接するような線が描かれているとします。ここではこの直線が円 O と接する点を P と呼ぶことにします。これから、「A から P までの長さ」を求めてみようと思います。ただし、円 O の



半径は 3 cm で、点 A は円 O の中心 O から 8 cm 離れたところにあるとします。次の問を順番に考えていくことにより、「A から P までの長さ」を求めなさい。

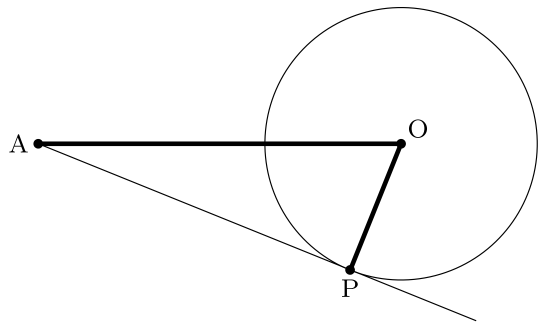
(1) この問題の図に、いくつか役に立ちそうな線を追加しようと思います。あなたならどこにどんな線を描きますか。

(2) 役に立つ線が (1) で描けた人は、図の中にとても役に立つ直角三角形が現れているはずです。それを利用して AP の長さを求めなさい。

解答

この問題にはきちんとおさらいしておきたい大事なことが隠れています。ですからこの解答の中であなたに質問をすることにします。その質問もきちんと考えてこの解答を読んでください。

(1) AP の長さを求めるために、問題の図に役に立ちそうな線を追加するのでしたね。右の図を見てください。O と A を結んだ線を描き、O と P を結んだ線を描いてみました。

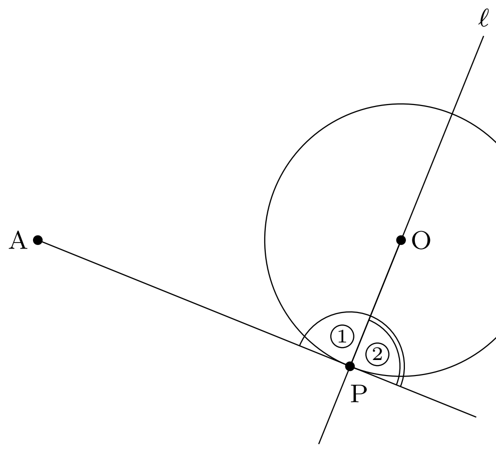


質問　この図を見ると、∠OPA は直角になっているようにも見えますよね。でも、本当に直角なのでしょうか。（だって、直角になるように O から接線へ線を引いていったわけではないですよね。ただ、O と接点 P を結んだだけですよね。）直角であると断言してよいと思う場合は証明をしなさい。断言できないと思う場合も理由をを言いなさい。

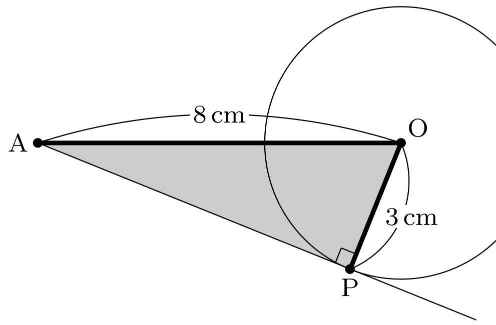
質問の答え　もう、こういうことはとっくの昔に詳しく学習しているはずです。

答えは「断言できる」です。かなり前に、「円の接線はその接線と円の接点を通る半径に垂直になっている」ということを学んでいますね。覚えていますか？でも実は、昔このことを学んだとき、厳密な証明はしませんでした。きちんとした証明をするのは結構大変なのです。そこで、ここでも直感的な説明をすることにします。

右の図を見てください。円は線対称な図形です。ですからこの図を直線 ℓ で折ってみれば、円 O は円 O とピッタリ重なるはずです。そのとき、点 P を通る円の接線も自分自身にピッタリ重なるはずです。ですから、この図の①の角と②の角もピッタリ重なります。ですから、①の角と②の角は大きさが等しいわけです。大きさの等しい角が 2 つ合わさってまっすぐの角（つまり $180°$）になっているのですから、角 1 つ分の大きさは $90°$ になっているわけです。



(2) 右の図を見てください。役に立ちそうな直角三角形が現れたので灰色にしておきました。また、この図にはすでにわかっている長さも書き込んでおきました。確か、この問題では、「円 O の半径は 3 cm で、点 A は円 O の中心 O から 8 cm 離れたところにある」のでしたね。さらにこの図では、(1) の解答の中の「質問」と「質問の答え」が理解できた人のために、∠APO のところに直角マークもつけておきました。この灰色の直角三角形に注目して三平方の定理を使えば、AP の長さを求めることができそうですね。では以下の説明の空欄に正しい数を記入してください。



三平方の定理より、

$$\mathrm{AP}^2 + \square^2 = \square^2$$

が成り立っています。つまり、

$$\mathrm{AP}^2 + \square = \square$$

が成り立っているわけです。この式から、

$$\mathrm{AP}^2 = \boxed{}$$

であることがわかります。ですから AP の長さを知りたければ 2 乗すると $\boxed{}$ になる数を探せばよいのですが、AP は長さなのでマイナスにはならないということを考えに入れておくと、

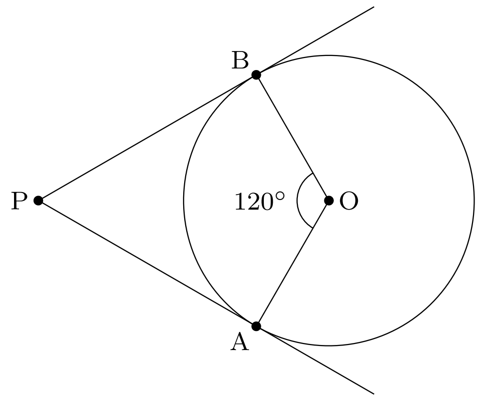
$$\mathrm{AP} = \boxed{}$$

であることがわかります。これで AP の長さは $\sqrt{55}\,\mathrm{cm}$ ということがわかりましたね。

問 12. 半径が 3 cm の円 O があるとします。この円の外部に点 P があり、P は円 O の中心から 10 cm 離れています。点 P から円 O へ接線を引き、接点を T とします。PT の長さを求めなさい。

答えを見る

問 13. 右の図で、PA、PB は点 A、点 B で円 O に接する円 O の接線です。円 O の半径が 8 cm、$\angle\mathrm{AOB}$ の大きさが 120° のとき、PA の長さを求めなさい。



答えを見る

例題 8　座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(4, 5)$ と $\mathrm{B}(-2, 2)$ に対し、AB 間の距離を求めようと思います。次の問を順番に考えることにより、AB 間の距離を求めなさい。

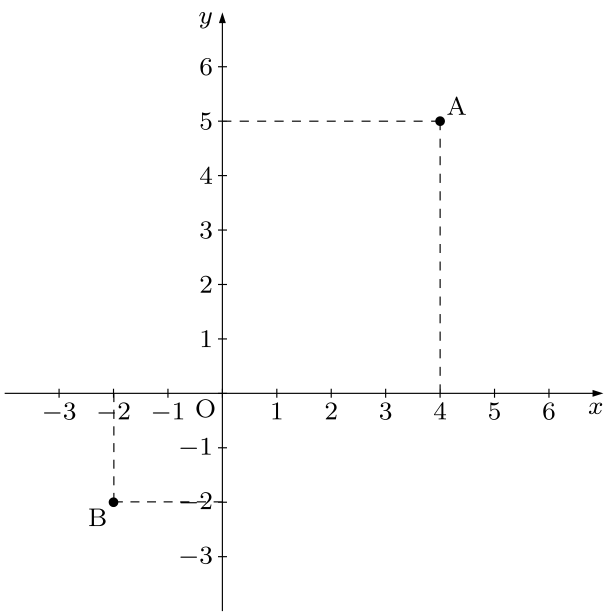
(1)　この問題の状況を図にしなさい。

(2)　(1) で作った図に、さらにいくつか線を描き込んで AB 間の距離を求めるために役に立つ直角三角形を作りなさい。

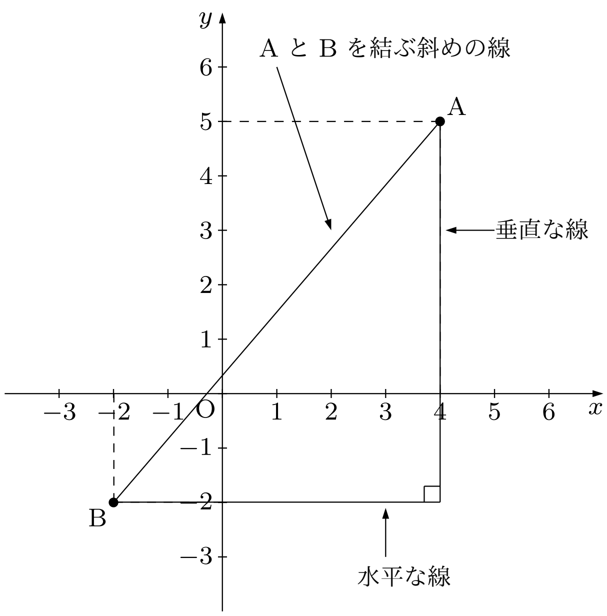
(3)　(2) 作った直角三角形を利用して AB 間の距離を求めなさい。

解答

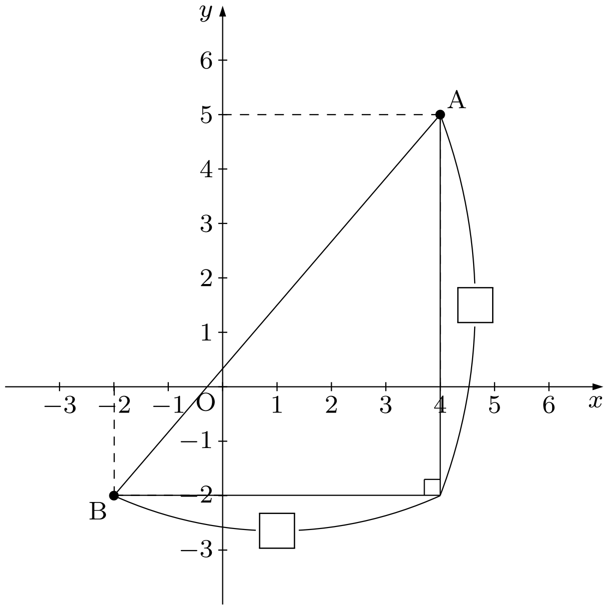
(1) 座標平面とその上にある 2 点 A(4, 5) と B(−2, 2) を描けばよいですよね。ですから右の図のようになります。



(2) (1) で作った図に、さらにいくつか線を描き込んで AB 間の距離を求めるために役に立つ直角三角形を作るのですからきっと、右の図のようにするのでしょう。つまり、「A と B を結ぶ斜めの線」だけではなくさらに「水平な線」、「垂直な線」を引いて直角三角形を作るわけです。

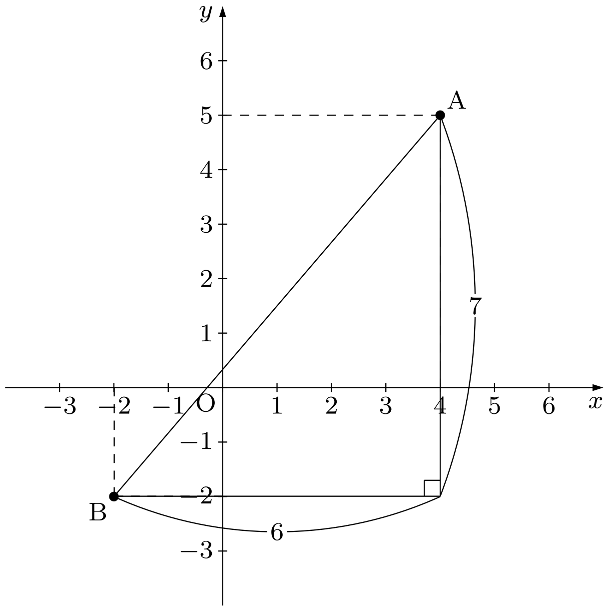


(3) (2) で作った直角三角形を利用して AB 間の距離を求めるのですよね。では右の図を見てください。 そしてこの図の空欄に正しい数を記入してみてください。
どうですか？長さはわかりましたか？
水平な線の長さは 6 ですよね。（目盛りを数えるとか、引き算をつかって $4-(-2)$ を計算すれば求めることができますよね。）



また、垂直な線の長さは 7 ですよね。（これも目盛りを数えるとか、引き算をつかって $5-(-2)$ を計算すれば求めることができますよね。）

というわけで、注目している直角三角形の辺の長さは右の図のようになっていることがわかりました。これで、あとは三平方の定理を使えば「A と B を結ぶ斜めの線」の長さを求めることができそうですね。では計算していくことにしましょう。三平方の定理より、



$$6^2+7^2=\mathrm{AB}^2$$

が成り立っているはずです。つまり、

$$36+49=\mathrm{AB}^2$$

が成り立っています。さらに左辺を計算すると、

$$85 = \mathrm{AB}^2$$

となりますね。この式は、AB の長さを 2 乗すると 85 になるという意味ですね。ですから、AB の長さを知りたければ「2 乗すると 85 になる数」を探せばよいわけです。探してみると $\sqrt{85}$ と $-\sqrt{85}$ が見つかりますが、AB は辺の長さなのでマイナスの数は採用できません。ですから、

$$\mathrm{AB} = \sqrt{85}$$

となります。ところで、$\sqrt{85}$ という数はこれ以上見かけをマシにすることはできませんよね。ですからこれでこの問題は解決です。点 A と点 B の間の距離は $\sqrt{85}$ ですね。

問 14. 座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(3, 2)$ と $\mathrm{B}(-3, 4)$ に対し、AB 間の距離を求めようと思います。次の問を順番に考えることにより、AB 間の距離を求めなさい。

(1) この問題の状況を図にしなさい。

(2) (1) で作った図に、さらにいくつか線を描き込んで AB 間の距離を求めるために役に立つ直角三角形を作りなさい。

(3) (2) で作った直角三角形を利用して AB 間の距離を求めなさい。

答えを見る

問 15. 座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-2, -3)$ と $\mathrm{B}(-2, 4)$ に対し、AB 間の距離を求めようと思います。次の問を順番に考えることにより、AB 間の距離を求めなさい。

(1) この問題の状況を図にしなさい。

(2) (1) で作った図を見て AB 間の距離を求めなさい。

問 16. 次の 2 点間の距離を求めなさい。

(1) $(1, 3)$, $(-4, 1)$
(2) $(-3, 4)$, $(9, -1)$
(3) $(-2, 2)$, $(4, 5)$
(4) $(-3, 3)$, $(2, -1)$
(5) $(4, 2)$, $(4, 5)$
(6) $(-3, -1)$, $(2, -1)$

答えを見る

例題 9　直方体があるとします。この直方体の幅は 4 cm、奥行きは 2 cm、高さは 3 cm です。この直方体の対角線の長さを求めようと思います。次の問に順番に答えてくことによってこの直方体の対角線の長さを求めなさい。

(1) まず、この直方体の見取り図を描き、わかっている辺の長さを記入しなさい。

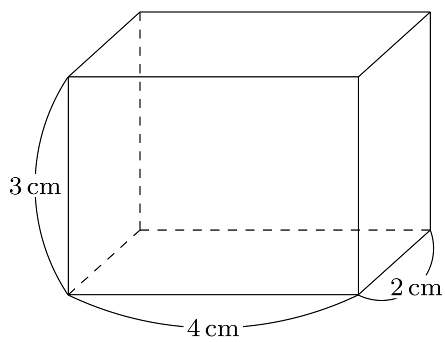
(2) いきなりこの直方体の対角線の長さを求めるのは難しそうなので、とりあえずこの直方体の底面の対角線の長さを求めなさい。

(3) (2) で求めた「底面の対角線の長さ」も利用して、この直方体の対角線の長さを求めようと思います。そのときに役に立ちそうな直角三角形を見つけなさい。

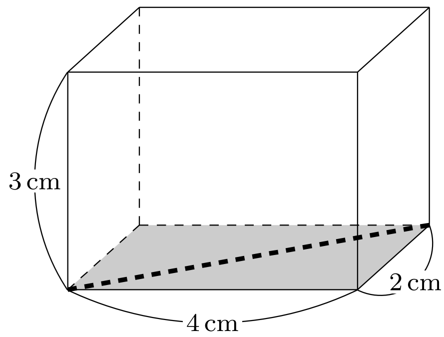
(4) (3) で見つけた直角三角形を利用してこの直方体の対角線の長さを求めなさい。

解答

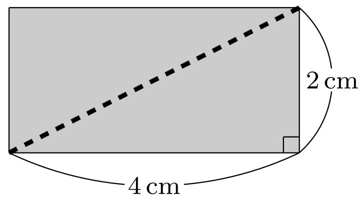
(1) 幅は 4 cm、奥行きは 2 cm、高さは 3 cm の直方体ですから、見取り図は右の図のようになりますね。（見取り図を描くときはこちら側から見えない辺を点線で描いておくと立体的に見えますよ。）



(2) 右の図を見てください。「底面」とはどこのことなのかをわかりやすくするために「底面」を灰色にしておきました。また、「底面の対角線」を太い点線で描いておきました。



では、この立体の見取り図から、「底面」だけを取り出して見やすくしてみましょう。「底面」を真上から見た図を描くと右のようになりますね。



この図を見ながら三平方の定理を使って「底面の対角線の長さ」を求めることにしましょう。

三平方の定理より、

$$4^2 + 2^2 = 底面の対角線の長さ^2$$

が成り立っているはずです。 つまり、

$$16 + 4 = 底面の対角線の長さ^2$$

が成り立っていまず。この式の左辺を計算して見かけをマシにすると、

$$20 = 底面の対角線の長さ^2$$

となるわけです。ですから、「底面の対角線の長さ」を知りたい人は「2 乗すると 20 になる数」を探せばよいわけです。そうすると、$\sqrt{20}$ と $-\sqrt{20}$ が見つかりますが、長さがマイナスになることはないので、

$$底面の対角線の長さ = \sqrt{20}$$

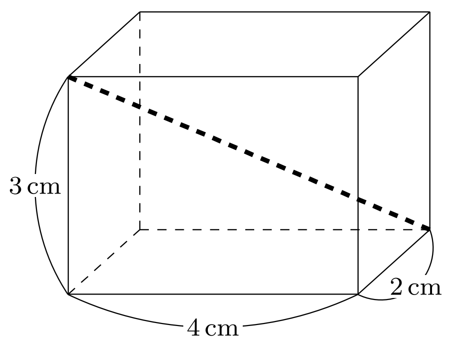
ということになります。ところで、$\sqrt{20}$ という数は見かけを $2\sqrt{5}$ に変えることが

できますよね。ですから、

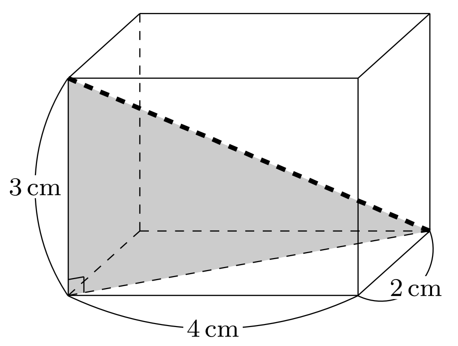
$$
底面の対角線の長さ = 2\sqrt{5}\,\mathrm{cm}
$$

ということになりますね。

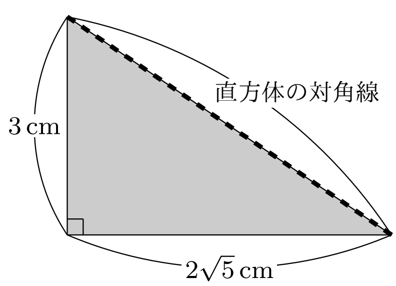
(3) 右の図を見てください。今度は「直方体の対角線」を太い点線で描いてみました。いま私たちは、(2) で求めた「底面の対角線の長さ」も利用して、この直方体の対角線の長さを求めようと思っているのでしたね。そして、そのためにに役に立ちそうな直角三角形を見つけたいのでしたね。



では右の図を見てください。きっと、この図で灰色になっている直角三角形が役に立つのではないでしょうか。この直角三角形には「直方体の対角線」と「(2) で考えた底面の対角線」が両方とも辺として含まれているからです。



(4) 右の図を見てください。役に立つと思った直角三角形を取り出して正面から見た図を描いてみました。この図を見ながら三平方の定理を使えば「直方体の対角線の長さ」をもとめることができますね。



三平方の定理より、

$$
(2\sqrt{5})^2 + 3^2 = (直方体の対角線の長さ)^2
$$

が成り立っているはずです。 つまり、

$$20 + 9 = (\text{直方体の対角線の長さ})^2$$

が成り立っていまず。この式の左辺を計算して見かけをマシにすると、

$$29 = (\text{直方体の対角線の長さ})^2$$

となるわけです。ですから、「直方体の対角線の長さ」を知りたい人は「2 乗すると 29 になる数」を探せばよいわけです。そうすると、$\sqrt{29}$ と $-\sqrt{29}$ が見つかりますが、長さがマイナスになることはないので、

$$\text{直方体の対角線の長さ} = \sqrt{29}$$

ということになります。ところで、$\sqrt{29}$ という数は見かけをさらにマシにはできません。ですから、「直方体の対角線の長さ」は $\sqrt{29}\,\mathrm{cm}$ ということになりますね。

問 17. 直方体があるとします。この直方体の幅は 5 cm、奥行きは 4 cm、高さは 3 cm です。この直方体の対角線の長さを求めようと思います。次の問に順番に答えてくことによってこの直方体の対角線の長さを求めなさい。

(1) まず、この直方体の見取り図を描き、わかっている辺の長さを記入しなさい。

(2) いきなりこの直方体の対角線の長さを求めるのは難しそうなので、とりあえずこの直方体の底面の対角線の長さを求めなさい。

(3) (2) で求めた「底面の対角線の長さ」も利用して、この直方体の対角線の長さを求めようと思います。そのときに役に立ちそうな直角三角形を見つけなさい。

(4) (3) で見つけた直角三角形を利用してこの直方体の対角線の長さを求めなさい。

答えを見る

問 18. 次の立体の対角線の長さを求めなさい。

(1) 縦の長さが 2 cm、横の長さが 3 cm、高さが 6 cm の直方体

(2) 1 辺の長さが 5 cm の立方体

答えを見る

問 19. 直方体があるとします。この直方体の幅は a cm、奥行きは b cm、高さは c cm です。この直方体の対角線の長さを求めようと思います。次の問に順番に答えてくことによってこの直方体の対角線の長さを求めなさい。

(1) まず、この直方体の見取り図を描き、わかっている辺の長さを記入しなさい。

(2) いきなりこの直方体の対角線の長さを求めるのは難しそうなので、とりあえずこの直方体の底面の対角線の長さを求めなさい。

(3) (2) で求めた「底面の対角線の長さ」も利用して、この直方体の対角線の長さを求めようと思います。そのときに役に立ちそうな直角三角形を見つけなさい。

(4) (3) で見つけた直角三角形を利用してこの直方体の対角線の長さを求めなさい。

答えを見る

例題 10　円すいがあるとします。この円すいの底面の半径は 5 cm で、母線の長さは 13 cm です。次の問に順に答えていくことにより、この円すいの体積を求めなさい。

(1) まず、この円すいの見取り図を描き、わかっている長さを記入しなさい。

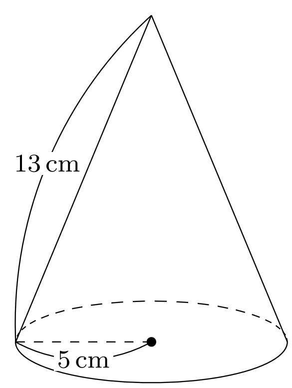
(2) この円すいの体積を求める前に、まずこの円すいの高さを求めようと思います。そのときに役に立ちそうな直角三角形を見つけなさい。

(3) (2) で見つけた直角三角形を利用してこの円すいの高さを求めなさい。

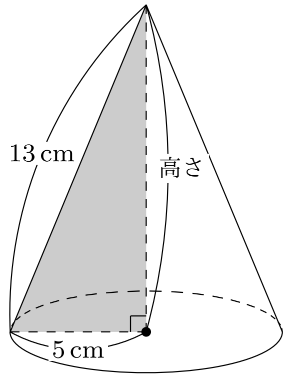
(4) この円すいの体積を求めなさい。

解答

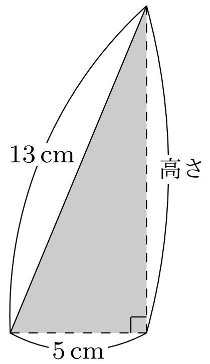
(1) 円すいの底面の半径は 5 cm で、母線の長さは 13 cm ですから、見取り図は右のようになりますね。(「母線」ってどこのことなのか知ってますよね。)



(2) この円すいの体積を求める前に、まず「円すいの高さ」を求めようと思います。そのときに役に立ちそうな直角三角形を見つけるのでしたね。右の図を見てください。灰色にしてある直角三角形が役に立ちそうですね。



(3) (2) で見つけた直角三角形を利用して「円すいの高さ」を求めるのでしたね。私たちが (2) で見つけた直角三角形の辺の長さは右の図のようになっているわけです。ですから三平方の定理を使えば、「円すいの高さ」は求められそうです。



三平方の定理より、

$$5^2 + \text{高さ}^2 = 13^2$$

が成り立っているはずですね。つまり、

$$25 + \text{高さ}^2 = 169$$

が成り立っているわけです。この式の両辺から 25 をひくと、

$$25 + \text{高さ}^2 - 25 = 169 - 25$$

となるわけですが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$\text{高さ}^2 = 144$$

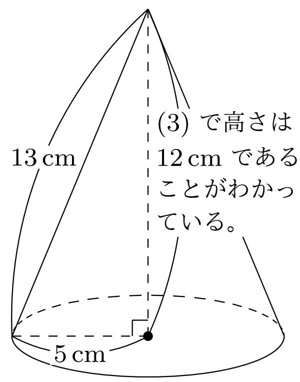
となりますね。この式は、「高さを 2 乗すると 144 になる」という意味の式ですから、高さを知りたい人は「2 乗すると 144 になる数」を見つければ良いわけです。

そうすると、12 と -12 が見つかりますが、「高さ」がマイナスになることはないので、

$$\text{高さ} = 12\,\text{cm}$$

ということになりますね。

(4) 以下の説明の空欄に正しい言葉や数を書いてください。



この円すいの体積を求めるのでしたね。ところで、あなたは「ナントカすい」の体積ってどうやって計算するのか覚えていますか？

$$\text{ナントカすい}の体積 = \boxed{\quad\quad\text{積}} \times \boxed{\quad\quad\quad} \times \frac{1}{3}$$

って計算するのでしたね。

では、いま思い出してもらった「ナントカすい」の体積の計算の仕方を使ってこの問題の円すいの体積を計算することにしましょう。

まだこの円すいの底面積を求めていませんね。ですから、まず円すいの底面積を求めることにします。底面は半径が 5 cm の円ですから、

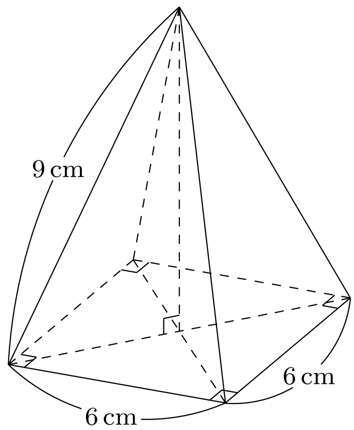
$$\text{底面積} = \boxed{\quad} \times \boxed{\quad} \times \text{円周率} = 25\pi\,\text{cm}^2$$

となりますよね。これで円すいの体積をを求める準備ができました。この円すい高さは (3) で 12 cm であることがわかったので、

$$\text{円すいの体積} = \boxed{\quad\quad\quad} \times \boxed{\quad\quad} \times \frac{1}{3} = 100\pi\,\text{cm}^3$$

となりますね。

問 20. 右の図の立体は、底面は 1 辺の長さが 6 cm の正方形で、他の辺の長さはすべて 9 cm となっています。次の問に順に答えていくことにより、この立体の体積を求めなさい。



(1) この立体の名前はなんですか。

(2) この円すいの体積を求める前に、三平方の定理を使って、まずこの立体の高さを求めようと思います。そのときに役に立ちそうな直角三角形を見つけなさい。

(3) (2) で見つけた直角三角形を利用しようと思っても、その直角三角形では長さのわかっていない辺が 2 つありますよね。ですからまだ三平方の定理を使う準備ができていないわけです。そこで (2) で見つけた直角三角形を使う前に、もうひとつ別の直角三角形を見つけて (2) で見つけた直角三角形の辺の長さを 1 つ求めなさい。

(4) (2) で見つけた直角三角形を利用しこの立体の高さを求めなさい。

(5) この立体の体積を求めなさい。

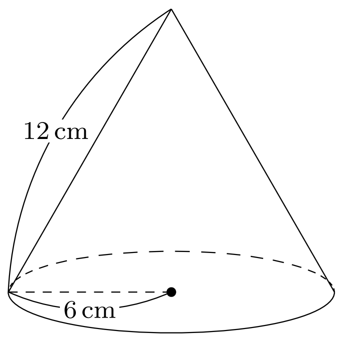
答えを見る

問 21. 右の図の立体について答えなさい。

(1) この立体の名前はなんですか。

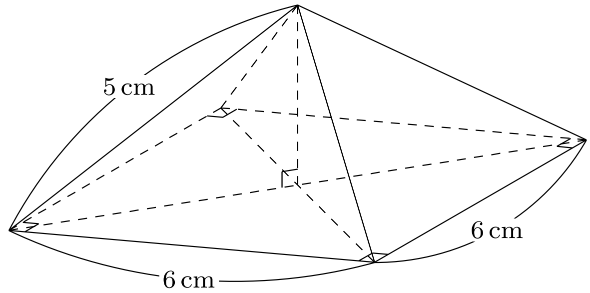
(2) この立体の体積を求めなさい。

(3) この立体の表面積を求めなさい。



答えを見る

問 22. 右の図の立体は、底面は 1 辺の長さが 6 cm の正方形で、他の辺の長さはすべて 5 cm となっています。以下の問に答えなさい。



(1) この立体の名前はなんですか。

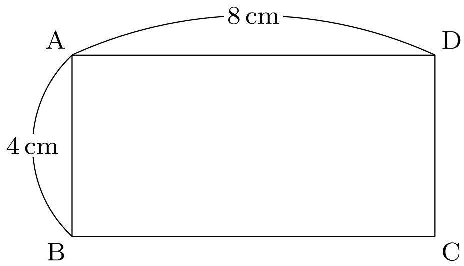
(2) この立体の体積を求めなさい。

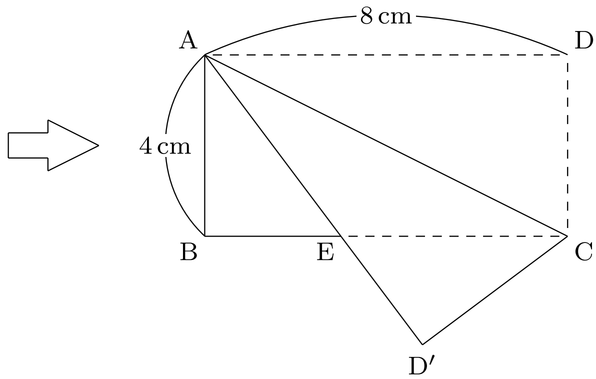
(3) この立体の表面積を求めなさい。

答えを見る

1.4　三平方の定理をさらにいろいろな問題へ利用してみよう

例題 11　AB = 4 cm、AD = 8 cm の長方形 ABCD があります。今この長方形を、対角線 AC を折り目にして折り曲げたところ、次の図のようになりました。





この図では D の移った点を D′ と呼ぶことにしました。そして AD′ と BC の交点を E としました。それでは BE の長さを求めてください。

解答

この問題は結構難しいかもしれません。でも、この解答を丁寧に読んで正しく理解ができた人は「そんなに難しくないじゃん。」という感想を持つかもしれません。ただ、「どうしてそんなこと思いついたの？解き方はよくわかったけど、私にはそんなこと思いつくの

は無理。」と思うかもしれません。もし、あなたがこの先もう全く数学を学ばないのだったら、解き方だけを覚えてその場しのぎをしても良いのですが、まだまだこの先も数学を学ぶのだったら、ぜひここで、「自分の頭で考える」ということを大切にしてほしいと思います。数学には数えればキリがないほどの種類の問題があります。ですから、無限と言っても良いほどの種類の解き方があるわけです。しかし無限と言ってもよいほどの解き方を覚えるなんて、人間には無理です。（コンピュータはそういうの得意なんですよね。あなたがコンピュータだったら、いくらでも解き方を覚えることができます。）ですから（コンピュータとは違い）人間は自分の頭で「あーでもない、こーでもない」って考えるわけです。そういうことを繰り返していくうちに「あれっ、これってよく考えたら前に学んだあの話とおなじだなぁ。」と思えるようになっていきます。どんな数学の中にもある「何か共通したもの」がわかってくるようになるのです。ですがそうは言っても、そんなに簡単に「悟りの境地」にはなれないですよね。そこでこの問題では、あなたに次の 2 つのことを大切にしてもらうことにしましょう。それは、

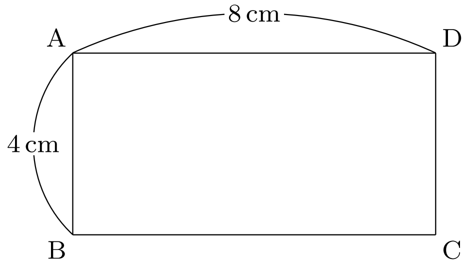
問題の状況を徹底的によく観察すること

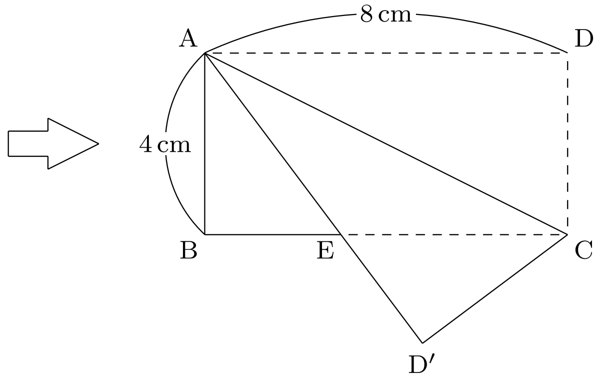
と、

わからない謎の量を x とおいて考える

ということです。この 2 つのことは、どんな数学の問題を解くときにもとても大切なことです。

　ではまず、この問題の状況を徹底的によく観察してみましょう。本当なら、あなたに紙と定規とはさみを用意してもらって、本当に紙を切ってこの問題と同じ長方形を作ってもらいたいぐらいです。では次の図を見てください。あなたのために、この問題の図をもう一度描いておきました。





図をよく見てくださいね。紙を切り取って本当に長方形を作った人はその長方形を折ってよく観察してください。では 10 分待ちます。どんなことでも良いから、できるだけたくさん気づくことを探してください。（いいですか、いま長方形を対角線で折ってみたんですよ。だから、もともと長方形の右上の方にあった部分は,、長さも形もそのままで別の場所へ移されているのですよ。このことによく注意してくださいね。）

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

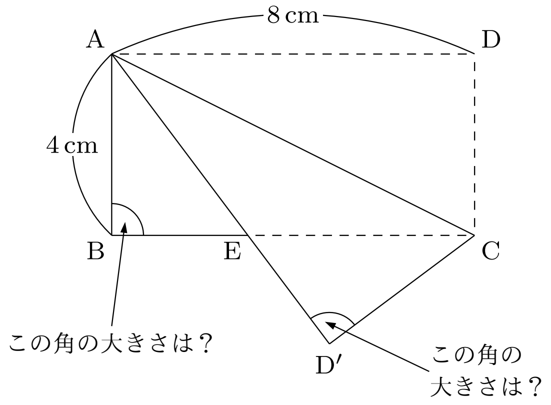
. . . .

. . . .

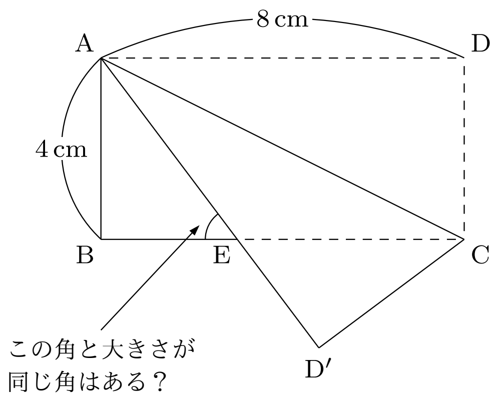
はい、10 分たちました。なにか気づいたことはありましたか？ではこれから、あなたが重

要なことに気づいているかどうか質問をして試すことにしましょう。

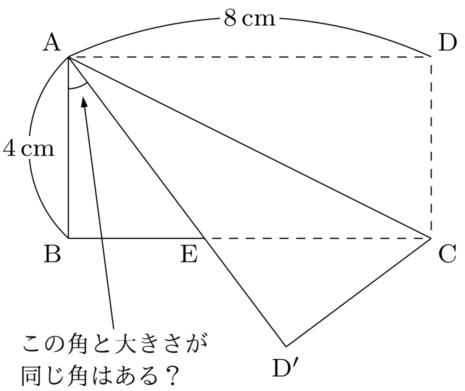
質問 1　長方形の 4 隅の角の大きさは何度ですか。特に、∠ABE と ∠CD′E の大きさは何度ですか。



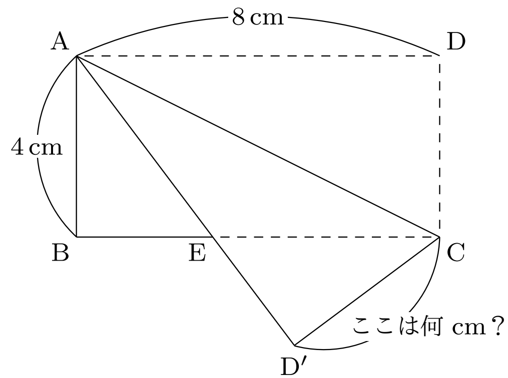
質問 2　折ったあとの図を見てください。∠AEB と大きさが同じ角はありますか。



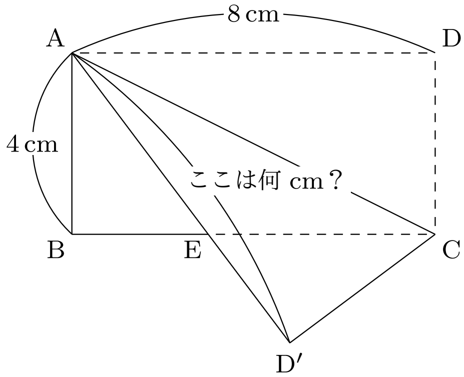
質問 3　折ったあとの図を見てください。∠EAB と大きさが同じ角はありますか。



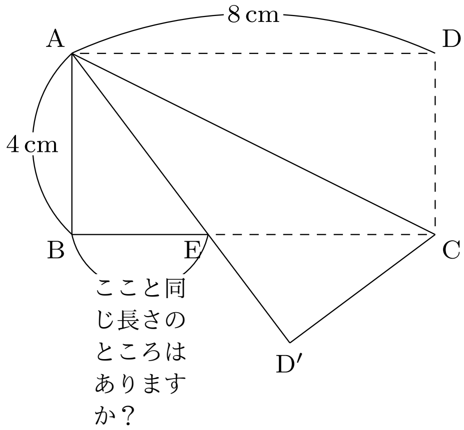
質問 4　折ったあとの図を見てください。CD′ の長さは何 cm ですか。



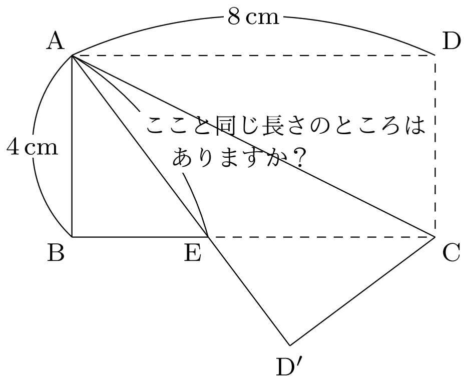
質問 5　折ったあとの図を見てください。AD′ の長さは何 cm ですか。



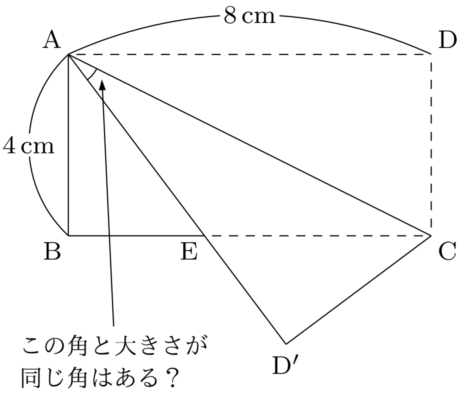
質問 6　折ったあとの図を見てください。BE と同じ長さのところはありますか。



質問 7　折ったあとの図を見てください。AE と同じ長さのところはありますか。

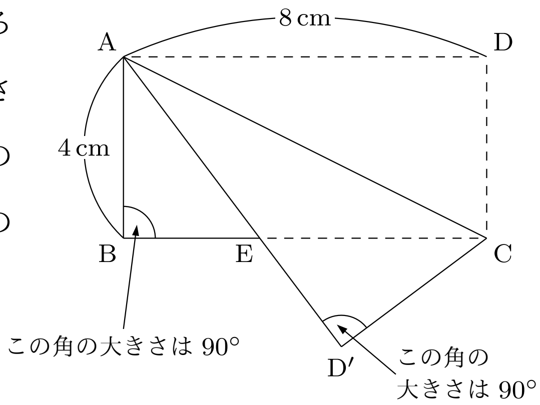


質問 8　折ったあとの図を見てください。∠EAC と大きさが同じ角はありますか。

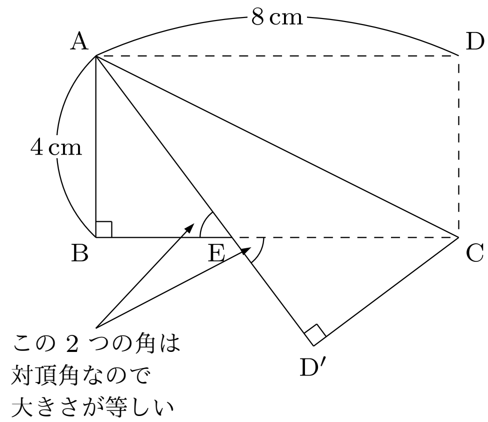


質問はこれくらいにしておきましょう。それでは念のため、これらの質問の答えをあなたに教えましょう。

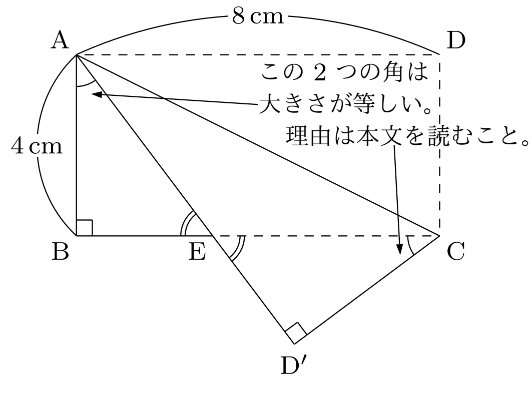
質問 1 の答え　長方形の 4 隅の角の大きさはもちろん 90° ですね。（そもそも、4 隅の角の大きさがすべて 90° の四角形を「長方形」と呼ぶのですよね。）ですから、もちろんこの問題の ∠ABE や ∠CD′E の大きさは 90° ですね。



質問 2 の答え　∠AEB と大きさが同じなのは ∠ECD′ です。なぜなら、対頂角の大きさは等しいからです。。



質問 3 の答え　∠EAB と大きさが同じなのは ∠ECD′ です。理由をきちんと説明することにします。



△ABE と △CD′E に注目してください。

質問 1 で ∠ABE と ∠CD′E はどちらも 90° であるとわかったので、当然、大きさは等しいわけです。

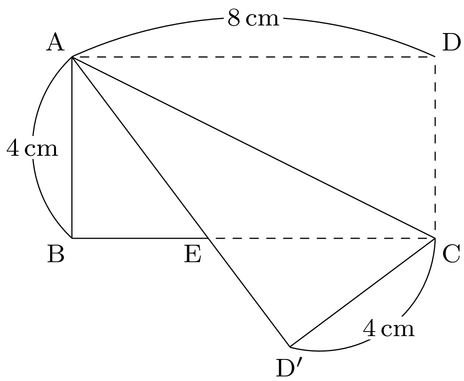
また、質問 2 では、∠AEB と ∠CED′ は大きさが等しいことがわかりました。

ですから、今のところ、△ABE と △CD′E では 2 組の角の大きさが等しいという

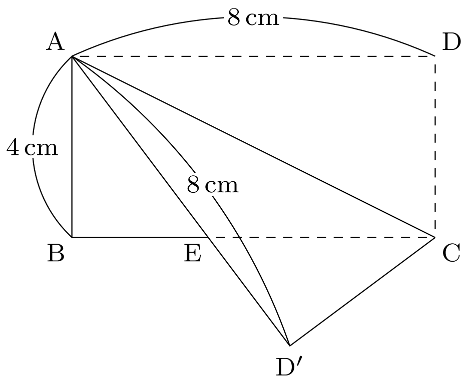
ことがわかっているのです。

ところで、どんな三角形でも内角の和は 180° になるのですから、2 つの三角形で 2 組の角の大きさが等しくなっていたら、残りの 1 組の角の大きさも等しいはずですね。ですから、∠EAB と ∠ECD′ の大きさは等しいのです。

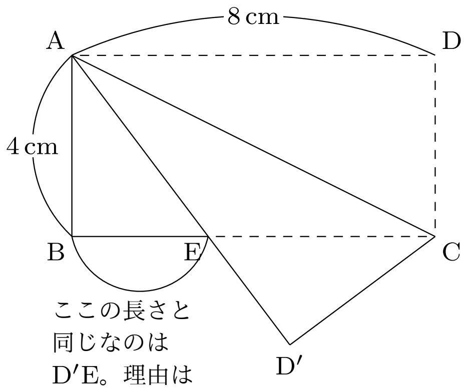
質問 4 の答え　CD′ の長さは 4 cm です。なぜなら、折る前に、CD′ は CD のところにあったのですから。



質問 5 の答え　CD′ の長さは 8 cm です。なぜなら、折る前に、AD′ は AD のところにあったのですから。

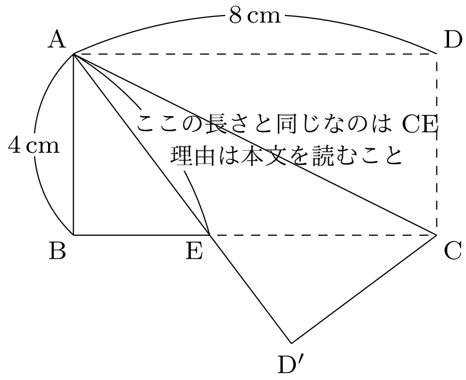


質問 6 の答え　実は、BE と同じ長さなのは D′E です。でも、折る前に、D′E は BE のところにあったわけではありませんね。ではどうして同じ長さだと断言できるのでしょうか。わけを真面目に考えてみてください。ヒントをいうと、実は △ABE と △AD′E は合同なのです。どうして合同になるのか、あなたがきち



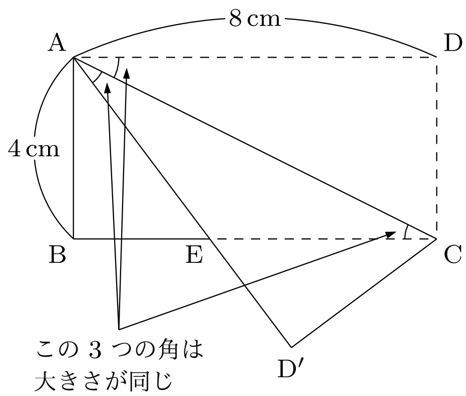
んと証明することができれば、BE と D′E の長さは等しいと断言できるわけですね。

質問 7　実は、AE と同じ長さなのは CE です。でも、折る前に、CE は AE のところにあったわけではありませんね。ではどうして同じ長さだと断言できるのでしょうか。わけを真面目に考えてみてください。ヒントをいうと、実は △ABE と △AD′E は合同なのです。どうして合同になるのか、あなたがきちんと証明することができれば、AE と CE の長さは等しいと断言できるわけですね。



質問 8 の答え　∠EAC と大きさが同じなのは ∠DAC と ∠ACE です。どうして大きさが同じなのかきちんと説明することにします。

まず、折る前に、∠EAC は ∠DAC のところにあったわけです。ですからこの 2 つの角は当然大きさは同じです。

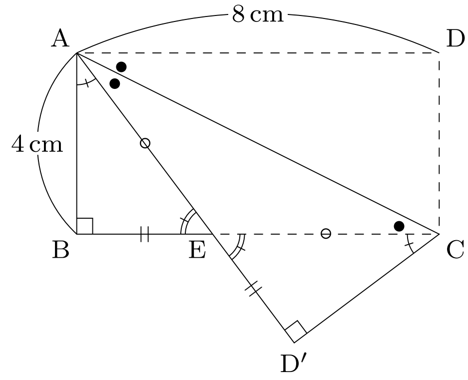


次は 2 直線 AD、BC に直線 AC が交わっているというところに注目してみましょう。すると、∠DAC と ∠ACE は錯角の関係にありますよね。ところで四角形 ABCD は長方形なのですから、AD と BC は平行です。平行線では必ず錯角は大きさは等しいのでしたね。ですから、∠DAC と ∠ACE の大きさは等しいのです。

これで ∠EAC、∠DAC、∠ACE はすべて大きさが等しいということがわかりましたね。

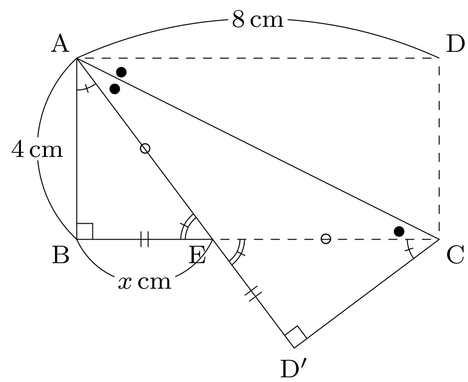
この問題の状況をよく観察して、以上の質問で気づいたようなことをしっかり頭に入れておけば、きっとこの問題は解決することができるでしょう。

では右の図を見てください。これまで観察してわかったことを記入しておきました。この図で同じマークの付いている角は大きさが同じで、同じマークの付いている辺は長さが同じなわけです。



では次のステップへ進むことにしましょう。いよいよなんとかして BE の長さを求めようと思います。

数学ではよく、「わからない量を x とおいてみる」ということをします。そしてさらに、「手がかりをもとにして、方程式を作る」わけです。この問題では BE の長さを求めたいのですから、素直に BD の長さを x cm とおいてみることにしましょう。そして、しっかり観察してわかった手がかりをうまく活用して方程式を作るのです。それでは、右の図を見ながら、以下の文に正しい数や文字を記入してみてください。



四角形 ABCD は長方形ですから（平行四辺形の仲間なので）、向かい合っている辺の長さは等しいわけです。そうすると、AD の長さと BC の長さは等しいので、BC の長さは 8 cm ということになります。ですから、BE=x (cm) とおくと、

$$\mathrm{CE} = \boxed{} - \boxed{}\,(\mathrm{cm}) \cdots ①$$

と表されます。

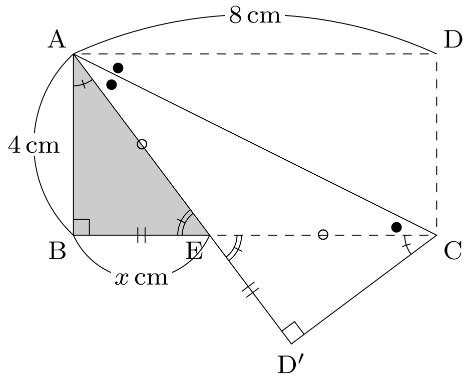
AE と CE の長さは等しいということがすでにわかっているので、CE が①のように表

されるのなら、

$$\mathrm{AE} = \boxed{} - \boxed{}\,(\mathrm{cm}) \cdots ②$$

と表されます。

　ではここで △ABE に注目してみましょう。右の図を見てください。わかりやすくするために、△ABE を灰色にしておきました。



　これは直角三角形ですから、三平方の定理を使うことができますよね。そうすると、

$$\boxed{}^2 + 4^2 = \boxed{}^2$$

が成り立つということになります。これが謎の長さ x を求めるための方程式ですね。では x の値を求めてみることにしましょう。

　まず、この方程式、つまり、

$$x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$$

という式の右辺を展開すると、

$$x^2 + 4^2 = 64 - 16x + x^2$$

となりますね。さらに左辺の 4^2 を計算しておくと、

$$x^2 + 16 = 64 - 16x + x^2$$

となります。次はこの式の両辺から x^2 を引くと、

$$x^2 + 16 - \mathrm{x}^2 = 64 - 16x + x^2 - x^2$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$16 = 64 - 16x$$

となります。次はこの式の両辺から 64 を引くと、

$$16 - 64 = 64 - 16x - 64$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをましにすると、

$$-48 = -16x$$

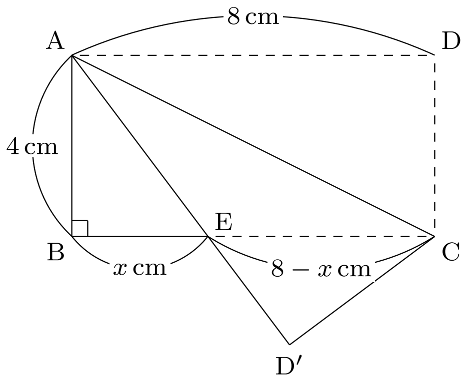
となります。最後にこの式の両辺を -16 で割れば、

$$3 = x$$

となりますね。これでこの問題は解決です。BE の長さは 3 cm だったのです。

（補足）

右の図を見て以下の文の空欄に正しい言葉や記号を書いてください。



さっき解答の中で、私たちは、$\triangle$ABE と $\triangle$CD′E が合同であるという証拠を見つけて AE と CE の長さが実は同じになっているということを発見しました。ですが、$\triangle$ABE と $\triangle$CD′E が合同であるという証拠を見つけなくても AE と CE の長さは同じになっているということを発見することができます。どういうことなのか説明しましょう。

$\angle$EAC は長方形を対角線 AC で折る前には $\angle$CAD のところにあったのですから、

$$\angle\mathrm{EAC} = \angle\mathrm{CAD} \cdots ①$$

であると断言できます。

長方形は平行四辺形の仲間なので向かい合っている辺は平行なはずです。ですからこの長方形では AD//BC が成り立っています。それでは平行になっている AD と BC に、別のまっすぐな線 AC が交わっているということに注目してください。平行線では必ず錯角

の大きさは等しいのですから、

$$\angle\mathrm{CAD} = \angle\boxed{} \cdots ②$$

であると断言できます。そうすると、①、②より、

$$\angle\mathrm{EAC} = \angle\boxed{} \cdots ③$$

が成り立っているということになります。ではここで △EAC に注目してください。③によると、この三角形では 2 つの角の大きさが等しくなっているのですよね。2 つの角の大きかが等しくなっていたらその三角形は $\boxed{\text{三角形}}$ であると断言して良いということを昔学びましたね。ですから △EAC では、

$$\mathrm{AE} = \boxed{}$$

であると断言できます。

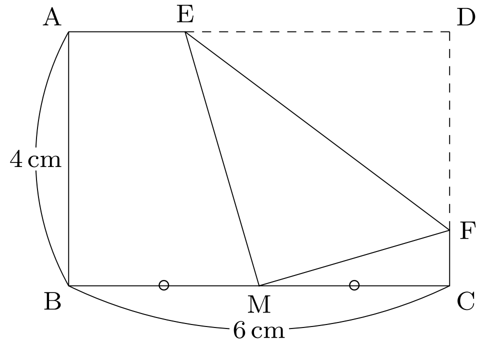
このようにして、AE の長さも $8 - x$ とあらわすことができるということがわかると、あとは直角三角形である △ABE で三平方の定理を使えば、

$$x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$$

という方程式を作ることができますね。この方程式を解けば謎の数 x を求めることができ、この問題は解決するわけです。

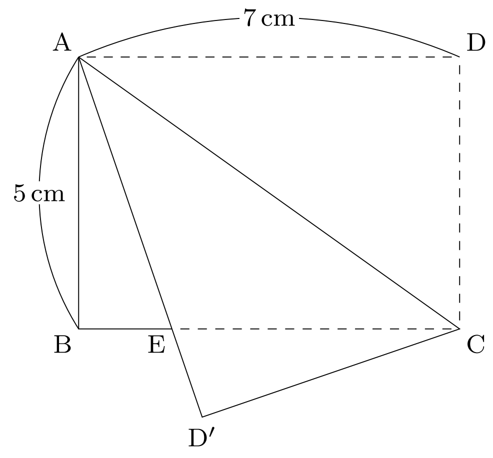
（補足終わり）

問 23.　右の図を見てください。この図は。AB = 4 cm、BC = 6 cm の長方形 ABCD を、この長方形の頂点 D が辺 BC の中点 M と重なるように折ったものを表しています。CF の長さを求めなさい。



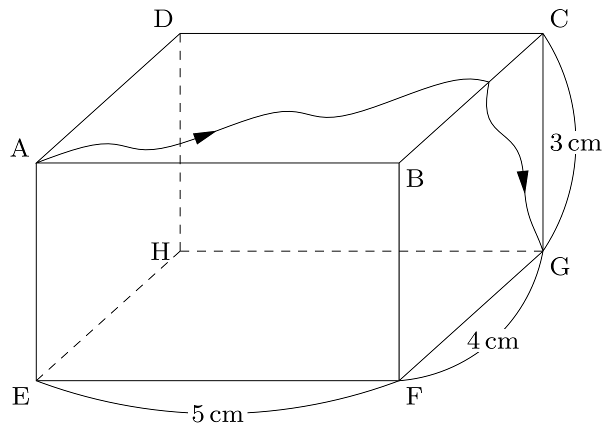
答えを見る

問 24.　右の図を見てください。この図は。AB = 5 cm、AD = 7 cm の長方形 ABCD を、この長方形の対角線 AC で折ったものを表しています。BE の長さを求めなさい。



答えを見る

例題 12　右の図は、縦 4 cm、横 5 cm、高さ 3 cm の直方体です。この直方体の「表面」に、ものすごく小さく、高い知能を持った生物が住んでいるとします。この生物はこの直方体の表面から飛び出ることはできません。しかし、直方体の表面ならば、自由にどこにでも移動することができます。これからこの生物は点 A を出発して点 G まで行こうと考えています。遠回りはしたくないので、最も短いルートを探そうとしています。ただし、辺 BC の上のどこかで一度休憩をすることにします。では、一体どんなルートで行けば、最短距離で行くことができるのでしょうか。そしてその時の距離はどれだけになるのでしょうか。また、辺 BC 上のどこで休むことになるのでしょうか。

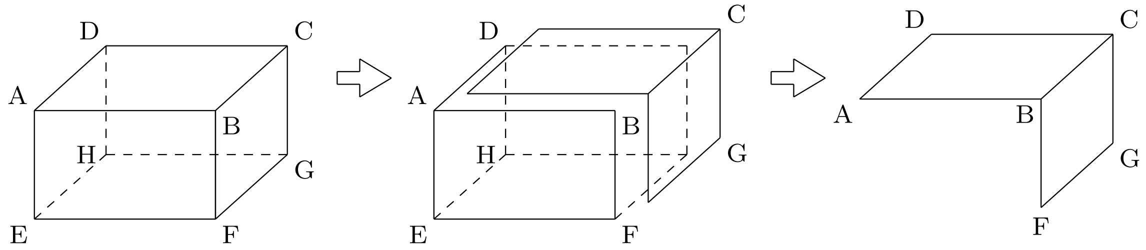


解答

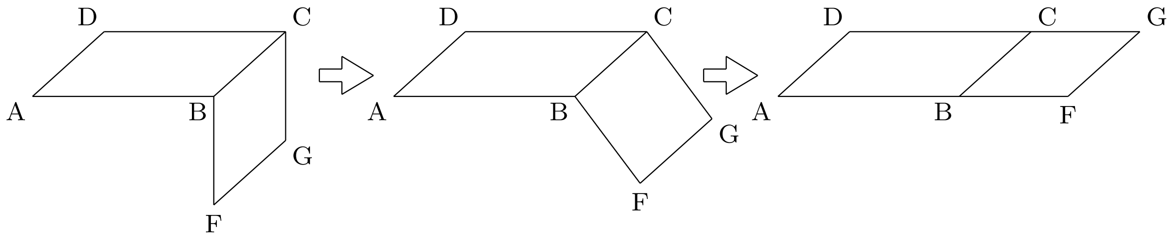
この問題は「立体図形の表面」を移動する話ですが、「平らな面の上」を移動する話だったら出発点からゴールまで「まっすぐ進む」と一番の近道になりますよね。この立体図形は立体とは言っても、その表面はいくつかの平らな面でできているわけです。ですから、問題の図に書いてあったようにうねうねと曲がりながら進んだら最短距離にはならないで

すね。つまり、最短距離で行こうと思ったら、直方体のそれぞれの面の上ではまっすぐ進まないといけないわけです。（念のため注意しておきますが、この生物はこの直方体の表面からは出られません。ですから「まっすぐ進む」と言っても、直方体の内部を通ることはできません。）

というわけで、この生物はまず、点 A から辺 BC 上の「ある場所」を目指してまっすぐ進み、そこで一度休憩を取り、さらにそこから点 G を目指してまっすぐ進むことになりますね。問題は「ある場所」をどこにすればよいのかということです。このことを調べるために、次の図を見てください。この図はこの問題の直方体をはさみで切って、必要なところだけを残しているところを表しています。

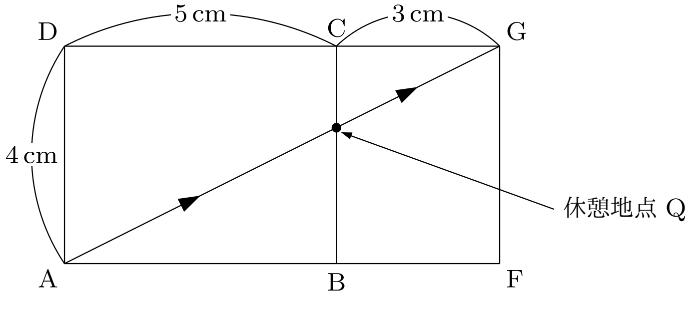


ではさらに、切り取って残した部分を次の図のようにして「平ら」にしてしまいましょう。

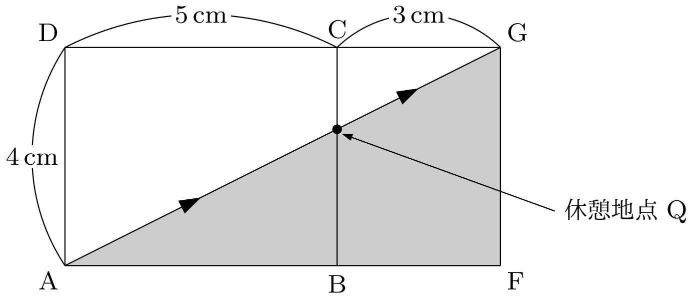


こうしてしまえば、A から G へ向かうとき、どのように進めば最短距離となるのかわかりますよね。そうです、「平らな面の上を移動するときは、出発点からゴールへ向かってまっすぐ進めば一番近道になる」のですよね。

では右の図を見てください。この図はさっき「平ら」にした部品を上から見たものです。この図に矢印で描かれているように、A から G へまっすぐ進めば最短距離でいくことができますね。この図では休憩地点の名前を Q にしておきました。



これでどのように進めば最短距離になるのかわかりました。では次にこの「最短距離」がどれだけの長さになるのか求めることにしましょう。



では右の図を見てください。A から G へ行くときの最短距離はこの図の矢印で描かれている行き方ですから、灰色にしてある直角三角形を利用して三平方の定理を頼ればよいですよね。計算はあなたに任せることにします。次の計算の空欄に正しい数を記入してください。

三平方の定理より、

$$(\text{A から G へ行くときの最短距離})^2 = \boxed{}^2 + \boxed{}^2$$

が成り立っています。この式の右辺を計算して見かけをマシにしていくと、

$$(\text{A から G へ行くときの最短距離})^2 = 80$$

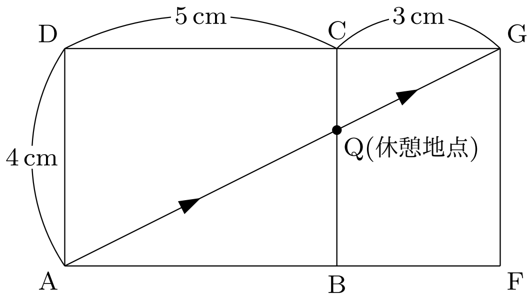
となります。この式は「A から G へ行くときの最短距離」を 2 乗すると 80 になるという意味ですから「A から G へ行くときの最短距離」を知りたい人は「2 乗すると 80 になる数」を探せば良いわけです。そうすると、とりあえず $\boxed{}$ と $\boxed{}$ が見つかりますね。ただし、「長さ」は普通マイナスにはなりませんから、

$$\text{A から G へ行くときの最短距離} = \sqrt{80}\,\text{cm}$$

ということになります。ところで $\sqrt{80}$ という数は見かけを $\boxed{}$ に変えることができます。ですから、

$$\text{A から G へ行くときの最短距離} = 4\sqrt{5}\,\text{cm}$$

ということになりますね。



では右の図を見てください。最後に休憩地点 Q の場所を正確に答えることにしましょう。そのためには、例えば、「Q が B から何 cm 離れたところにあるのか」ということを答えれば良いですね。というわけで BQ の長さを求めることにします。

この図をじっくり見て考えてください。どんなことに気づけば、BQ の長さを求めることができるでしょうか。では 10 分待ちます。

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

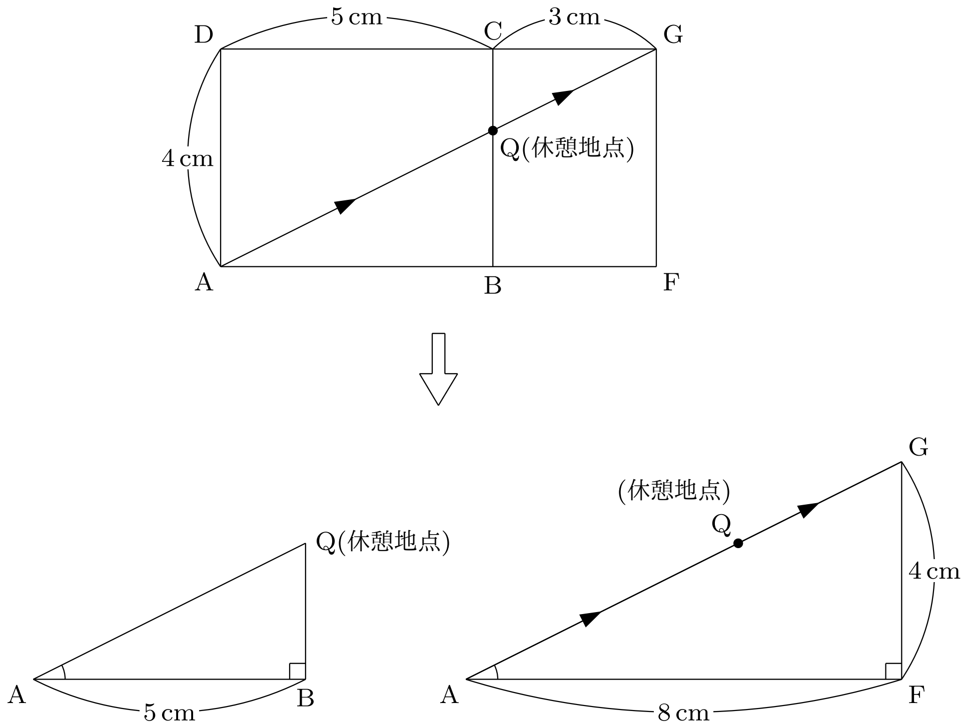
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

はい、10 分たちました。なにか気づいたことはありましたか。ではここで、あなたに気づいて欲しかったことを教えることにしましょう。実はこの図の中には「相似な三角形」が隠れているのです。そのことに気づくと、BQ の長さを求めることができるのです。次の図を見てください。

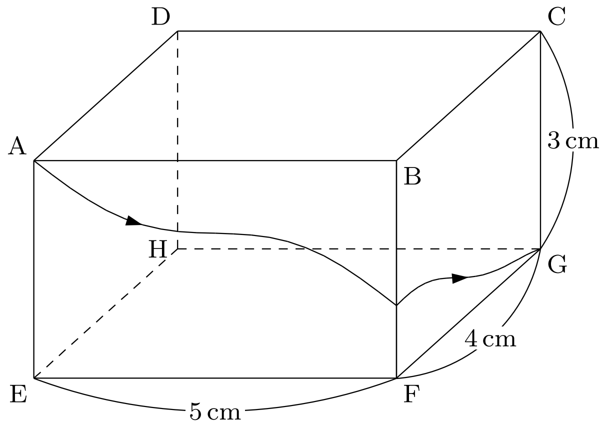


この図はもとの図から、あなたに注目してほしい「相似な三角形」を 2 つ取り出してわかりやすくしているところを表しています。ところでこの 2 つの三角形がどうして相似なのか、理由をきちんと言うことはできますか？大丈夫ですよね。図にも印をつけておいたのですが、「2 組の角の大きさが等しい」からですよね。この 2 つの三角形が相似であることがわかれば BQ の長さは簡単に求めることができます。AB の長さと AF の長さを見ればすぐに分かることですが、左の三角形は右の三角形の $\dfrac{5}{8}$ ですよね。ですから、BQ の長さは FG の長さの $\dfrac{5}{8}$ ですよね。というわけで、

$$\mathrm{BQ} = \mathrm{FG} \times \frac{5}{8} = 4 \times \frac{5}{8} = \frac{5}{2}\,\mathrm{cm}$$

となりますね。つまり、休憩地点 Q は B から $\dfrac{5}{2}$ cm 離れたところなのです。

問 25. 右の図は、縦 4 cm、横 5 cm、高さ 3 cm の直方体です。この直方体の「表面」に、ものすごく小さく、高い知能を持った生物が住んでいるとします。この生物はこの直方体の表面から飛び出ることはできません。しかし、直方体の表面ならば、自由にどこにでも移動することができます。これからこの生物は点 A を出発して点 G まで行こうと考えています。遠回りはしたくないので、最も短いルートを探そうとしています。ただし、辺 BF の上のどこかで一度休憩をすることにします。では、一体どんなルートで行けば、最短距離で行くことができるのでしょうか。そしてその時の距離はどれだけになるのでしょうか。また、辺 BF 上のどこで休むことになるのでしょうか。

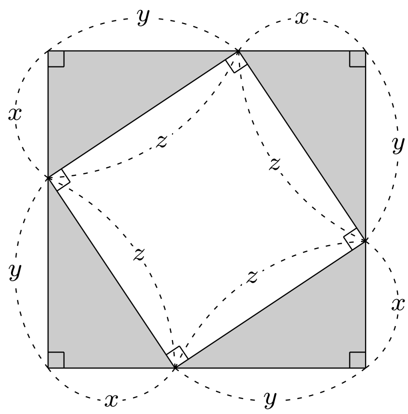


答えを見る

問の解答

問 1. この問の前で詳しく説明した三平方の定理の証明が理解できたかどうか確認する問題でした。

『右の図は、1 つの辺の長さが z である正方形（図の白い正方形）のまわりに、直角をはさむ 2 辺の長さがそれぞれ x、y である直角三角形（図の灰色の直角三角形）を 4 枚ピッタリとくっつけて並べたものです。この図を見ながら、三平方の定理を証明することにします。次の文の空欄に正しい記号、言葉を記入しなさい。』ということでしたね。



（証明）

外側にできている正方形の 1 辺の長さは $\boxed{x+y}$ ですから、

$$\text{外側にできている正方形の面積} = \boxed{(x+y)^2}$$

となります。

内側にある正方形の 1 辺の長さは $\boxed{z}$ ですから、

$$\text{内側にできている正方形の面積} = \boxed{z^2}$$

となります。

直角三角形の直角をはさむ 2 辺の長さはそれぞれ $\boxed{x}$ 、 $\boxed{y}$ ですから、

$$\text{直角三角形 1 つの面積} = \boxed{\frac{1}{2}xy}$$

となります。

これらの面積の間には、

$$\begin{aligned}&\text{内側にできている正方形の面積}\\&\quad= \boxed{\text{外側にできている正方形の面積}} - \boxed{\text{直角三角形 1 つの面積}} \times 4\end{aligned}$$

という関係があります。ですから、

$$\begin{aligned}z^2 &= \boxed{(x+y)^2} - \boxed{\frac{1}{2}xy} \times 4\\&= \boxed{x}^2 + 2\boxed{xy} + \boxed{y}^2 - \boxed{2xy}\\&= \boxed{x}^2 + \boxed{y}^2\end{aligned}$$

となることがわかります。つまり、灰色の直角三角形では、

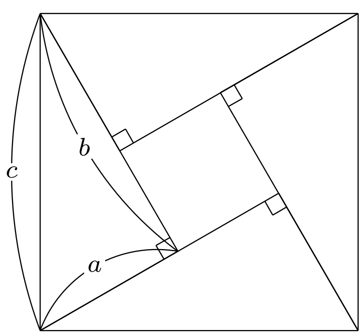
$$x^2 + y^2 = z^2$$

が成り立っていることが判明したのです。

（証明終わり）

本文へ戻る

問 2. 『右の図は、直角をはさむ 2 辺の長さがそれぞれ a、b で斜辺の長さが c である直角三角形を 4 つ並べたものである。この図をつかって、三平方の定理を証明しなさい。』ということでしたね。ですから、この図の直角三角形で、



$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立っているということを証明すればよいわけです。

（証明）

外側にできている正方形の 1 辺の長さは c ですから

$$\text{外側にできている正方形の面積} = c^2$$

となりますね。

内側にある正方形の 1 辺の長さは $b-a$ ですから、

$$\text{内側にできている正方形の面積} = (b-a)^2$$

となりますね。

直角三角形のよこの長さは a で 1 たての長さは b ですから、

$$\text{直角三角形 1 つの面積} = \frac{1}{2}ab$$

ですね。

ところで、当然、「内側にできている正方形の面積」と「直角三角形 4 つ分の面積」を合わせると「外側にできている正方形の面積」と等しくなるはずですね。つまり、

$$(a-b)^2 + 4 \times \frac{1}{2}ab = c^2$$

が成り立っているはずですね。

それではこの式を変形して見かけをマシにしてみることにしましょう。まず、

$$(a-b)^2 + \underline{4 \times \frac{1}{2}}ab = c^2$$

という式ののかけ算をすると、

$$(a-b)^2 + 2ab = c^2$$

となります。次は左辺の $(a-b)^2$ のところを展開してみかけを変えます。すると、

$$a^2+2ab+b^2-2ab=c^2$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$a^2+b^2=c^2$$

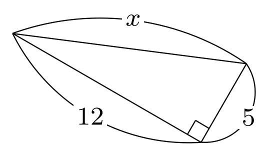
となりますね。これでめでたく、$a^2+b^2=c^2$ が成り立っているということが証明できてしまいました。

（証明終わり）

本文へ戻る

問 3. 『次の図の直角三角形で、x の値を求めなさい。』という問題でした。例題 1 の解答がきちんと理解できた人はくどい説明は必要ないですね。

(1) 三平方の定理より



$$x^2=12^2+5^2$$

が成り立っています。この式は

$$x^2=144+25$$

さらに

$$x^2=169$$

と見かけを変えることができます。

2 乗すると 169 になる数は 13 と -13 ですから、

$$x=13 \quad \text{または} \quad x=-13$$

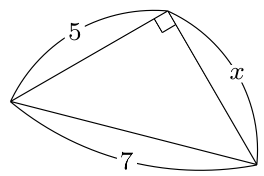
ということになります。しかし、この問題では x は辺の長さですからマイナスにな

ることはありません。ですから

$$x = 13$$

ということになります。

(2) 三平方の定理より



$$x^2 + 5^2 = 7^2$$

が成り立っています。この式は

$$x^2 + 25 = 49$$

さらに

$$x^2 = 24$$

と見かけを変えることができます。

2 乗すると 24 になる数は $2\sqrt{6}$ と $-2\sqrt{6}$ ですから、

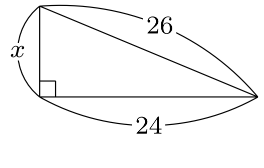
$$x = 2\sqrt{6} \quad \text{または} \quad x = -2\sqrt{6}$$

ということになります。しかし、この問題では x は辺の長さですからマイナスになることはありません。ですから

$$x = 2\sqrt{6}$$

ということになります。

(3) 三平方の定理より



$$x^2 + 24^2 = 26^2$$

が成り立っています。この式は

$$x^2 + 576 = 676$$

さらに

$$x^2 = 100$$

と見かけを変えることができます。

2 乗すると 100 になる数は 10 と -10 ですから、

$$x = 10 \qquad \text{または} \qquad x = -10$$

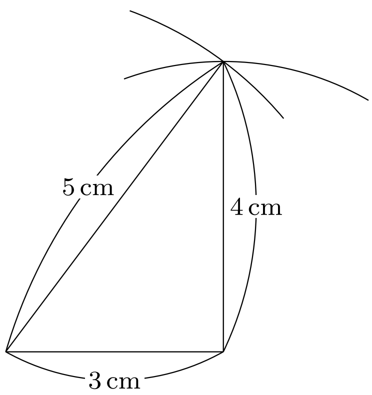
ということになります。しかし、この問題では x は辺の長さですからマイナスになることはありません。ですから

$$x = 10$$

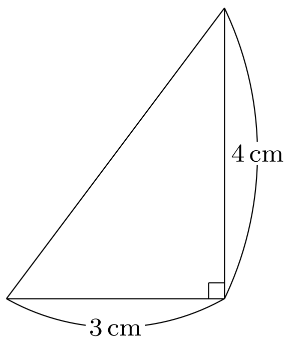
ということになります。

本文へ戻る

問 4.



辺の長さが 3 cm、4 cm、5 cm である（直角三角形だかどうか分からない）三角形



2 つの辺の長さが 3 cm と 4 cm でその間の角の大きさが 90° である直角三角形

上の図の 2 つの三角形が合同であるかどうか、A さんの代わりにあなたが証拠を探す問題でしたね。

(1) 『「2 つの辺の長さが 3 cm と 4 cm でその間の角の大きさが 90° である直角三角形」の斜めの辺の長さを求めなさい。』ということでした。

この三角形は直角三角形ですから、三平方の定理が成り立っています。ですから、

$$\begin{aligned}(\text{斜めの辺の長さ})^2 &= 3^2 + 4^2 \\ &= 9 + 16 \\ &= 25\end{aligned}$$

となります。2 乗すると 25 になる数は 5 と -5 ですが、辺の長さがマイナスということはありませんから

$$\text{斜めの辺の長さ} = 5\,\text{cm}$$

ということがわかります。

(2) 『上の話に出てきた 2 つの三角形は、実は合同であることを証明しなさい。』ということでした。

図の左側の三角形の辺の長さは 3 cm、4 cm、5 cm です。

また、(1) で、図の右側の三角形の斜めの長さは 5 cm であることがわかりました。ですから右側の三角形の辺の長さもは 3 cm、4 cm、5 cm です。

ということは、この図の 2 つの三角形では「3 組の辺の長さが等しい」ということになるので、2 つの三角形は合同であると断言できます。

本文へ戻る

問 5. 『三角形の 3 つの辺の長さが次のようになっているとき、その三角形が直角三角形なのかどうか判定しなさい。』ということでした。

(1) 4 cm、5 cm、6 cm　　(2) 17 cm、15 cm、9 cm

(3) $3\sqrt{2}$ cm、$\sqrt{7}$ cm、$\sqrt{11}$ cm　　(4) 24 cm、25 cm、7 cm

例題 2 の解答がきちんと理解できた人はくどい説明は必要ないですね。一番長い辺が何 cm なのかということに気をつけて、三平方の定理の式の通りになるのかどうか調べれば良いですよね。

(1) 4 cm、5 cm、6 cm

$$4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$$

$$6^2 = 36$$

となるので直角三角形ではありません。

(2) 17 cm、15 cm、9 cm

$$15^2 + 9^2 = 225 + 81 = 306$$

$$17^2 = 289$$

となるので直角三角形ではありません。

(3) $3\sqrt{2}$ cm、$\sqrt{7}$ cm、$\sqrt{11}$ cm

$$\sqrt{7}^2 + \sqrt{11}^2 = 7 + 11 = 18$$

$$3\sqrt{2}^2 = 9 \times 2 = 18$$

となるので直角三角形です。

(4) 24 cm、25 cm、7 cm

$$24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625$$

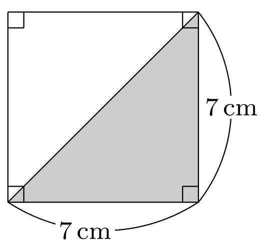
$$25^2 = 625$$

となるので直角三角形です。

本文へ戻る

問 6. 四角形の対角線の長さを求める問題でしたね。

(1) 1 辺の長さが 7 cm である正方形



対角線をひくと正方形の中に直角三角形が現れます。この直角三角形に三平方の定理を使うと、

$$\begin{aligned}(\text{対角線の長さ})^2 &= 7^2 + 7^2 \\ &= 49 + 49 \\ &= 98\end{aligned}$$

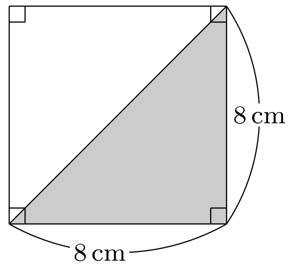
となります。2 乗すると 98 になる数は $7\sqrt{2}$ と $-7\sqrt{2}$ ですが、対角線の長さはマ

イナスにはならないので

$$\text{対角線の長さ} = 7\sqrt{2}\,\text{cm}$$

ということがわかります。

(2) 1 辺の長さが 8 cm である正方形



対角線をひくと正方形の中に直角三角形が現れます。この直角三角形に三平方の定理を使うと、

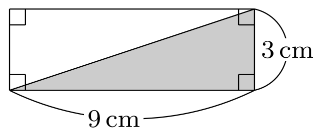
$$\begin{aligned}(\text{対角線の長さ})^2 &= 8^2 + 8^2 \\ &= 64 + 64 \\ &= 128\end{aligned}$$

となります。2 乗すると 128 になる数は $8\sqrt{2}$ と $-8\sqrt{2}$ ですが、対角線の長さはマイナスにはならないので

$$\text{対角線の長さ} = 8\sqrt{2}\,\text{cm}$$

ということがわかります。

(3) よこの長さが 9 cm、たての長さが 3 cm である長方形



対角線をひくと長方形の中に直角三角形が現れます。この直角三角形に三平方の定理を使うと、

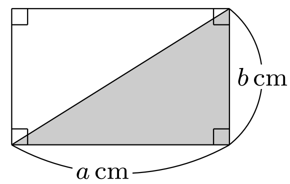
$$\begin{aligned}(\text{対角線の長さ})^2 &= 9^2 + 3^2 \\ &= 81 + 9 \\ &= 90\end{aligned}$$

となります。2 乗すると 90 になる数は $3\sqrt{10}$ と $-3\sqrt{10}$ ですが、対角線の長さはマイナスにはならないので

$$\text{対角線の長さ} = 3\sqrt{10}\,\text{cm}$$

ということがわかります。

(4) よこの長さが a cm、たての長さが b cm である長方形



対角線をひくと長方形の中に直角三角形が現れます。この直角三角形に三平方の定理を使うと、

$$(\text{対角線の長さ})^2 = a^2 + b^2$$

となります。2 乗すると $a^2 + b^2$ になる数は $\sqrt{a^2 + b^2}$ と $-\sqrt{a^2 + b^2}$ ですが、対角線の長さはマイナスにはならないので

$$\text{対角線の長さ} = \sqrt{a^2 + b^2}\ \text{cm}$$

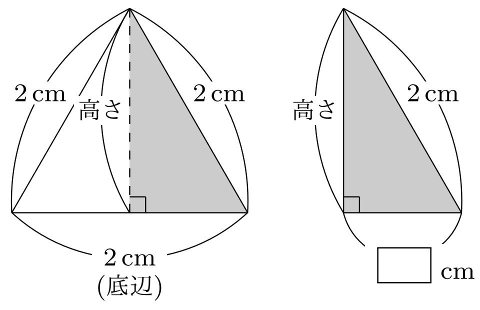
ということがわかります。

本文へ戻る

問 7. 三平方の定理を使って三角形の高さを求めることが大切な問題ですよね。

(1) 『一辺の長さが 2 cm の正三角形の高さを求めなさい。』ということでした。

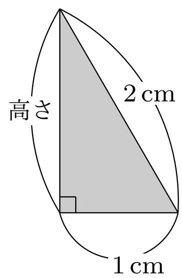
右の図を見てください。正三角形は二等辺三角形の仲間です。そして二等辺三角形では、「頂点から底辺へ向かって垂直に線を描くと底辺のどまんなかで交わる」ということを「驚くべき事実（おさらい）：二等辺三角形の性質」でおさらいしました。ですから この図の $\boxed{}$ cm のところは 1 cm になるということがわかります。



右の図を見てください。三平方の定理によると、

$$1^2 + (\text{高さ})^2 = 2^2$$

が成り立っているはずですね。この式をもとに高さを求め



ていきます。すると、

$$1 + (\text{高さ})^2 = 4$$

となり、

$$(\text{高さ})^2 = 3$$

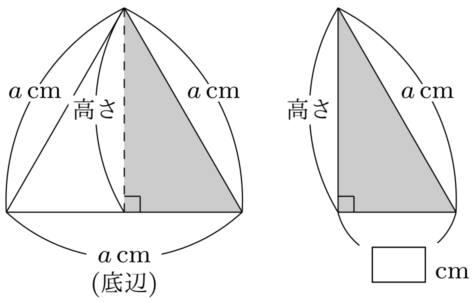
となります。2 乗すると 3 になる数は $\sqrt{3}$ と $-\sqrt{3}$ ですが、高さがマイナスのはずはないので

$$\text{高さ} = \sqrt{3}\,\text{cm}$$

ということがわかります。

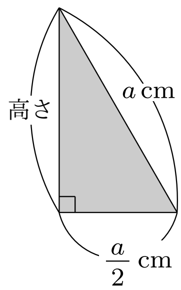
(2) 『一辺の長さが a cm の正三角形の高さを求めなさい。』ということでした。

右の図を見てください。正三角形は二等辺三角形の仲間です。そして二等辺三角形では、「頂点から底辺へ向かって垂直に線を描くと底辺のどまんなかで交わる」ということを「驚くべき事実（おさらい）：二等辺三角形の性質」でおさらいしました。ですからこの図の $\boxed{\quad}$ cm のところは $\dfrac{a}{2}$ cm になるということがわかります。



右の図を見てください。三平方の定理によると、

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (\text{高さ})^2 = a^2$$



が成り立っているはずですね。この式をもとに高さを求めていきます。すると、

$$\frac{1}{4}a^2 + (\text{高さ})^2 = a$$

となり、

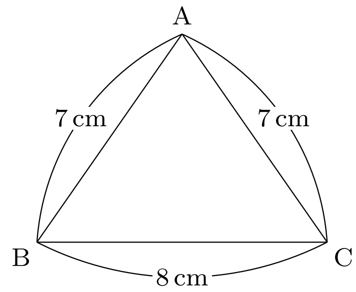
$$(\text{高さ})^2 = \frac{3}{4}a^2$$

となります。2 乗すると $\dfrac{3}{4}a^2$ になる数は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ と $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ ですが、高さがマイナスのはずはないので

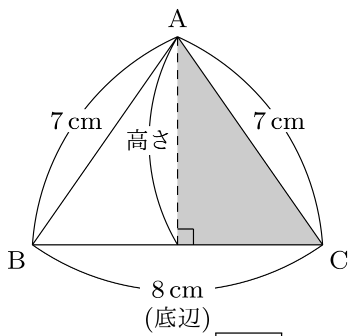
$$\text{高さ} = \frac{\sqrt{3}}{2}a\,\mathrm{cm}$$

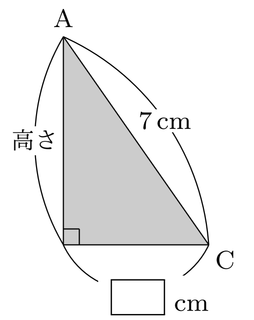
ということがわかります。

(3) 『右の図の二等辺三角形で、辺 BC を底辺と考えたときの高さを求めなさい。』ということでした。



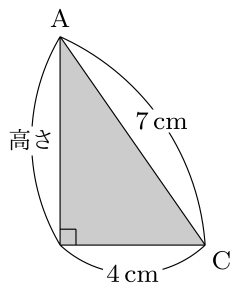
右の図を見てください。二等辺三角形では、「頂点から底辺へ向かって垂直に線を描くと底辺のどまんなかで交わる」ということを「驚くべき事実（おさらい）: 二等辺三角形の性質」でおさらいしました。ですからこの図の $\boxed{\quad}$ cm のところは 4 cm になるということがわかります。





右の図を見てください。三平方の定理によると、

$$4^2 + (\text{高さ})^2 = 7^2$$



が成り立っているはずですね。この式をもとに高さを求めていきます。すると、

$$16 + (\text{高さ})^2 = 49$$

となり、

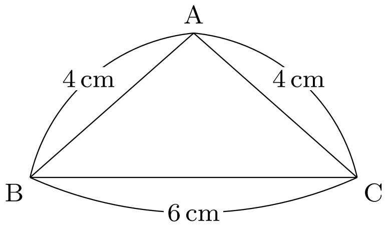
$$(\text{高さ})^2 = 33$$

となります。2 乗すると 33 になる数は $\sqrt{33}$ と $-\sqrt{33}$ ですが、高さがマイナスのはずはないので

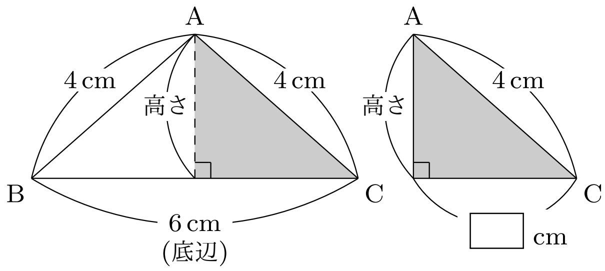
$$高さ = \sqrt{33}\,\mathrm{cm}$$

ということがわかります。

(4) 『右の図の二等辺三角形で、辺 BC を底辺と考えたときの高さを求めなさい。また、この三角形の面積を求めなさい。』ということでした。

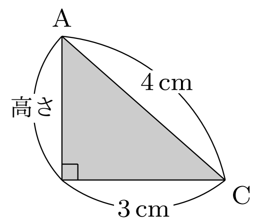


右の図を見てください。二等辺三角形では、「頂点から底辺へ向かって垂直に線を描くと底辺のどまんなかで交わる」ということを「驚くべき事実（おさらい）: 二等辺三角形の性質」でおさらいしました。ですからこの図の $\boxed{}$ cm のところは 3 cm になるということがわかります。



右の図を見てください。三平方の定理によると、

$$3^2 + (高さ)^2 = 4^2$$



が成り立っているはずですね。この式をもとに高さを求めていきます。すると、

$$9 + (高さ)^2 = 16$$

となり、

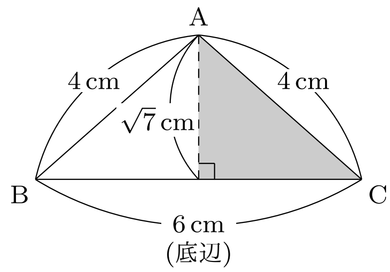
$$(高さ)^2 = 7$$

となります。2 乗すると 7 になる数は $\sqrt{7}$ と $-\sqrt{7}$ ですが、高さがマイナスのはずはないので

$$高さ = \sqrt{7}\,\mathrm{cm}$$

ということがわかります。

右の図を見てください。高さが $\sqrt{7}\,\mathrm{cm}$ であることがわかったのですから、面積を求めることができます。



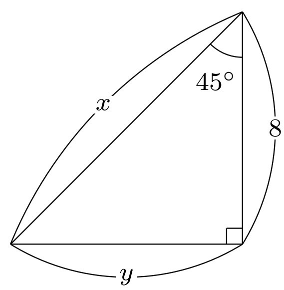
$$\text{この三角形の面積} = \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}\ \mathrm{cm}^2$$

ということですね。

本文へ戻る

問 8. 特別な直角三角形の辺の長さの比に関する事実を利用すると楽ができる問題ですね。

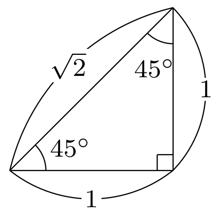
(1) この問題の三角形の図には、1 つだけ大きさが書いていない角があります。でもその角の大きさはすぐにわかりますね。三角形の内角の和は 180° ですから、



$$180^\circ - (45^\circ + 90^\circ) = 45^\circ$$

となりますよね。というわけで、この三角形は 45°、45°、90° タイプの直角三角形であることが判明しました。

ここで 34 ページで学んだ「45°、45°、90° タイプの直角三角形の辺の長さについて」を思い出してみましょう。(右の図を見てください。) すると、



45°、45°、90° タイプの直角三角形

「ななめの長さ」は「たての長さ」の $\sqrt{2}$ 倍

「よこの長さ」は「たての長さ」と同じ

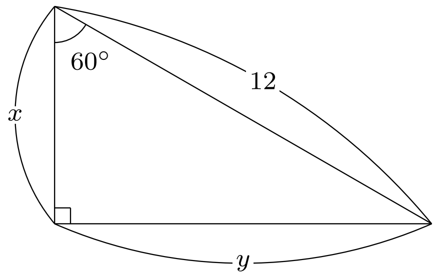
となっているのでしたね。ですから、この問題の直角三角形では、

$$x = 8 \times \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$y = 8$$

となりますね。

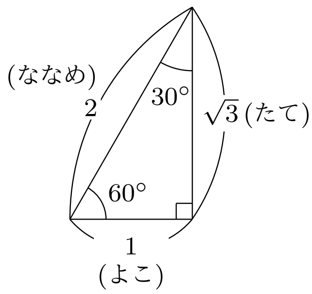
(2) この問題の三角形の図には、1 つだけ大きさが書いていない角があります。でもその角の大きさはすぐにわかりますね。三角形の内角の和は 180° ですから、



$$180^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 30^\circ$$

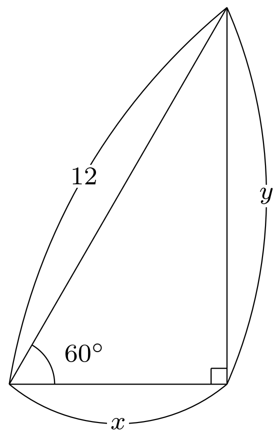
となりますよね。というわけで、この三角形は 30°、60°、90° タイプの直角三角形であることが判明しました。

ここで、33 ページで学んだ「30°、60°、90° タイプの直角三角形の辺の長さについて」を思い出して見ましょう。3 つの辺の長さの比は右の図のようになっているのでしたね。右の図と、この問題の図を慎重に比べて考えたいので、比べやすくするために、この問題の図の三角形を裏返して向きを変えた図を描いてみることにします。



30°、60°、90° タイプの直角三角形

すると右の図のようになりますね。この図とさっきの図を比べながら間違わないように考えてみましょう。先に y（つまり「たての長さ」）を求めても良いのですが、ここでは計算を楽にするためにまず x（つまり「よこの長さ」）のことを考えることにします。30°、60°、90° タイプの直角三角形では、



いま解いている問題の三角形を裏返して向きを変えた図

「よこの長さ」は「ななめの長さ」の半分

になっていますね。ですから、

$$x = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

となりますね。

次は「よこの長さ」と「たての長さ」の関係を考えてみます。30°、60°、90° タイプの直角三角形では、

$$「たての長さ」は「よこの長さ」の\ \sqrt{3}\ 倍$$

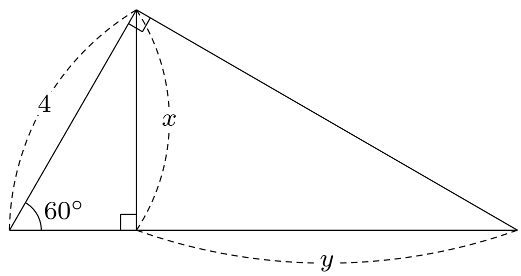
となっているのでしたね。ですから、

$$y = 6 \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

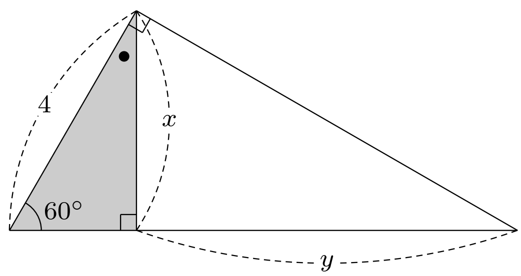
ですね。

本文へ戻る

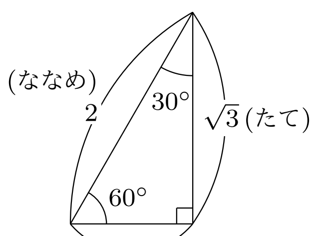
問 9. 『右の図で x と y の値を求めなさい。』という問題でした。



ではまず、右の図の灰色の三角形に注目してください。ちょっと計算すると、この図で ● のマークがついている角の大きさは 30° であることがわかりますね。ですから灰色の三角形は「30°、60°、90° タイプの直角三角形」ですね。



「30°、60°、90° タイプの直角三角形では、3 つの辺の長さの比は右の図のようになっているのでしたね。右の図と、この問題の図を慎重に比べて考えることにしましょう。



30°、60°、90° タイプの直角三角形

いきなり x（つまり「たての長さ」）を求めても良いのですが、ここでは計算を楽にするためにまず「よこの長さ」のことを考えることにします。30°、60°、90° タイプの直角三角

形では、

$$「よこの長さ」は「ななめの長さ」の半分$$

になっていますね。ですから、

$$よこの長さ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

となりますね。

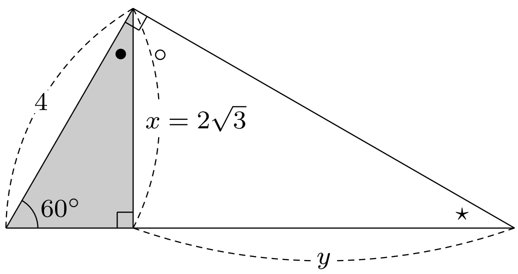
次は「よこの長さ」と「たての長さ」の関係を考えてみます。30°、60°、90° タイプの直角三角形では、

「たての長さ」は「よこの長さ」の $\sqrt{3}$ 倍

となっているのでしたね。ですから、

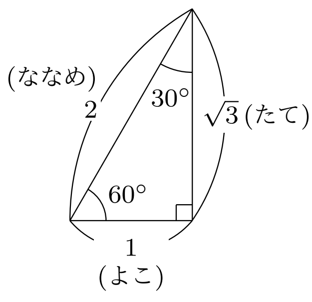
$$x = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

ですね。



今度は、右の図の白い三角形に注目してください。ちょっと計算すると、この図で ∘ のマークがついている角の大きさは 60° で、⋆ のマークがついている角の大きさは 30° であることがわかりますね。ですから白い三角形は「30°、60°、90° タイプの直角三角形」ですね。

「30°、60°、90° タイプの直角三角形では、3 つの辺の長さの比は右の図のようになっているのでしたね。右の図と、この問題の図を慎重に比べて考えることにしましょう。



30°、60°、90° タイプの直角三角形

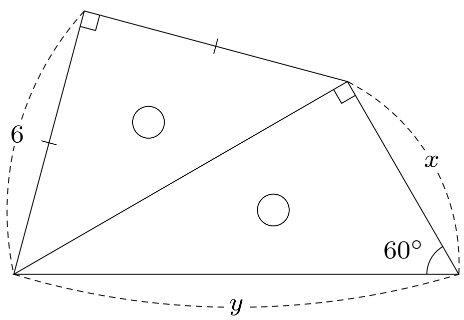
さっき私たちは、x は $2\sqrt{3}$ であるということを発見しています。ですから

$$y = \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 2 \times 3 = 6$$

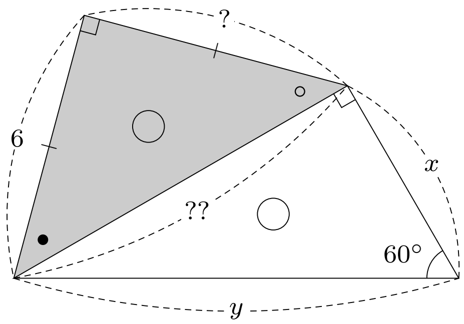
ということがわかります。

本文へ戻る

問 10. 『右の図は三角定規を組み合わせてみたものです。x と y の値を求めなさい。』という問題でした。



ではまず、右の図の灰色の三角形に注目してください。ちょっと計算すると、この図で $\bullet$ のマークがついている角の大きさは 45° で、$\circ$ のマークがついている角の大きさは 45° であることがわかります。ですから灰色の三角形は「45°、45°、90° タイプの直角三角形」ですね。



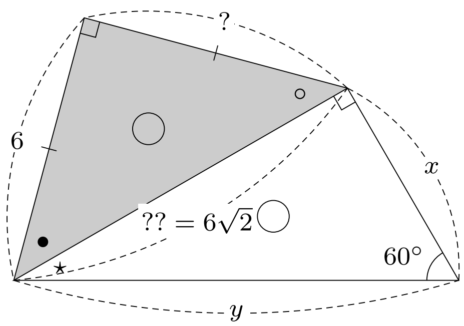
「45°、45°、90° タイプの直角三角形」では辺の長さの比は $1 : 1 : \sqrt{2}$ ですから、この図で

$$? = 6$$

$$?? = 6\sqrt{2}$$

であることがわかります。

次は、右の図の白い三角形に注目してください。ちょっと計算すると、この図で $\star$ のマークがついている角の大きさは 30° であることがわかります。ですから白い三角形は「30°、60°、90° タイプの直角三角形」ですね。



「30°、60°、90° タイプの直角三角形」では辺の長さの比は $1 : 2 : \sqrt{3}$ です。つまり、

$$x \text{ は ?? の } \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 倍}$$

$$y \text{ は } x \text{ の 2 倍}$$

ということです。

さっき $?? = 6\sqrt{2}$ であることがわかったのですから、

$$x = 6\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{6}$$

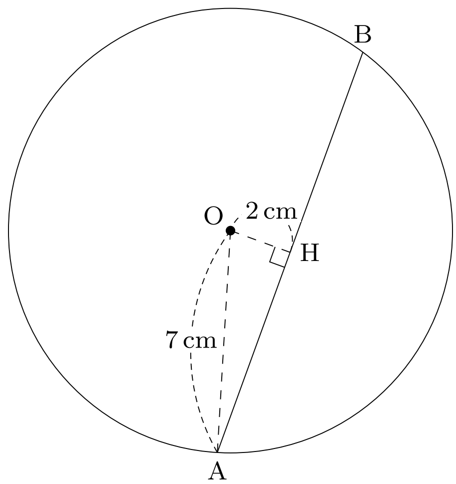
$$y = 2\sqrt{6} \times 2 = 4\sqrt{6}$$

ということになります。

本文へ戻る

問 11. 『半径が 7 cm の円で中心からの距離が 2 cm である弦 AB の長さを求めなさい。』という問題でした。

この問題を図にすると右のようになりますね。



この図の △OAH は直角三角形です。ですから三平方の定理を使えば AH の長さを求めることが出来ます。三平方の定理によると

$$\mathrm{AH}^2 + 2^2 = 7^2$$

が成り立っているわけです。この式から

$$\mathrm{AH}^2 + 4 = 49$$

さらに

$$\mathrm{AH}^2 = 45$$

ということがわかります。2 乗すると 45 になる数は $3\sqrt{5}$ と $-3\sqrt{5}$ ですが、長さがマイナスになることはないので

$$\mathrm{AH} = 3\sqrt{5}$$

ということがわかります。

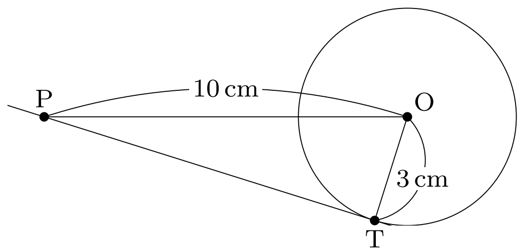
AB の長さは AH の長さの 2 倍になっています。（理由は例題 6 の解答で詳しく説明しましたね。）ですから

$$\mathrm{AB} = 2 \times 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$$

ということがわかります。 本文へ戻る

問 12. 『半径が 3 cm の円 O があるとします。この円の外部に点 P があり、P は円 O の中心から 10 cm 離れています。点 P から円 O へ接線を引き、接点を T とします。PT の長さを求めなさい。』という問題でした。

この問題の図を作ると右のようになります。



円の中心と接点を結んでできる半径は円の接線に垂直になるのでしたよね。ですから、△PTO は ∠PTO が直角になっている直角三角形です。ですから三平方の定理を使うことができます。そうすると、

$$\mathrm{PT}^2 + 3^2 = 10^2$$

が成り立っていることがわかります。

この式はまず、

$$\mathrm{PT}^2 + 9 = 100$$

と見かけを変えることができ、さらに

$$\mathrm{PT}^2 = 91$$

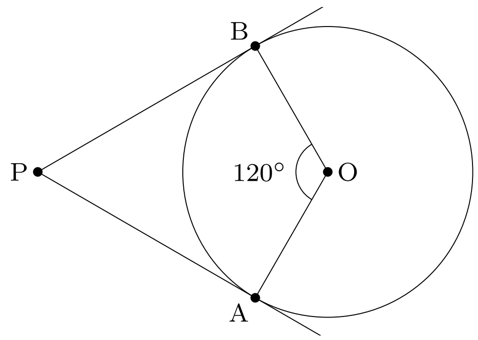
と見かけを変えることができます。

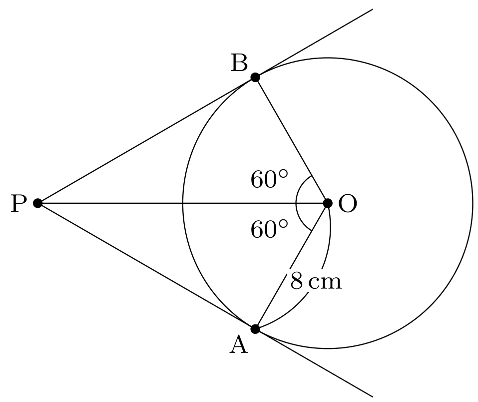
2 乗すると 91 になる数は $\sqrt{91}$ と $-\sqrt{91}$ ですが、PT の長さがマイナスになることはないので

$$\mathrm{PT} = \sqrt{91}$$

であることがわかります。 本文へ戻る

問 13.　『右の図で、PA、PB は点 A、点 B で円 O に接する円 O の接線です。円 O の半径が 8 cm、$\angle$AOB の大きさが 120° のとき、PA の長さを求めなさい。』という問題でした。





右の図を見てください。O と P を結ぶと 120° の角は 60° の角 2 つに別れますね。

また、円の中心と接点を結んでできる半径は円の接線に垂直になるのでしたよね。ですから、$\angle$PAO は直角です。

というわけで、$\triangle$PAO は 30°、60°、90° の直角三角形であることがわかりました。

ところで 30°、60°、90° の直角三角形の辺の長さの比は $1 : 2 : \sqrt{3}$ なのでしたね。ですから PA の長さは AO の長さの $\sqrt{3}$ 倍です。

ところでこの問題の円 O の半径は 8 cm ですから、AO の長さは 8 cm です。

ということは

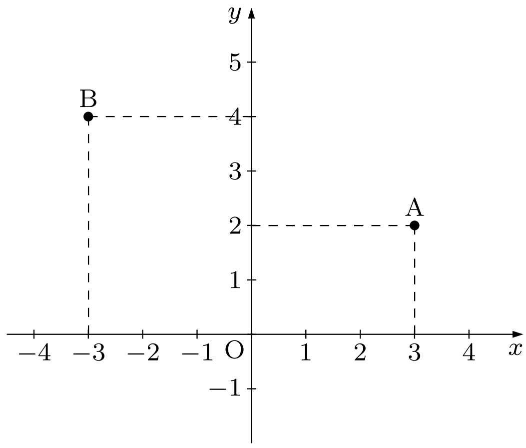
$$\mathrm{PA} = 8 \times \sqrt{3} = 8\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$$

であることがわかります。 本文へ戻る

問 14.　『座標平面上の 2 点 A$(3, 2)$ と B$(-3, 4)$ に対し、AB 間の距離を求めようと思います。次の問を順番に考えることにより、AB 間の距離を求めなさい。』という問題でしたね。

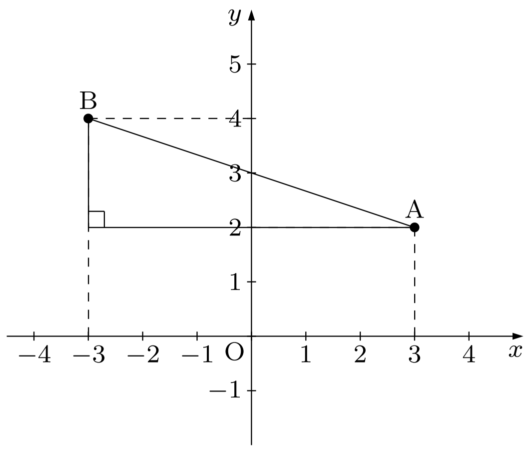
(1) 『この問題の状況を図にしなさい。』ということでした。

右のようになります。



(2) 『(1) で作った図に、さらにいくつか線を描き込んで AB 間の距離を求めるために役に立つ直角三角形を作りなさい。』ということでした。

例えば右のようにします。



(3) 『(2) で作った直角三角形を利用して AB 間の距離を求めなさい。』ということでした。

この直角三角形では「よこの長さは 6」、「たての長さは 2」ですから、三平方の定理により、

$$\mathrm{AB}^2 = 6^2 + 2^2$$

が成り立っています。この式より

$$\mathrm{AB}^2 = 36 + 4$$

さらに

$$\mathrm{AB}^2 = 40$$

となります。2 乗すると 40 になる数は $2\sqrt{10}$ と $-2\sqrt{10}$ ですが、距離がマイナスになることはないので

$$\mathrm{AB} = 2\sqrt{10}$$

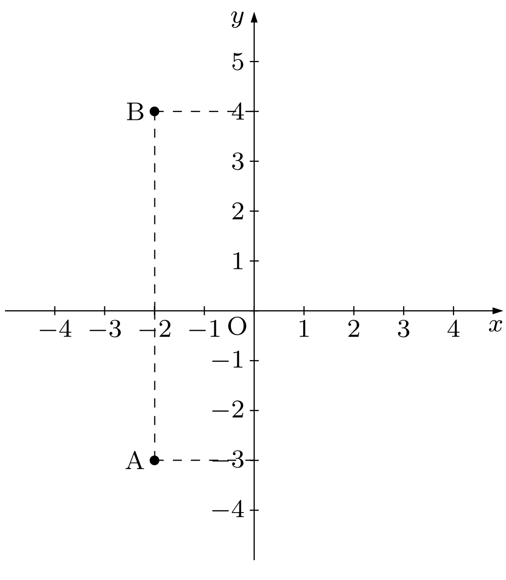
であることがわかります。

本文へ戻る

問 15. 『座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-2,-3)$ と $\mathrm{B}(-2,4)$ に対し、AB 間の距離を求めようと思います。次の問を順番に考えることにより、AB 間の距離を求めなさい。』という問題でしたね。

(1) 『この問題の状況を図にしなさい。』ということでした。

右のようになります。



(2) 『(1) で作った図を見て AB 間の距離を求めなさい。』ということでした。

2 つの点は縦に並んでいるのですから三平方の定理を使う必要はないですよね。目盛りを数えたり、ひき算をすれば

$$\mathrm{AB} = 7$$

であることがわかります。

本文へ戻る

問 16. 2 点間の距離を求める問題でした。例題 8、問 14、問 15 が理解できた人のために答えだけ書いておきます。

(1) 2 点 $(1,\ 3),\ (-4,\ 1)$ 間の距離は $\sqrt{29}$ です。

(2) 2 点 $(-3,\ 4),\ (9,\ -1)$ 間の距離は 13 です。

(3) 2 点 $(-2,\ 2),\ (4,\ 5)$ 間の距離は $3\sqrt{5}$ です。

(4) 2 点 $(-3,\ 3),\ (2,\ -1)$ 間の距離は $\sqrt{41}$ です。

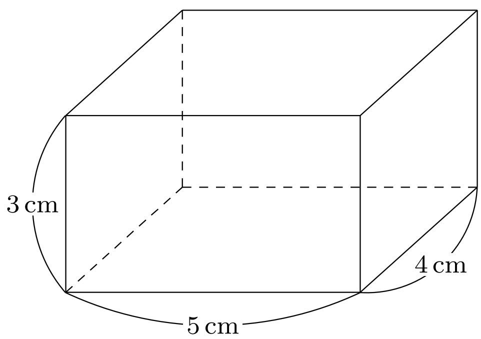
(5) 2 点 $(4,\ 2),\ (4,\ 5)$ 間の距離は 3 です。

(6) 2 点 $(-3,\ -1),\ (2,\ -1)$ 間の距離は 5 です。

本文へ戻る

問 17. 『直方体があるとします。この直方体の幅は 5 cm、奥行きは 4 cm、高さは 3 cm です。この直方体の対角線の長さを求めようと思います。次の問に順番に答えてくことによってこの直方体の対角線の長さを求めなさい。』という問題でした。

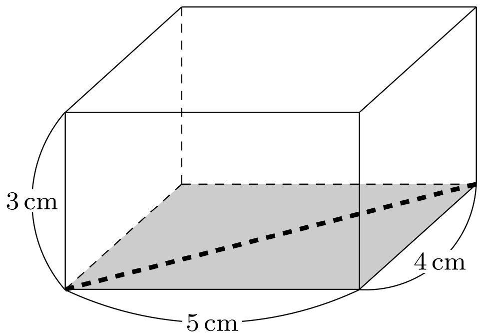
(1) 『まず、この直方体の見取り図を描き、わかっている辺の長さを記入しなさい。』ということでした。



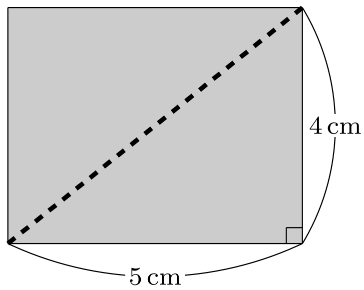
幅は 5 cm、奥行きは 4 cm、高さは 3 cm の直方体ですから、見取り図は右の図のようになりますね。(見取り図を描くときはこちら側から見えない辺を点線で描いておくと立体的に見えますよ。)

(2) 『いきなりこの直方体の対角線の長さを求めるのは難しそうなので、とりあえずこの直方体の底面の対角線の長さを求めなさい。』ということでした。

右の図を見てください。「底面」とはどこのことなのかをわかりやすくするために「底面」を灰色にしておきました。また、「底面の対角線」を太い点線で描いておきました。



では、この立体の見取り図から、「底面」だけを取り出して見やすくしてみましょう。「底面」を真上から見た図を描くと右のようになりますね。



この図を見ながら三平方の定理を使って「底面の対角線の長さ」を求めることにしましょう。

この図に現れている直角三角形で三平方の定理を使うと、

$$(\text{底面の対角線の長さ})^2 = 5^2 + 4^2$$

が成り立っています。この式の見かけは

$$(\text{底面の対角線の長さ})^2 = 25 + 16$$

さらに

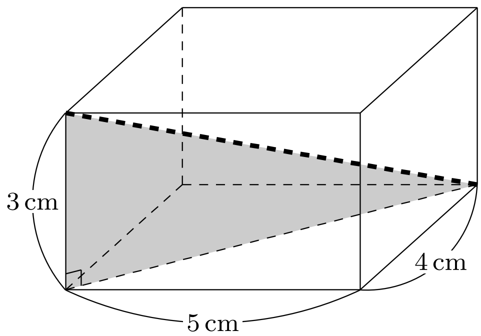
$$(\text{底面の対角線の長さ})^2 = 41$$

とすることができます。2 乗すると 41 になる数は $\sqrt{41}$ と $-\sqrt{41}$ ですが、対角線の長さはマイナスにはならないので

$$\text{底面の対角線の長さ} = \sqrt{41}$$

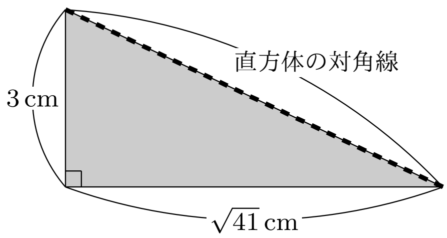
ということになります。

(3) 『(2) で求めた「底面の対角線の長さ」も利用して、この直方体の対角線の長さを求めようと思います。そのときに役に立ちそうな直角三角形を見つけなさい。』ということでした。



では右の図を見てください。きっと、この図で灰色になっている直角三角形が役に立つのではないでしょうか。この直角三角形には「直方体の対角線」と「(2) で考えた底面の対角線」が両方とも辺として含まれているからです。

(4) 『(3) で見つけた直角三角形を利用してこの直方体の対角線の長さを求めなさい。』ということでした。



右の図を見てください。役に立つと思った直角三角形を取り出して正面から見た図を描いてみました。この図を見ながら三平方の定理を使えば「直方体の対角線の長さ」をもとめることができますね。

三平方の定理より、

$$(\sqrt{41})^2 + 3^2 = (\text{直方体の対角線の長さ})^2$$

が成り立っているはずです。 つまり、

$$41 + 9 = (\text{直方体の対角線の長さ})^2$$

が成り立っています。この式の左辺を計算して見かけをマシにすると、

$$50 = (\text{直方体の対角線の長さ})^2$$

となるわけです。2 乗すると 50 になる数は $5\sqrt{2}$ と $-5\sqrt{2}$ ですが、対角線の長さがマイナスになることはないので、

$$\text{直方体の対角線の長さ} = 5\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$$

ということになります。

本文へ戻る

問 18. 立体の対角線の長さを求めるのでしたね。例題 9、問 17 がきちんと理解できた人のために答えだけ書いておきます。

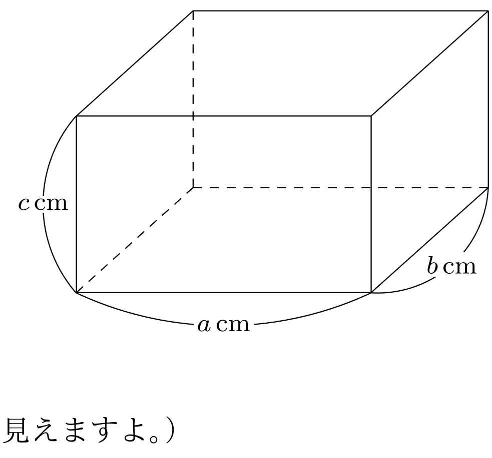
(1) 縦の長さが $2\,\mathrm{cm}$、横の長さが $3\,\mathrm{cm}$、高さが $6\,\mathrm{cm}$ の直方体の対角線の長さは $7\,\mathrm{cm}$ です。

(2) 1 辺の長さが $5\,\mathrm{cm}$ の立方体の対角線の長さは $5\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ です。

本文へ戻る

問 19. 『直方体があるとします。この直方体の幅は $a\,\mathrm{cm}$、奥行きは $b\,\mathrm{cm}$、高さは $c\,\mathrm{cm}$ です。この直方体の対角線の長さを求めようと思います。次の問に順番に答えてくことによってこの直方体の対角線の長さを求めなさい。』という問題でした。

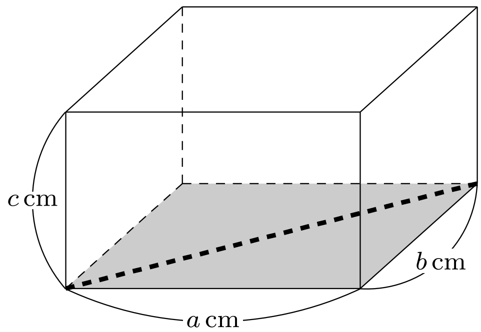
(1) 『まず、この直方体の見取り図を描き、わかっている辺の長さを記入しなさい。』ということでした。



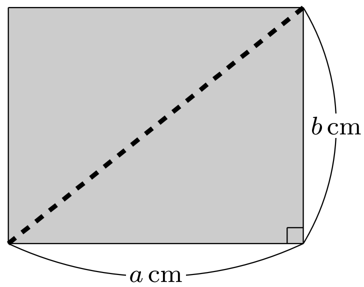
幅は $a\,\mathrm{cm}$、奥行きは $b\,\mathrm{cm}$、高さは $c\,\mathrm{cm}$ の直方体ですから、見取り図は右の図のようになりますね。（見取り図を描くときはこちら側から見えない辺を点線で描いておくと立体的に見えますよ。）

(2) 『いきなりこの直方体の対角線の長さを求めるのは難しそうなので、とりあえずこの直方体の底面の対角線の長さを求めなさい。』ということでした。

右の図を見てください。「底面」とはどこのことなのかをわかりやすくするために「底面」を灰色にしておきました。また、「底面の対角線」を太い点線で描いておきました。



では、この立体の見取り図から、「底面」だけを取り出して見やすくしてみましょう。「底面」を真上から見た図を描くと右のようになりますね。



この図を見ながら三平方の定理を使って「底面の対角線の長さ」を求めることにしましょう。

この図に現れている直角三角形で三平方の定理を使うと、

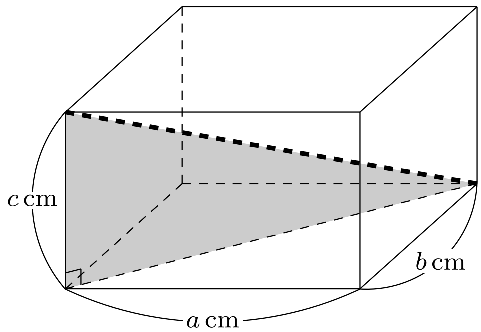
$$(\text{底面の対角線の長さ})^2 = a^2 + b^2$$

が成り立っています。2 乗すると $a^2 + b^2$ になる数は $\sqrt{a^2 + b^2}$ と $-\sqrt{a^2 + b^2}$ ですが、対角線の長さはマイナスにはならないので

$$\text{底面の対角線の長さ} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ということになります。

(3) 『(2) で求めた「底面の対角線の長さ」も利用して、この直方体の対角線の長さを求めようと思います。そのときに役に立ちそうな直角三角形を見つけなさい。』ということでした。

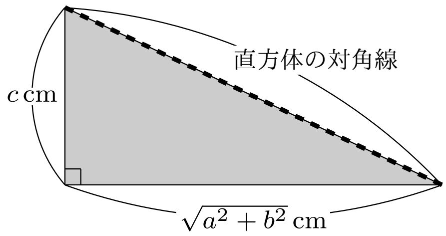


では右の図を見てください。きっと、この図で灰色になっている直角三角形が役に立つの

ではないでしょうか。この直角三角形には「直方体の対角線」と「(2) で考えた底面の対角線」が両方とも辺として含まれているからです。

(4) 『(3) で見つけた直角三角形を利用してこの直方体の対角線の長さを求めなさい。』ということでした。

右の図を見てください。役に立つと思った直角三角形を取り出して正面から見た図を描いてみました。この図を見ながら三平方の定理を使えば「直方体の対角線の長さ」をもとめることができますね。



三平方の定理より、

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+c^2=(\text{直方体の対角線の長さ})^2$$

が成り立っているはずです。 つまり、

$$a^2+b^2+c^2=(\text{直方体の対角線の長さ})^2$$

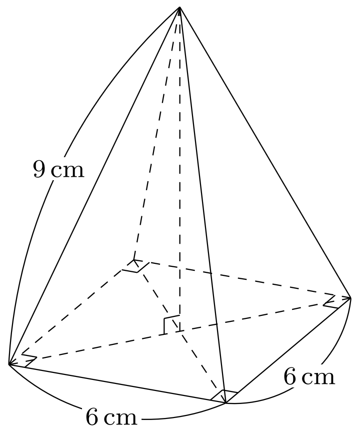
が成り立っています。2 乗すると $a^2+b^2+c^2$ になる数は $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ と $-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ですが、対角線の長さがマイナスになることはないので、

$$\text{直方体の対角線の長さ}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \text{cm}$$

ということになります。

本文へ戻る

問 20. 『右の図の立体は、底面は 1 辺の長さが 6 cm の正方形で、他の辺の長さはすべて 9 cm となっています。次の問に順に答えていくことにより、この立体の体積を求めなさい。』という問題でした。

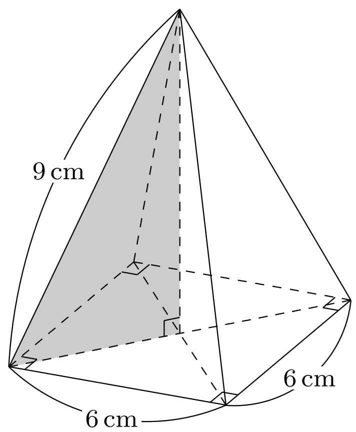


(1) 『この立体の名前はなんですか。』ということでした。

この立体は底面が正方形の錐です。ですからこの立体の名前は「正四角錐」です。

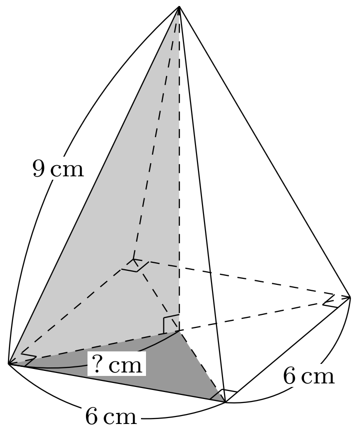
(2) 『この円すいの体積を求める前に、三平方の定理を使って、まずこの立体の高さを求めようと思います。そのときに役に立ちそうな直角三角形を見つけなさい。』ということでした。

例えば、右の図で灰色になっている直角三角形が役に立ちます。



(3) 『(2) で見つけた直角三角形を利用しようと思っても、その直角三角形では長さのわかっていない辺が 2 つありますよね。ですからまだ三平方の定理を使う準備ができていないわけです。そこで (2) で見つけた直角三角形を使う前に、もうひとつ別の直角三角形を見つけて (2) で見つけた直角三角形の辺の長さを 1 つ求めなさい。』ということでした。

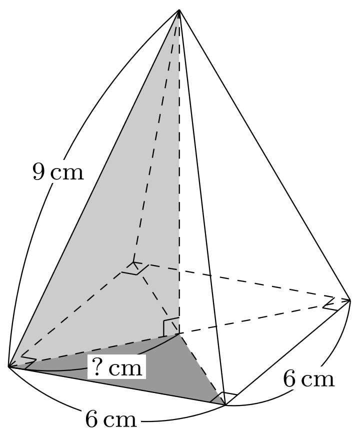
例えば右の図で濃い灰色になっている直角三角形に注目してください。この三角形は 45°、45°、90° の直角三角形です。たしか、45°、45°、90° の直角三角形では、辺の長さの比は $1:1:\sqrt{2}$ となっているのでしたね。ですからこの図で ? cm となっている辺の長さは 6 cm の $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍ということになります。つまり、



$$? = 6 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$$

ということになります。これで、(2) で見つけた直角三角形の辺の長さを 1 つ求めることができました。

(4) 『(2) で見つけた直角三角形を利用しこの立体の高さを求めなさい。』ということでした。つまり、右の図のうすい灰色の直角三角形を使ってこの立体の高さを求めるわけです。



$? = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$ であることがさっきわかりました。ですから三平方の定理により

$$\left(3\sqrt{2}\right)^2 + (\text{この立体の高さ})^2 = 9^2$$

が成り立っています。

この式の見かけを変えると

$$18 + (\text{この立体の高さ})^2 = 81$$

さらに

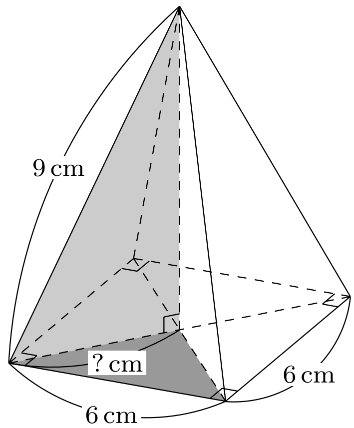
$$(\text{この立体の高さ})^2 = 63$$

となります。2 乗すると 63 になる数は $3\sqrt{7}$ と $-3\sqrt{7}$ ですが高さがマイナスになることはないので

$$\text{この立体の高さ} = 3\sqrt{7}\,\text{cm}$$

ということがわかります。

(5) 『この立体の体積を求めなさい。』ということでした。



ナントカ錐の体積は「底面積」かける「高さ」かける「$\dfrac{1}{3}$」で求めることができますよね。

底面は 1 辺の長さが 6 cm の正方形ですから、

$$\text{底面積} = 6 \times 6 = 36\,\text{cm}^2$$

です。

またすでに、高さは $3\sqrt{7}\,\text{cm}$ であることがわかっています。

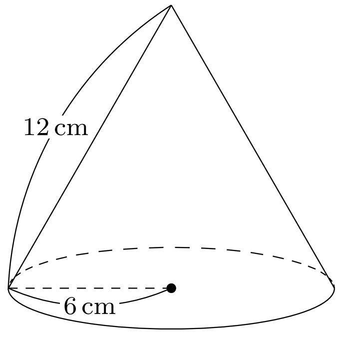
ですから、

$$\text{この立体の体積} = 36 \times 3\sqrt{7} \times \frac{1}{3} = 36\sqrt{7}\,\text{cm}^3$$

ということになります。

本文へ戻る

問 21. 右の図の立体について問題でした。



(1) この立体の名前は「円錐」です。

(2) 例題 10、問 20 がしっかり理解できた人のために答えだけ書いておきます。

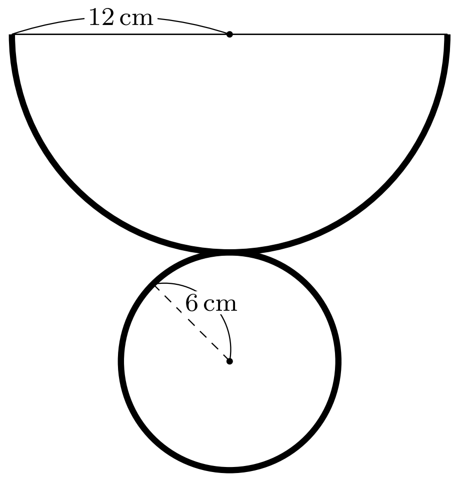
この立体の体積は $72\sqrt{3}\pi\,\text{cm}^3$ です。

(3) この立体の表面積は $108\pi\,\text{cm}^2$ です。

念のため、この立体の表面積の求め方を簡単に説明しておきます。（本当はとっくの昔

に学習しているはずです。)

実はこの問題の円錐の展開図は右の図のようになります。どうしてなのかは次のように考えていくとわかります。



底面の円の半径は 6 cm ですから底面の円の周りの長さは 12π cm ですね。また、この図で太く描かれている曲線どうしが貼り合わさって円錐ができあがるのですから、太く描かれている曲線の長さは同じ、つまりどちらも 12π cm です。

ところで半径 12 cm のおうぎ型の代わりに半径が 12 cm の円のことを想像してみると、周りの長さは 24π cm です。そこで、太く描かれている曲線の長さが 12π cm であることを考えに入れると、側面のおうぎ型の中心角は 180° ということがわかります。

というわけで、

$$\begin{aligned}\text{側面のおうぎ型の面積} &= \text{半径 } 12\,\mathrm{cm} \text{ の円の面積の半分} \\ &= 12 \times 12 \times \pi \times \frac{1}{2} \\ &= 72\pi\,\mathrm{cm}^2\end{aligned}$$

となります。また、

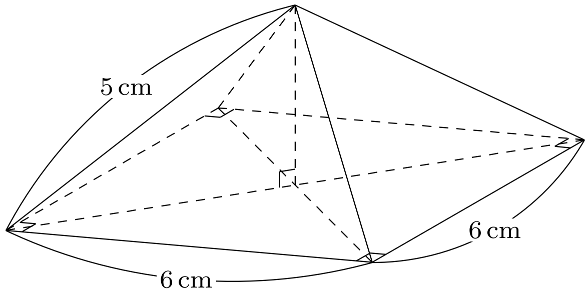
$$\text{底面の円の面積} = 6 \times 6 \times \pi = 36\pi\,\mathrm{cm}^2$$

となります。ですから

$$\text{この円錐の表面積} = 71\pi + 36\pi = 108\pi\,\mathrm{cm}^2$$

ということになるわけです。

本文へ戻る



問 22. 右の図のような、底面は 1 辺の長さが 6 cm の正方形で、他の辺の長さはすべて 5 cm となっている立体についての問題でした。

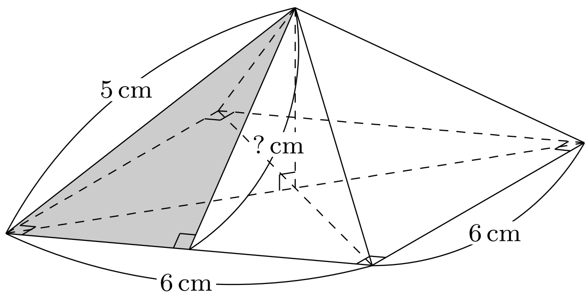
(1) この立体の名前は「正四角錐」です。

(2) 例題 10、問 20 がしっかり理解できた人のために答えだけ書いておきます。

この立体の体積は $12\sqrt{7}\,\mathrm{cm}^3$ です。

(3) この立体の表面積は $84\,\mathrm{cm}^2$ です。

この立体の表面積の求め方を簡単に説明しておきます。



この立体で、頂点から手前の 6 cm の辺に向かって垂直な線を描くと、右図のような灰色の直角三角形が現れます。

ところでこの灰色の直角三角形が含まれている「側面」は二等辺三角形です。(5 cm の辺が 2 つありますよね。) たしか、二等辺三角形には「頂点から底辺へ向かって垂直な線を描いていくと底辺のどまんなかでぶつかる」という性質がありましたね。ということは、灰色の直角三角形の「よこの長さ」は 3 cm であると断言できますね。

灰色の直角三角形で三平方の定理を使って、この図の ? の長さを求めることにしましょう。すると

$$3^2 + ?^2 = 5^2$$

が成り立っているわけですから、この式から

$$?^2 = 25 - 9$$

さらに

$$?^2 = 16$$

ということがわかります。2 乗すると 16 になる数は 4 と −4 ですが、長さがマイナスに

なることはないので

$$? = 4$$

ということがわかります。そうすると、

$$\text{側面になっている三角形 1 枚の面積} = 6 \times 4 \times \frac{1}{2} = 12\,\text{cm}^2$$

ということがわかります。

また、底面は 1 辺が 6 cm の正方形ですから、

$$\text{底面積} = 6 \times 6 = 36\,\text{cm}^2$$

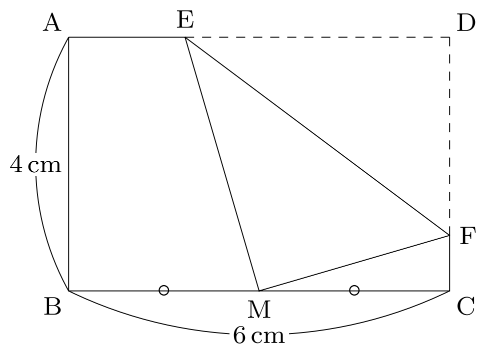
ということがわかります。

この立体の表面は「側面になっている三角形」4 枚と「底面の正方形」からできていますから、

$$\text{表面積} = 12 \times 4 + 36 = 84\,\text{cm}^2$$

ということになります。 本文へ戻る

問 23. 『右の図を見てください。この図は。AB = 4 cm、BC = 6 cm の長方形 ABCD を、この長方形の頂点 D が辺 BC の中点 M と重なるように折ったものを表しています。CF の長さを求めなさい。』という問題でした。例題 11 の解答がきちんと理解できた人のためにあっさり説明します。



CF の長さが謎ですから CF の長さをを x cm としましょう。

役に立ちそうな直角三角形を探してみましょう。たぶん △MCF が役に立ちそうです。

CF の長さを x cm としたのですから FD の長さは $4 - x$ cm です。また、EF を折り目にして折ったのですから FD と FM の長さは同じです。ですから FM の長さは $4 - x$ cm です。

M は BC の中点ですから MC の長さは 3 cm です。

これで △MCF に三平方の定理を使う準備が整いました。では △MCF に三平方の定理を使ってみましょう。すると、

$$3^2 + x^2 = (4 - x)^2$$

という式が成り立つことになります。この式はまず、

$$9 + x^2 = 16 - 8x + x^2$$

さらに

$$9 = 16 - 8x$$

さらに

$$-7 = -8x$$

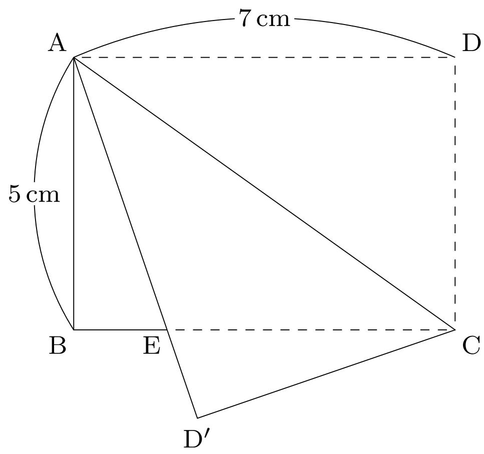
さらに

$$\frac{7}{8} = x$$

と見かけを変えることができます。これでこの問題は解決です。CF の長さは $\frac{7}{8}$ cm だったのです。

本文へ戻る

問 24. 『右の図を見てください。この図は。AB = 5 cm、AD = 7 cm の長方形 ABCD を、この長方形の対角線 AC で折ったものを表しています。BE の長さを求めなさい。』という問題でした。



BE の長さが謎ですから BE の長さをを x cm としましょう。

役に立ちそうな直角三角形を探してみましょう。たぶん △ABE が役にたちそうです。

BE の長さを x cm としたのですから EC の長さは $7-x$ cm です。ところで EA と EC の長さは同じであるような感じもしますが本当に同じでしょうか？少し悩んでみます。すると、必死で考えた人は「実は △AEC は二等辺三角形である」という証拠を見つけることができます。それでは △AEC は二等辺三角形である証拠をお見せしましょう。

（△AEC は二等辺三角形である証拠）

四角形 ABCD は長方形なので平行四辺形の仲間です。ですから AD // BC が成り立っています。平行線では錯角の大きさは等しいはずですから

$$\angle \mathrm{DAC} = \angle \mathrm{ACE} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

が成り立っています。

長方形 ABCD を対角線 AC で折ったのですから

$$\angle \mathrm{DAC} = \angle \mathrm{CAE} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

が成り立っています。

①、② より ∠ACE と ∠CAE の大きさは同じであると断言できます。ですから、△AEC は EA の長さと EC の長さが同じである二等辺三角形であると断言できます。

（△AEC は二等辺三角形である証拠おわり）

というわけで、EA の長さと EC の長さが同じであるという証拠が見つかりました。ですから EA の長さも $7-x$ cm です。

これで △ABE に三平方の定理を使う準備が整いました。では △ABE に三平方の定理を使ってみましょう。すると、

$$x^2 + 5^2 = (7-x)^2$$

という式が成り立つことになります。この式はまず、

$$x^2 + 25 = 49 - 14x + x^2$$

さらに

$$14x = 24$$

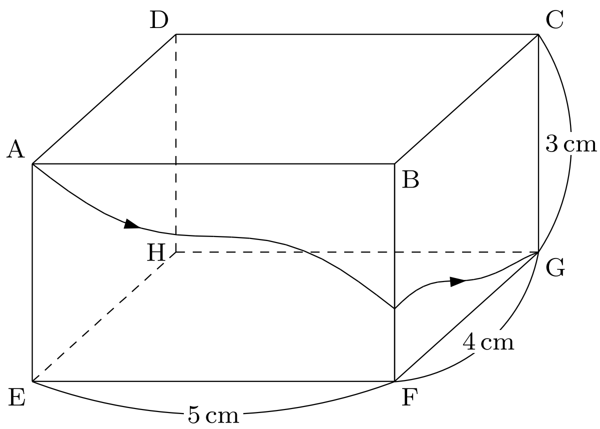
さらに

$$x = \frac{12}{7}$$

と見かけを変えることができます。これでこの問題は解決です。BE の長さは $\frac{12}{7}$ cm だったのです。

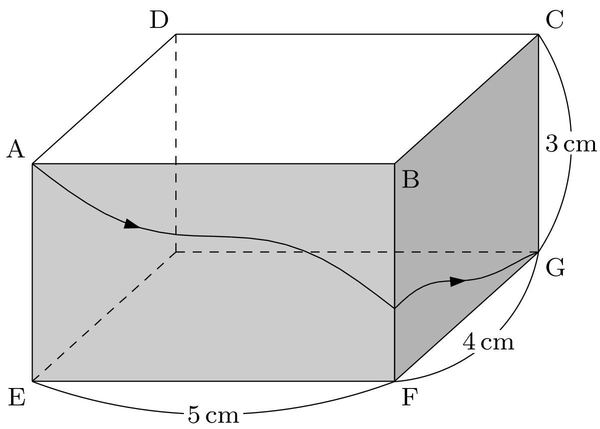
本文へ戻る

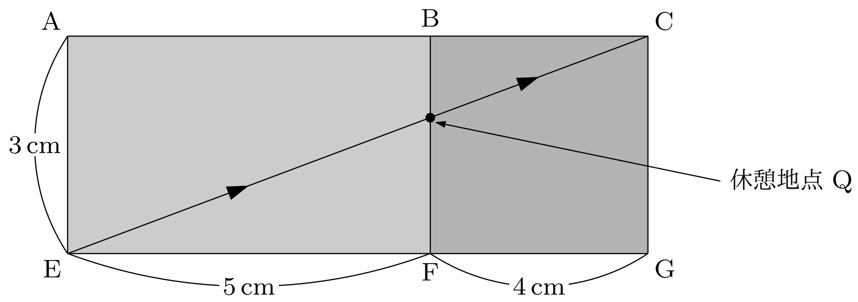
問 25. 『右の図は、縦 4 cm、横 5 cm、高さ 3 cm の直方体です。この直方体の「表面」に、ものすごく小さく、高い知能を持った生物が住んでいるとします。この生物はこの直方体の表面から飛び出ることはできません。しかし、直方体の表面ならば、自由にどこにでも移動することができます。これからこの生物は点 A を出発して点 G まで行こうと考えています。遠回りはしたくないので、最も短いルートを探そうとしています。ただし、辺 BF の上のどこかで一度休憩をすることにします。では、一体どんなルートで行けば、最短距離で行くことができるのでしょうか。そしてその時の距離はどれだけになるのでしょうか。また、辺 BF 上のどこで休むことになるのでしょうか。』という問題でした。



例題 12 の解答がきちんと理解できた人のためにあっさり説明します。

右の図で灰色に塗られている面を取り出して、平らにしてみることにしましょう。するとどのように進めば最短距離で進めるのかはっきりします。次の図を見てください。。





この図のように平らになった面で考えると、E から C へまっすぐ進めば最短距離になるとわかりますね。また、この図では休憩地点の名前を Q としておきました。

このように進むとき、距離がどれだけになるのかということは、△AEC に三平方の定理を使ってみるとわかります。AE の長さは 3 cm で AC の長さは 9 ｃｍですよね。ですから三平方の定理より

$$\mathrm{EC}^2 = 3^2 + 9^2$$

が成り立ちます。つまり

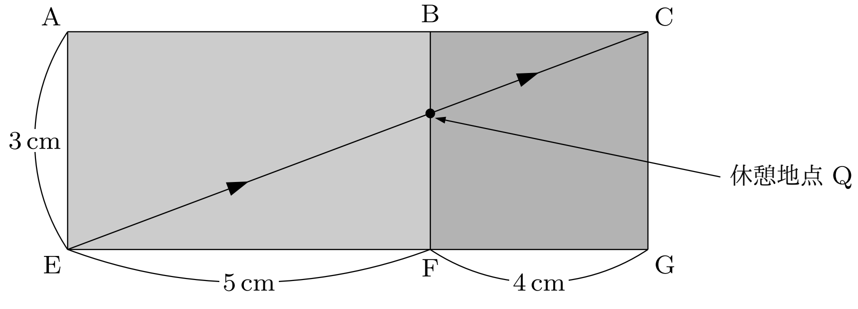
$$\mathrm{EC}^2 = 90$$

ということがわかります。2 乗すると 90 になる数は $3\sqrt{10}$ と $-3\sqrt{10}$ ですが、距離がマイナスになることはないので

$$\mathrm{EC} = 3\sqrt{10}\,\mathrm{cm}$$

ということがわかります。つまり最短距離は $3\sqrt{10}$ であることがわかりました。

では次に、休憩地点 Q の位置を求めることにしましょう。もう一度さっきの描いておきます。



$\triangle$AEC と $\triangle$BQC は相似ですよね。（相似である証拠は言えますか？ 2 組の角の大きさがそれぞれ等しくなっているんですよ。）そして $\triangle$AEC と $\triangle$BQC の相似比は $9:4$ ですよね。ですから

$$\mathrm{AE}:\mathrm{BQ}=9:4$$

となっていることがわかります。いま AE は 3 cm なのですから

$$3:\mathrm{BQ}=9:4$$

となり、さらに

$$9\times\mathrm{BQ}=3\times4$$

となり、さらに

$$\mathrm{BQ}=\frac{12}{9}$$

となり、さらに

$$\mathrm{BQ}=\frac{4}{3}$$

となるわけです。これで休憩地点 Q の位置がはっきりわかりました。休憩地点 Q の位置は B から $\dfrac{4}{3}$ cm 下がった所ですね。

本文へ戻る