相似な図形

2016 年 8 月 28 日

目次

このテキストの使いかた

日頃の学習では・・・

- テキストをていねいに読んでいきましょう。

  このテキストは、きちんと言葉を使っててていねいな説明が書かれています。記号や数式が並んでいるだけの、意味不明のものではありません。ひとことひとこと言葉を大切にして、解き方ではなく考え方を学び取るようにしてください。そして、書いてあることに対して、「あーそういうことか」とか「えーよくわからない」とか「これ、ちがうんじゃないの？」といった反応をしてください。数学は自分の頭を使って考えていく科目ですから立ち止まって考えることがとても大切なのです。

- テスト直前に勉強を始めるのではなく、テストで力を発揮できるように前もって準備をしておきましょう。

  数学のように、自分の頭を使って「あーでもない、こーでもない」と考えながら学んでいく科目では、学習を始めてからしばらくの間はなかなか成果が出ない事があります。しかし少し我慢をして学習を続けていくうちに、あるとき、驚くような力が付いていることに気づくことがあります。 つまり、実力は初めのうちはゆっくり伸びていき、あとからぐんと伸びることが多いのです。

- 例題を学ぶときには、解答を読む前に、できればまず自分の力で解くことができるかどうか試してみましょう。

  数学の学習では、誰かから教わっただけのことよりも自分で悩んで考えたことの

ほうがよく身につきます。紙と筆記用具を使って実際に答案を書いてみてください。それができたらテキストの解答をていねいに読んで自分の考えと比べてみましょう。

- 例題の学習ができたら、この問題がテストに出ても自分の力だけで解けるかどうか想像してみましょう。そして心配なものには印を付けておきましょう。

  日頃から自分の実力をつかんでおくとテスト対策がしやすくなります。

- 問はもちろん、まず自分の力で解くことができるかどうか試してみてください。

  紙と筆記用具を使って実際に答案を書いてみてください。それができたらテキストの解答をていねいに読んで自分の考えと比べてみましょう。そうすれば理解が深まるでしょう。

- 問を解き終わって答え合わせをしたら、間違ったものには印を付けておきましょう。

  日頃から自分の実力をつかんでおくとテスト対策がしやすくなります。

- ひとつのひとつの節を読み終わったら、どんなことをその節で学んだのか思い出して「あらすじ」を言えるようにしておきましょう。紙と筆記用具を用意して、誰かにあらすじを伝えるにはどんなふうに説明すればよいか考え、文章を書いてみるととても効果があります。

  中学生に「今日は学校の数学の授業でどんなことを勉強したの？」と聞いてみると、「えーと、何だっけ、そうだ、傾きとか習った。」と断片的なことを言えたりすることはあるのですが、改めて、「へぇ、ところで傾きってなんなの？」と聞いてみると「えー、何だっけ、そうだ、なんか計算したり直線を描いてた。」ぐらいの答えしか返ってこないことが多いのです。専門用語を正しく言えるようになることも必要なことかもしれませんが、そんなことより大切なのは「どんなお話を学んだのか」ということです。数学は意味の無い記号操作を学ぶ科目ではなく、ちゃんとしたストーリーがあるものを学んでいるのです。ですから「お話のあらすじ」を理

解しておくことが大切なのです。

定期テスト対策では・・・

「日頃の学習」のところにも書いてありますが、数学のような科目は力がつくまでに時間のかかる科目です。テストに備えて十分な日数を確保しておきましょう。そして、「日頃の学習」で心配な例題や間違った問にちゃんと印を付けているとテスト対策が楽になります。

- テキストから試験範囲の例題や問を探して、印のついていないものがちゃんと解けるかどうか試してみましょう。
- 印を付けた例題や問を繰り返し復習して、テストに出ても大丈夫な問題を少しでも増やしておきましょう。

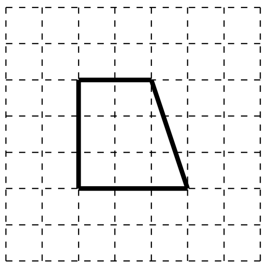
第 1 章

相似な図形

1.1　相似な図形とは

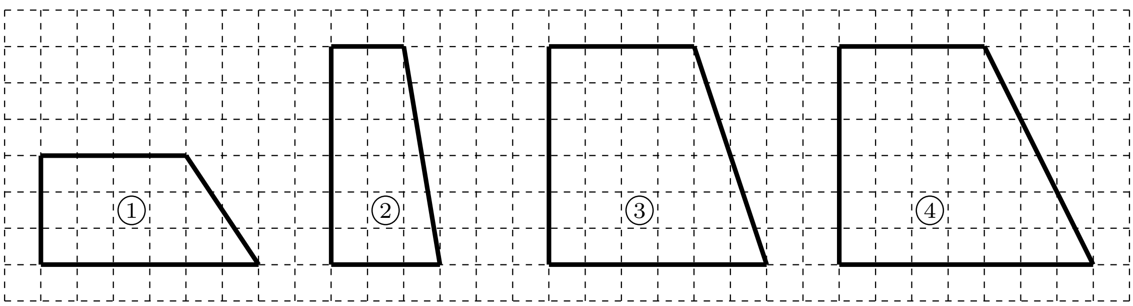
1.1.1　図形どうしが相似であるってどういう意味？

この単元では、図形を拡大したり縮小したりする話を学びます。ところであなたは、コピー機を使って、図形を拡大したり縮小したりしたことがありますか。コピー機で図形を拡大したり縮小したりすると、もちろん図形の「大きさ」は変わりますね。では「形」は変わるのでしょうか。

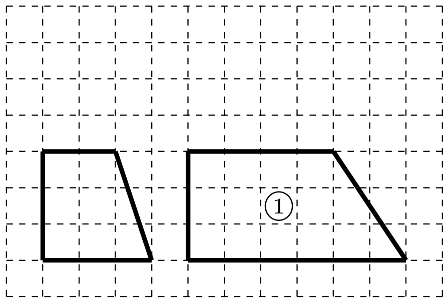


右の図を見てください。マス目のついた紙の中に四角形が描かれています。これからコピー機を使ってこの四角形を拡大しようと思います。倍率は 2 倍に設定することにします。さて、ここであなたに質問です。

質問　次の図の中に、この図の四角形を 2 倍の倍率で拡大した図形はありますか。あると思った人はその図形の番号を答えなさい。



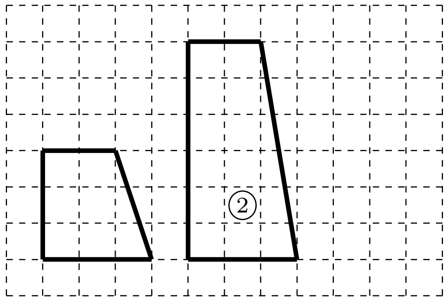
さて、質問のこたえはわかったでしょうか。正しい答えは③ですね。でも、①、②、④はどうして正しい答えではないのでしょうか。どうしてダメなのか、あなたは理由を言うことはできますか？だって、どれももとの四角形より大きくなっているので、「拡大されている」ことには変わりないですよね。特に④などは、もとの図形をコピー機で 2 倍に拡大すると本当にこうなりそうだって思いませんか。というわけで、これから①、②、④について 1 つづつ、ダメな理由を詳しく考えることにします。



①はどうしてダメなのかというと・・・

右の図を見てください。もとの図形と①を並べて描いておきました。

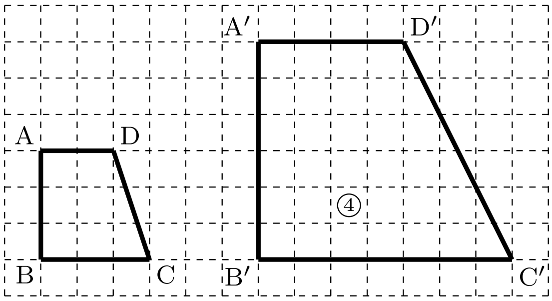
①では横の長さはもとの図形の 2 倍になっていますが縦の長さはもとの図形の 2 倍にはなっていません。（これはマス目をしっかり数えるとわかります。）ですから、①はもとの図形より図形全体としては拡大しているのですが、横の長さと縦の長さの拡大の仕方が違っているため形が変わってしまったのです。実は、「普通に」コピー機で 2 倍に拡大すると横の長さも縦の長さも 2 倍になるのです。ですから①は正しい答えではないのです。



②はどうしてダメなのかというと・・・

右の図を見てください。もとの図形と②を並べて描いておきました。

②では縦の長さはもとの図形の 2 倍になっていますが横の長さはもとの図形の 2 倍にはなっていません。（これはマス目をしっかり数えるとわかります。）ですから、①はもとの図形より図形全体としては拡大しているのですが、横の長さと縦の長さの拡大の仕方が違っているため形が変わってしまったのです。前にも言ったとおり、実は、「普通に」コピー機で 2 倍に拡大すると横の長さも縦の長さも 2 倍になるのです。ですから②は正しい答えではないのです。



④はどうしてダメなのかというと・・・

右の図を見てください。もとの図形と④を並べて描いておきました。もとの図と④は形はそっくりに見えますね。そこでマス目をしっかり数えて詳しく調べることにしましょう。説明のために、右の図のように四角形の頂点に名前をつけて、もとの図形を四角形 ABCD、④を四角形 A′B′C′D′ と呼ぶことにします。もとの四角形の辺 AB の長さは 3 マス分で、大きくなった四角形の辺 A′B′ の長さは 6 マス分なのでちゃんと 2 倍になっています。また、もとの四角形の辺 AD の長さは 2 マス分で、大きくなった四角形の辺 A′D′ の長さは 4 マス分なのでちゃんと 2 倍になっています。今のところ縦にも横にもちゃんと 2 倍になっているようです。では、一体どこがダメなのでしょうか。

実は、よく図を見ると、BC は 3 マス分の長さですが B′C′ は 7 マス分の長さになっているので 2 倍にはなっていないのです。つまり、横の方向では、上（AD や A′D′ のところ）と下（BC や B′C′ のところ）で拡大の仕方が違っているのです。ですから、この 2 つの四角形は「形」が違っているのです。前にも言ったとおり、「普通に」コピー機で 2 倍に拡大すると横の長さも縦の長さも 2 倍になるので「形」はかわません。ですから④は正しい答えではないのです。

さて、①、②、④とは違って、③の四角形は「どこをとっても」もともとの四角形の 2 倍に拡大されています。もとの四角形と②の四角形のいろいろなところの長さを比べて見てください。マス目をしっかり数えて「どこをとっても」2 倍の長さになっているということを確かめてみてくださいね。

というわけで、コピー機で「普通に」拡大や縮小をすると、縦にも横にも、さらにありとあらゆる向きにも同じ倍率で拡大や縮小が行われ、図形の形は変わらないことになるのです。

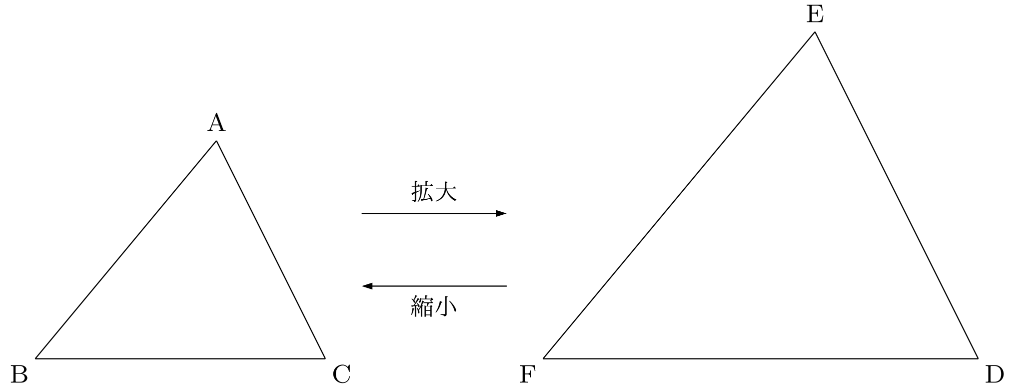
ではここで専門用語をあなたに覚えてもらうことにしましょう。

図形どうしが相似であるってどういう意味？

ある図形を形を変えずに一定の割合に拡大または縮小して大きさだけを変えた図形を新しく作ったとします。このとき、新しくできた図形はもとの図形と**相似**であると言います。

例 1　(1)　相似な 2 つの三角形

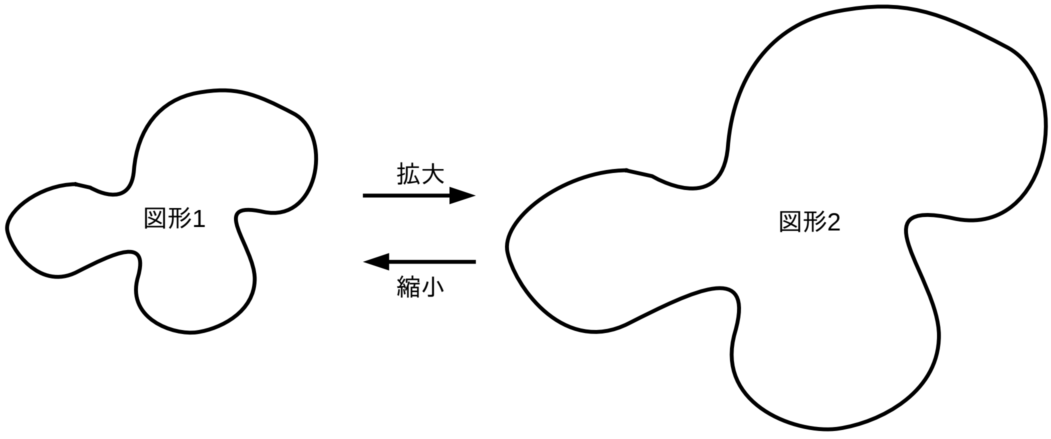
実は、次の図の 2 つの三角形は形は同じで大きさだけが違っています。



コピー機をうまい倍率に設定して △ABC を拡大すると △EFD ができます。また、コピー機をうまい倍率に設定して △EFD を縮小すると △ABC ができます。つまり △ABC と △EFD は相似です。

(2)　相似な 2 つのアメーバのような形

実は、次の図の 2 つのアメーバのような形は形は同じで大きさだけが違っています。



コピー機をうまい倍率に設定して図形 1 を拡大すると図形 2 ができます。また、コ

ピー機をうまい倍率に設定して図形 2 を縮小すると図形 1 ができます。つまり図形 1 と図形 2 は相似です。

2 つの図形が相似であることをあらわすマーク

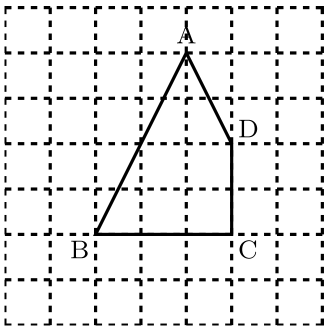
「2 つの図形が相似になっている」と言いたいときは「∽」というマークを使います。たとえば、さっきの例 1 の (1) のように △ABC と △EFD が相似になっているとき、

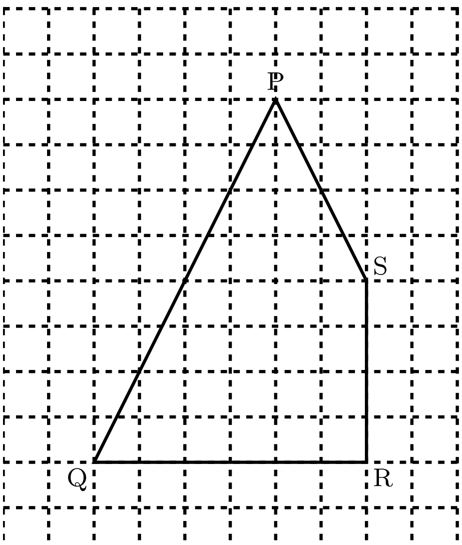
$$\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{EFD}$$

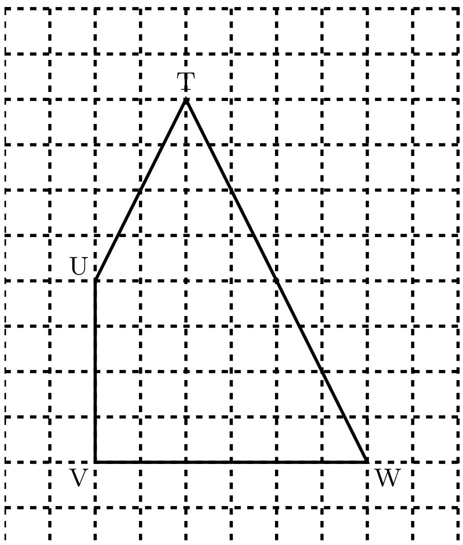
と書いておけば、「△ABC と △EFD が相似になっている」と言ったことになるのです。念のために注意をしておきますが、この場合 △ABC ∽ △DEF と書いてしまうと間違いになります。対応する点をそろえて書かないとダメですよね。

1.1.2　相似な図形どうしにはどんな特徴があるのでしょうか

右の図を見てください。これからコピー機を使い、この四角形 ABCD を 2 倍に拡大します。そしてこの四角形と相似な四角形を 2 つ作ろうと思います。そうすると、次の図のような四角形 PQRS と四角形 TUVW ができました。







ところで拡大された 2 つの四角形のうち、右側の四角形 TUVW を見て、おかしいと

思った人はいますか？実は、コピー機の調子が悪く、表と裏が逆になってしまったのです。でもマス目をよく数えてみてください。そうすればちゃんと 2 倍に拡大されていることがわかるでしょう。

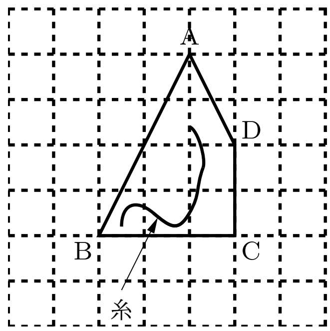
さて、ここであなたにいくつか質問があります。

質問 1　もとの四角形の頂点 A、B、C、D は拡大された 2 つの四角形のどの頂点とそれぞれ対応しますか。

質問 2　もとの四角形の ∠A、∠B、∠C、∠D は拡大された 2 つの四角形のどの角とそれぞれ対応しますか。また、拡大することによって角の大きさは変わりますか。

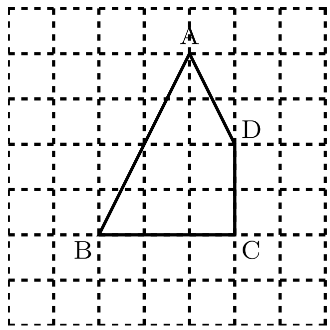
質問 3　もとの四角形の辺 AB、辺 BC、辺 CD、辺 DA は拡大された 2 つの四角形のどの辺とそれぞれ対応しますか。また、拡大することによってそれぞれの辺の長さは何倍になっていますか。

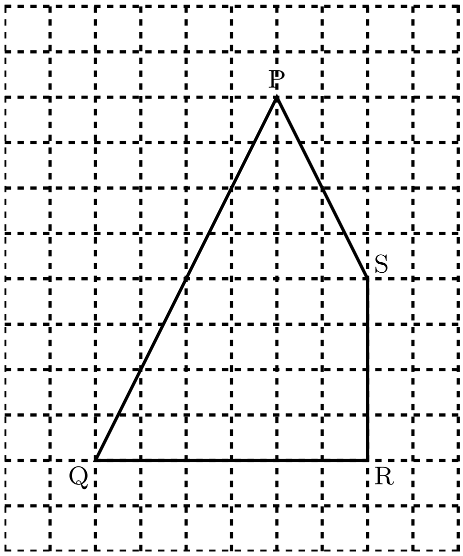
質問 4　コピー機で拡大するとき、右の図のようにもとの四角形 ABCD に長さが 3.5 cm の糸がくっついていたとします。コピー機で拡大すると、この糸も拡大されて写りますが、コピーに写った糸の長さは何 cm ですか。

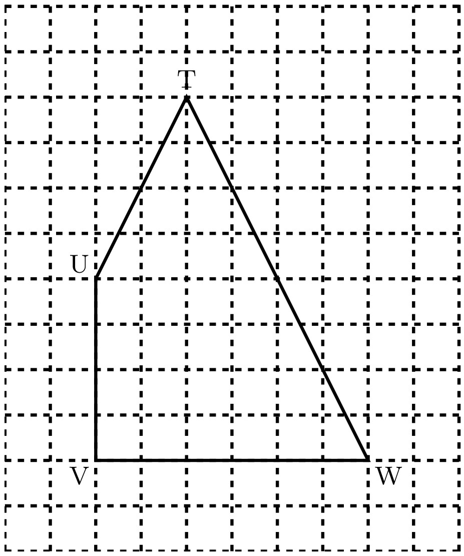


さて、質問の答えはわかりましたか。1 つ 1 つ説明することにしましょう。

質問 1 の答え　右と下の図を見てください。もとの四角形 ABCD と、2 倍に拡大した四角形 PQRS、四角形 TUVW をもう一度描いておきました。もとの四角形のどの頂点と拡大された四角形のどの頂点が対応するのかという質問でしたね。四角形 TUVW はもとの四角形を裏返して拡大されていることに気をつけておきましょう。







もとの四角形の頂点 A は、

　　　　拡大された四角形 PQRS の頂点 P と対応し、

　　　　拡大された四角形 TUVW の頂点 T と対応しますね。

もとの四角形の頂点 B は、

　　　　拡大された四角形 PQRS の頂点 Q と対応し、

　　　　拡大された四角形 TUVW の頂点 W と対応しますね。

もとの四角形の頂点 C は、

　　　　拡大された四角形 PQRS の頂点 R と対応し、

　　　　拡大された四角形 TUVW の頂点 V と対応しますね。

もとの四角形の頂点 D は、

　　　　拡大された四角形 PQRS の頂点 S と対応し、

　　　　拡大された四角形 TUVW の頂点 U と対応しますね。

では、相似をあらわすマーク「∽」を使って、もとの四角形と拡大された四角形が相似になっているということを書いてみることにします。このとき、どの頂点とどの頂点が対応しているのか気をつけなくてはいけませんね。これまで裏返った方の四角形を四角形 TUVW と呼んでいました。しかし対応する頂点をちゃんと気にすると、もとの四角形を四角形 ABCD と呼ぶ場合、裏返った方の四角形を四角形 TWVU と呼ばなくてはいけませんね。ですから、対応する点に気をつけてちゃん

と書くと、

$$\text{四角形 ABCD} \backsim \text{四角形 PQRS}$$

$$\text{四角形 ABCD} \backsim \text{四角形 TWVU}$$

となるのです。

質問 2 の答え　質問 1 の答えに書いてあった説明がわかった人には、もうくどい説明の必要はないでしょう。次の文の空欄に正しい記号を書いておいてください。

もとの四角形の ∠A は、

拡大された四角形 PQRS の ∠ $\boxed{}$ と対応し、

拡大された四角形 TUVW の ∠ $\boxed{}$ と対応しますね。

もとの四角形の ∠B は、

拡大された四角形 PQRS の ∠ $\boxed{}$ と対応し、

拡大された四角形 TUVW の ∠ $\boxed{}$ と対応しますね。

もとの四角形の ∠C は、

拡大された四角形 PQRS の ∠ $\boxed{}$ と対応し、

拡大された四角形 TUVW の ∠ $\boxed{}$ と対応しますね。

もとの四角形の ∠D は、

拡大された四角形 PQRS の ∠ $\boxed{}$ と対応し、

拡大された四角形 TUVW の ∠ $\boxed{}$ と対応しますね。

また、対応している角の大きさは変わりませんね。

質問 3 の答え　質問 1 の答えに書いてあった説明がわかった人には、もうくどい説明の必要はないでしょう。次の文の空欄に正しい記号を書いておいてください。

もとの四角形の辺 AB は、

拡大された四角形 PQRS の辺 $\boxed{}$ と対応し、

拡大された四角形 TUVW の辺 $\boxed{}$ と対応しますね。

もとの四角形の辺 BC は、

拡大された四角形 PQRS の辺 $\boxed{}$ と対応し、

拡大された四角形 TUVW の辺 $\boxed{}$ と対応しますね。

もとの四角形の辺 CD は、

拡大された四角形 PQRS の辺 $\boxed{}$ と対応し、

拡大された四角形 TUVW の辺 $\boxed{}$ と対応しますね。

もとの四角形の辺 DA は、

拡大された四角形 PQRS の辺 $\boxed{}$ と対応し、

拡大された四角形 TUVW の辺 $\boxed{}$ と対応しますね。

また、対応している辺の長さはどれももとの長さの 2 倍になっていますね。

質問 4 の答え　コピー機を使い、倍率を 2 倍にしてもとの四角形 ABCD を拡大すると、どの辺も「長さ」は 2 倍になりましたよね。このことと同じように、コピーするときに入り込んでしまった糸も「長さ」は 2 倍に拡大されるのです。もとの糸の長さは 3.5 cm でしたね、ですから答えは 7 cm です。

このように、コピー機の倍率を 2 倍に設定して普通に拡大すると、どこをとっても均等に「長さ」が 2 倍になるのです。

以上の質問を考えてみてわかったことをまとめておきます。

相似な図形の性質

2 つの図形があり、この 2 つの図形は相似になっているとします。そうすると、

(1) 対応している部分どうしの長さを比べると、どこを比べても長さの比は全て等しくなっています。

(2) 対応している角の大きさはそれぞれ等しくなっています。

1.1.3　相似な図形をつくる方法

これから図形を拡大したり縮小したりする方法について学びますが、前置きの話を 2 つします。

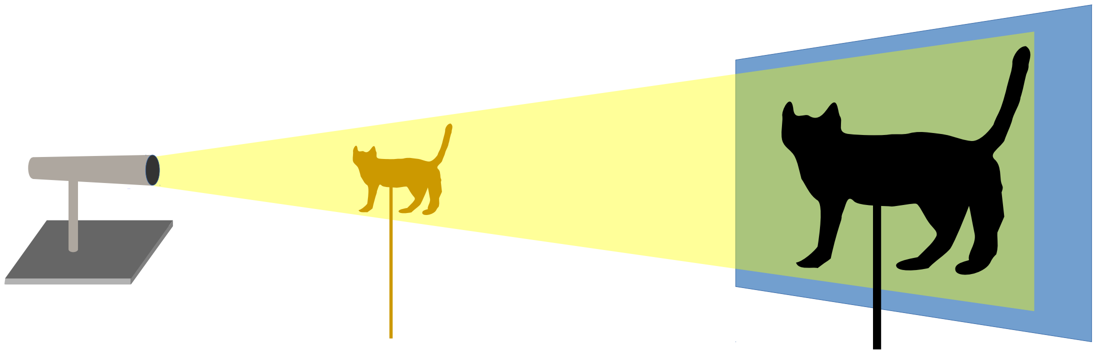
前置きの話その１：ナスカの地上絵

あなたは「ナスカの地上絵」というものを知っていますか？南アメリカにあるペルーという国の広大な高原に、鳥、動物、人、虫などの巨大な絵が描かれているのです。絵の大きさは 45 m ぐらいから 180 m ぐらいととても大きく、地上に立っているだけではどんな絵が描かれているのかわかりません。飛行機やヘリコプターに乗って上空から見ると全体を見ることができるので、どんな絵なのかわかります。ところで、ナスカの地上絵は紀元前 2 世紀から紀元後 8 世紀の間に描かれたらしいのですが、そんな大昔には今のような科学技術はありません。こんなに巨大な絵を当時の人は一体どうやって描いたのでしょうか。こんな大きい絵は高度な技術がない当時の人には描けるわけがないので、宇宙人が描いたという説を唱える人もいます。しかし、実は相似な図形のことをよく知っていると、このような巨大な絵も正確に描くことができるのです。

ナスカの地上絵（手）
ilkerender; Nazca Lines, Nazca, peru
Nazca lines trip with a small airplane
photo credit: ilkerender via photopin cc

前置きの話その 2：影絵

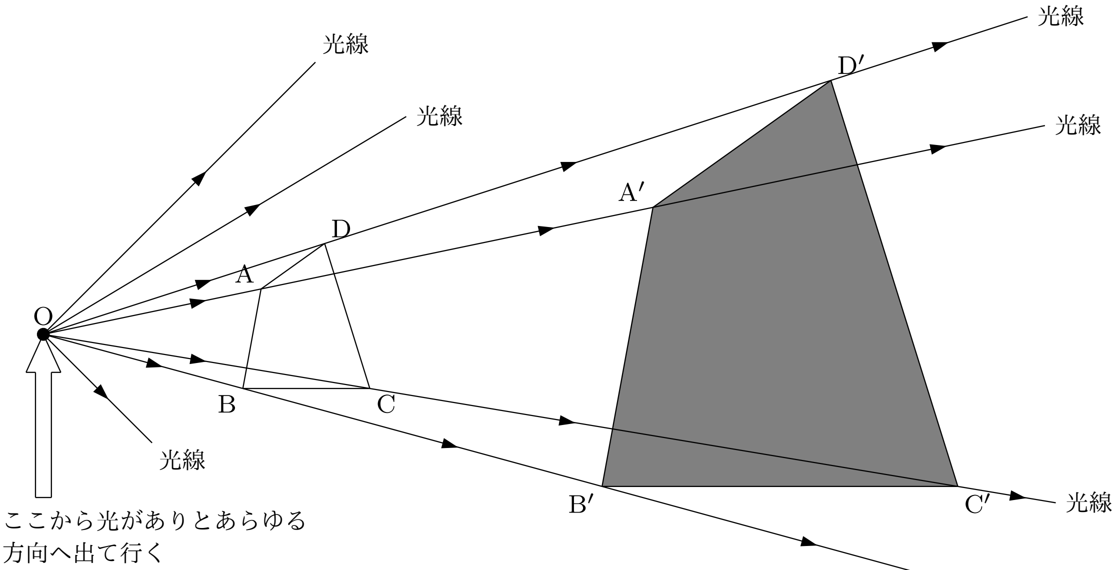
次の図を見てください。



これは猫の影絵を作っているところを表した図です。

この図のように、ある物体にある一点から出て行く光を当てるとスクリーンに影を作ることができます。物体の影はもとの物体より大きくなります。そしてこのとき、物体とスクリーンが平行になっていると、形はもとのまま変わらず大きさだけが拡大されるのです。もし物体がスクリーンに対して斜めに傾いていると、物体の影は形が歪んでしまします。

この影絵の原理を少し詳しく考えてみましょう。次の図を見てください。点 O から光が出て行き、四角形 ABCD に光があたり、スクリーンには四角形 ABCD が拡大された影として四角形 A′B′C′D′ できています。



ところでこの図にはどんな特徴があるのでしょうか。あなたも図をよく見て考えてくだ

さい、なにか気がついたことはありますか？（特に、この図に描かれているいろいろな線の長さに注目してください。）5 分待ちます。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

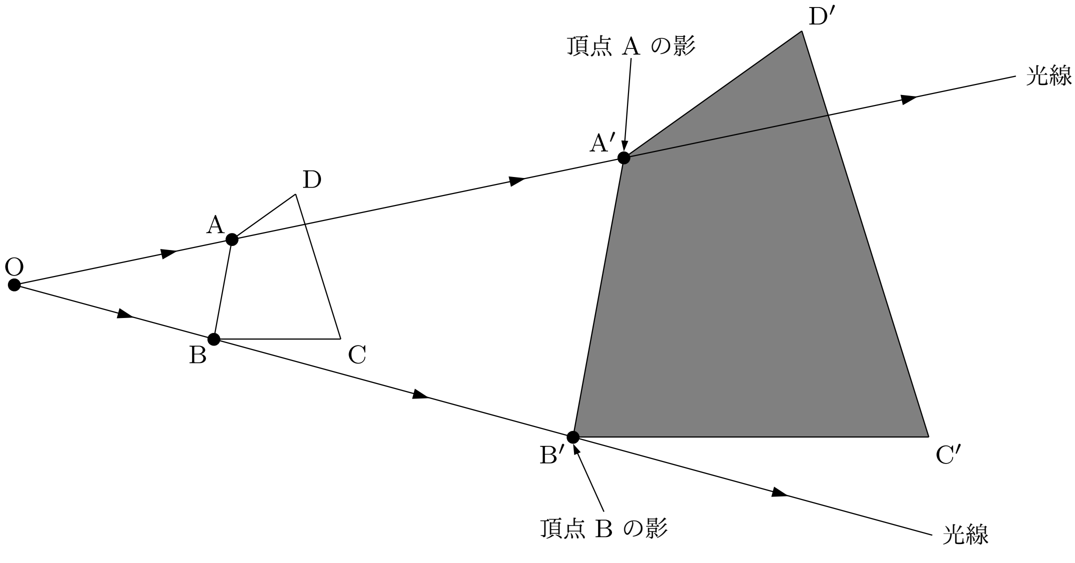
・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・

はい、5 分たちました。なにかおもしろいことに気が付きましたか？人によって気がつくことは色々とちがうと思いますが、この図には、例えばこれから説明する次のような特徴があります。O から出た光はありとあらゆる方向へ進みますが、例えば四角形 ABCD の頂点 A へまっすぐ向かう光線をたどってみることにしましょう。その光線は頂点 A を通過したあともまっすぐ進み、スクリーンのところに頂点 A の影を作ります。つまりこの図の点 A′ が頂点 A の影ですね。今度は四角形 ABCD の頂点 B を通過する光線のことを考えてみましょう。その光線は頂点 B を通過したあともまっすぐ進み、スクリーンのところに頂点 B の影を作ります。つまりこの図の点 B′ が頂点 B の影ですね。

　では次の図を見てください。



　ありとあらゆる方向に進む光のうち、頂点 A を通過する光線と頂点 B を通過する光線

を描いておきました。この図を見ると気がつくかもしれませんが、頂点 A を通過する光線と頂点 B を通過する光線の間には次のような特徴があるのです。

「O から A までの距離と O から A' までの距離の比は O から B までの距離と O から B' までの距離の比と等しい。」

どういうことかわかりましたか？図をもう一度よく見て考えてくださいね。今説明したことは、式を使って書くと、

$$\mathrm{OA'} : \mathrm{OA} = \mathrm{OB} : \mathrm{OB'}$$

と言っているのです。

これまで頂点 A を通過する光線と頂点 B を通過する光線について考えてきました。では、他の頂点、つまり頂点 C や頂点 D を通過する光線についてはどうなのでしょうか。実はこれらの光線についても全く同じことが言えます。つまり、

$$\mathrm{OA'} : \mathrm{OA} = \mathrm{OB} : \mathrm{OB'} = \mathrm{OC} : \mathrm{OC'} = \mathrm{OD} : \mathrm{OD'}$$

が成り立っているのです。

つまり、形を変えないで大きさだけを拡大して影絵を作るには、距離の比がどこでも等しくなっていることが重要なのです。初めにも言ったように、物体がスクリーンに対して傾いていると影の形はもとの物体とは違ってしまい、ゆがんだ影ができてしまうのです。

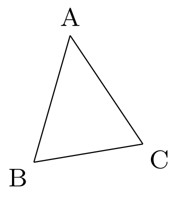
前置きの話はここまでにして、本題に入ることにしましょう。

形を変えずに図形を拡大、縮小する方法

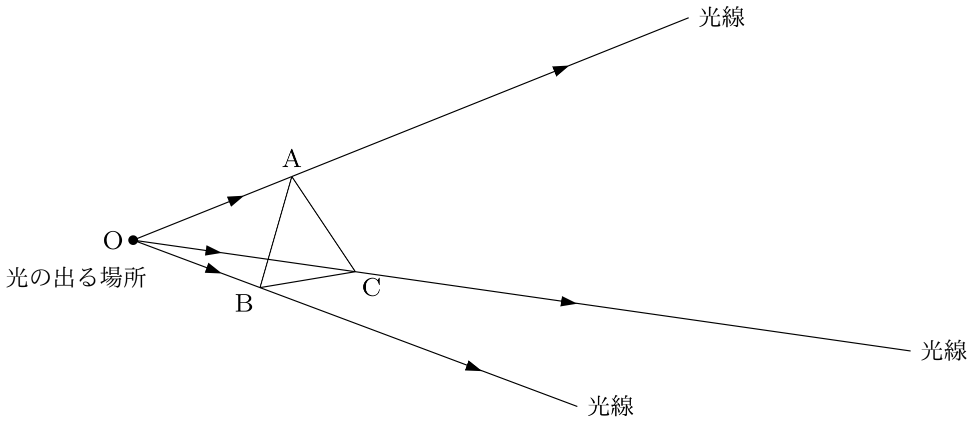
例を使って説明していきます。

例 2　三角形の形を変えずに 3 倍に拡大する方法その 1

右の図の $\triangle\mathrm{ABC}$ をこれから次の手順にしたがって 3 倍に拡大します。

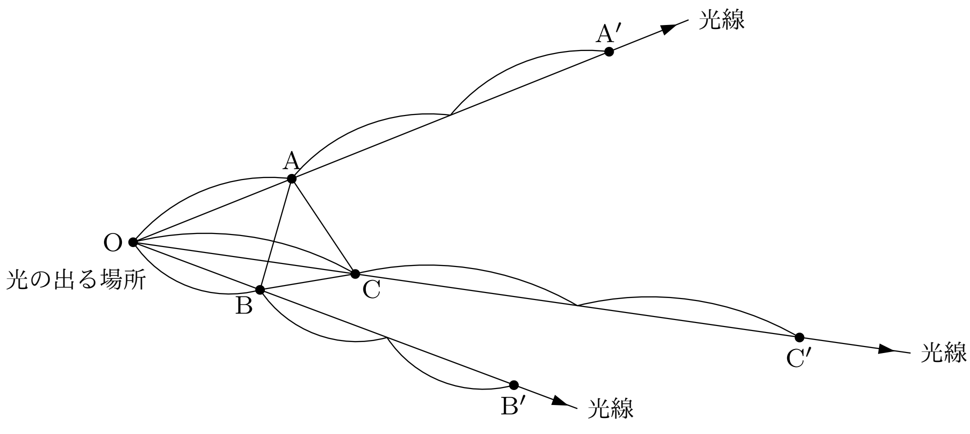


手順 1　次の図を見てください。三角形の外側の自分の好きなところに光の出る場所 O を打ちます。そして O から出ていく光線で、頂点 A、頂点 B、頂点 C を通過するものをそれぞれ描きます。



手順 2　次の図を見てください。まず O から各頂点 A、B、C までの距離をそれぞれ測ります。そして次に手順 1 で描いた光線の上に点 A′、B′、C′ を打ちます。ただし次のように気をつけて打ちます。

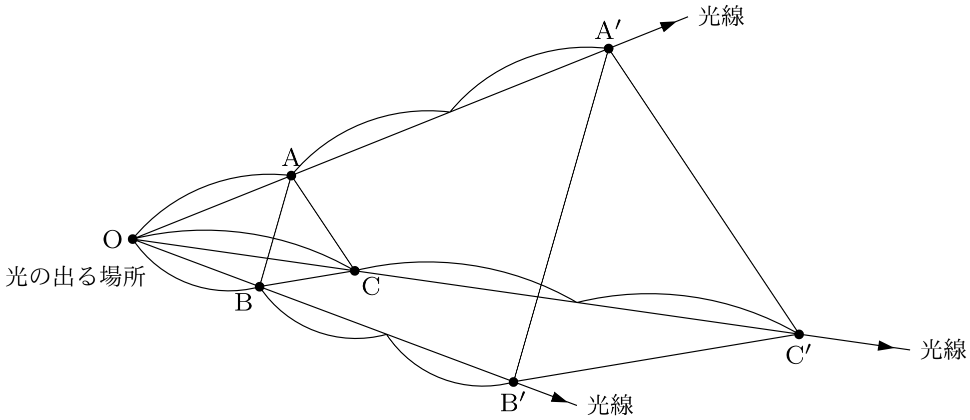
- A′ は A を通る光線の上に打ちますが、O からの距離が OA の 3 倍になっているところに打ちます。
- B′ は B を通る光線の上に打ちますが、O からの距離が OB の 3 倍になっているところに打ちます。
- C′ は C を通る光線の上に打ちますが、O からの距離が OC の 3 倍になっているところに打ちます。



$\mathrm{OA}' = 3\mathrm{OA}$、$\mathrm{OB}' = 3\mathrm{OB}$、$\mathrm{OC}' = 3\mathrm{OC}$ となるように A′、B′、C′ を打つ

手順 3　次の図のように、手順 2 で打った A′、B′、C′ を結んで $\triangle \mathrm{A'B'C'}$ を作ると出来上

がりです。

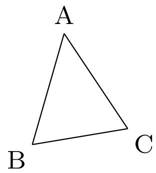


もとの $\triangle$ABC と形は同じで、3 倍に拡大された $\triangle$A′B′C′ ができたのです。

問 1. 目盛りのついた定規と紙と鉛筆を用意してください。そしてまず、自分の好きな形の五角形を紙の上に描いてください。ここまでの準備ができたら、例 2 の方法をまねして、自分の描いた五角形を 2 倍に拡大した五角形を描いてください。　答えを見る

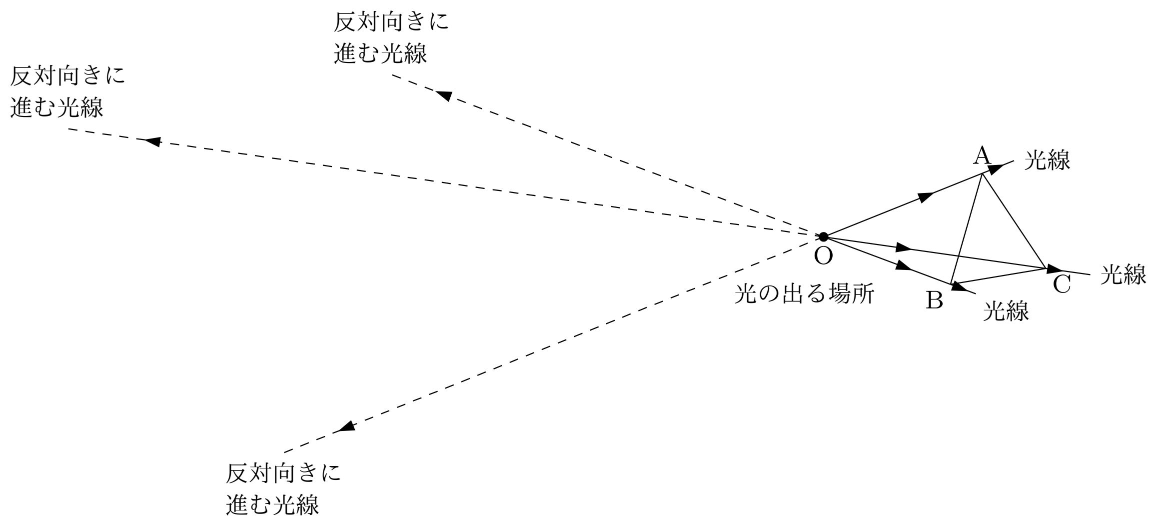
問 2. 目盛りのついた定規と紙と鉛筆を用意してください。そしてまず、自分の好きな形の四角形を紙の上に描いてください。ここまでの準備ができたら、例 2 の方法をまねして、自分の描いた四角形を $\frac{1}{2}$ 倍に縮小した四角形を描いてください。　答えを見る

例 3　三角形の形を変えずに 3 倍に拡大する方法その 2



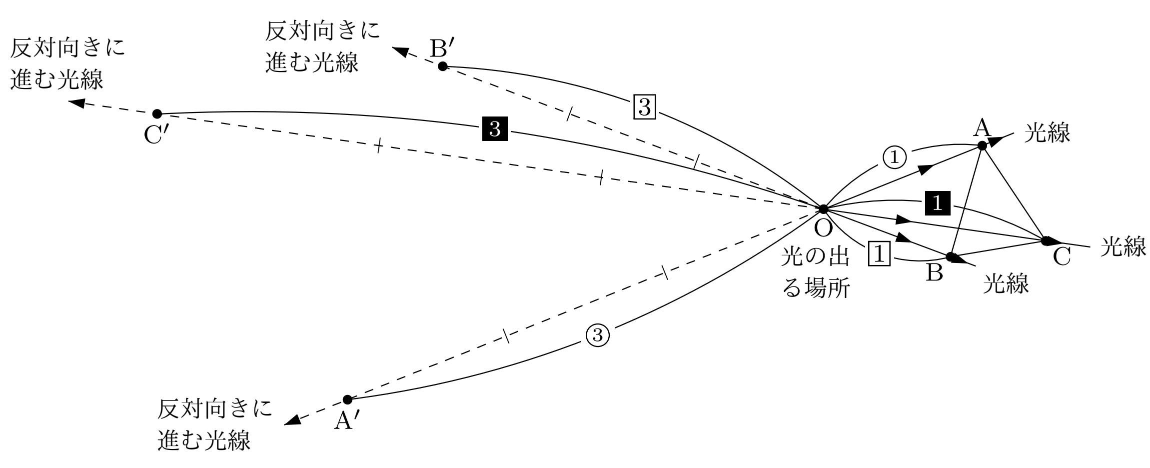
右の図の $\triangle$ABC をこれから次の手順にしたがって 3 倍に拡大します。ただし、例 2 とは違う方法で拡大します。

手順 1　次の図を見てください。三角形の外側の自分の好きなところに光の出る場所 O を打ちます。そして O から出ていく光線で、頂点 A、頂点 B、頂点 C を通過するものをそれぞれ描きます。ここまでは例 2 と同じですが、次の図を見るとわかるように、さらに、反対向きに進む光線も描いておきます。この図では反対向きに進む光線は点線で描いておきました。



手順2　次の図を見てください。まずOから各頂点A、B、Cまでの距離をそれぞれ測ります。そして次に手順1で描いた反対向きに進む光線の上に点A′、B′、C′を打ちます。ただし次のように気をつけて打ちます。

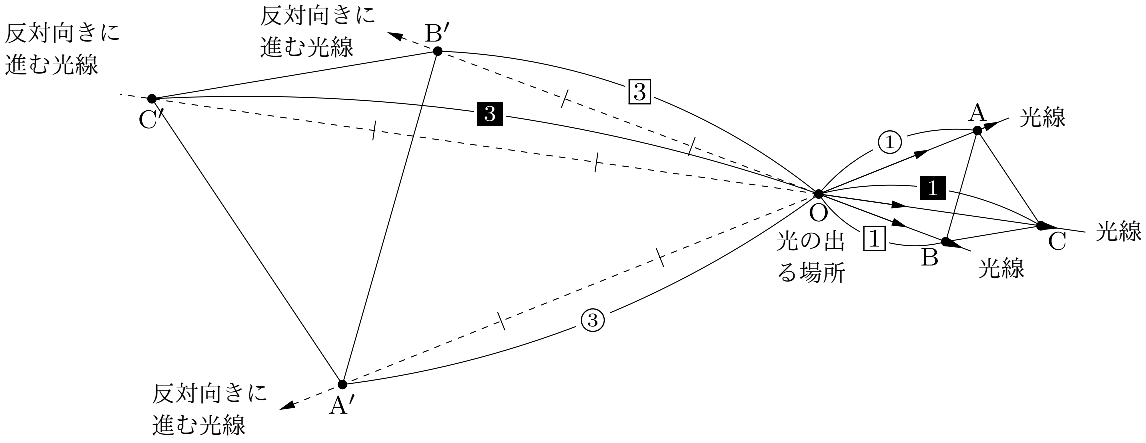
- A′はAに向かう光線とは反対向きに進む光線の上に打ちますが、Oからの距離がOAの3倍になっているところに打ちます。
- B′はBに向かう光線とは反対向きに進む光線の上に打ちますが、Oからの距離がOBの3倍になっているところに打ちます。
- C′はCに向かう光線とは反対向きに進む光線の上に打ちますが、Oからの距離がOCの3倍になっているところに打ちます。



OA′ = 3OA、OB′ = 3OB、OC′ = 3OC となるように A′、B′、C′ を打つ

手順3　次の図のように、手順2で打ったA′、B′、C′を結んで△A′B′C′を作ると出来上

がりです。



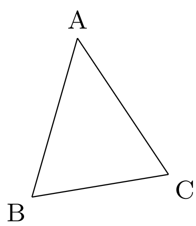
もとの △ABC と形は同じで、3 倍に拡大された △A′B′C′ ができたのです。

問 3. 目盛りのついた定規と紙と鉛筆を用意してください。そしてまず、自分の好きな形の四角形を紙の上に描いてください。ここまでの準備ができたら、例 3 の方法をまねして、自分の描いた四角形を 2 倍に拡大した四角形を描いてください。 答えを見る

問 4. 目盛りのついた定規と紙と鉛筆を用意してください。そしてまず、自分の好きな形の三角形を紙の上に描いてください。ここまでの準備ができたら、例 3 の方法をまねして、自分の描いた三角形を $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小した三角形を描いてください。 答えを見る

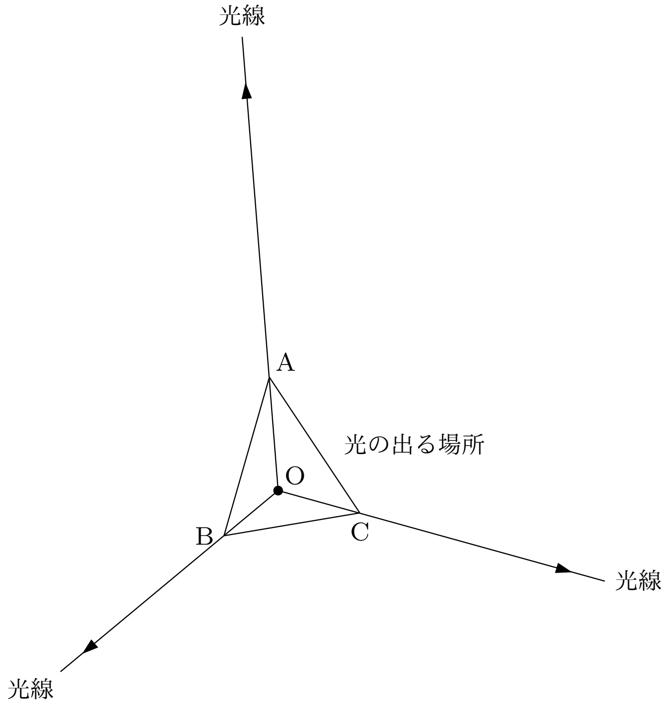
例 4 三角形の形を変えずに 3 倍に拡大する方法その 3

右の図の △ABC をこれから次の手順にしたがって 3 倍に拡大します。ただし、例 2 や例 3 とは違う方法で拡大します。



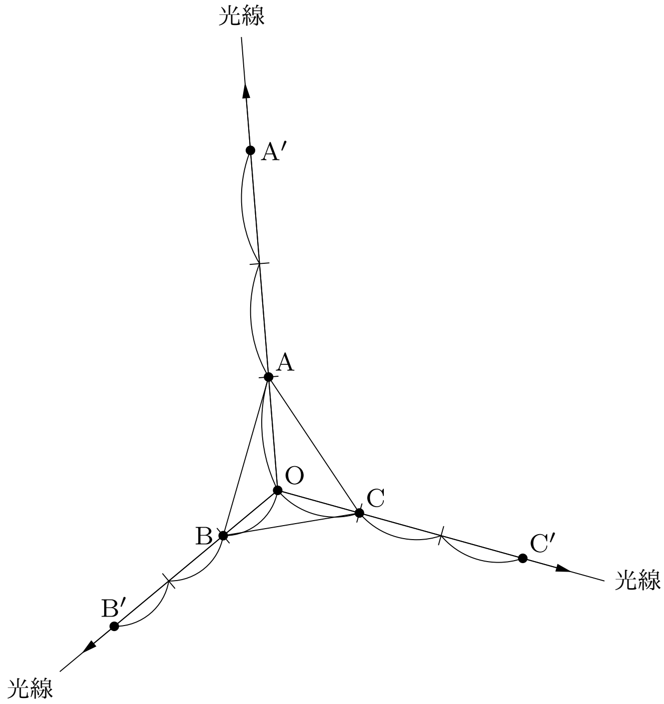
手順 1 次の図を見てください。三角形の内側の自分の好きなところに光の出る場所 O を打ちます。そして O から出ていく光線で、頂点 A、頂点 B、頂点 C を通過するものをそれぞれ描きます。(例 2 や例 3 では三角形の外側に光の出る点を打ちまし

たね。）



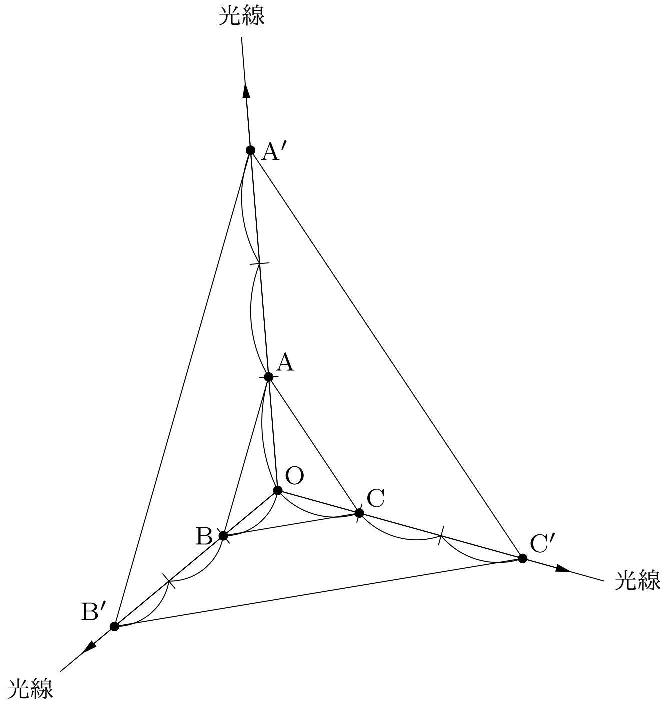
手順 2　次の図を見てください。まず O から各頂点 A、B、C までの距離をそれぞれ測ります。そして次に手順 1 で描いた光線の上に点 A′、B′、C′ を打ちます。ただし次のように気をつけて打ちます。

- A′ は A を通る光線の上に打ちますが、O からの距離が OA の 3 倍になっているところに打ちます。
- B′ は B を通る光線の上に打ちますが、O からの距離が OB の 3 倍になっているところに打ちます。
- C′ は C を通る光線の上に打ちますが、O からの距離が OC の 3 倍になっているところに打ちます。



OA′ = 3OA、OB′ = 3OB、OC′ = 3OC となるように A′、B′、C′ を打つ

手順 3　次の図のように、手順 2 で打った A′、B′、C′ を結んで △A′B′C′ を作ると出来上がりです。



もとの △ABC と形は同じで、3 倍に拡大された △A′B′C′ ができたのです。

問 5. 目盛りのついた定規と紙と鉛筆を用意してください。そしてまず、自分の好きな形の四角形を紙の上に描いてください。ここまでの準備ができたら、例 4 の方法をまねして、自分の描いた四角形を 2 倍に拡大した四角形を描いてください。 答えを見る

問 6. 目盛りのついた定規と紙と鉛筆を用意してください。そしてまず、自分の好きな形の五角形を紙の上に描いてください。ここまでの準備ができたら、例 4 の方法をまねして、自分の描いた五角形を $\frac{1}{2}$ 倍に縮小した五角形を描いてください。 答えを見る

問 7. 目盛りのついた定規と紙と鉛筆を用意してください。そしてまず、自分の好きな形の三角形を紙の上に描いてください。ここまでの準備ができたら、例 2、例 3、例 4 とは違う方法で、自分の描いた三角形を 3 倍に拡大した三角形を描いてください。（ヒント：光の出る場所は三角形の内側にします。そして、反対向きに進む光線を利用します。）

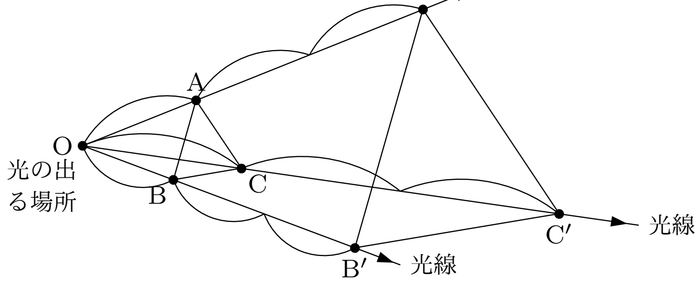
答えを見る

ここまで、ある一点から出る光線を利用して形を変えずに図形を拡大したり縮小したりする方法を学んできました。数学では、この、光線のでる点のことを**相似の中心**と呼んでいます。また、「拡大 (または縮小) された図形」と「もとの図形」は「光線の出る場所を相似の中心」として**相似の位置にある**と言ったりすることがあります。

それではここまでに学んだことを念のためまとめておきます。

相似な図形を作る方法

右の図のようにして、ある一点 O から出る光線を利用して図形を拡大したり縮小したりすることができます。



(1) 点 O はもとの図形の内側にとることもできますし、外側にとることもできます。

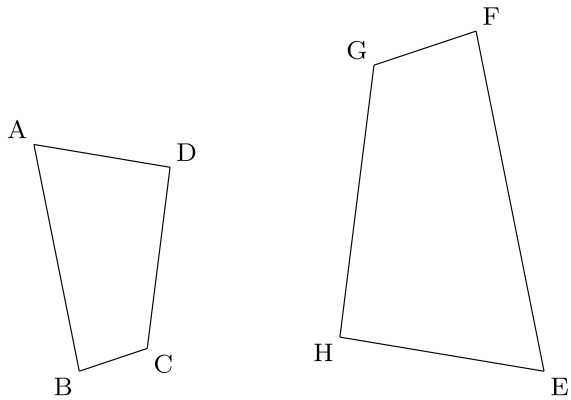
(2) 光線はもとの図形へ向かう方向へ出すこともできますし、もとの図形と反対の方向へ出すこともできます。

(3) 2 つの図形 (つまり「拡大または縮小された図形」と「もとの図形」) の対応する点を結んでできる直線はどれも必ず点 O に集まります。

(4) O から対応する点までの距離の比は全て等しくなっています。(例えばこの図では、$\mathrm{OA} : \mathrm{OA}' = \mathrm{OB} : \mathrm{OB}' = \mathrm{OC} : \mathrm{OC}' = 1 : 3$ となっています。)

(5) 光線の出る場所 O は**相似の中心**と呼ばれています。またこのとき、2 つの図形は相似の中心 O に関して**相似の位置にある**と言うことがあります。

問 8. 右の図を見てください。紙の上に 2 つの四角形が描かれています。この 2 つの四角形がある点を中心にして相似の位置にあるのかどうか調べるためにはどんなことをすれば良いか考えなさい。ただし、使ってよいのは目盛りのついた定規と鉛筆だけです。

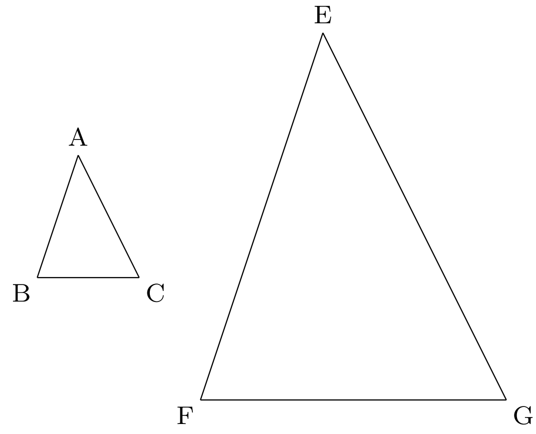


答えを見る

1.1.4　相似比ってなに？

これまで、例えば、「三角形を 3 倍に拡大する」などと言ったりしましたが、詳しく考えると三角形の「何が」3 倍に拡大されるのでしょうか。面積が 3 倍に拡大されるのでしょうか。それとも、角の大きさが 3 倍に拡大されるのでしょうか。ここまで注意深く学んできた人は気づいていると思いますが、「長さ」が 3 倍に拡大されるのですよね。

では右の図を見てください。実はこの図では、$\triangle$ABC が 3 倍に拡大されて $\triangle$EFG ができています。ですから、



$$\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{EFG}$$

となっています。何が 3 倍に拡大されているのかというとさっきも説明したとおり、「長さ」が 3 倍に拡大されているわけです。ですからこの図では、例えば、

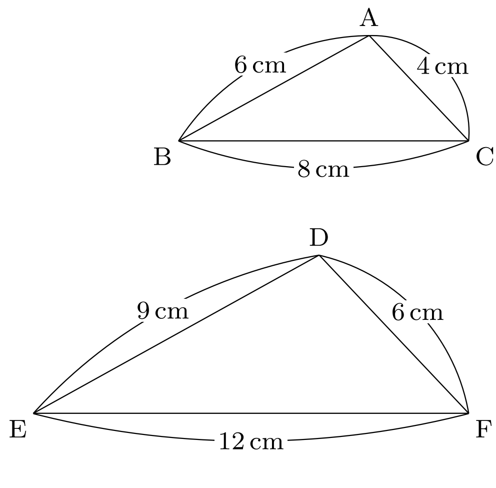
辺 EF の長さは辺 AB の長さの 3 倍

辺 FG の長さは辺 BC の長さの 3 倍

辺 GE の長さは辺 CA の長さの 3 倍

となっているのです。2 つの三角形で対応している部分の長さを比べてみると、どこを比べても $\triangle$EFG は $\triangle$ABC の 3 倍なのです。このようなとき、「$\triangle$ABC と $\triangle$EFG の相似比は 1 : 3 である」と言うことがあります。つまり、**相似比**とは対応する部分の長さの比のことなのです。

例 5　右の図の 2 つの三角形を見てください。$\triangle$DEF は $\triangle$ABC をある倍率で拡大したもので、$\triangle$ABC $\backsim$ $\triangle$DEF となっています。この図をよく見て 2 つの三角形の相似比を調べることにしましょう。



相似比とは対応する部分の長さの比なのでしたね。そこで例えば $\triangle$ABC の辺 AB と $\triangle$DEF の辺 DE に注目してみます。（辺 AB が拡大されて辺 DE になるんですよね。）辺 AB は 6 cm で辺 DE は 9 cm なのですから何倍になっているのかというと、わり算を使えば、

$$9 \div 6 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

となり $\dfrac{3}{2}$ 倍に拡大されたということがわかりますね。ですから、

$$\triangle\mathrm{ABC} \text{ と } \triangle\mathrm{DEF} \text{ の相似比は } 1 : \frac{3}{2} \text{ である}$$

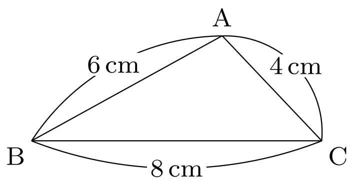
　ということになります。相似比の中に分数が入っているので少し気分が悪い人もいるかもしれませんね。そんな時は相似比の中のそれぞれの数を 2 倍してみましょう。そうすれば、$1 : \dfrac{3}{2}$ を $2 : 3$ に取り替えることができます。ですから、

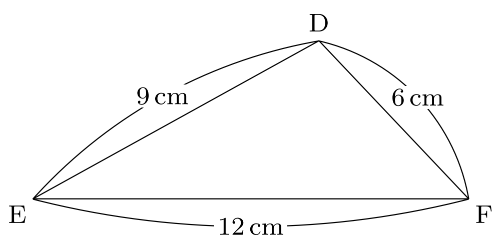
$$\triangle\mathrm{ABC} \text{ と } \triangle\mathrm{DEF} \text{ の相似比は } 2 : 3 \text{ である}$$

　と答えることもできるわけです。

　ここまで、「△DEF は △ABC を何倍に拡大したものなのだろう？」ということを調べ、その結果をもとに相似比を見つけました。ですが、「△DEF は △ABC を何倍に拡大したものなのだろう？」ということを調べなくてももっと直接的に相似比を見つけることもできます。そのことをこれから説明します。

　右の図を見てください。もう一度この例の図を描いておきました。





　辺 AB の長さは 6 cm で辺 DE の長さは 9 cm なのですから辺 AB の長さと辺 DE の長さの比は、

$$6 : 9$$

ですよね。ところで $6 : 9$ という比ですが、それぞれの数を 3 でわって、

$$6 : 9 = 2 : 3$$

というように見かけを変えることができますよね。このようにしてもやはり、

$$\triangle\mathrm{ABC} \text{ と } \triangle\mathrm{DEF} \text{ の相似比は } 2 : 3 \text{ である}$$

ということがわかるわけです。

以上、辺 AB と辺 DE に注目し、2 通りの考え方で 2 つの三角形の相似比を求めてみました。ところでここで思い出してほしいことがあります。それは、以前学んだ「相似な図形の性質」です。どんな性質だったのかというと「相似な図形では対応している部分の長さを比べてみると、どこを比べても比は全て等しくなっている」ということです。ということは、この例の 2 つの三角形の相似比を求めるとき、辺 AB と辺 DE に注目する代わりに例えば辺 AC と辺 DF に注目してもよいわけです。(だって、辺 AC が拡大されて辺 DF になるんですよね。) そうすると、辺 AC の長さは 4 cm で辺 DF の長さは 6 cm ですから △ABC と △DEF の相似比は、

$$4 : 6$$

ということになりますね。ところで 4 : 6 という比ですが、それぞれの数を 2 でわれば、

$$4 : 6 = 2 : 3$$

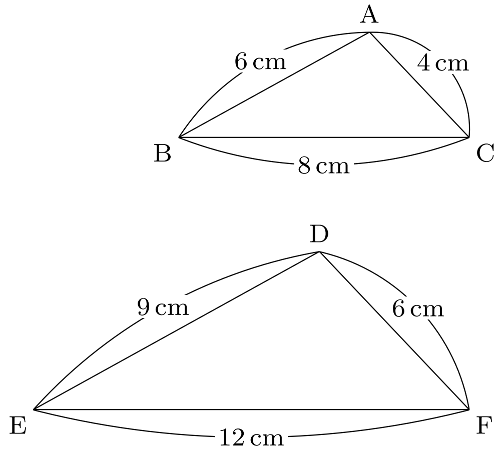
というように見かけを変えることができます。というわけで、辺 AB と辺 DE に注目する代わりに例えば辺 AC と辺 DF に注目した場合でも、ちゃんと、

△ABC と △DEF の相似比は 2 : 3 である

ということがわかるわけです。

問 9. 例 5 の説明が理解できた人のための問題です。

右の図を見てください。例 5 と同じ 2 つの相似な三角形が描かれています。例 5 の説明では、△ABC と △DEF の相似比を、辺 AB と辺 DE に注目したり、辺 AC と辺 DF に注目したりすることによって求めました。今度は辺 BC と辺 EF に注目して △ABC と △DEF の相似比を求めなさい。

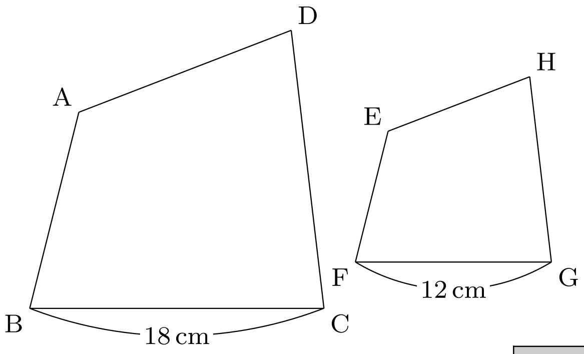


答えを見る

問 10. 右の図で、

四角形 ABCD $\backsim$ 四角形 EFGH

であるとします。四角形 ABCD と四角形 EFGH の相似比を求めなさい。

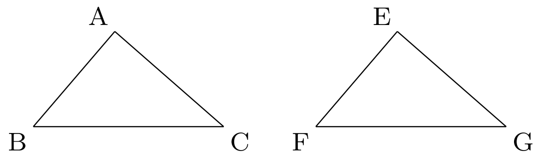


答えを見る

問 11. 次の問に答えなさい。

(1) 右の図で、

$$\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{EFG}$$



であるとします。このとき、△ABC と △EFG は相似であるといえますか。また、もし相似であるといえるなら、△ABC と △EFG の相似比も答えなさい。

(2) 2 つの図形があり、その 2 つの図形は合同であるとします。このとき、この 2 つの図形は相似であるといえますか。また、もし相似であるといえるなら、この 2 つの図形の相似比も答えなさい。

答えを見る

1.1.5　比の性質

小学校ですでに比についてしっかり学んでいるはずです。ですからこれまで「比のことは一応わかっている」として相似比のことを学んできました。しかし、比のことがあまり良くわからないまま中学生になってしまった人も多いようです。そこでここでは、おさらいも兼ねて比についてしっかり学んでおこうと思います。

比は、例えば、$2:3$ のように「:」というマークを使って表されます。ところでそもそも「$2:3$」ってどういう意味なのでしょうか。こんなことをあらためて聞かれると困ってしまう人も多いかもしれませんね。あなたはどうですか？小学校ではどういう意味だと教わりましたか？では答えを教えることにしましょう。実は、「$2:3$」というのは「$\dfrac{2}{3}$」と

いう分数のことなのです。もっと一般的にいうと、「$a:b$」というのは「$\dfrac{a}{b}$」という分数のことなのです。これはとても大事なことなので念のため次にまとめておきます。

大事なこと 1：比の意味

$a:b$ というのは $\dfrac{a}{b}$ という分数のことです。

では話を進めます。これで比の意味についてわかったわけです。ところでこの比ですが、$2:3=4:6$ のように、2 つの比が「=」で結ばれているのをよく見ますよね。これってどんなことを意味しているのでしょうか。詳しく考えてみることにします。

さっき学んだ「大事なこと 1」によると、$2:3$ というのは $\dfrac{2}{3}$ という分数のことで、$4:6$ というのは $\dfrac{4}{6}$ という分数のことでしたね。ですから、

$$2:3=4:6$$

という式の意味は、

$\dfrac{2}{3}$ という分数と $\dfrac{4}{6}$ という分数は等しいんだよ

ということになりますね。（念のためいっておきますが、$\dfrac{2}{3}$ という分数と $\dfrac{4}{6}$ という分数は「見かけ」は違っていますが「同じ数」ですよね。）では、今説明したことをまとめておきます。

大事なこと 2：2 つの比が等号で結ばれているのはどういう意味？

$a:b=c:d$ とは $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ という意味です。

ここから先は中学校で学ぶ「等式を変形するときにやってもよいこと」を利用して話を進めます。「等式を変形するときにやってもよいこと」を利用して、$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ という等式

を書き換える練習をするのです。しかし、「等式を変形するときにやってもよいこと」を忘れてしまった人もいるかもしれませんね。そこでまず、「等式を変形するときにやってもよいこと」をあっさり復習します。(「等式を変形するときにやってもよいこと」は数学を学んでいるかぎり、絶対に忘れてはならない極めて重要なことです。不安のある人はここでしっかり復習してください。)

復習：等式を変形するときにやってもよいこと

重要な事実：等式を変形するときにやってもよいことその 1

「=」で結ばれている 2 つのものを入れかえても、相変わらず「=」で結ばれたままになります。つまり、

$$\boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$$

という等式の左側と右側を入れかえて

$$\boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$$

という等式に書きかえても良いのです。

重要な事実：等式を変形するときにやってもよいことその 2

「=」で結ばれている 2 つのもののどちらにも、同じものをたしている限り、相変わらず「=」で結ばれたままになります。つまり、

$$\boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$$

という等式の左側と右側に、同じ数または式をたして、

$$\boxed{\qquad\qquad} + \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad} + \boxed{\qquad\qquad}$$

という等式に書きかえても良いのです。

重要な事実：等式を変形するときにやってもよいことその 3

「＝」で結ばれている 2 つのもののどちらからも、同じものをひいている限り、相変わらず「＝」で結ばれたままになります。つまり、

$$\boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$$

という等式の左側と右側から、同じ数または式をひいて、

$$\boxed{\qquad\qquad} - \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad} - \boxed{\qquad\qquad}$$

という等式に書きかえても良いのです。

重要な事実：等式を変形するときにやってもよいことその 4

「＝」で結ばれている 2 つのもののどちらにも、同じものをかけている限り、相変わらず「＝」で結ばれたままになります。つまり、

$$\boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$$

という等式の左側と右側に、同じ数または式をかけて、

$$\boxed{\qquad\qquad} \times \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad} \times \boxed{\qquad\qquad}$$

という等式に書きかえても良いのです。

重要な事実：等式を変形するときにやってもよいことその 5

「＝」で結ばれている 2 つのもののどちらも、同じものでわる限り、相変わらず「＝」で結ばれたままになります。つまり、

$$\boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$$

という等式の左側と右側を、同じ数または式でわって、

$$\frac{\boxed{}}{\left(\right)} = \frac{\boxed{}}{\left(\right)}$$

という等式に書きかえても良いのです。ただし、「0 という数でわること」だけはやってはいけません。
（どうして 0 でわっていけないのか、あなたはもう知っていますよね。忘れてしまった人は正負の数のテキスト（このシリーズの）を探して、『$0 \div 3$ の答えは何？ $3 \div 0$ の答えは何？』の所をよく読みなおしましょう。）

それでは復習はここまでにして、本題に戻りましょう。

$a : b = c : d$ とは $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ という意味なのでしたね、そしてこれから、「等式を変形するときにやってもよいこと」を利用して $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ という等式の見かけを変えようとしているところでしたね。ではやってみることにします。まず、「等式を変形するときにやってもよいことその 3」を使って、

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

という等式の左辺と右辺に同じもの「b」をかけてみます。すると、

$$\frac{a}{b} \times b = \frac{c}{d} \times b$$

となりますが、左辺は約分ができますよね。つまり、

$$\frac{a}{\cancel{b}} \times \cancel{b} = \frac{c}{d} \times b$$

とできるので見かけをマシにすると、

$$a = \frac{cb}{d}$$

となるわけです。

次はまた、「等式を変形するときにやってもよいことその 3」を使って、この等式の左辺

と右辺に同じもの「d」をかけてみます。すると、

$$a \times d = \frac{cb}{d} \times d$$

となりますが、今度は右辺が約分ができますよね。つまり、

$$a \times d = \frac{cb}{\cancel{d}} \times \cancel{d}$$

とできるので見かけをマシにすると、

$$ad = cb$$

となるわけです。この等式の右辺の cb は bc に書き換えることができるので、結局、

$$ad = bc$$

となります。

ここまでの計算で次のことがわかったことになります。

大事なこと 3 : 2 つの比が等号で結ばれている式の見かけを変えるとどうなる？

$a : b = c : d$ という等式は $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ という等式と同じ意味の等式ですが、さらに、$ad = bc$ という等式に見かけを変えることもできます。

つまり、$a : b = c : d$ という等式と $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ という等式と $ad = bc$ という等式は見かけが違っていますが、全て同じ意味の等式なのです。ここで少し補足をしておきます。

補足：いま学んだように、$a : b = c : d$ という等式は $ad = bc$ という等式と同じ意味の等式なので $a : b = c : d$ という等式を $ad = bc$ という等式に書き換えることができるわけです。このようなことを覚えるとき、よく「外項の積イコール内項の積」というような言いまわしを使うことがあります。右を見てください。この説明をよく読むとわかると思

いますが、$a:b=c:d$ という等式の外側どうしをかけたものと内側どうしをかけたものをイコールで結ぶことにより $ad=bc$ という等式に書き換えることができるのです。外側の項の積を作るので「外項の積」といったり内側の項の積を作るので「内項の積」といったりするのです。

外側どうしを
かけて ad を
作る

$$a:b=c:d$$

内側どうしを
かけて bc を
作る

外側どうしをかけて作った ad と内側どうしをかけて作った bc を等号で結ぶと

$$ad=bc$$

という式ができる。

例題 1　謎の数 x があり、$x:5=8:12$ が成り立っています。謎の数 x はいくつですか。

解答

ここでは大事な解き方を 2 つ紹介します。

- 解き方その 1

$x:5$ というのは $\dfrac{x}{5}$ のことで、$8:12$ というのは $\dfrac{8}{12}$ のことですね。ということは、

$$x:5=8:12$$

という等式は

$$\frac{x}{5}=\frac{8}{12}$$

という等式に書き換えることができますね。この式をもとに、謎の数 x を見つけることにしましょう。

この式の左辺と右辺に 5 をかけてみます。すると、

$$\frac{x}{5} \times 5 = \frac{8}{12} \times 5$$

となりますが、約分をすると、

$$\frac{x}{\cancel{5}} \times \cancel{5} = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{12}}} \times 5$$

となるので、

$$x = \frac{10}{3}$$

であることがわかります。

- 解き方その 2

右の説明を読んでください。この説明に書いてあるように、

外側どうしをかけて $x \times 12$ を作る

$$x : 5 = 8 : 12$$

内側どうしをかけて 5×8 を作る

外側どうしをかけて作った $x \times 12$ と内側どうしをかけて作った 5×8 を等号で結ぶと

$$x \times 12 = 5 \times 8$$

という式ができる。

$$x : 5 = 8 : 12$$

という等式は

$$x \times 12 = 5 \times 8$$

という等式に書き換えることができますね。

つまり、

$$12x = 5 \times 8$$

が成り立っているわけです。

この等式の左辺と右辺を 12 でわると、

$$\frac{12x}{12} = \frac{5 \times 8}{12}$$

となりますが、約分をすると、

$$\frac{\cancel{12}x}{\cancel{12}} = \frac{5 \times \overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{12}}}$$

となるので、

$$x = \frac{10}{3}$$

であることがわかります。

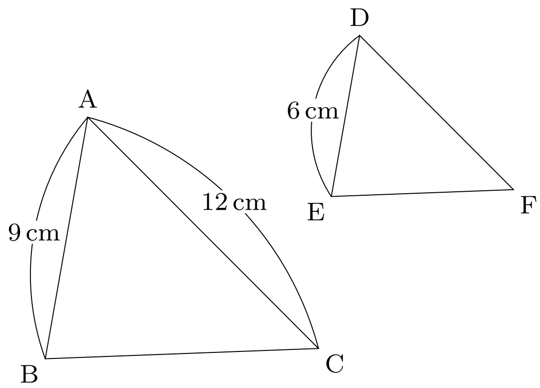
問 12. 次の等式を満たす x の値を求めなさい。

(1) $x : 8 = 3 : 2$　　(2) $9 : 4 = x : 6$

答えを見る

1.1.6　比の性質を利用して相似な図形の辺の長さを求めよう

例題 2　右の図で、△ABC ∽ △DEF であるとします。辺 DF の長さを求めなさい。



解答

相似な図形では、対応する部分の長さを比べると、どこを比べても長さの比は同じになっているのでしたね。図をよく見て、長さがわかっている辺に注目することにしましょう。

この問題の △ABC と △DEF では、辺 AB と辺 DE が対応し、辺 AC と辺 DF が対応

しています。ですから、

$$\begin{array}{ccccccc} 9 & : & 6 & = & 12 & : & \text{DF の長さ} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{AB の} & & \text{DE の} & & \text{AC の} & & \text{DF の} \\ \text{長さ} & & \text{長さ} & & \text{長さ} & & \text{長さ} \end{array}$$

となっているはずなのです。それではここで比の性質を使ってこの式を書き換えてみます。すると、

$$9 \times \text{DF の長さ} = 6 \times 12$$

となりますね。今度はこの式を「等式を変形するときにやってもよいこと」をつかって変形し、DF の長さを求めることにします。そのためにはこの式の左辺と右辺を 9 でわればよいですね。そうすると、

$$\text{DF の長さ} = \frac{6 \times 12}{9}$$

となりますが、右辺を約分して見かけをマシにすると、

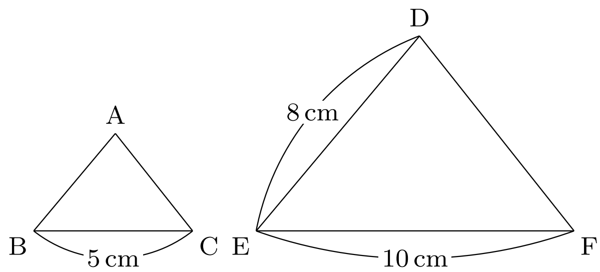
$$\text{DF の長さ} = 8$$

であることがわかります。つまり、辺 DF の長さは 8 cm だったのです。

問 13. 右の図で、

$$\triangle\text{ABC} \backsim \triangle\text{DEF}$$

であるとき、辺 AB の長さを求めなさい。

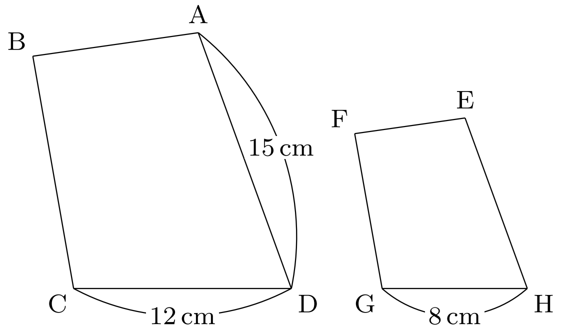


答えを見る

問 14. 右の図で

四角形 ABCD ∽ 四角形 EFGH

であるとします。以下の問に答えなさい。

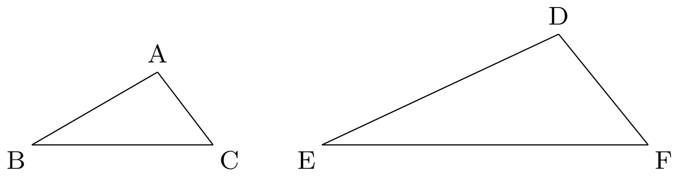


(1) 四角形 ABCD と四角形 EFGH の相似比をできるだけ簡単な数で表しなさい。

(2) 辺 EH の長さを求めなさい。

答えを見る

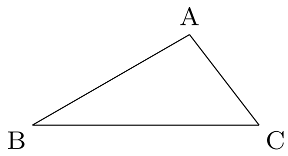
1.2　2 つの三角形が相似であるかどうか判定するには（三角形の相似条件）



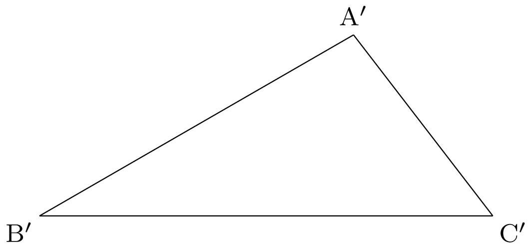
右の図を見てください。三角形が 2 つありますね。この 2 つの三角形は大きさは違いますが、ぱっと見る限り、形はそっくりですね。でも本当に形が同じなのかどうしたらケリがつくでしょうか。つまり、この 2 つの三角形が相似なのかどうか、どうすればはっきりするのでしょうか。あなたはどうすれば良いと思いますか？左にある小さい方の三角形をコピー機で拡大し、右にある三角形にぴったり重なるかどうか調べてみるという方法もありますね。もしピッタリ重なれば、2 つの三角形は相似であると断言できますね。でも、この方法はあまりよい方法とは言えませんね。だって、コピー機で拡大するとき倍率は何倍にすればよいのかという問題もありますし、いつでも気楽にコピー機を使えるわけではないですよね。

そこで、これから、「2 つの三角形があるとき、どんな証拠が見つかれば 2 つの三角形は相似になっていると断言できるのか」ということを考えていくことにします。あなたにいくつか質問をすることにしましょう。

質問 1　右の図の △ABC を様々な方法で作図して拡大しようと思います。ただし、3 つの辺の長さがどれも 2 倍になるように作図することにします。使っても良いのは、コンパスと目盛りのついた定規です。あなただったらどのように作図しますか？まず、自分で作図してみてください。ここでは拡大してできる三角形を △A′B′C′ と呼ぶことにしましょう。



作図はできましたか。ここでは拡大してできた三角形を △A′B′C′ と呼ぶことにしましょう。右の図を見てください。これはある人がある方法で作図して作った △A′B′C′ です。この三角形はもとの三角形の辺の長さがどこでも 2 倍になるように作られているのですから、

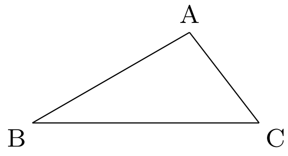


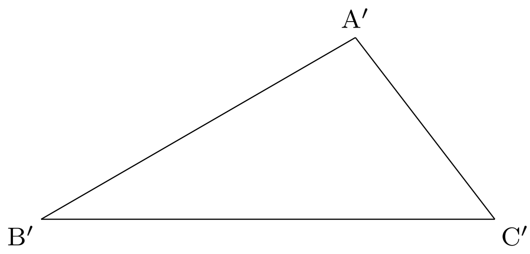
$$\mathrm{AB} : \mathrm{A'B'} = \mathrm{BC} : \mathrm{B'C'} = \mathrm{CA} : \mathrm{C'A'} = 1 : 2$$

となっているわけですね。

ではここであなたに質問です。△A′B′C′ を作図して作る方法は人によって様々かもしれませんね。でも、誰がどうやって作図したとしても、出来上がる △A′B′C′ は同じ大きさ、同じ形になるのでしょうか。それとも、人によっては違う三角形ができるのでしょうか。

質問 2　右の図の △ABC を様々な方法で作図して拡大しようと思います。ただし、辺 AB と辺 AC の長さを 2 倍にし、∠A の大きさはそのままになるように作図することにします。使っても良いのは、コンパスと目盛りのついた定規と分度器です。あなただったらどのように作図しますか？まず、自分で作図してみてください。





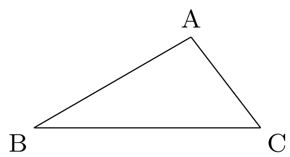
作図はできましたか。ここでは拡大してできた三角形を $\triangle A'B'C'$ と呼ぶことにしましょう。右の図を見てください。これはある人がある方法で作図して作った $\triangle A'B'C'$ です。この三角形はもとの三角形の辺 AB と辺 AC の長さが 2 倍になり、$\angle A$ の大きさはそのままになるように作られているのですから、

$$AB : A'B' = AC : A'C' = 1 : 2$$

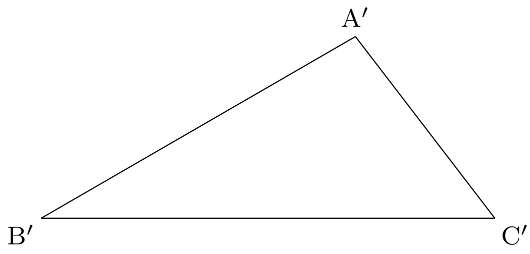
$$\angle A = \angle A'$$

となっているわけですね。

ではここであなたに質問です。$\triangle A'B'C'$ を作図して作る方法は人によって様々かもしれませんね。でも、誰がどうやって作図したとしても、出来上がる $\triangle A'B'C'$ は同じ大きさ、同じ形になるのでしょうか。それとも、人によっては違う三角形ができるのでしょうか。



質問 3　右の図の $\triangle ABC$ を様々な方法で作図して拡大しようと思います。ただし、辺 BC の長さを 2 倍にし、$\angle B$ と $\angle C$ の大きさはそのままになるように作図することにします。使っても良いのは、コンパスと目盛りのついた定規と分度器です。あなただったらどのように作図しますか？まず、自分で作図してみてください。



作図はできましたか。ここでは拡大してできた三角形を $\triangle A'B'C'$ と呼ぶことにしましょう。右の図を見てください。これはある人がある方法で作図して作った $\triangle A'B'C'$ です。この三角形はもとの三角形の辺 BC の長さが 2 倍になり、$\angle B$

と $\angle\mathrm{C}$ の大きさはそのままになるように作られているのですから、

$$\mathrm{BC} : \mathrm{B'C'} = 1 : 2$$

$$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{B'}, \quad \angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{C'}$$

となっているわけですね。

ではここであなたに質問です。$\triangle\mathrm{A'B'C'}$ を作図して作る方法は人によって様々かもしれませんね。でも、誰がどうやって作図したとしても、出来上がる $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は同じ大きさ、同じ形になるのでしょうか。それとも、人によっては違う三角形ができるのでしょうか。

質問は以上の 3 つです。定規、分度器、コンパスを用意してちゃんと自分で作図してくださいね。そしてじっくり考えてみてください。誰がどのように作図しても自分と同じ大きさ、同じ形の三角形ができるのでしょうか。それとも人によっては違う三角形ができることもあるのでしょうか。では今から 1 時間かけて考えてください。

・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・

はい、1 時間たちました。結論は出ましたか？真剣に考えてくれましたか？ちゃんと考えもしないでこの先を読んではいけません。自分の頭を使って悩まないと数学の力はつかないのです。ではじっくりと悩んでくれた人のために質問の答えを教えることにしましょう。

質問 1 の答え　作図して出来上がる $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は、誰がどうやっても同じ大きさで同じ形

になります。

質問 2 の答え　作図して出来上がる $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は、誰がどうやっても同じ大きさで同じ形になります。

質問 3 の答え　作図して出来上がる $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は、誰がどうやっても同じ大きさで同じ形になります。

どうでしたか？あなたの出した結論と同じでしたか？

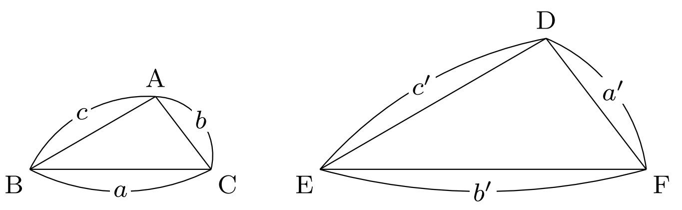
ここから先は、3 つの質問を真剣に悩んで考えた人だけ読んでください。

質問 1 をじっくり考えた人は次のことが想像できると思います。

2 つの三角形があるときに、もし 3 組の辺の比が全て等しくなっていたらこの 2 つの三角形は相似であると断言できる。

つまり、右の図の $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ でもし、

$$a : a' = b : b' = c : c'$$



となっていたら、$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は相似であると断言して良い。

ということです。

質問 2 をじっくり考えた人は次のことが想像できると思います。

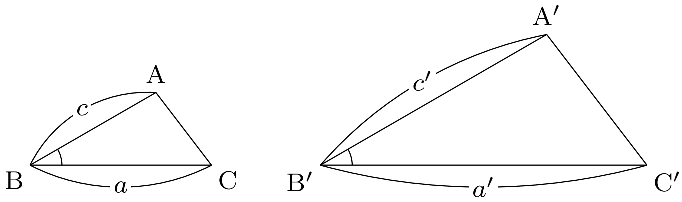
2 つの三角形があるときに、もし 2 組の辺の比が等しくなっていて、その 2 組の辺の間にある角の大きさが等しくなっていたら、この 2 つの三角形は相似であると断言できる。

つまり、右の図の $\triangle$ABC と

$\triangle$A$'$B$'$C$'$ でもし、

$$a : a' = c : c'$$

$$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{B}'$$



となっていたら、$\triangle$ABC と $\triangle$A$'$B$'$C$'$ は相似であると断言して良い。

ということです。

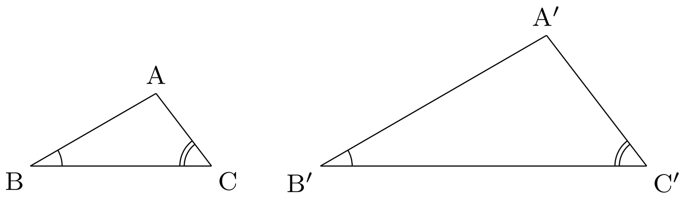
質問 3 をじっくり考えた人は次のことが想像できると思います。

2 つの三角形があるときに、もし 2 組の角の大きさが等しくなっていたら、この 2 つの三角形は相似であると断言できる。

つまり、右の図の $\triangle$ABC と

$\triangle$A$'$B$'$C$'$ でもし、

$$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{B}', \quad \angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{C}'$$



となっていたら、$\triangle$ABC と $\triangle$A$'$B$'$C$'$ は相似であると断言して良い。

ということです。

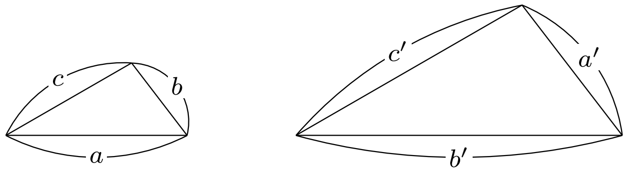
以上述べたことは「三角形の相似条件」とよばれているものです。2 つの三角形が相似なのかそうではないのか判断するとき、根拠となる事柄なのです。重要なことなのでもう一度次にまとめておきます。

重要な事実：どんな証拠があれば 2 つの三角形は相似だと断言できる？

2 つの三角形があるとき、次のどれかが成り立っていればその 2 つの三角形は相似になっていると断言できます。

(1) 3 組の辺の比が全て等しくなっているとき

つまり、右の図のような 2 つの三角形で、

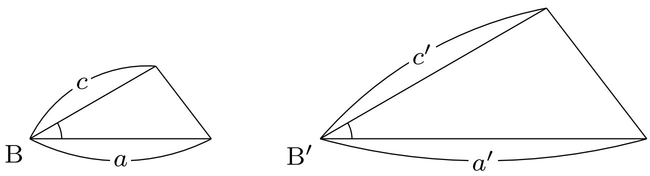


$$a : a' = b : b' = c : c'$$

となっていたら、この 2 つの三角形は相似であると断言して良いのです。

(2) 2 組の辺の比が等しくなっていて、その 2 組の辺の間にある角の大きさが等しくなっているとき

つまり、右の図のような 2 つの三角形で、例えば、



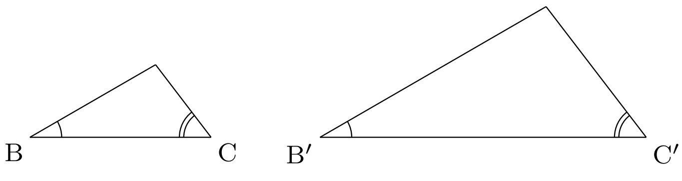
$$a : a' = c : c'$$

$$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{B}'$$

となっていたら、この 2 つの三角形は相似であると断言して良いのです。

(3) 2 組の角の大きさが等しくなっているとき

つまり、右の図のような 2 つの三角形で、例えば、



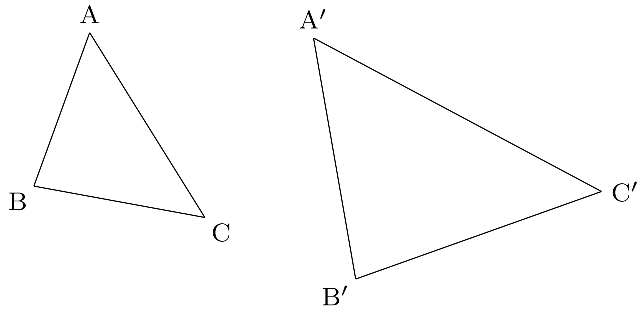
$$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{B}', \quad \angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{C}'$$

となっていたら、この 2 つの三角形は相似であると断言して良いのです。

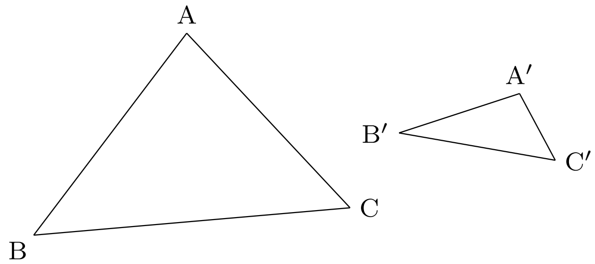
それではこれから三角形の相似条件を使いこなす練習をします。

例題 3　以下の問に答えなさい。

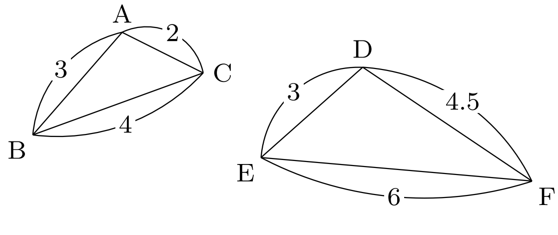
(1) 右の図のような $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ があるとします。辺 AB の長さを測ると 6 cm で辺 A′B′ の長さを測ると 9 cm でした。また、$\angle A$ の大きさを測ると 52° で $\angle A'$ の大きさを測ると 52° でした。さらに辺 AC の長さを測ると 8 cm で辺 A′C′ の長さを測ると 12 cm でした。ところで、この 2 つの三角形は相似であると断言してよいのでしょうか。



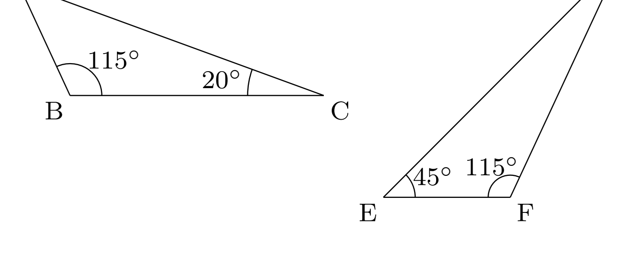
(2) 右の図のような $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ があるとします。辺 AB の長さを測ると 8 cm で辺 A′B′ の長さを測ると 4 cm でした。また、辺 BC の長さを測ると 10 cm で辺 B′C′ の長さを測ると 5 cm でした。さらに $\angle C$ の大きさを測ると 52° で $\angle C'$ の大きさを測ると 52° でした。ところで、この 2 つの三角形は相似であると断言してよいのでしょうか。



(3) 右の図のような $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ があるとします。この 2 つの三角形は相似であると断言してよいのでしょうか。

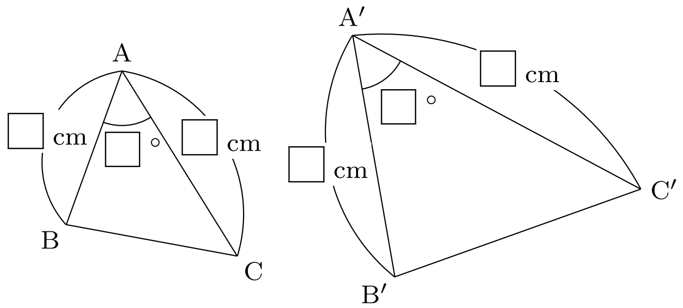


(4) 右の図のような $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ があるとします。この 2 つの三角形は相似であると断言してよいのでしょうか。



解答

(1) 問題文をもう一度よく読んでください。そして右の図の空欄に正しい値を記入してください。記入できたら今度はこの図を見ながら、以下の文の空欄に正しい数を記入して下さい。



AB : A′B′ はとりあえず 6 : 9 ですね。しかしこれは、もっと簡単に $\boxed{}$: $\boxed{}$ とあらわすことができますね。

また、

AC : A′C′ はとりあえず 8 : 12 ですね。しかしこれは、もっと簡単に $\boxed{}$: $\boxed{}$ とあらわすことができますね。

よって AB : A′B′ と AC : A′C′ はどちらも 2 : $\boxed{}$ となり、等しいことがわかりますね。

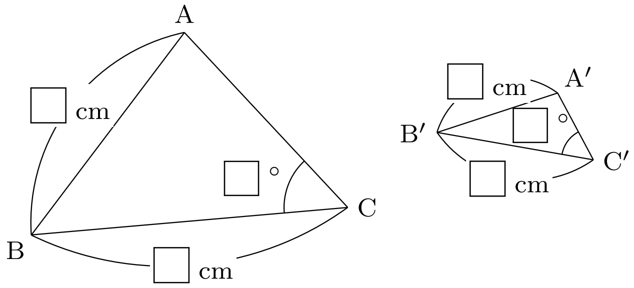
さらに図を見ると、それぞれの三角形で今調べていた2つの辺の間にある角、つまり ∠A と ∠A′ は両方共 $\boxed{}$° なので等しくなっています。

以上の調査より、△ABC と △A′B′C′ では、

> 2組の辺の比が等しくなっていて、その2組の辺の間にある角の大きさが等しくなっている

ということがわかりました。ですから、△ABC と △A′B′C′ は相似であると断言できます。

(2) 問題文をもう一度よく読んでください。そして右の図の空欄に正しい値を記入してください。記入できたら



今度は右の図を見ながら、以下の文の空欄に正しい数を記入して下さい。

$\mathrm{AB} : \mathrm{A'B'}$ はとりあえず $8 : 4$ ですね。しかしこれは、もっと簡単に $\boxed{\quad} : \boxed{\quad}$ とあらわすことができますね。

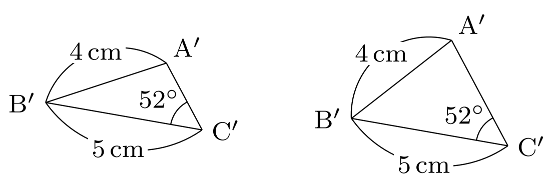
また、

$\mathrm{BC} : \mathrm{B'C'}$ はとりあえず $10 : 5$ ですね。しかしこれは、もっと簡単に $\boxed{\quad} : \boxed{\quad}$ とあらわすことができますね。

よって $\mathrm{AB} : \mathrm{A'B'}$ と $\mathrm{BC} : \mathrm{B'C'}$ はどちらも $2 : \boxed{\quad}$ となり、等しいことがわかりますね。

そうすると、「あと一歩で相似であると言えそうじゃん」って思った人もいるかもしれませんね。ではさらに調べてみましょう。

さらに図を見ると、$\angle\mathrm{C}$ と $\angle\mathrm{C'}$ は両方共 $\boxed{\quad}^\circ$ なので等しくなっています。「やった、これで相似になっていると断言できる」って思った人はいますか？残念ながらそういうわけにはいかないのです。どうしてダメなのかというと、$\angle\mathrm{C}$ や $\angle\mathrm{C'}$ は、それぞれの三角形で、さっき調べていた 2 つの辺の間にある角ではないからです。三角形の相似条件をよく思い出してください。2 組の辺の比が等しく、その間にある角の大きさが等しければ 2 つの三角形は相似であると断言できるのでしたね。でも、この問題ではそのとおりにはなっていないのです。ですから、$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は相似であると断言できないのです。



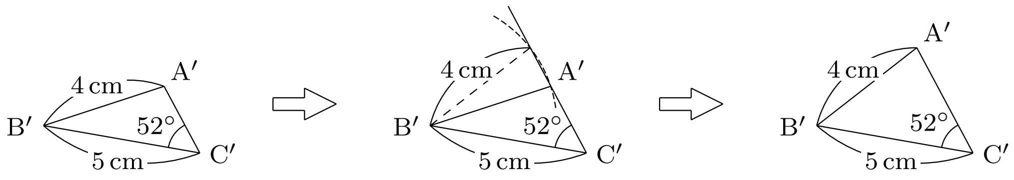
念のため、大事な補足をしておきましょう。右の図を見てください。2 つの三角形が描かれています。どちらの三角形でも、

$$\mathrm{A'B'} = 4\,\mathrm{cm}$$

$$\mathrm{B'C'} = 5\,\mathrm{cm}$$

$$\angle\mathrm{C'} = 52^\circ$$

となっているのですが、2 つの三角形は形が違うのです。つまり、$\mathrm{A'B'} = 4\,\mathrm{cm}$、$\mathrm{B'C'} = 5\,\mathrm{cm}$ 、$\angle \mathrm{C'} = 52^\circ$ となっている三角形でも、形の違うものが存在するのです。本当ですよ。次の図のようにすると、左の三角形から右の三角形を作ることができるのです。

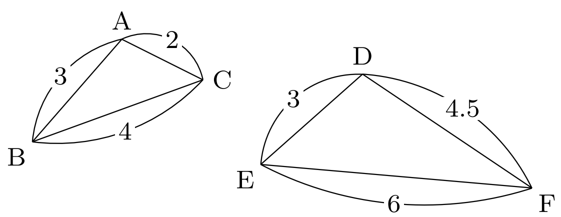


辺 A′C′ を C′ の方へ伸ばしておく。そしてコンパスの幅を 4 cm に開き、針を B′ にさし、くるっと円を少しだけ描く。そうすると、辺 A′C′ を C′ の方へ伸ばした線の上に、B′ からの距離が 4 cm であるが A′ とは違う点が見つかる。

さっき見つけた点と B′ を結ぶ。

このように、$\mathrm{A'B'} = 4\,\mathrm{cm}$、$\mathrm{B'C'} = 5\,\mathrm{cm}$ 、$\angle \mathrm{C'} = 52^\circ$ となっている三角形でも、形の違うものが存在するのですから、きっとこの 2 つのうちのどちらか片方の三角形はこの問題に出てきた大きい方の三角形と相似になっているのですが、もう片方の三角形はこの問題に出てきた大きい方の三角形と相似ではないということになりますね。

(3) 右の図を見てください。あなたのためにもう一度、問題の図を描いておきました。この図をよく見て、2 つの三角形の辺の長さや形をしっかり観察しましょう。どうですか？相似になっていそうな感じはしますか？相似になっているしても、どの頂点とどの頂点が対応するのでしょうか。そのことを考えるためにもう一度辺の長さをしっかり確認することにしましょう。



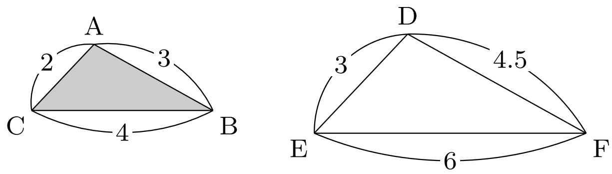
△ABC では一番長い辺は辺 BC ですね。一方 △A′B′C′ では一番長い辺は辺 EF です。ということは、もしこの 2 つの三角形が相似だとすると、辺 BC は辺 EF に対応しているということになります。

また、△ABC では二番目に長い辺は辺 AB ですね。一方 △A′B′C′ では二番目に

長い辺は辺 DF です。ということは、もしこの 2 つの三角形が相似だとすると、辺 AB は辺 DF に対応しているということになります。

さらに、△ABC では一番短い辺は辺 AC ですね。一方 $\triangle \mathrm{A'B'C'}$ では一番短い辺は辺 DE です。ということは、もしこの 2 つの三角形が相似だとすると、辺 AC は辺 DE に対応しているということになります。

このようなことを考えに入れると、この 2 つの三角形が相似かどうか考えるためには、右の図のようにそれぞれの三角形の向きを揃えてみると分かりやすそうです。図を見るとわかると思いますが、△ABC は裏返されていることに注意してください。（実は △ABC の裏側は灰色になっているのでした。）



それではこの図を見ながら 2 つの三角形が相似なのかどうか調べることにしましょう。以下の文の空欄に正しい数や文を書いてください。

図をよく見ると、

$$\mathrm{AC} : \mathrm{DE} = 2 : 3$$

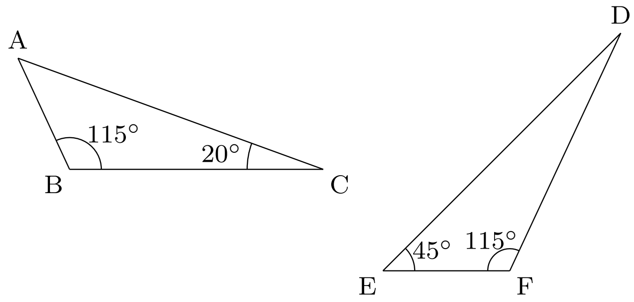
$$\mathrm{AB} : \mathrm{DF} = 3 : \boxed{} = \boxed{} : \boxed{}$$

$$\mathrm{CB} : \mathrm{EF} = 4 : \boxed{} = \boxed{} : \boxed{}$$

となることがわかりますね。つまり、どれも 2 : 3 になっているわけですね。これで、△ABC と △DFE では、$\boxed{}$ が全て等しくなっているということがわかりました。ですから、△ABC と △DFE は相似であると断言できます。

念のための注意です。2 つの三角形は相似になっていたわけですね。そして頂点 A は頂点 D に対応し、頂点 B は頂点 F に対応し、頂点 C は頂点 E に対応するのでしたね。ですから、図の左の三角形を △ABC と呼ぶ場合は、図の右の三角形は △DFE と呼ばなくてはいけませんね。（つまり、図の左の三角形を △ABC と呼ぶ場合は、図の右の三角形を △DEF と呼ぶのは良くないということです。）

(4) 右の図を見てください。あなたのためにもう一度、問題の図を描いておきました。この図をよく見て、2 つの三角形の辺の形をしっかり観察しましょう。どうですか？相似になっていそうな感じはしますか？相似になっているしても、どの頂点とどの頂点が対応するのでしょうか。もう一度 2 つの三角形の形をしっかり確認しましょう。では、以下の文の空欄に正しい数や文を書いてください。



この 2 つの三角形をよく見ると、角の大きさについてはいくつかわかっていることがありますが、辺の長さについては何もわかっていませんね。そうすると、もしこの 2 つの三角形が相似だとしても、頼りになる相似条件は、「2 組の角の大きさが等しければ相似であると断言できる」というやつだけですね。ではもう一度図をよく見てください。どちらの三角形にも 115° の角が現れています。つまり、

$$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{F}$$

となっているのですから 1 組の角の大きさが等しくなっていることは確かです。他の角はどうでしょうか。左の三角形には 20° の角があり、右の三角形には 45° の角があるのですがこれらは大きさが違っています。ということは、もう、等しい大きさの角はないのでしょうか。そこで、何も数字が書いていない角のことを調べることにしましょう。これらの角の大きさはいったい何度なのでしょうか。まず、左の三角形の ∠A の大きさですが、ちょこちょこっと計算すると、

$$\angle \mathrm{A} = \boxed{}^\circ$$

であることがわかりますね。（計算の仕方は大丈夫ですよね。三角形の 3 つの内角をたすと必ず 180° になるのでしたね。）あっ、これはラッキーです。∠A の大きさって右の三角形の ∠$\boxed{}$ の大きさと同じではありませんか。つまり、

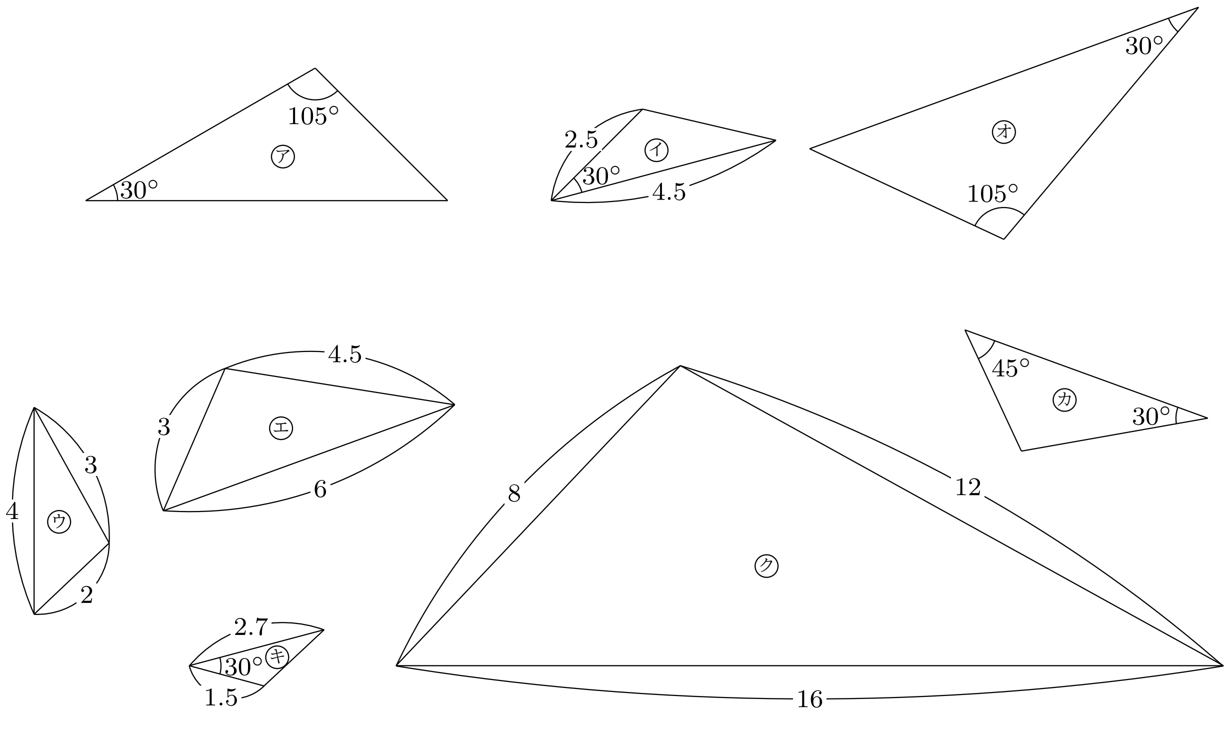
$$\angle \mathrm{A} = \angle \boxed{}$$

となっているわけです。

これでケリがつきましたね。つまり、これまで調べたことより、△ABC と △EFD では、$\boxed{\quad\quad\quad\quad}$ が等しくなっているということがわかったのです。ですから、△ABC と △EFD は相似であると断言できます。

念のための注意です。2 つの三角形は相似になっていたわけですね。そして頂点 A は頂点 E に対応し、頂点 B は頂点 F に対応し、頂点 C は頂点 D に対応するのでしたね。ですから、図の左の三角形を △ABC と呼ぶ場合は、図の右の三角形は △EFD と呼ばなくてはいけませんね。（つまり、図の左の三角形を △ABC と呼ぶ場合は、図の右の三角形を △DEF と呼ぶのは良くないということです。）

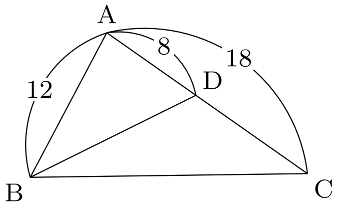
問 15. 次の図の中に相似になっている三角形があるかどうか調べ、相似になっている三角形の組を全て答えなさい。また、相似であると判断するときに使った相似条件も答えなさい。



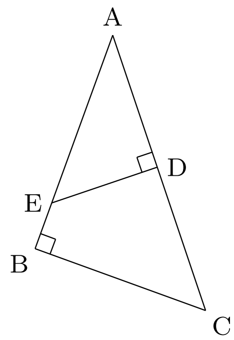
答えを見る

例題 4　次の問に答えなさい。

(1) 右の図の中には相似な三角形がかくれています。どの三角形とどの三角形が相似になっているのか調べ、相似の記号 ∽ を使って答えなさい。また、相似であると判断するときに使った相似条件も答えなさい。



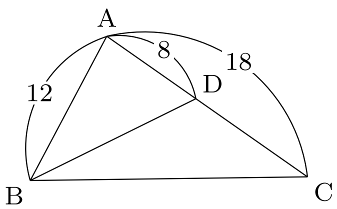
(2) 右の図の中には相似な三角形がかくれています。どの三角形とどの三角形が相似になっているのか調べ、相似の記号 ∽ を使って答えなさい。また、相似であると判断するときに使った相似条件も答えなさい。



解答

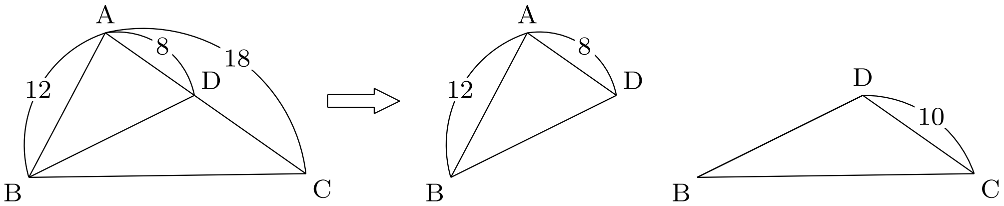
こういう問題を解くときに、深く考えないで「勘」だけを頼って答えてしまう人がいます。そういう解き方をすると、見落としが発生するのです。慎重に一つ一つ調べていくことが大切です。

(1) 右の図を見てください。あなたのためにもう一度、この問題の図を描いておきました。まず、基本的なことを確認しておきます。この図の中には三角形が 3 枚ありますよね。それは、△ABD と △DBC と △ABC ですね。ですからこれから、「△ABD と △DBC は相似なのかどうかということ」、「△ABD と △ABC は相似なのかどうかということ」、「△DBC と △ABC は相似なのかどうかということ」を調べなくてはいけませんね。



- △ABD と △DBC が相似になっているのかどうか調べます。

  次の図を見てください。



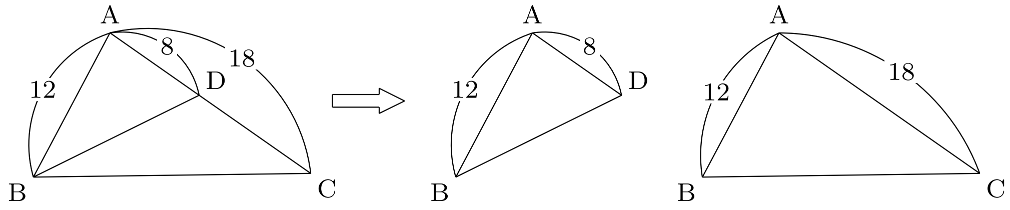
この図は、この問題の図から △ABD と △DBC を取り出しているところを表しています。とり出された △ABD と △DBC の図を見ながら慎重に調べていくことにしましょう。

△ABD には長さのわかっている辺が 2 つありますが、△DBC には長さのわかっている辺が 1 つしかありません。（辺 DC の長さはもとの図には書いてありませんでしたが辺 AC の長さから辺 AD の長さをひけば辺 DC の長さはわかりますよね。）ところで、3 つある三角形の相似条件のうち、1 つの辺の長さしか出てこないものなんてないですよね。ということは、仮にこの 2 つの三角形が相似だとしても、頼ることのできる相似条件は「2 組の角の大きさが等しい」というものだけですね。とにかく角の大きさだけに頼るしかないのです。それではこの 2 つの三角形で、どこかの角とどこかの角の大きさは等しくなっているのでしょうか。例えば、△ABC の ∠A と △DBC のどこかの角の大きさは等しいのでしょうか。こういうことを考えるには △ABD と △DBC を取り出す前のもとの図を見るしかありません。しかしもとの図を見ても、△ABD の ∠A と △DBC のどの角も「特に関係はない」としか言えませんよね。他の角についても同じように考えると、△ABD のどの角と △DBC のどの角も「特に関係はない」としか言えないことがわかります。つまり、大きさの等しい角は全く見つからないということです。

以上の調査より、△ABD と △DBC が相似であるなんて言えないということになりますね。

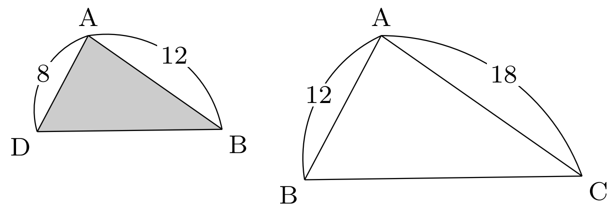
- △ABD と △ABC が相似になっているのかどうか調べます。

次の図を見てください。



この図は、この問題の図から △ABD と △ABC を取り出しているところを表しています。とり出された △ABD と △ABC の図を見ながら慎重に調べていくことにしましょう。

どちらの三角形でも 2 つの辺の長さがわかっています。ということは、仮にこの 2 つの三角形が相似だとすると、「2 組の辺の比が等しく、その間の角の大きさが等しい」という相似条件を頼りにできそうですね。では図をよく見て本当にそうなっているのかどうか調べてみましょう。辺の長さをしっかり考えに入れると、△ABD を裏返し、△ABC と同じ向きにすると分かりやすそうです。そこで、そのような図を書いてみることにします。すると、右のようになります。（実は △ABD の裏側は灰色になっているのでした。）ところでここで、先に進む前に注意しておくことがあります。これまで小さい方の三角形を △ABD と呼んでいましたが、これから先は △ADB と呼ぶことにします。（どうしてそう呼ぶのかわかりますよね。小さい方の三角形を裏返して、大きい方の三角形と向きを合わせたのでしたね。）



では辺の比を調べてみます。

まず、

$$AD : AB = 8 : 12 = 2 : 3$$

となっていることがわかりますね。

また、

$$AB : AC = 12 : 18 = 2 : 3$$

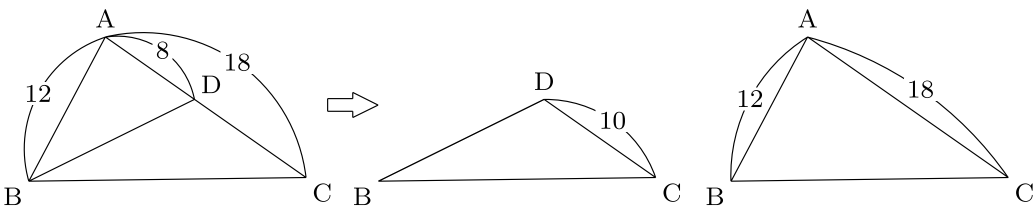
となっていることもわかりますね。

おや、どちらの辺の比も 2 : 3 で等しいではありませんか。ということは、あとは「その間の角の大きさ」が等しいのかどうかということですね。2 つの三角形をとり出す前の図を見てみましょう。そうすると、△ADB の ∠A と △ABC の ∠A ってもともとの図ではピッタリ重なっていたわけですね。だから △ADB の ∠A の大きさと △ABC の ∠A の大きさは等しいに決まっています。

以上の調査で △ADB と △ABC では 2 組の辺の比とその間の角の大きさが等しいということがわかりました。ですから △ADB と △ABC は相似であると断言できますね。

- △DBC と △ABC が相似になっているのかどうか調べます。

次の図を見てください。



この図は、この問題の図から △DBC と △ABC を取り出しているところを表しています。とり出された △DBC と △ABC の図を見ながら慎重に調べていくことにしましょう。

△DBC では辺の長さが 1 つしかわかっていません。三角形の相似条件には辺の長さが 1 つしか出てこないものはありません。ですから仮に △DBC と △ABC が相似だとしても、三角形の相似条件のうち希望が残されているのは「2 組の角の大きさが等しい」というやつだけですね。では、△DBC と △ABC を取り出す前のもとの図でよく考えてみましょう。もとの図を見ると、△DBC の ∠C と △ABC の ∠C はぴったり重なっていたことがわかります。ですから △DBC の ∠C の大きさと △ABC の ∠C の大きさは等しいわけです。では他

にも等しい大きさの角は見つかるでしょうか？他に角度が書いてある角はありませんし、もとの図でピッタリ重なっているような角ももうないですよね。というわけで、相似である証拠は見つからないわけです。ですから、△DBC と △ABC は相似であるとは断言できないのです。

以上で全ての調査が終わりました。結果をまとめると、

$$\triangle \mathrm{ADB} \backsim \triangle \mathrm{ABC}$$

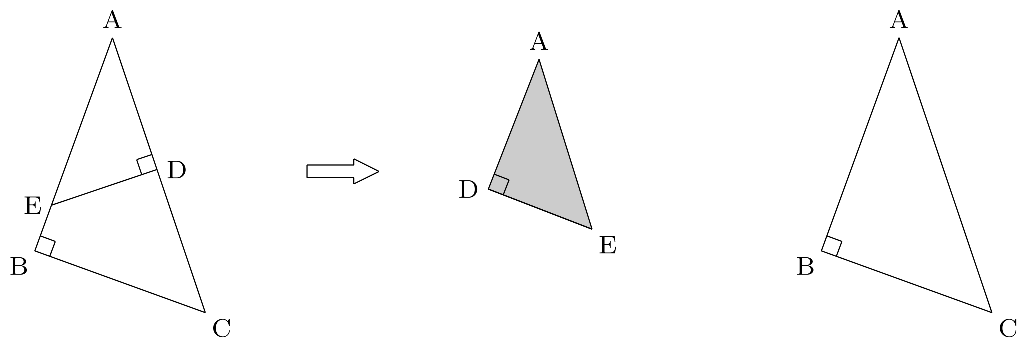
相似条件は

「2 組の辺の比とその間の角の大きさが等しい」

ということですね。

(2) (1) の説明がよく理解できた人のためにあっさり説明することにします。

この問題の図には三角形は 2 つしかありませんね。△ADE と △ABC です。というわけで、△ADE と △ABC が相似なのかどうかということだけ調べれば良いわけです。次の図を見てください。



この図は、この問題の図から △ADE と △ABC を取り出しているところを表しています。わかりやすくするために、△ADE を裏返して △ABC と向きをそろえておきました。（実は、△ADE の裏側は灰色になっているのでした。）

それではとり出された △ADE と △ABC の図を見ながら慎重に調べていくことにしましょう。

この 2 つの三角形では、辺の長さは何もわかっていません。ですから、仮にこの 2

つの三角形が相似だとしても、三角形の相似条件のうち頼ることのできるのは「2 組の角の大きさが等しい」というやつだけですね。そうすると、まず、△ADE の ∠D と △ABC の ∠B はどちらも直角で等しいわけです。また、2 つの三角形をとり出す前のもとの図を見るとわかりますが、△ADE の ∠A と △ABC の ∠A はもともピッタリ重なっているので等しいことになります。これでケリが、つきましたね。つまり、

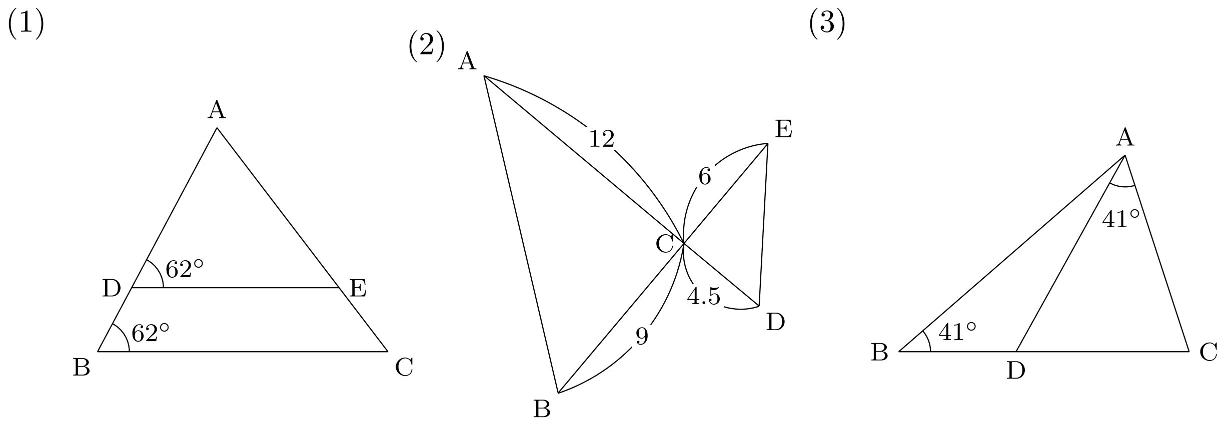
$$\triangle \mathrm{ADE} \backsim \triangle \mathrm{ABC}$$

相似条件は

「2 組の角の大きさが等しい」

ということですね。

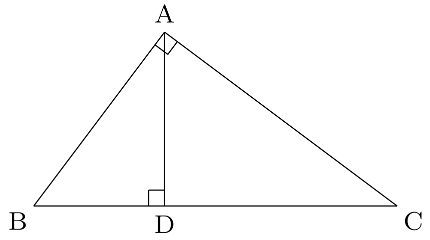
問 16. 次のそれぞれの図において、相似な三角形の組を見つけ記号 ∽ を使って表しなさい。また、その時に使った相似条件を答えなさい。



答えを見る

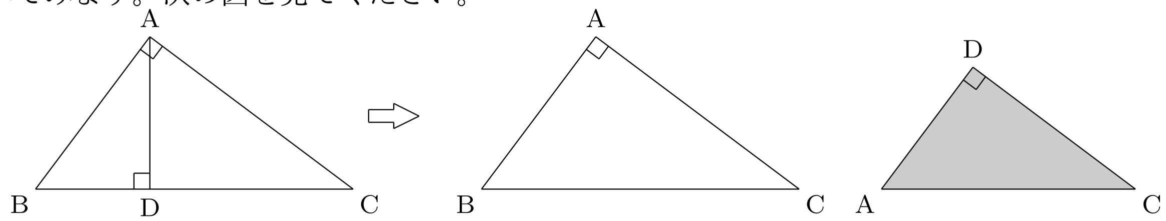
例題 5　（三角形の相似条件を証拠として使う証明問題にチャレンジしようその 1）

右の図のように、$\angle A = 90^\circ$ である $\triangle ABC$ があり、頂点 A から辺 BC へ垂線 AD を引きました。このとき、$\triangle ABC$ と $\triangle DAC$ は相似であることを証明しなさい。



解答

頭の中を整理するために、$\triangle ABC$ と $\triangle DAC$ を取り出してわかりやすい向きにして並べてみます。次の図を見てください。



念のための注意です。$\triangle ADC$ は裏返してあります。（$\triangle ADC$ の裏側は灰色になっているのでした。）裏返さないと $\triangle ABC$ と向きをそろえることができませんよね。

さて、この図をいくら見ても、辺の長さについての情報は何もありませんね。ということは、仮に $\triangle ABC$ と $\triangle DAC$ が相似になっているとしても、頼ることのできる相似条件は「2 組の角の大きさが等しい」というやつだけですね。それでは大きさの等しい角が 2 組あるのかどうかもとの図も見ながら一生懸命考えることにしましょう。

$\triangle ABC$ の $\angle A$ と $\triangle DAC$ の $\angle D$ はどちらも 90° ですから等しいですよね。これで大きさの等しい角が 1 組見つかりました。あと 1 組見つければよいですね。2 つの三角形を取り出す前の図もよく見ると、$\triangle ABC$ の $\angle C$ と $\triangle DAC$ の $\angle C$ はもともとピッタリ重なっていたのですね。ですから大きさは等しいに決まっています。これで 2 組目の大きさの等しい角が見つかりました。というわけで、$\triangle ABC$ と $\triangle DAC$ では大きさの等しい角が 2 組あるということがわかったのです。ですから勝ったも同然です。あとは、読む人にわかってもらえるように、「証明」をしっかりと作文すればよいわけです。では最後に、数学の答案っぽい「証明」を書いておきます。

（証明）

△ABC と △DAC において ← 「△ABC と △DAC に注目してください」という呼びかけ

$$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{ADC} = 90^\circ \quad \text{（仮定）} \cdots ①$$

← 「△ABC の ∠A と △DAC の ∠D はどっちも 90° だから等しいんだよ」と伝えた

$$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{DCA} \quad \text{（共通）} \cdots ②$$

← 「△ABC の ∠C と △DAC の ∠C はもともと共通だから等しいんだよ」と伝えた

①、②より、2 組の角の大きさがそれぞれ等しい。

よって、

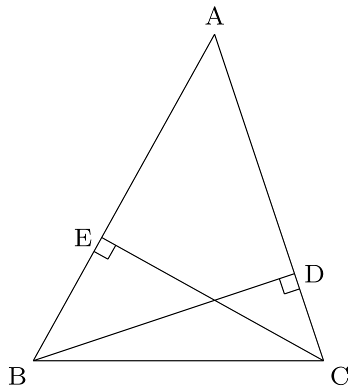
$$\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{DAC}$$

（証明終わり）

問 17. 右の図のような △ABC があり、頂点 B、C から辺 AC、辺 AB へそれぞれ垂線 BD と CE を引きました。このとき、

$$\triangle \mathrm{ABD} \backsim \triangle \mathrm{ACE}$$

であることを証明しなさい。



答えを見る

例題 6　（三角形の相似条件を証拠として使う証明問題にチャレンジしようその 2）

まず、円 O があるとします。次に、この円に弦を 2 本引きます。ただし、2 つの弦は円の中で交わるように引くことにします。この 2 本の弦をそれぞれ弦 AB、弦 CD と呼ぶことにします。また、この 2 本の弦の交点を点 P と呼ぶことにします。以下の問に答えなさい。

(1)　問題をよく読んで図を描きなさい。

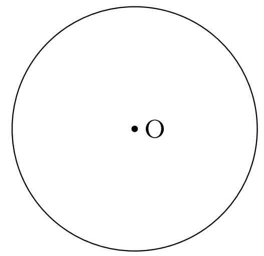
(2)　(1) で作った図でさらに点 A と点 C を結び、点 B と点 D を結びなさい。

(3)　(2) で作った図には 2 つの三角形 △ACP と △DBP があらわれているはずです。

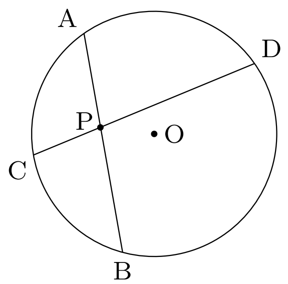
実は驚くべきことに、△ACP と △DBP は相似であることを証明しなさい。

解答

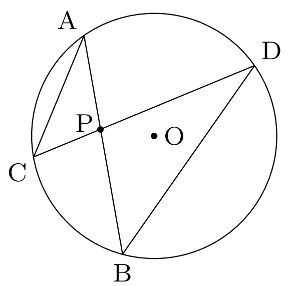
(1) まず円 O があるのですね。ですから右の図のようになります。



次はこの円に 2 本弦を引くのでしたね。ただし、2 本の弦は交わるようにするのでした。そして、2 本の名前をそれぞれ弦 AB、弦 CD と呼ぶことにし、交点の名前を点 P とするのでした。ですから右の図のようになります。

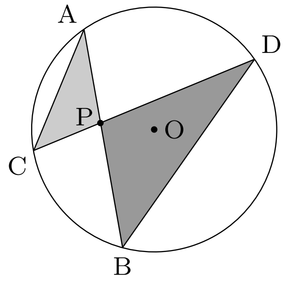


(2) 点 A と点 C を結び、点 B と点 D を結ぶのですから右の図のようになりますね。



(3) 右の図を見てください。わかりやすくするために、△ACP と △DBP を灰色にしておきました。

△ACP と △DBP の大きさは違って見えますね。では形はどうでしょう。まぁ、問題には「相似であることを証明しなさい」と書いてあったのですから形はきっと同じなのでしょう。つまり、どうやら △ACP と △DBP は相似であるらしいので、あなたに証明してほしいという問題ですね。



証明にとりかかる前に、この図をしっかり観察してもう少し考えて見ます。この問

題はまず初めに円があるというところから始まるお話でしたね。ということは、なにか円の性質が重要な働きをするのでしょうか？ところで、あなたはなにか役に立ちそうな円の性質を知っていますか？

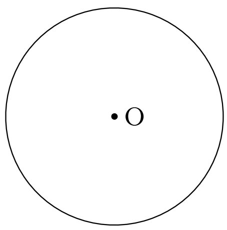
というわけで、円の性質についていろいろ考える必要がありそうですが、その前にもう少し別の面からも少し探りを入れてみましょう。相似になるということを証明するのですから相似条件を使うはずです。つまり、「3 組の辺の比がそれぞれ等しい」とか、「2 組の辺の比とその間の角の大きさが等しい」とか、「2 組の角の大きさが等しい」という相似条件のうちのどれかを使うはずです。ところで、図をいくら見ても辺の長さの情報は何もありませんね。ということは、頼ることのできる相似条件は、「2 組の角の大きさが等しい」というやつだけですね。

このように考えてくると、きっと円の性質をうまく活用して、注目している 2 つの三角形では「2 組の角の大きさが等しくなっている」ということが判明すれば良さそうです。

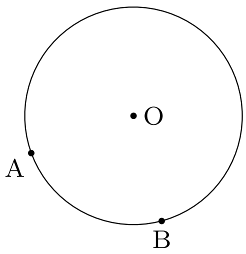
でも、円の性質と言ってもいろいろありましたね。一体どのような性質を使えばよいのでしょうか。実は、この問題では、「円周角の定理」と呼ばれている円の性質が大活躍するのです。ところであなた、「円周角の定理」って覚えていますか？念のため、ここでこの例題の解答を進めるのをいったん止めて、円周角の定理のおさらいをすることにします。

円周角の定理のおさらい

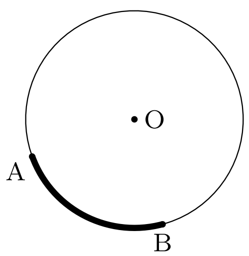
まず、ある円 O があるとします。



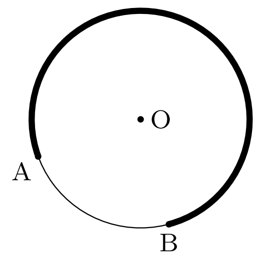
次に、この円 O の円周上に 2 つの点 A、B を打ちます。すると例えば、右の図のようになります。



次は、点 A と点 B が結ばれるように、円周上を太くなぞります。すると次の図のようになります。

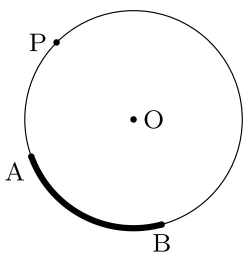


または

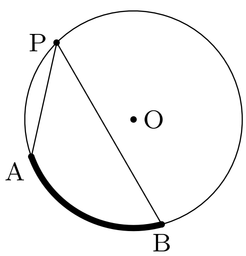


この図のどちらを使うこともできるのですが、左の図のほうが見やすそうなのでこの先は左の図を使って説明を続けます。（念のために確認しておきますが、この図で太くなぞられているような曲線は「弧」と呼ばれるのでしたね。）

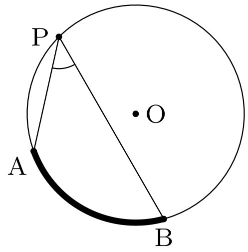
次は円周上の好きな場所に点 P を打ちます。ただし、太くなぞられているところに打ってはいけません。つまり、弧の上ではないところに点 P を打ちます。すると右の図のようになります。



次は弧の両端の点と点 P をそれぞれまっすぐ結びます。つまり、点 A と点 P を結び、点 B と点 P を結ぶわけです。すると右の図のようになります。

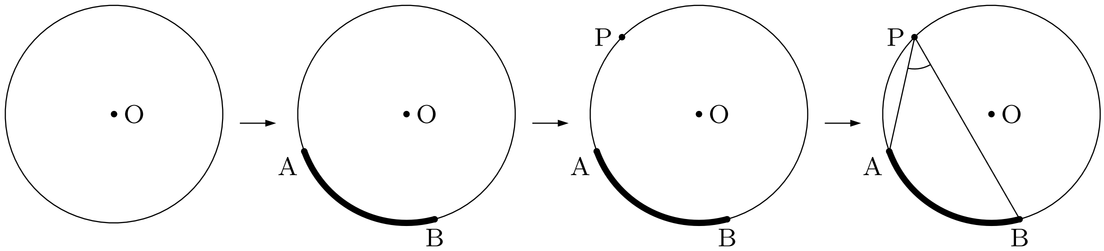


そうすると、点 P のところに 1 つ角ができているはずです。右の図を見てください。点 P のところに ∠APB ができていますね。



説明を進める前に、ここまでの話をまとめておくことにします。

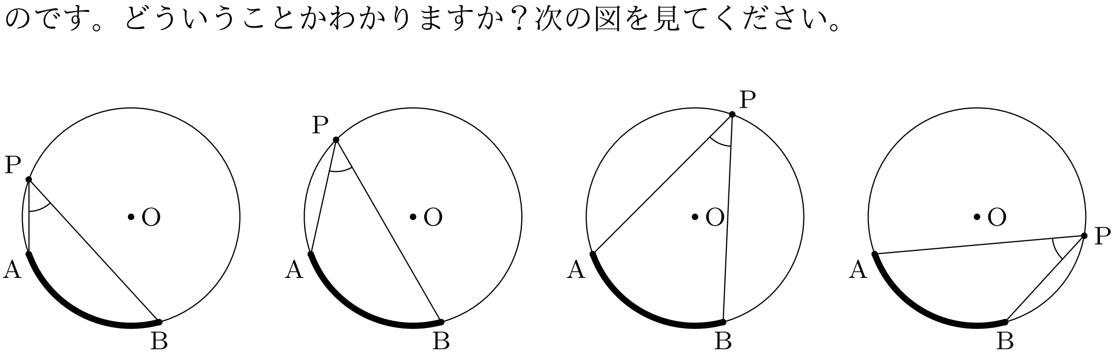
次の図を見てください。



円がある　弧を決める　円周上の弧の上ではない場所に点を打つ　角ができる

ここまでの話は、この図に表されているように、「円周上に弧をひとつ決め、円周上の弧の上ではないところに点を打ち、その点と弧の両端を結ぶと角ができる」という話でしたね。つまり、弧を 1 つ決めると角を作ることができるわけです。このようにしてできる角を**（決めた）弧に対する円周角**と呼びます。ですから、この図では「∠APB は弧 AB に対する円周角」ということになりますね。

ところで、弧を 1 つ決めたとしても、さっきの説明のようにしてできる角は 1 つではありません。つまり、ある 1 つの弧に対する円周角は 1 つではなくたくさんあるのです。どういうことかわかりますか？次の図を見てください。



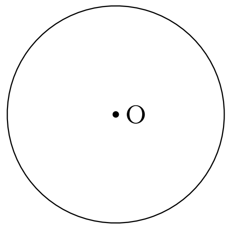
∠APB は弧 AB に対する円周角　∠APB は弧 AB に対する円周角　∠APB は弧 AB に対する円周角　∠APB は弧 AB に対する円周角

この図を見るとわかるように、弧 AB は同じでも、点 P の場所をいろいろに変えることにより、いくらでも違う場所に「弧 AB に対する円周角」を作ることができるわけです。ですから、「弧 AB に対する円周角」といっても 1 つに決まっているわけではなくたくさんあるのです。

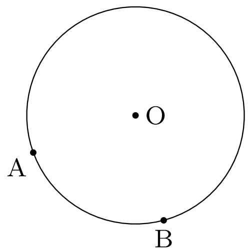
これで、「円周角とはそもそも何なのか」という説明を終わります。（もちろん、「円周角の定理」の説明はまだ終わっていません。）

次は、「中心角」という言葉の意味を説明します。

まず、ある円 O があるとします。



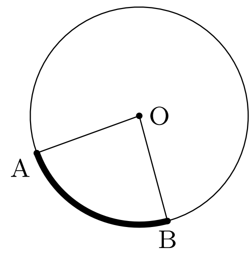
次に、この円 O の円周上に 2 つの点 A、B を打ちます。すると例えば、右の図のようになります。



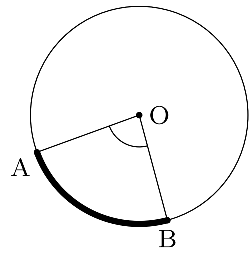
次は、点 A と点 B が結ばれるように円周上を太くなぞり、弧 AB を作ります。すると次の図のようになります。

この図のどちらを使うこともできるのですが、左の図のほうが見やすそうなのでこの先は左の図を使って説明を続けます。

次は弧の両端の点と円の中心 O をそれぞれまっすぐ結びます。つまり、点 A と点 O を結び、点 B と点 O を結ぶわけです。すると右の図のようになります。



そうすると、点 O のところに 1 つ角ができているはずです。右の図を見てください。中心 O のところに ∠AOB ができていますね。



このように、弧の両端と中心をまっすぐ結んでできる角のことを**（決めた）弧に対する中心角**と呼びます。ですから、さっきの図では、「∠AOB は弧 AB に対する中心角」と呼ばれることになりますね。

ところで、円周角とは違い、弧を 1 つ決めてしまうと誰がどうやってもその弧に対する中心角は 1 つしか作ることができませんね。

以上で、「円周角の定理」を説明するための準備が終わりました。では、いよいよ「円周角の定理」を説明することにしましょう。実は、昔の人が次のような驚くべき事実を発見し、証明もしたのです。

重要な事実：円周角の定理

ある円があるとします。この円の円周上に弧を 1 つ決めると、その弧に対する円周角と中心角を作ることができますね。そして、その弧に対する円周角はいくらでもたくさん作ることができますが、その弧に対する中心角は 1 つだけでしたね。このとき実は次のことが成り立っています。

(1) その弧に対する円周角はたくさんあるわけですが、どの円周角の大きさも同じです。

(2) その弧に対する円周角はたくさんあるわけですが、どの円周角の大きさもその弧に対する中心角の大きさの半分です。

問 18. この問の前で学んだばかりの「重要な事実：円周角の定理」をもう一度よく読んで、その文章の状況を図にしなさい。そして、あなたの描いた図をよく見て、「重要な事実：円周角の定理」の内容を理解しなさい。

答えを見る

注意：今あなたは数学を学んでいるのですから、本来ならば「重要な事実：円周角の定理」の証明も学ばなくてはいけませんね。数学は「証拠のないことは気楽に信じない」という学問なのですから。でも残念です。今はその余裕がありません。証明は別の機会にします。

以上で、円周角の定理のおさらいを終わりにします。

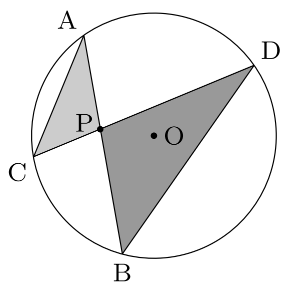
円周角の定理のおさらい終わり

本題に戻ることにします。例題の解答の途中でしたね。ところで、どんな問題でしたっけ。3 分待ちます。もう一度この例題の初め（62 ページ）から、「円周角の定理のおさらい」の前（64 ページ）までをよく読んでください。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

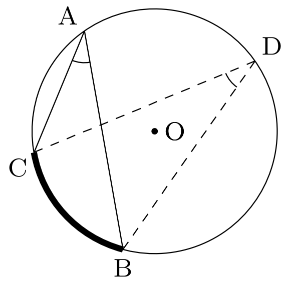


はい、3 分たちました。どんな問題だったか思い出せましたか？たしか、右の図のような状況でしたね。灰色になっている 2 つの三角形、つまり △ACP と △DBP が実は相似になっているということを証明してほしいという問題でしたね。そして、証明の方針は、「円の性質をなにか役立てて、この 2 つの三角形ではどこかの 2 組の角の大きさが等しくなっているということを示す」というものでしたね。

では、さっきおさらいした「円周角の定理」が役に立つのかどうか考えることにしましょう。図を見やすくするために、ここから先は 2 つの三角形を灰色にするのはやめます。

まず、弧 CD に注目してみましょう。実はこの問題の図には、弧 CD に対する円周

角が 2 つ出てきています。どれだかわかりますか？

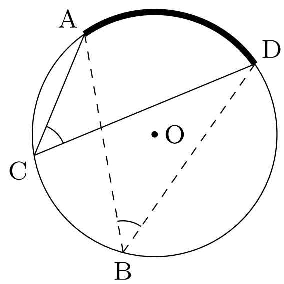


右の図を見てください。∠CAB と ∠BDC です。（この図では、注目して欲しいところだけを残してあります。また、注目してほしい弧 CD を太くなぞり、注目してほしい 2 つの円周角 ∠CAB と ∠BDC に角の大きさをあらわす記号をつけました。）ところで円周角の定理によれば、同じ弧に対する円周角の大きさはどれも等しいのでしたね。ですから、

$$\angle \mathrm{CAB} = \angle \mathrm{BDC}$$

であると断言できますね。

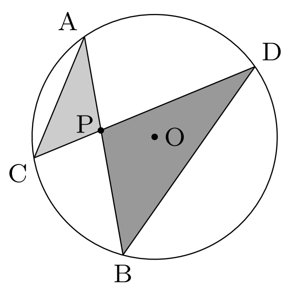
今度は、弧 AD に注目してみましょう。実はこの問題の図には、弧 AD に対する円周角が 2 つ出てきています。どれだかわかりますか？



右の図を見てください。∠ACD と ∠DBA です。(この図では、注目して欲しいところだけを残してあります。また、注目してほしい弧 AD を太くなぞり、注目してほしい 2 つの円周角 ∠ACD と ∠DBA に角の大きさをあらわす記号をつけました。）ところで円周角の定理によれば、同じ弧に対する円周角の大きさはどれも等しいのでしたね。ですから、

$$\angle \mathrm{ACD} = \angle \mathrm{DBA}$$

であると断言できますね。



これで証拠がそろいましたよね。「△ACP と △DBP で 2 組の角の大きさが等しい」という証拠が見つかったわけです。ですからあとは、証明を作文すればよいですね。順序良く、読んだ人にきちんと伝わるよに作文しましょう。例えば、次のように書けば良いのです。右の図を見ながら次の証明を読んでください。

（証明）

$\triangle$ACP と $\triangle$DBP において

「$\triangle$ACP と $\triangle$DBP に注目してください」という呼びかけ

$\angle$CAP と $\angle$BDP はどちらも弧 CB に対する円周角なので

$$\angle \mathrm{CAP} = \angle \mathrm{BDP} \cdots ①$$

が成り立つ。

また、$\angle$ACP と $\angle$DBP はどちらも弧 AD に対する円周角なので

$$\angle \mathrm{ACP} = \angle \mathrm{DBP} \cdots ②$$

が成り立つ。

①、②より、2 組の角の大きさがそれぞれ等しい。

よって、

$$\triangle \mathrm{ACP} \backsim \triangle \mathrm{DBP}$$

（証明終わり）

問 19. 円 O があり、円 O の円周上に 4 つの点 A、B、C、D がこの順に反時計回り（つまり時計の針の回転する向きとは反対周り）に並んでいるとします。また、さらに弧 AB と弧 BC の長さは等しくなっているとします。弦 AC と弦 BD は交わっているはずですが、交わった点を P と呼ぶことにします。以下の問に答えなさい。

(1) この問題をよく読んで、この問題の状況を図にしなさい。

(2) $\triangle$BPC $\backsim$ $\triangle$BCD であることを証明しなさい。

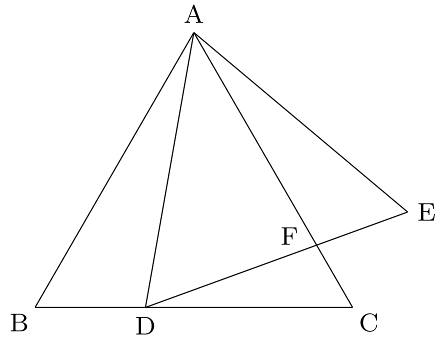
答えを見る

問 20. 以下の問に答えなさい。

(1) $\triangle$ABC があり、辺 AB 上に点 D、辺 AC 上に点 E をとります。このとき、D と E を結んでできる線分 DE が辺 BC と平行ならば、$\triangle$ADE $\backsim$ $\triangle$ABC であることを証明しなさい。

(2) 線分 AB と線分 CD があり、この 2 つの線分は平行になっているとします。また、B と C を結び、A と D を結びます。すると BC と AD は交わるはずですが、交点を E と呼ぶことにします。このとき、$\triangle$AEB $\backsim$ $\triangle$DEC であることを証明しなさい。

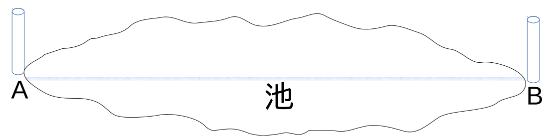
(3) 右の図の △ABC と △ADE は正三角形であるとします。辺 AC と辺 DE の交点を F とします。△ABD ∽ △AEF であることを証明しなさい。



答えを見る

1.3　相似な図形の性質を利用すると、巨大なものの高さや長さが求められるという話

例題 7　ある町に、右のような池があります。池をはさんだ 2 つの地点 A と B の距離を測りたいのですが池の中をジャブジャブと歩きたくはありません。ですから、A 地点と B 点の間の距離を直接測るのはやめることにします。（まあ、池の中を歩かなくても、A 地点と B 地点の間の距離を直接測る方法があるかもしれないのですが。）



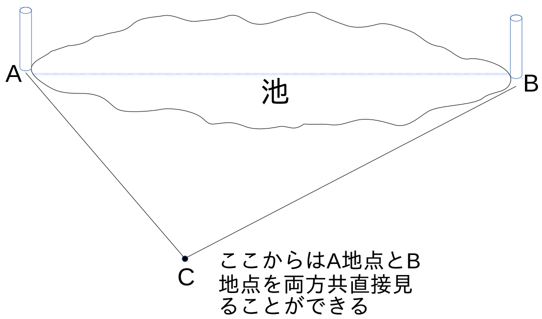
というわけで、歩いていくことのできる陸地のどこかを測って、なにか工夫もして、A 地点と B 地点の間の距離を求めることにします。あなたならどうしますか？

注意：あくまでも、陸地の部分のどこかを測ってください。また、測るのは一ヶ所とは限りません。そして、距離を測る道具の他に、角度を測る道具も使って良いことにします。

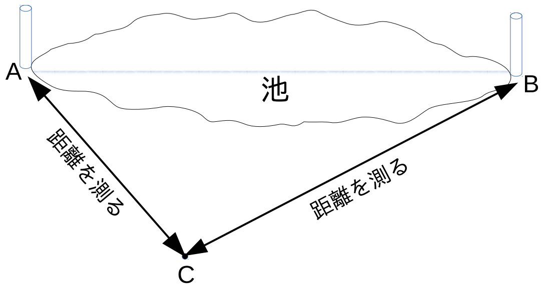
解答

例えば、次のような方法があります。

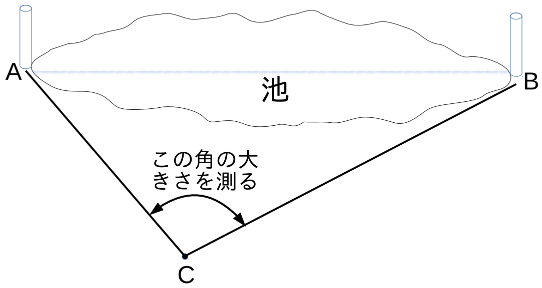
まずあなたは、A 地点と B 地点の両方を見通すことのできる場所を 1 ヶ所探します。ここではその場所を C 地点と呼ぶことにしましょう。



次は、距離を測る道具を使い、本当に AC 間の距離と BC 間の距離を測ります。



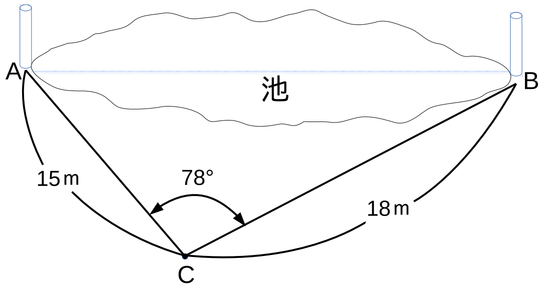
そして最後に、角度を測る道具を使って本当に ∠ACB の大きさを測ります。



ここまで測ってきた距離や角の大きさはどれも陸上で測ることができますね。

話しをわかりやすくするために、この先は具体的な数字を使って説明を続けることにします。

右の図を見てください。例えば、陸地を歩いて測った AC 間の距離が 15 m、BC 間の距離が 18 m 、陸地で測った ∠ACB の大きさが 78° だったとしましょう。



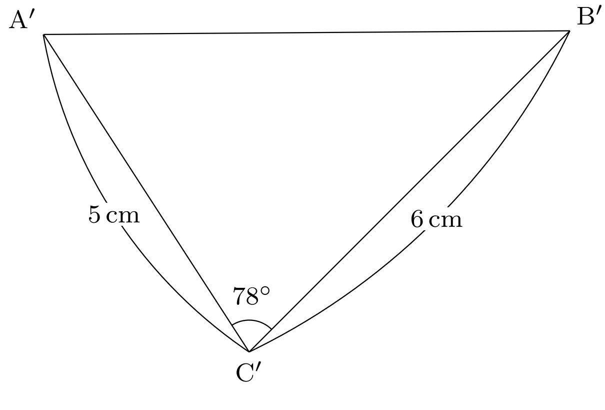
次にあなたがすることは、「分度器や目盛りのついた定規を使い、紙の上に縮図を描く」ということです。

ではこれから縮図を描くことにしますが、まず測量の結果をよく思い出しておきましょう。たしか、AC 間の距離が 15 m、BC 間の距離が 18 m 、陸地で測った $\angle$ACB の大きさが 78° でしたね。（さっきの図を見てください。）ですから、そうですねぇ、例えば長さを全て $\dfrac{1}{300}$ にした縮図を作るとうまく、紙の上に手頃な大きさの縮図を描くことができそうですよね。

まず、15 m を $\dfrac{1}{300}$ にすると何 cm になるのか考えてみます。15 m って 1500 cm ですから $\dfrac{1}{300}$ にすると 5 cm ですよね。

次は 18 m を $\dfrac{1}{300}$ にすると何 cm になるのか考えてみます。15 m の時と同じように考えると、18 mって 1800 cm ですから $\dfrac{1}{300}$ にすると 6 cm ですよね。

さらに、$\angle\mathrm{ACB} = 78^\circ$ であったことも思い出して、定規と分度器を使い、できる限り正確な縮図を作りましょう。1 mm のずれ、1° のずれが重大な影響を与えてしまうのです。気を抜いてはいけません。慎重に縮図を作ってください。



ある人が定規と分度器を使って正確に作った縮図
（あなたの見ている画面の設定を 100% にすると、この図は正確な大きさになります。）

右の図を見てください。これはある人が定規と分度器を使って正確に作った縮図です。縮図に描かれた三角形を $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ と呼ぶことにしましょう。ところであなたは池のそばにできた（本物の大きな）$\triangle$ABC と縮図としてできた $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ が相似になっているのはお気づきですか？また、どうして相似になっているか証拠を言うことができますか？念のためここで相似になっている証拠を考えてみましょう。これは本当の $\triangle$ABC の辺 AC や辺 BC の長さを $\dfrac{1}{300}$ にした縮図ですよね。ということは、

$$\mathrm{AC} : \mathrm{A'C'} = 300 : 1$$

$$\mathrm{BC} : \mathrm{B'C'} = 300 : 1$$

となっているはずですね。ですから、

$$\mathrm{AC} : \mathrm{A'B'} = \mathrm{BC} : \mathrm{B'C'}$$

と断言できますね。また、もとの $\triangle\mathrm{ABC}$ の $\angle\mathrm{ACB}$ の大きさが変わらないように縮図を作るわけですから、

$$\angle\mathrm{ACB} = \angle\mathrm{A'B'C'}$$

が成り立っていますよね。

以上で、$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ では 2 組の辺の比が等しく、その間にある角の大きさが等しいということがわかったので、

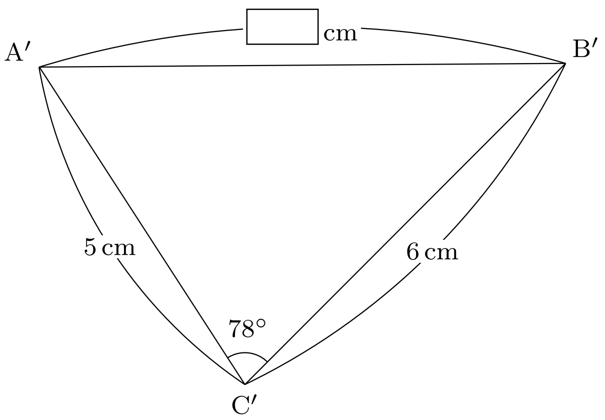
$$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{A'B'C'}$$

と断言してよいですよね。

ではこれからいよいよ、正確に作られた縮図を利用して、池をはさむ 2 地点 AB 間の（本当の）距離を求めることにしましょう。

あなたが次にするべきことは、縮図の A′ と B′ の間の長さを定規を使って正確に測ることです。

あなたのためにもう一度、かなり正確に作られた $\dfrac{1}{300}$ の縮図を右に描いておきました。正確に作られているということを念のため確認しておきましょう。定規を使ってまず $\mathrm{A'C'}$ の長さと $\mathrm{B'C'}$ の長さを測ってみてください。ちゃんと 5 cm と 6 cm になっていると思います。また分度器を使って $\angle\mathrm{A'C'B'}$ の大きさを測ってみてください。ちゃんと 78° になっていると思います。これでこの縮図がかなり正確に作られていることが確認で



ある人が定規と分度器を使って正確に作った縮図
（あなたの見ている画面の設定を 100% にすると、この図は正確な大きさになります。）

きましたね。ですからこの縮図は池のそばにできていた（本当の巨大な）△ABC と同じなのです。そして長さはどこでも本当の三角形の $\dfrac{1}{300}$ になっているわけです。ですからこの図をつかって目盛りのついた定規で $A'C'$ 間の距離を測り、その値を 300 倍すれば本当の三角形の AC 間の距離がわかるのです。ではここから先はあなたに任せます。以下の文の空欄に正しい数を記入してください。

縮図で目盛りのついた定規で $A'C'$ 間の距離を測ると、

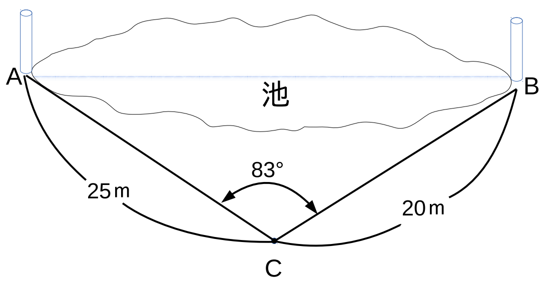
$$A'C' = \boxed{}\,\text{cm}$$

となりますから、本当の AC 間の距離はこの値を 300 倍して、

$$\begin{aligned} AC &= A'C' \times 300 \\ &= \boxed{} \times 300 \\ &= \boxed{}\,(\text{cm}) \\ &= \boxed{}\,(\text{m}) \end{aligned}$$

となります。つまり、池をはさむ A 地点と B 地点の間の距離は、およそ $\boxed{}$ (m) だったのです。

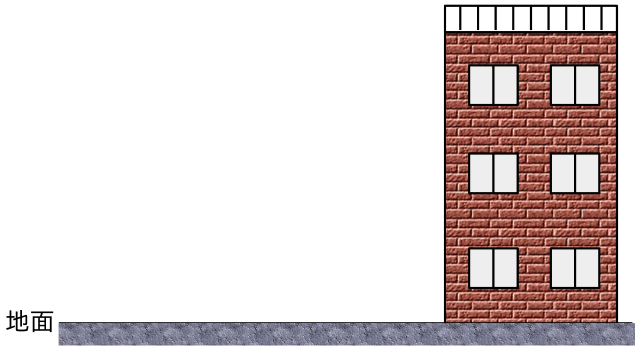
問 21. ある町に、右のような池があります。池をはさんだ 2 つの地点 A と B の距離を測りたいのですが池の中をジャブジャブと歩きたくはありません。ですから、A 地点と B 点の間の距離を直接測るのはやめることにします。その代わり A 地点と B 地点を見渡すことのできる C 地点を決め、C 地点から A 地点までの距離と C 地点から B 地点までの距離を測ってみました。そうすると、AC 間の距離は 25 m で BC 間の距離は 20 m でした。また、∠ACB の大きさを測ったところ 83° でした。できるだけ正確な縮図を描いて AB 間の距離を求めなさい。



答えを見る

例題 8　（高い建物の高さを求めるには）

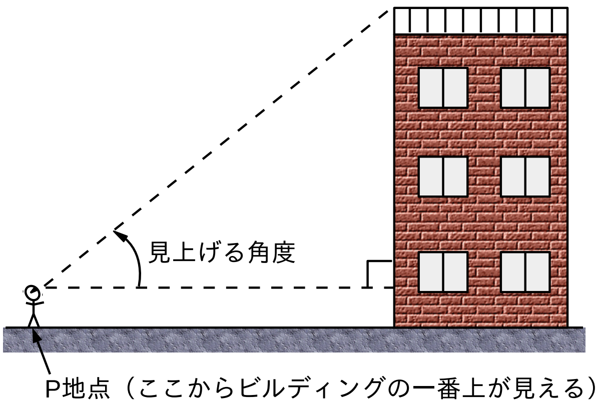
　ある町に右のようなビルディングがあります。このビルディングの高さを求めたいのですがビルディングには登りたくないのでなにか工夫をして、地面のところからどこかを測定して、このビルディングの高さを求めようと思います。あなたならどうしますか？ただしあなたは、距離を測る道具と角度を測る道具を使って良いことにします。



解答

　例えば次のような方法があります。

　まず、あなたは地面の上を歩いてビルディングから適度に離れ、ビルディングの一番上が見える場所を探します。右の図を見てください。ここではその場所を P 地点と呼ぶことにしましょう。



　次に、あなたは P 地点に立ったままビルディングの一番上を見つめます。そして角度を測る道具を使い、あなたは水平の方向から何度上を見上げていることになるのか測ります。つまり、さっきの図の「見上げる角度」を測るのです。

　次に、あなたは距離を測る道具を使い、P 地点からビルディングまでの距離を測ります。

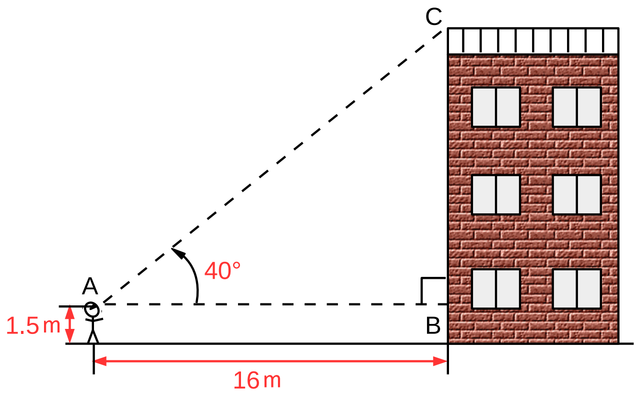
　さらに、あなたの目の高さ（つまり、あなたの目は地面からどれだけ高いところにあるのか）を測ります。

　以上で測定は終わりです。ビルディングに登ったりしないで、地面にいたまま全ての測

定が終わったのです。

次にあなたがしなくてはならないことは、「測定データを利用して縮図を作る」ということです。話をわかりやすくするために、ここから先は具体的な数値を使って説明を続けます。

右の図を見てください。この図に記入されているのがあなたのおこなった測定結果だとしましょう。あなたはビルディングから 16 m 離れたところにたっていて、見上げる角度は 40° だったわけです。また、地面からのあなたの目の高さは 1.5 m であるとします。

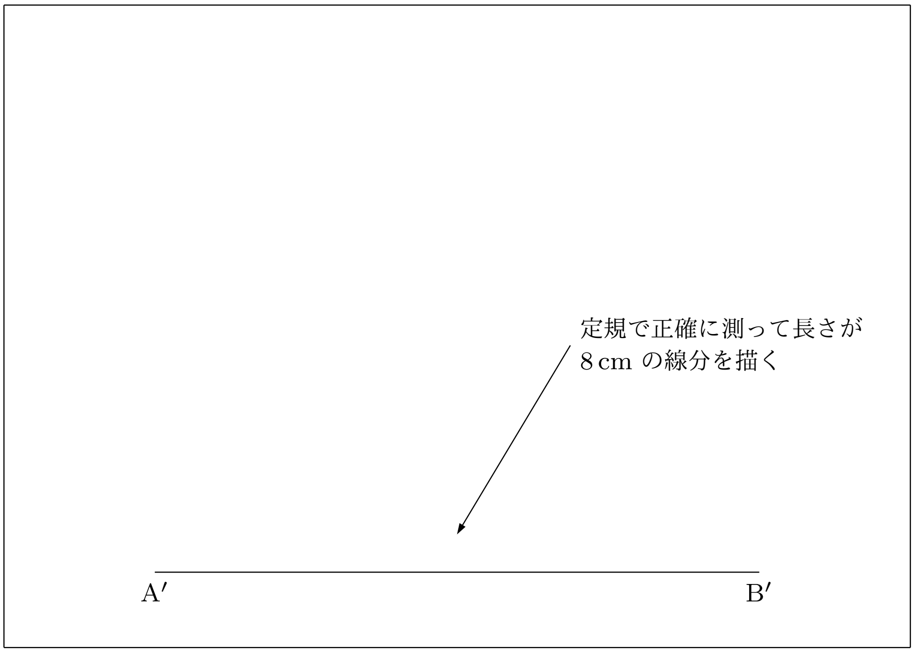


この測定データを使って説明を続けます。

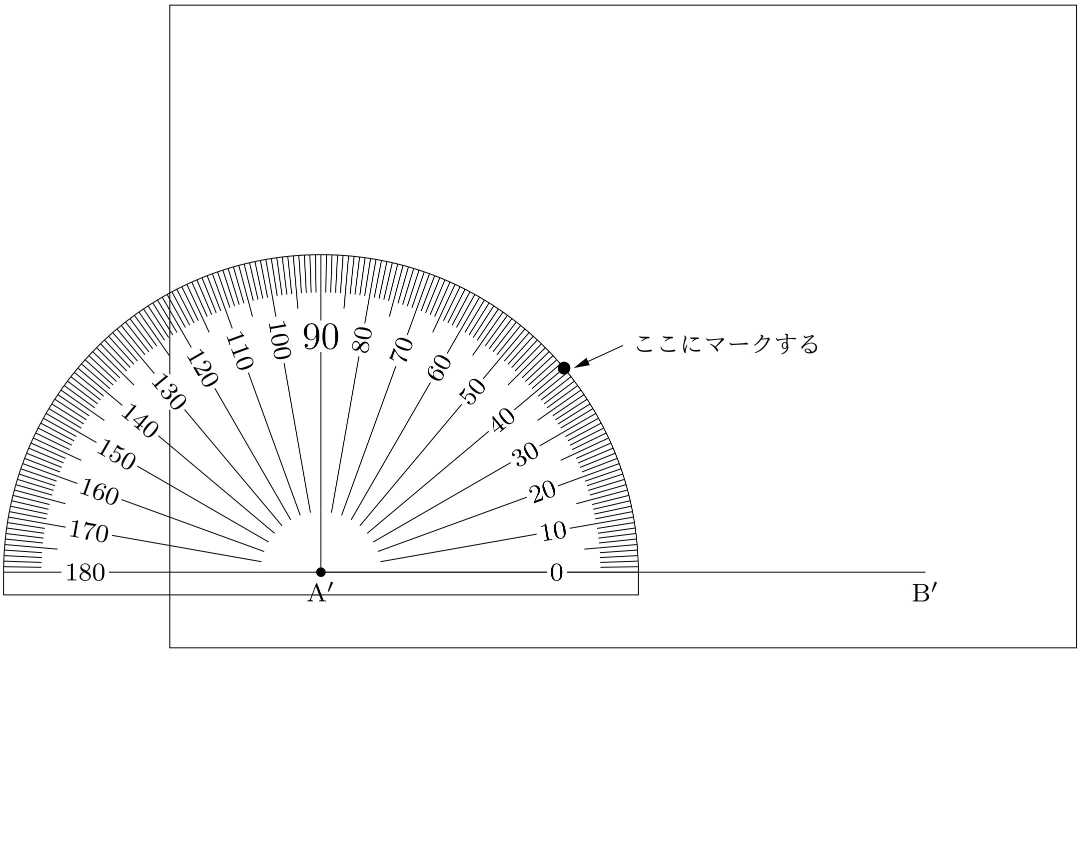
この図では説明の都合で、あなたの目のある場所を A、目から水平に進んでビルディングにぶつかる場所を B、ビルディングの一番上を C と呼ぶことにしました。では縮図を作ることにします。でも一体何分の 1 ぐらいに縮小するのが良いでしょうか。このことを決めるために、16 m という数値と縮図を描くときに使う紙の大きさ気にしてみます。16 m というのは 1600 cm ですから、そうですねぇ、例えば $\frac{1}{200}$ にすれば 8 cm となるのでまあまあな感じになりそうですね。(目の高さのことは今のところ、気にする必要はないですよね。)

それでは定規と分度器を使い、できる限り正確な縮図を作ることにします。1 mm のずれ、1° のずれが重大な影響を与えてしまうのです。気を抜いてはいけません。慎重に縮図を作ります。

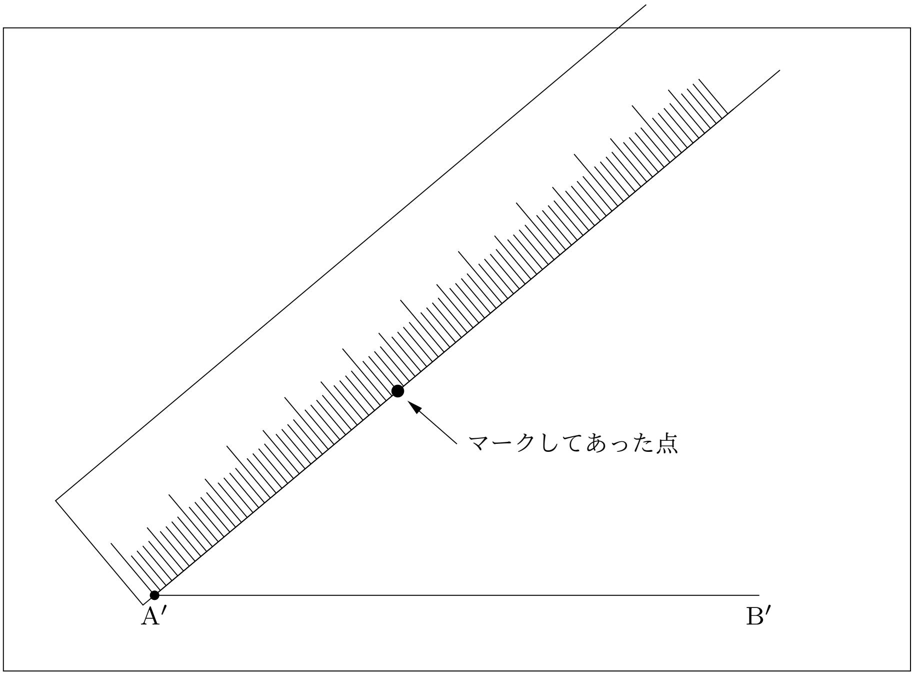
次の図を見てください。まず、定規を使ってできる限り正確に 8 cm の線分を描きます。この線分は AB 間の距離を縮めたものなので線分 A′B′ と呼ぶことにします。



次は分度器を使って点 A′ のところに、できるだけ正確に 40° の角をはかりとります。次の図を見てください。まず、分度器の真ん中を点 A′ に合わせ、分度器の 0° の線が線分 A′B′ に重なるようにします。そして分度器の目盛りで 40° を読み取り紙にマークします。

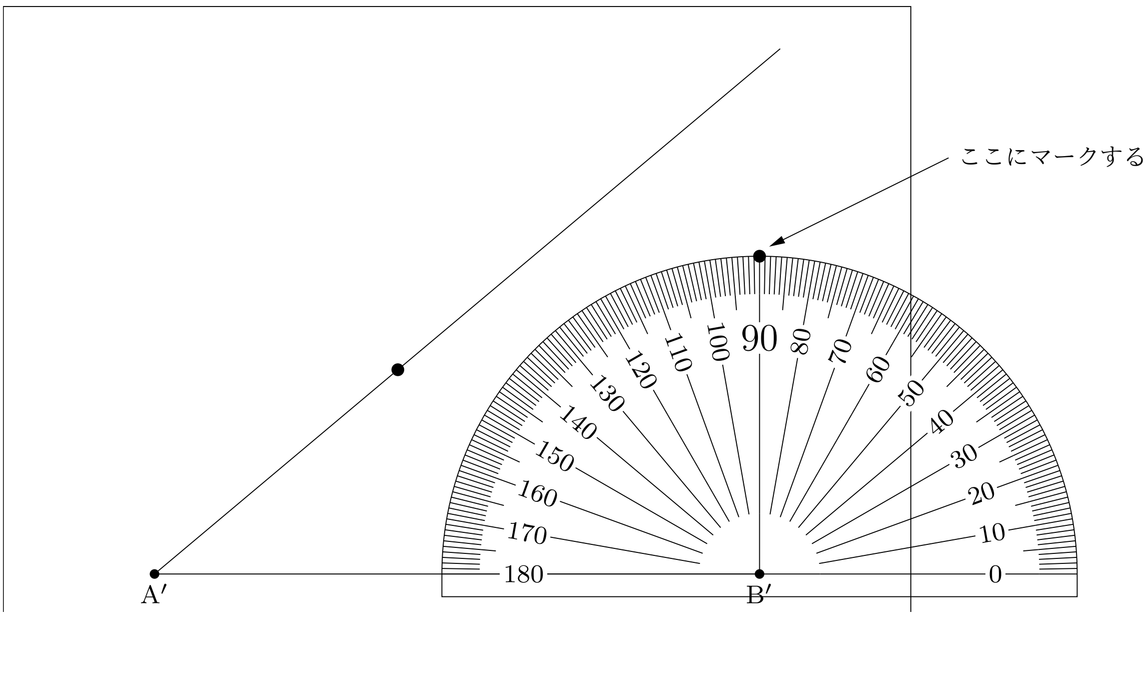


次は、定規を使って点 A′ と今マークした点を通る線を描きます。次の図を見てください。このように定規を当て、適当な長さの線をまっすぐ描くわけです。

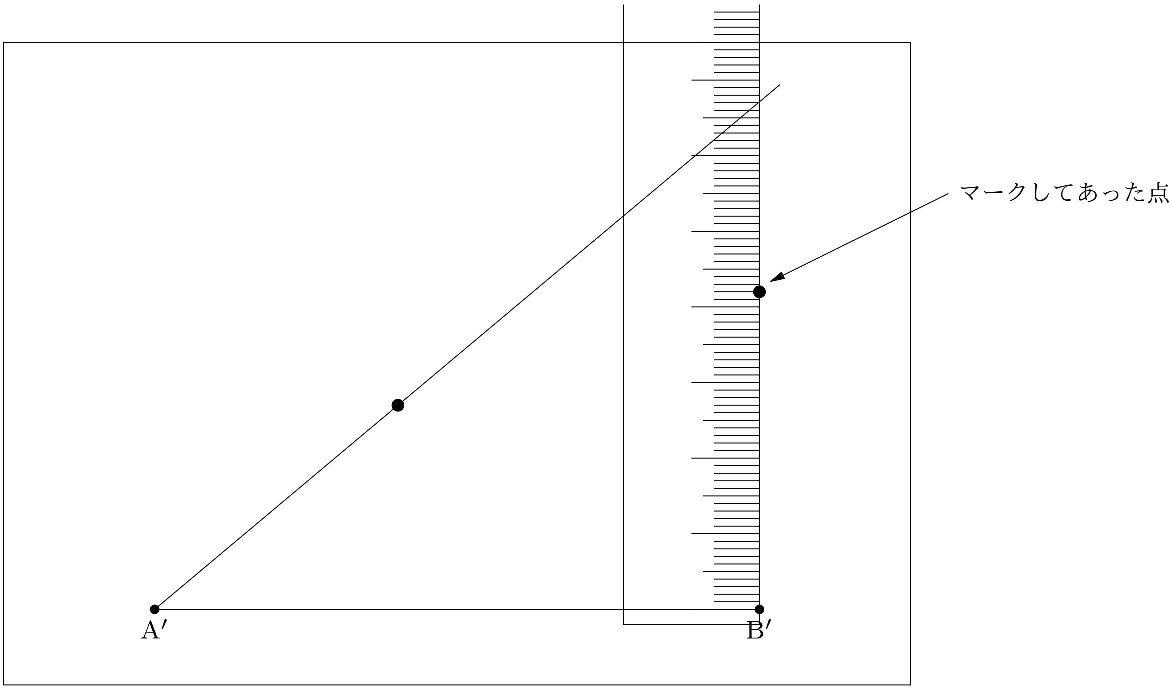


定規を点 A′ とマークしてあった点に合わせ、線を引く

次は、分度器を使って点 B′ のところにできるだけ正確に直角を作ります。（ビルディングは地面に建てられています。ですから「水平に眺めたときの視線 AB」と「ビルディングの壁」は垂直になっていますよね。）つまり、次の図のようにするわけです。

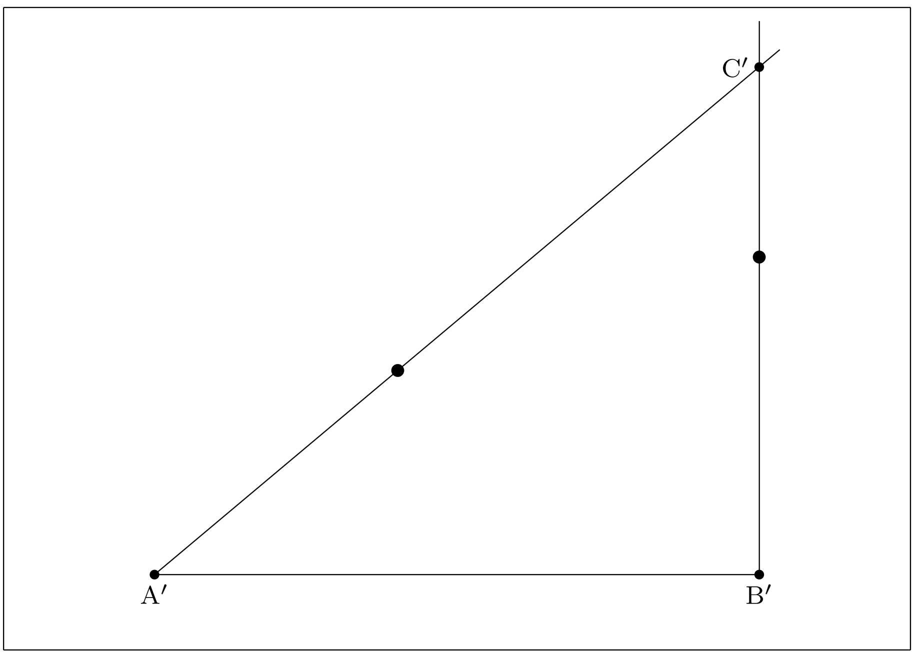


次は、定規を使って点 B′ と今マークした点を通る線を描きます。次の図を見てください。このように定規を当て、適当な長さの線をまっすぐ描くわけです。



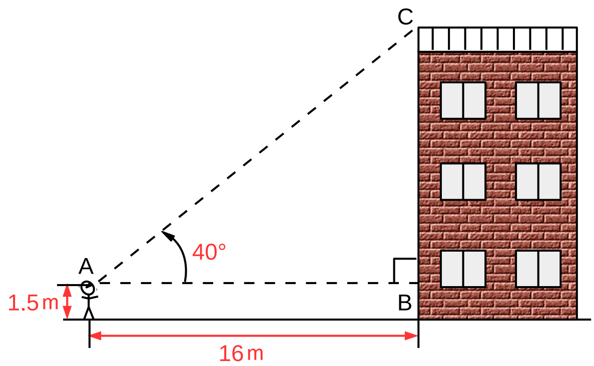
定規を点 B′ とマークしてあった点に合わせ、線を引く

点 A′ のところで水平から 40° の点を通るように描いた直線と、点 B のところで垂直に描いた直線の交点を C′ と呼ぶことにします。すると次のような図ができるはずです。



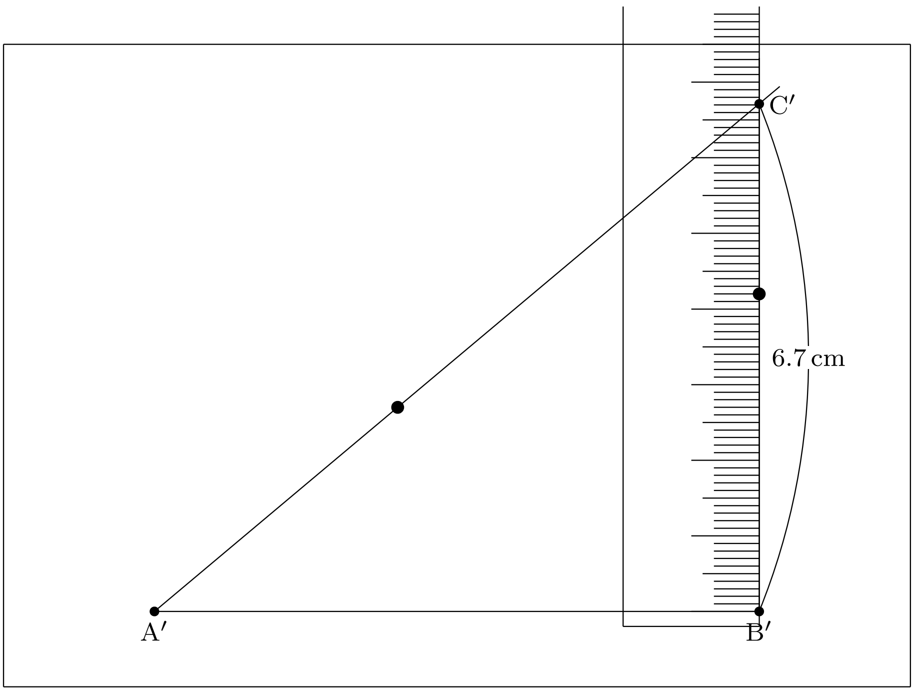
完成した $\frac{1}{200}$ の縮図

これで本物の長さを $\frac{1}{200}$ に縮小した縮図が完成しました。この縮図に描かれている $\triangle A'B'C'$ は（ビルディングのそばに作った）実物の $\triangle ABC$ と形が同じです。つまり、$\triangle A'B'C'$ と $\triangle ABC$ は相似です。この縮図は $40°$ と $90°$ という角の大きさを変えずに作られたものなので、$\triangle A'B'C'$ と $\triangle ABC$ では2組の角の大きさが等しくなっているからです。ではいよいよ、この縮図を使ってビルディングの高さを求めることにしましょう。



右の図を見てください。もう一度ビルディングの図を描いておきました。右の図と縮図を比べながら考えることにしましょう。

縮図は $\frac{1}{200}$ の縮図でしたね。ですから、AB 間の本当の距離 16 m は 8 cm に縮んでいます。そして縮図では、もちろんどこの長さも本当の長さの $\frac{1}{200}$ になっているわけです。ですから、本当の BC の長さも $\frac{1}{200}$ になっているわけです。ということは、本当の BC の長さを知りたければ、定規をつかって縮図の $B'C'$ の長さを測り、その値を200倍すれば良いということになりますね。次の図を見てください。



定規を目盛りを使ってできるだけ正確に $B'C'$ の長さを測る。
定規の目盛りを見ると、6.7 cm であることがわかる。

　このようにして、

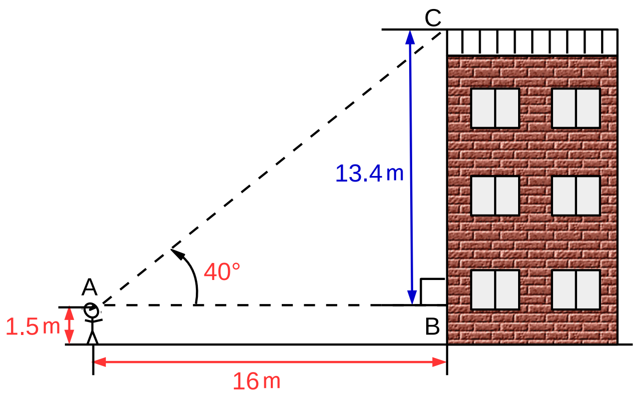
$$\text{定規の目盛りを使って測った B}'\text{C}' \text{ の長さ} = 6.7\,\text{cm}$$

であることがわかりました。本当の BC の長さを知りたければ、B′C′ の長さを 200 倍すれば良いのですから、

$$\text{本当の BC の長さ} = 6.7 \times 200 = 1340\,\text{cm} = 13.4\,\text{m}$$

となりますね。

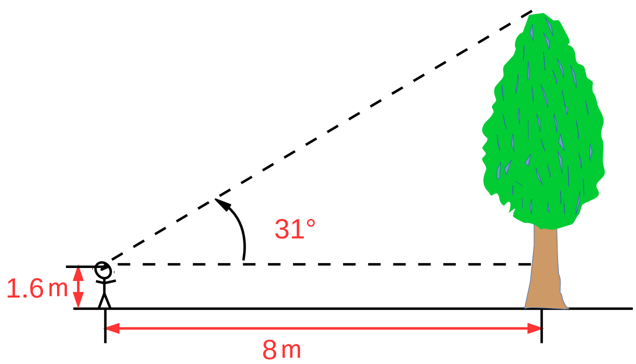
　では右の図を見てください。今、本当の BC の長さが 13.4 m であることがわかったので図に青で書き込んでおきました。この図を見ればわかりますが、ビルディングの高さを求めるには地面から目までの高さも考えに入れないといけませんね。というわけで、



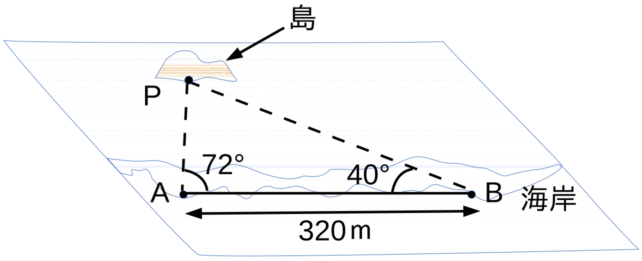
$$\text{本当のビルディングの高さ} = 13.4 + 1.5 = 14.9\,\text{m}$$

となりますね。これでめでたく解決です。あなたは地上にいたままビルディングの高さを知ることができたのです。

問 22.　A さんは右の図のような木の高さを知りたいと思い、木から 8 m 離れたところに立ち、木のてっぺんを見ました。このとき、木のてっぺんは水平方向から 31° 見上げた方向に見えました。A さんの代わりにあなたが適切な大きさの縮図を作り、木の高さを求めなさい。 ただし、A さんの目の高さは地面から 1.6 m の高さにあるとします。 答えを見る



問 23. 右の図を見てください。海岸の A 地点から島の P 地点までの距離を知ろうと思い、A 地点とは別のところに B 地点を決めて、海岸で測量をしたところ、この図のようなデータを得ました。適切な大きさの縮図を作り、A 地点から P 地点までの距離を求めなさい。



答えを見る

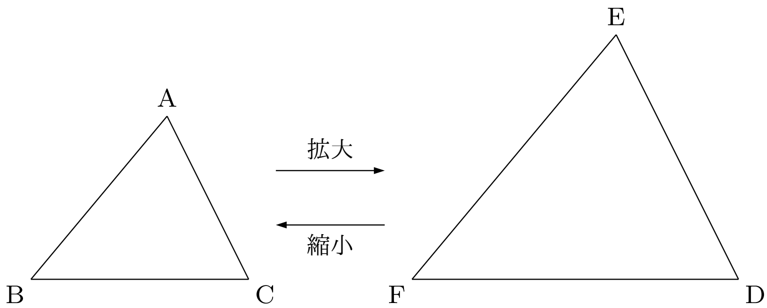
1.4　三角形と比

1.4.1　おさらい

次の話を学ぶ前に、「相似についてこれまで学んできたこと」と、かなり前に学んだ「平行線と角の関係」について簡単におさらいすることにします。

おさらい：相似って結局どういうこと？

次の図を見てください。



この図には 2 つの三角形が描かれていますが、2 つの三角形は相似になっています。ところで **2 つの図形が相似であるとは、その 2 つの図形の大きさは違ったとしても形は同じ**ということでした。別の言い方をすると、**2 つの図形が相似であるとは、片方の図形を形を変えずに一定の割合に拡大または縮小するともう片方の図形になる**ということでしたね。そして 2 つの図形が相似になっていると、次のようなことが成り立っているのでした。

(1) 2 つの図形が相似になっているとき、対応している辺、線分、曲線の長さの比はどこでも同じになっている。

(2) 2 つの図形が相似になっているとき、対応している角の大きさは同じになっている。

　ですからさっきの三角形の図では、例えば、

$$\mathrm{AB} : \mathrm{EF} = \mathrm{BC} : \mathrm{FD} = \mathrm{CA} : \mathrm{DE}$$

$$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{E}, \quad \angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{F}, \quad \angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{D}$$

が成り立っているわけです。

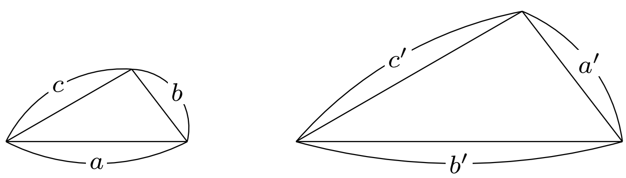
おさらい：どんなことが判明したら 2 つの三角形は相似であると断言できるの？

　相似なのかどうかわからない 2 つの三角形があるとき、次の 3 つの条件のうちのどれかが成り立っていれば、その 2 つの三角形は相似であると断言できるのでしたね。

(1) 3 組の辺の比が全て等しくなっているとき

つまり、右の図のような 2 つの三角形で、

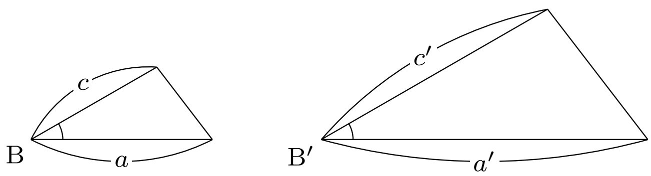
$$a : a' = b : b' = c : c'$$



となっていたら、この 2 つの三角形は相似であると断言して良いのです。

(2) 2 組の辺の比が等しくなっていて、その 2 組の辺の間にある角の大きさが等しくなっているとき

つまり、右の図のような 2 つの三角形で、例えば、



$$a : a' = c : c'$$

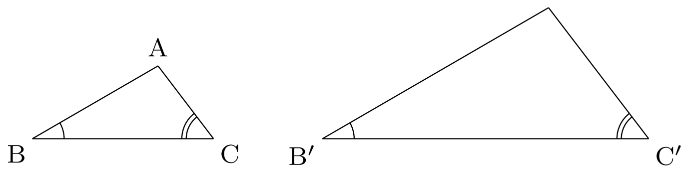
$$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{B}'$$

となっていたら、この 2 つの三角形は相似であると断言して良いのです。

(3) 2 組の角の大きさが等しくなっているとき

つまり、右の図のような 2 つの三角形で、例えば、

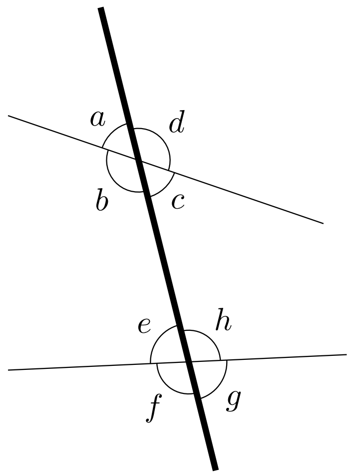
$$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{B}', \quad \angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{C}'$$

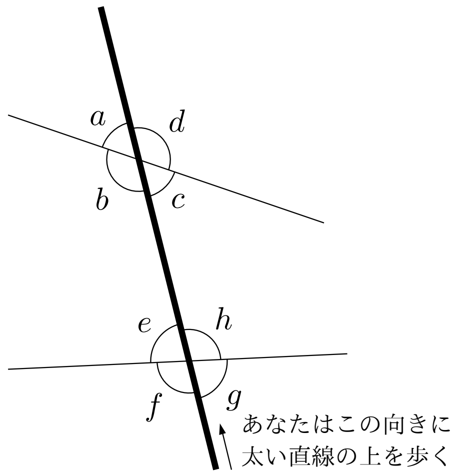


となっていたら、この 2 つの三角形は相似であると断言して良いのです。

おさらい：2 つの直線が平行なのかどうかということと、同位角や錯角の大きさが等しいかどうかということには深い関係があるという話

同位角、錯角ってなに？　初めに直線が 2 本あり、そこにさらに別の直線が交わっているとします。つまり右の図のようになっているとします。初めにあった 2 本の直線と、その 2 本の直線に交わる別の直線をはっきり区別するため、この図では、初めにあった 2 本の直線は細い線で描かれ、その 2 本の直線に交わる別の直線は太い線で描かれています。この図を見ればわかりますが、このようなとき、角が必ず 8 個できます。説明のの都合で、この図では 8 個の角 a、b、c、d、e、f、g、h という名前をつけました。



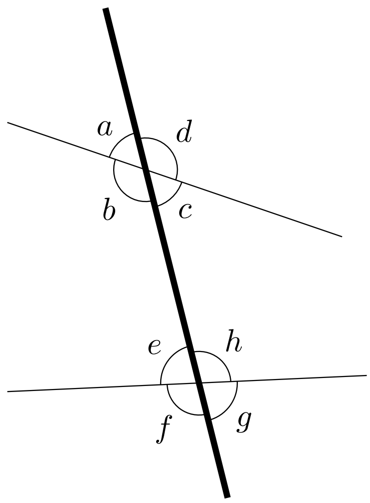


右の図を見てください。さっきの図をもう 1 度描いておきました。この図の e と a のような位置関係にある角を**同位角**と呼びます。わかってもらえたでしょうか。たぶん、「e と a のような位置関係」なんていわれても「？？」と思った人もいますよね。ですから、このことについて少し説明しましょう。

ではもう一度今の図を見てください。あなたは今、太い直線の上を、下から上へ向かって歩いて行くとします。そうすると、そのうち e、f、g、h という 4 つの角ができている十字路に着きます。このとき、角 e はあなたから見て左側前方にあるはずです。ではさらに、（体の向きは変えないですっと前を向いたまま）太い直線の上を進むことにしましょう。するとそのうち、a、b、c、d という 4 つの角ができている十字路に着きます。このとき、角 a はあなたから見て左側前方にあるはずです。つまり、それぞれの十字路に着いたとき、e と a はあなたから見て同じ位置に見えるのです。ですから e と a は同位角と呼ばれるのです。

この説明がわかった人は、e と a のほかにも、この図には同位角があることがわかるでしょう。そうです、f と b も同位角、g と c も同位角、d と h も同位角ですね。

では次に、「錯角とは何か」という話をしましょう。



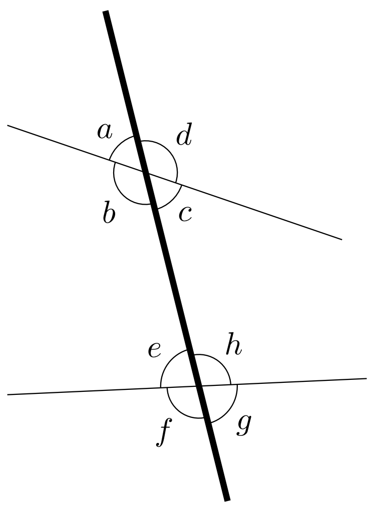
右の図を見てください。何度も出てきた図です。この図の c と e のような位置関係にある角を**錯角**と呼んでいます。わかってもらえたでしょうか。たぶん、「c と e のような位置関係」なんていわれても「？？」と思った人もいますよね。ですから、このことについて少し説明しましょう。

「錯」という漢字には「かわるがわる」とか「互

いに」という意味があります。「交錯した」とか「互い違いになっている」といっても良いかもしれません。では、さっきの図を見てください。昔の人にとって、この図の c の角と e の角の位置は「互い違いになっている」感じがしたのでしょう。きっと今の人も「ああ、こういうの、互い違いって言うことあるよな」って思うのではないでしょうか。ここまでは感覚的な説明ですが、これからもう少し、数学の立場からきちんとした説明をすることにします。もう一度、さっきの図の角 c と角 e に注目してください。初めにあった 2 つの直線（つまり細く描かれた 2 つの直線）だけを見ると、c と e はどちらもその 2 つの直線にはさまれている場所にあります。また、初めにあった 2 つの直線に交わっている別の直線（つまり太く描かれた直線）だけを見ると、c と e はその直線について反対側にあります。これが c と e の位置関係が持っている特徴です。こういう位置関係になっている 2 つの角を錯角と呼んでいるのです。ですから、c と e のほかにも錯角があります。どことどこの角か気付きましたか？「初めにあった 2 つの直線（つまり細く描かれた 2 つの直線）だけを見ると、どちらもその 2 つの直線にはさまれている場所にあり」、「初めにあった 2 つの直線に交わっている別の直線（つまり太く描かれた直線）だけを見ると、その直線について反対側にある」ような 2 つの角を錯角というのですよ。この図をよく見ると、b と h もそうなっていますよね。ですから b と h は錯角なのです。

同位角、錯角の大きさと 2 直線が平行かどうかということには関係がある

右の図のように、初めに直線が 2 本あり、そこにさらに別の直線が交わっているとします。（これまでと同じように、初めにあった 2 本の直線と、そのその 2 本の直線に交わる別の直線をはっきり区別するため、この図では、初めにあった 2 本の直線は細い線で描かれ、その 2 本の直線に交わる別の直線は太い線で描かれています。）



このとき、実は次のような驚くべき事実が成り立っています。

(1) もし初めにあった 2 直線が平行になっているとしたら、同位角は同じ大きさになっている。つまり、図で、細く描かれている 2 直線が平行になっているときは、a と e は等しく、b と f は等しく、d と h は等しく、c と g は等しくなっていると断定してよい。
(2) もし初めにあった 2 直線が平行になっているとしたら、錯角は同じ大きさになっている。つまり、図で、細く描かれている 2 直線が平行になっているときは、b と h は等しく、c と e は等しくなっていると断定してよい。
(3) もしどこかの同位角が同じ大きさになっているとしたら、初めにあった 2 直線は平行になっている。つまり、図で、例えば a と e が等しくなっているときは、細く描かれている 2 直線は平行になっていると断定してよい。
(4) もしどこかの錯角が同じ大きさになっているとしたら、初めにあった 2 直線は平行になっている。つまり、図で、例えば b と h が等しくなっているときは、細く描かれている 2 直線は平行になっていると断定してよい。

それではおさらいを終わることにして、いよいよ本題に入ることにしましょう。

1.4.2　三角形と比

これから 2 つの話をします。

1 つ目の話は次のようなものです。

まず、三角形があるとします。そしてこの三角形ある辺に平行な線を付け加えます。そうすると、どこかの長さとどこかの長さの比は、別のどこかの長さとどこかの長さの比と等しくなってしまうという話です。

2 つ目の話は次のようなものです。

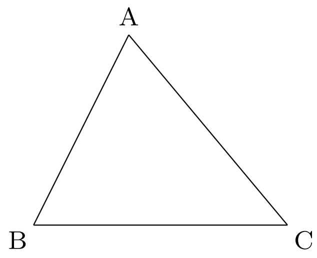
まず、三角形があるとします。そしてこの三角形のどこかの長さとどこかの長さの比

が、別のどこかの長さとどこかの長さの比と等しくなっているような点を 2 つ見つけその 2 つの点をまっすぐ結んで線分を作ります。そうすると、この線分は三角形のある辺に必ず平行になってしまうという話です。

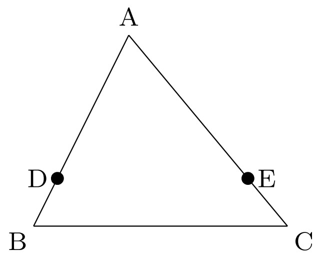
以上、2 つのお話のあらすじを述べました。でもきっと、何の話なのかよくわからないでしょうからこれから詳しく説明します。

三角形に線分が付け加えられると・・・という話その 1

右の図を見てください。まず △ABC があるとします。



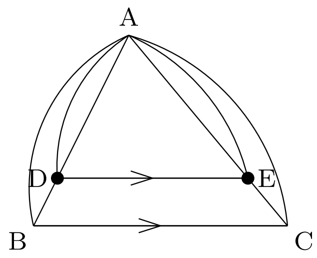
次にこの三角形の辺 AB 上に点 D、辺 AC 上に点 E を打ちますが、点 D と点 E を結んでできる線分 DE が辺 BC と平行になるように点 D と点 E を打ちます。



そうすると、驚くべきことに、絶対に、

$$\mathrm{AD} : \mathrm{AB} = \mathrm{AE} : \mathrm{AC}$$

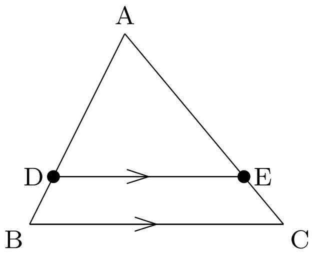
が成り立ってしまうのです。



これで 1 つ目の話がどのようなものかわかってもらえたと思います。ですが今あなたは数学を学んでいるわけです。ですからたとえこのお話が本当だとしても、本当であるという証拠を見つけなくてはいけませんね。では証拠探しをすることにしましょう。実は、三

角形の相似条件をしっかり学んだ人はこのお話の証明をすることができるのです。以下の文の空欄に正しい言葉、記号などを記入してください。

三角形に線分が付け加えられると・・・という話その 1 の証明



右の図を見てください。このお話ではこの図に描き込まれているように、△ABC の辺 A と辺 AC の上にそれぞれ点 D と点 E が打たれていて線分 DE は辺 BC と平行になっているのでしたね。今のところわかっているのはこれだけです。

ではまず、△ADE と △ABC に注目してください。実はこの 2 つの三角形が相似になっているということをこれから証明します。

△ADE と △ABC において、

$$\angle\mathrm{ADE} = \angle\mathrm{BAC} \quad \text{（共通だから）}\cdots ①$$

$$\angle\mathrm{ADE} = \angle\mathrm{ABC} \quad \text{（DE と BC は平行になっていて、平行線の } \boxed{\quad\quad} \text{ は必ず大きさが等しいから）} \cdots ②$$

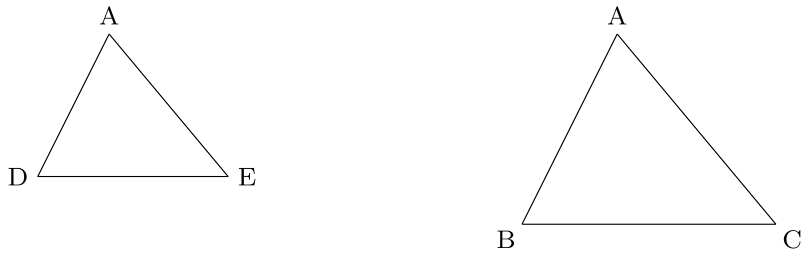
①、②より、△ADE と △ABC では $\boxed{\quad\quad}$ の角の大きさが等しいので、

$$\triangle\mathrm{ADE} \backsim \triangle\mathrm{ABC}$$

であると断言できます。

これでまず、△ADE と △ABC が相似になっているということが証明されました。

では次の図を見てください。



この図はもともとの図から相似であることが判明した △ADE と △ABC を取り出して見やすい向きに並べて描いたものです。

ところで、相似な図形では、対応する部分の長さの比はどこでも等しいのでしたね。ですから、

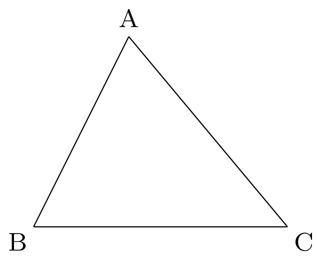
$$AD : AB = \boxed{} : \boxed{}$$

であると断言できますね。これでめでたく「三角形に線分が付け加えられると・・・という話その 1」の証明ができました。

では 2 つ目の話に入りましょう。

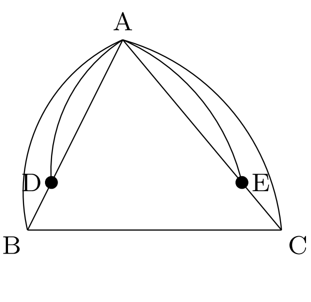
三角形に線分が付け加えられると・・・という話その 2

右の図を見てください。まず △ABC があるとします。



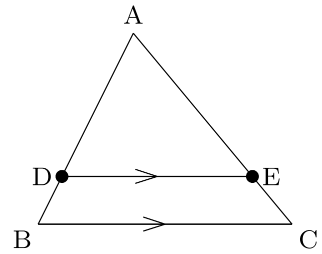
次にこの三角形の辺 AB 上に点 D、辺 AC 上に点 E を打ちますが、

$$AD : AB = AE : AC$$



となるように点 D と点 E を打ちます。

そうすると、驚くべきことに、点 D と E を結んでできる線分 DE は、絶対に、辺 BC と平行になってしまうのです。



これで 2 つ目の話がどのようなものかわかってもらえたと思います。ですが今あなたは数学を学んでいるわけです。ですからたとえこのお話が本当だとしても、本当であるという証拠を見つけなくてはいけませんね。

問 24.　この問の前に書いてある「三角形に線分が付け加えられると・・・という話その 2」を証明しなさい。

答えを見る

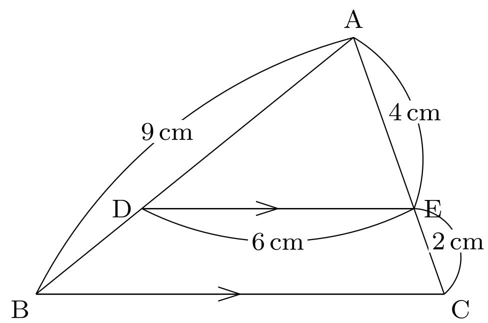
さて、ここまで「三角形に線分が付け加えられると・・・という話」を 2 つ紹介しその話の証明も学びました。数学では、一度きちんと証明された話（つまり証拠のある話）は様々な問題を解くときに自由に活用することができます。そこでこれから、2 つの「三角形に線分が付け加えられると・・・という話」を活用すると解ける問題をいくつか練習することにしましょう。

例題 9　右の図では DE // BC となっているとします。

(1)　AD の長さを求めなさい。

(2)　BC の長さを求めなさい。

(3)　DB の長さを求めなさい。

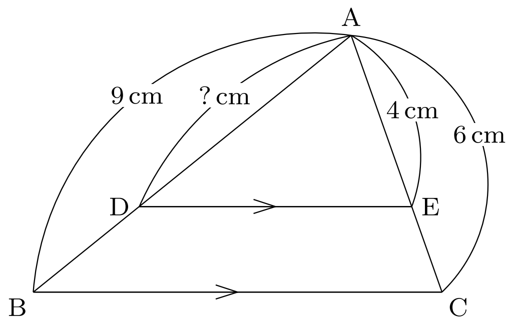


解答

(1) この話は「△ABC で辺 BC に平行な線分 DE が付け加えられている話」と思うこ

とができますね。ですからきっと「三角形に線分が付け加えられると・・・という話その 1」を活用できるかもしれませんね。

では右の図を見てください。この問題の図から、注目して欲しいところだけを描いた図を作ってみました。先のことを考えに入れてこの図には、もとの図に描いてなかった AC の長さも記入してあります。（もとの図をちゃんと見た人は、AC の長さは 6 cm だってわかりますよね。）



ではこの図を見ながら考えることにしましょう。

DE と BC が平行なのですから、三角形に線分が付け加えられると・・・という話その 1」によると、

$$\mathrm{AD} : \mathrm{AB} = \mathrm{AE} : \mathrm{AC}$$

が成り立っているはずなんですよね。つまり、今のところわかっている値を使うと、

$$\mathrm{AD} : 9 = 4 : 6$$

が成り立っているということですよね。この式を使えば AD の長さを求めることができますね。例えば「外項の積イコール内項の積」というのを知っている人は、

$$\mathrm{AD} \times 6 = 9 \times 4$$

としてから、

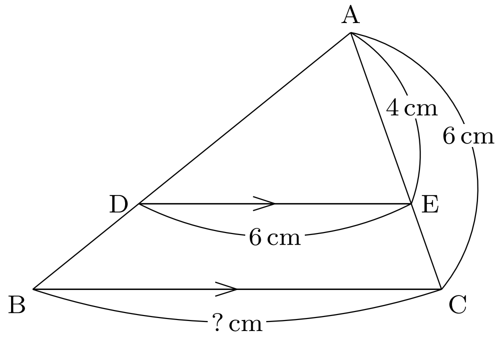
$$\mathrm{AD} = \frac{9 \times 4}{6} = 6\,(\mathrm{cm})$$

と求めることができますね。

(2) この話は「△ABC で辺 BC に平行な線分 DE が付け加えられている話」と思うことができますね。ですからきっと「三角形に線分が付け加えられると・・・という

話その 1」を活用できるかもしれませんね。

では右の図を見てください。この問題の図から、注目して欲しいところだけを描いた図を作ってみました。先のことを考えに入れてこの図には、もとの図に描いてなかった AC の長さも記入してあります。（もとの図をちゃんと見た人は、AC の長さは 6 cm だってわかりますよね。）

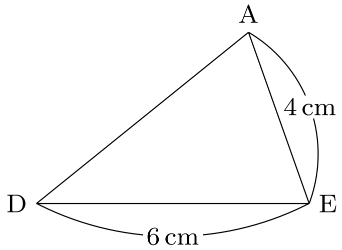


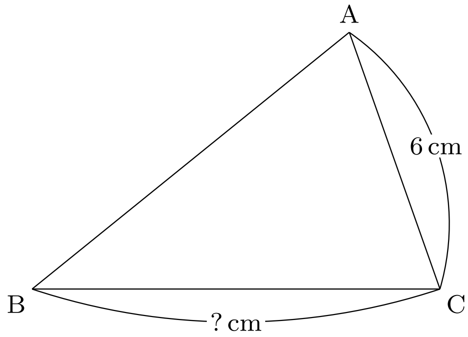
ではこの図を見ながら考えることにしましょう。

あれー、でもちょっと困ったことになっていますよね。だって・・・90 ページを開いてもう一度「三角形に線分が付け加えられると・・・という話その 1」を読んでください。「三角形に線分が付け加えられると・・・という話その 1」には、平行になっている DE と BC の長さがどうのこうのなんて話は何の出てきませんね。ですから、「三角形に線分が付け加えられると・・・という話その 1」を頼ってこの問題を考えるわけには行かないのです。そこで初心に戻ることにします。「三角形に線分が付け加えられると・・・という話その 1」の本質は何かといえば、「実はこのお話に出てくるある 2 つの三角形が相似になっているので、対応している部分の長さの比はどこでも同じ」と言うことですね。憶えていますか？ですからこの問題でも、相似になっている 2 つの三角形をちゃんと探して考えるのが良いのではないでしょうか？どうですか？この問題の図をもう一度よく見てください。相似になっている 2 つの三角形はありそうですか？実はちゃんとあります。（「三角形に線分が付け加えられると・・・という話その 1」の証明をしっかり学んだ人だったらすぐに見つけられますよね。）実は △ADE と △ABC は相似なのです。ですが、証拠はあなたに見つけてもらうことにします。

問 △ADE と △ABC は相似であることを証明しなさい。

さてこの問で $\triangle$ADE と $\triangle$ABC は相似であるということが証明できた人は安心して先へ話を進めることができます。次の図を見てください。わかりやすくするために、もとの図から $\triangle$ADE と $\triangle$ABC を取り出して並べてみました。





相似な図形では対応している部分の長さの比はどこでも同じなので、例えば、

$$\mathrm{AE} : \mathrm{AC} = \mathrm{DE} : \mathrm{BC}$$

であると断言できますね。つまり、今のところわかっている値を使うと、

$$4 : 6 = 6 : \mathrm{BC}$$

が成り立っているということですよね。この式を使えば BC の長さを求めることができますね。例えば「外項の積イコール内項の積」というのを知っている人は、

$$4 \times \mathrm{BC} = 6 \times 6$$

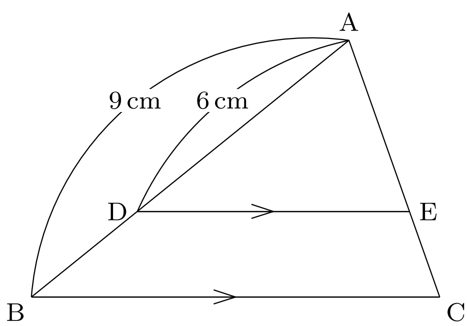
としてから、

$$\mathrm{BC} = \frac{6 \times 6}{4} = 9\,(\mathrm{cm})$$

と求めることができますね。

(3) DB の長さを求める問題ですね。

右の図を見てください。 (1) で AD の長さは 6 cm であることが判明しているのでこの図に書き込んでおきました。DB の長さは



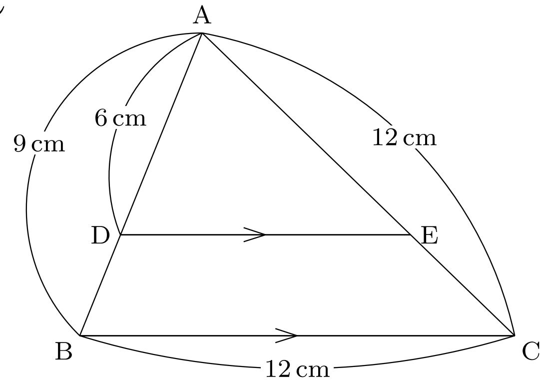
AB の長さから AD の長さを引けば求める

ことができますね。またこの問題では初めから、AB の長さは 9 cm になっているのでした。ですから、

$$DB = 9 - 6 = 3\,(\mathrm{cm})$$

ですよね。

問 25. 右の図では DE // BC となっているとします。



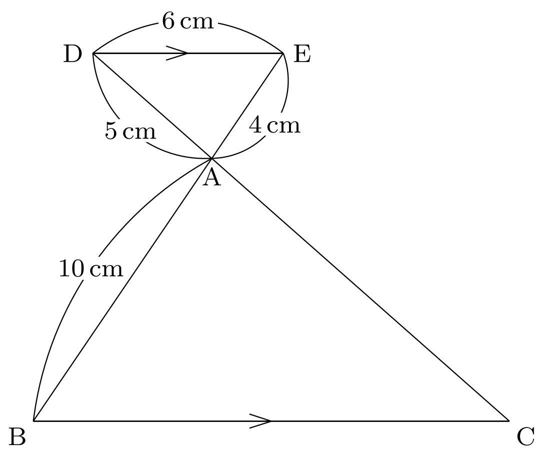
(1) AE の長さを求めなさい。

(2) EC の長さを求めなさい。

(3) DE の長さを求めなさい。

答えを見る

問 26. 右の図では DE // BC となっているとします。



(1) この図の中から相似になっている 2 つの三角形を見つけ、相似であることを証明しなさい。

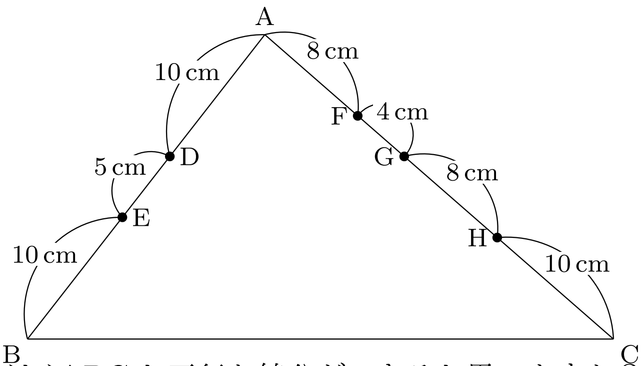
(2) (1) で見つけた相似な三角形では、対応している部分の長さの比はどこでも等しいということを考えに入れて AC の長さを求めなさい。

(3) (1) で見つけた相似な三角形では、対応している部分の長さの比はどこでも等しいということを考えに入れて BC の長さを求めなさい。

(4) DC の長さを求めなさい。

答えを見る

例題 10　右の図を見てください。△ABC の辺 AB と辺 AC の上にいくつかの点が打たれています。また、各部分の長さはこの図のようになっているとします。以下の問に答えなさい。



(1)　点 D と、辺 AC 上のどの点を結ぶと辺 BC と平行な線分ができると思いますか？根拠も答えなさい。

(2)　点 E と、点 H を結ぶと辺 BC と平行な線分ができると思いますか？根拠も答えなさい。

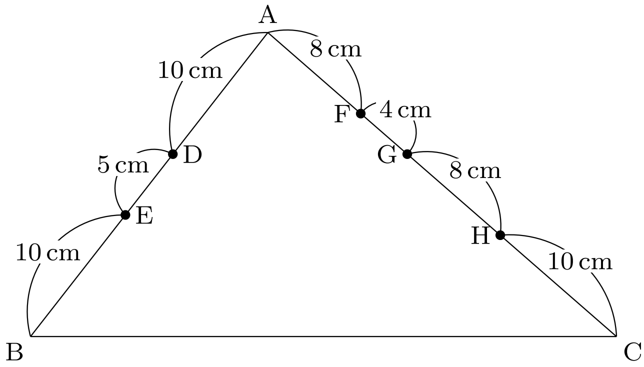
(3)　点 D と、点 F を結びます。また、点 B と、点 H を結びます。このとき、線分 DF と線分 BH は平行になると思いますか？根拠も答えなさい。

念のための注意です。見た目だけで判断するのはやめましょう。図はいいかげんに描かれているかもしれないのです。さらに言えば、完全に正確な図を描くなどということは人間には無理なのです。この図の見た目を信用し過ぎると、間違った答えを出してしまうかもしれません。ですからきちんとした根拠をもとに判断しなくてはならないのです。数学に限らず、どんなことでも見た目だけで判断すると間違った判断をするおそれがあります。本当のことを知りたければ、きちんとした根拠をもとに判断する必要があるのです。

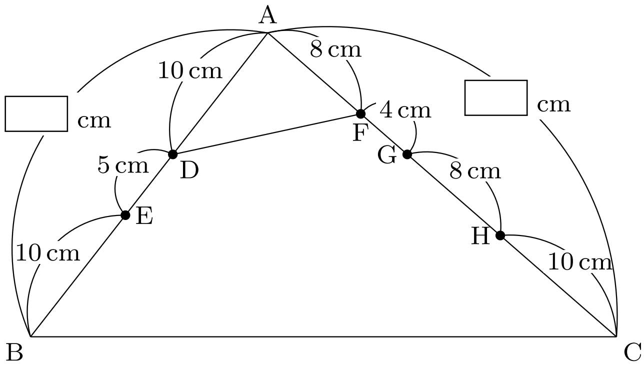
解答

まずもう一度、90 ページの「三角形に線分が付け加えられると・・・という話その 1」と 92 ページの「三角形に線分が付け加えられると・・・という話その 2」を読んでください。「何かと何かが平行になっている」ということと、「どこかとどこかの比が、また別のどこかとどこかの比と等しくなっている」ということは深く関係しているという話でしたね。このことをしっかり頭に入れて考えることにしましょう。

(1) 右の図を見てください。あなたのために右にこの問題の図をもう一度描いておきました。「点 D と、辺 AC 上のどの点を結ぶと辺 BC と平行な線分ができると思いますか？根拠も答えなさい。」という問題でしたね。

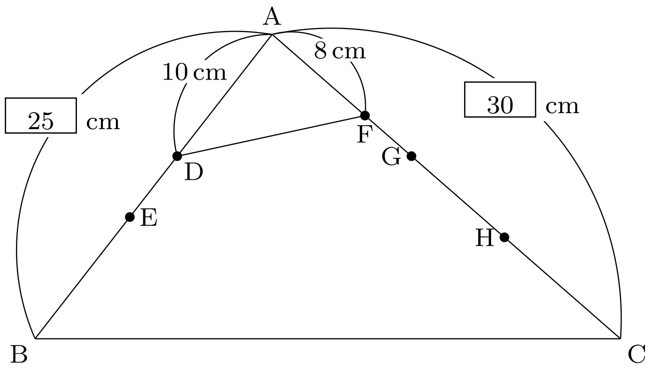


試しに D と F を結んで見ましょう。すると右の図のようになります。辺 BC と平行になっているようには見えないですね。でも見た目だけで判断してはいけません。前にも言ったように、図は正確ではないかもしれないからです。そこで証拠を探しましょう。まず、この図の $\boxed{}$ に正しい値を記入してください。（足し算すればいいですよね。）



では右の図を見てください。間違わずにたし算ができた人は $\boxed{}$ の中は右の図のようになっているはずです。

ではいよいよ、DF と BC は平行なのか違うのか。証拠を探すことにします。



まず、AD : AB の値をできるだけ簡単にすると何対何になるのか計算してみます。

そうすると、

$$\mathrm{AD} : \mathrm{AB} = 10 : 25 = 2 : 5$$

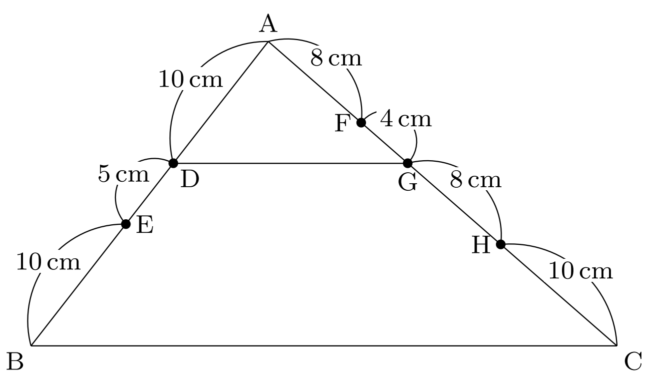
であることがわかります。（これ以上簡単にはできませんね。）

次は、AF : AC の値をできるだけ簡単にすると何対何になるのか計算してみます。そうすると、

$$\mathrm{AF} : \mathrm{AC} = 8 : 30 = 4 : 15$$

であることがわかります。（これ以上簡単にはできませんね。）

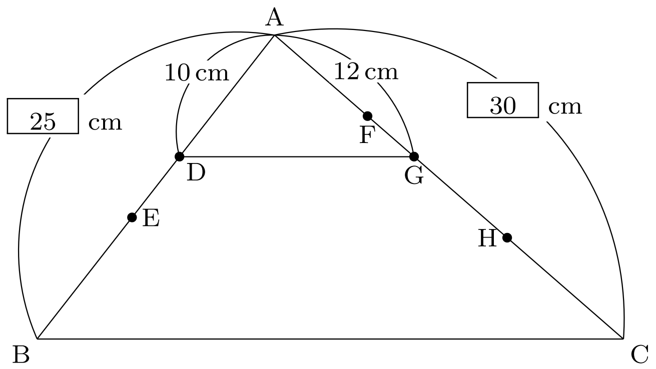
うーん、2 : 5 と 4 : 15 ですか。どう考えても違っていますね。たしか、「三角形に線分が付け加えられると・・・という話」によれば、もし DF と BC が平行になっていたら AD : AB の値と AF : AC の値は同じになるはずなんですよね。でも今、AD : AB の値と AF : AC の値は違っているのですから、DF と BC が平行になっているはずはないということですね。これでケリがつきましたね。私たちは試しに D と F と結んでみたわけですが、D を F と結んでも BC と平行にはならないのです。では一体、D をどの点と結べば BC と平行になるのでしょうか。



今度は D を G と結んで見ることにします。右の図を見てください。図を見る限り、かなりいい線いってますよね。BC と平行になっている感じがします。しかし何度も言いますが、図は微妙にゆがんでいるかもしれないのです。ですから証拠を探さないといけないのです。ではどんな証拠が見つかれば良いのでしょうか。「三角形に線分が付け加えられると・・・という話」がしっかり理解できている人はもうおわかりですね。そうです、AD : AB の値と AG : AC の値が同じになっているという証拠が見つかれば良いのです。で

は調べてみることにしましょう。

では右の図を見てください。必要なところだけ長さを計算し、図に書き込んでおきました。あなたもちゃんと、もとの図と比べて計算してみてください。



ではまず、AD : AB の値をできるだけ簡単にすると何対何になるのか計算してみます。そうすると、

$$\mathrm{AD} : \mathrm{AB} = 10 : 25 = 2 : 5$$

であることがわかります。（これ以上簡単にはできませんね。）

次は、AG : AC の値をできるだけ簡単にすると何対何になるのか計算してみます。そうすると、

$$\mathrm{AG} : \mathrm{AC} = 12 : 30 = 2 : 5$$

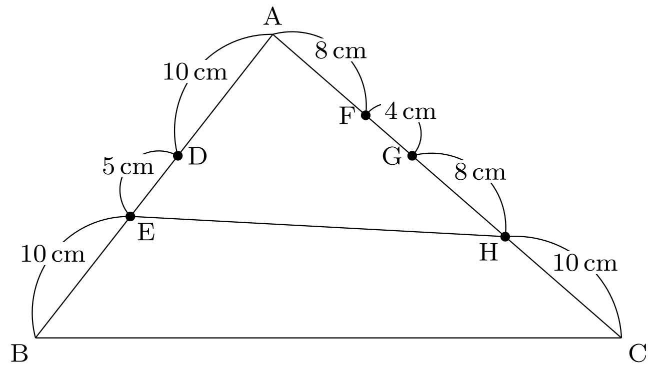
であることがわかります。（これ以上簡単にはできませんね。）

どうですか？ラッキーなことに、AD : AB の値と AG : AC の値は同じになっていますね。ということは、「三角形に線分が付け加えられると・・・という話」によると、DG と BC は平行であると断言してよいわけです。つまり、D と G を結べば BC と平行になるということが判明したのです。

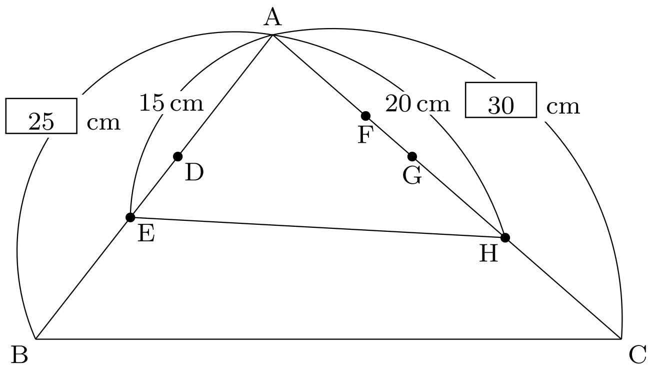
ここまで「D と F を結ぶと BC に平行になるのか？」ということと「D と G を結ぶと BC に平行になるのか？」ということを調べてきました。ですからまだ、「D と H を結ぶと BC に平行になるのか？」ということは調べていないわけです。でももう、そんなことを調べる必要はありませんね。D と G を結べば BC と平行になるということが判明したのですから D と G 以外の点を結んでも BC と平行にな

るはずはありませんね。

(2) 「点 E と、点 H を結ぶと辺 BC と平行な線分ができると思いますか？根拠も答えなさい。」という問題でしたね。



では右の図を見てください。この図を見る限り平行になっているようには見えませんが、きちんとした判断をするためには証拠が必要ですね。「三角形に線分が付け加えられると・・・という話」がしっかり理解できている人はもうおわかりのはずです。そうです、AE : AB の値と AH : AC の値が同じになっているのかどうかを調べれば良いのです。同じになっていれば平行であると断言できますし、違っていれば平行ではないと断言できますね。では調べてみることにしましょう。



では右の図を見てください。必要なところだけ長さを計算し、図に書き込んでおきました。あなたもちゃんと、もとの図と比べて計算してみてください。

ではまず、AE : AB の値をできるだけ簡単にすると何対何になるのか計算してみます。そうすると、

$$\mathrm{AE} : \mathrm{AB} = 15 : 25 = 3 : 5$$

であることがわかります。（これ以上簡単にはできませんね。）

次は、AG : AC の値をできるだけ簡単にすると何対何になるのか計算してみます。

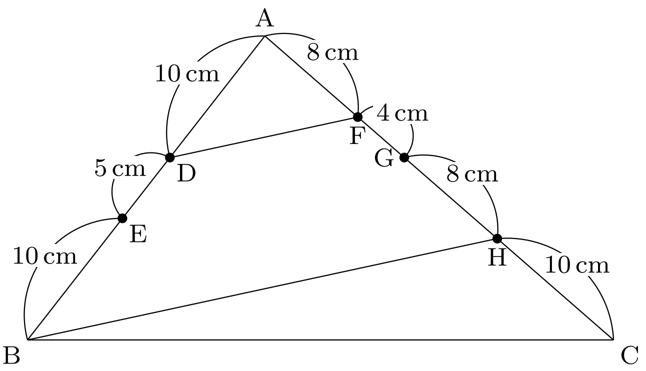
そうすると、

$$AH : AC = 20 : 30 = 2 : 3$$

であることがわかります。（これ以上簡単にはできませんね。）

うーん、3 : 5 と 2 : 3 ですか。どう考えても違っていますね。たしか、「三角形に線分が付け加えられると・・・という話」によれば、もし EH と BC が平行になっていたら AE : AB の値と AH : AC の値は同じになるはずなんですよね。でも今、AE : AB の値と AH : AC の値は違っているのですから、EH と BC が平行になっているはずはないということですね。

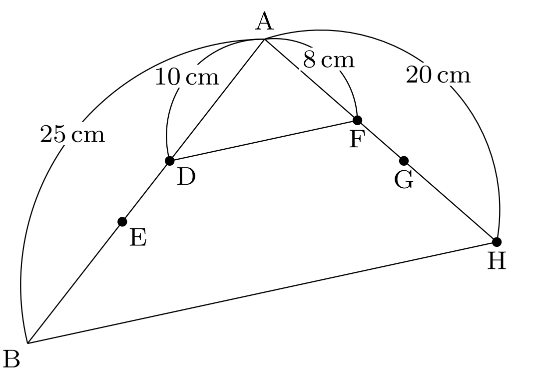
(3)「点 D と、点 F を結びます。また、点 B と、点 H を結びます。このとき、線分 DF と線分 BH は平行になると思いますか？根拠も答えなさい。」という問題でしたね。



では右の図を見てください。

DF と BH は平行になっているようにも見えますが証拠が必要ですね。

右の図を見てください。もとの図から必要なところだけを取り出し。長さを計算し、図に書き込んでおきました。あなたもちゃんと、もとの図と比べて計算してみてください。



それではこの図を見ながら DF と BC が平行なのかどうか調べることにします。「三角形に線分が付け加えられると・・・という話」がしっかり理解できている人は

もうおわかりのはずです。AD : AB の値と AF : AH の値が同じになっているのかどうかを調べれば良いのです。同じになっていれば平行であると断言できますし、違っていれば平行ではないと断言できますね。では調べてみることにしましょう。

ではまず、AD : AB の値をできるだけ簡単にすると何対何になるのか計算してみます。そうすると、

$$\mathrm{AD} : \mathrm{AB} = 10 : 25 = 2 : 5$$

であることがわかります。（これ以上簡単にはできませんね。）

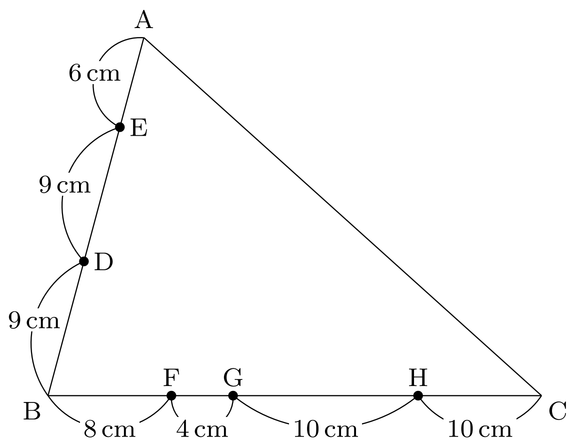
次は、AF : AH の値をできるだけ簡単にすると何対何になるのか計算してみます。そうすると、

$$\mathrm{AF} : \mathrm{AH} = 8 : 20 = 2 : 5$$

であることがわかります。（これ以上簡単にはできませんね。）

どうですか？ AD : AB の値と AF : AH の値は同じになっていますね。ということは、「三角形に線分が付け加えられると・・・という話」によると、DF と BH は平行であると断言してよいわけです。

問 27. 右の図を見てください。△ABC の辺 AB と辺 BC の上にいくつかの点が打たれています。また、各部分の長さはこの図のようになっているとします。以下の問に答えなさい。



(1) 点 D を辺 BC 上のどの点を結ぶと辺 AC と平行な線分ができると思いますか？根拠も答えなさい。

(2) 点 E と点 H を結ぶと辺 AC と平行な線分ができると思いますか？根拠も答えなさい。

(3) 点 D と、点 F を結びます。また、点 A と、点 H を結びます。このとき、線分 DF

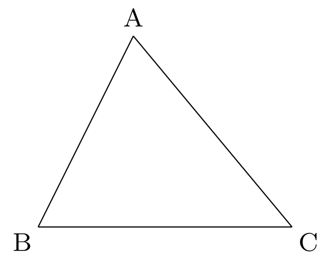
と線分 AH は平行になると思いますか？根拠も答えなさい。 答えを見る

1.4.3　三角形のどれか 2 つの辺の中点を結ぶと相似な三角形が現れるという話と中点連結定理について

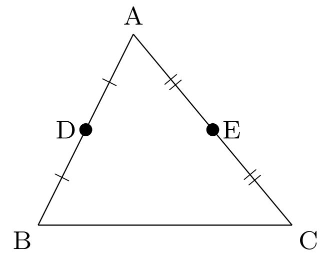
「中点連結定理」などという難しい言葉が出てきました。でも心配しないでください。90 ページで学んだ「三角形に線分が付け加えられると・・・という話その 1」と 92 ページで学んだ「三角形に線分が付け加えられると・・・という話その 2」がしっかり理解できている人にとって、「新しい話は特にない」からです。どういうことか説明しましょう。「中点連結定理」というのは、「三角形に線分が付け加えられると・・・という話その 1」や「三角形に線分が付け加えられると・・・という話その 2」の特殊な場合の話だと考えても良いような話なのです。はっきり言うと次のような話になります。

三角形の 2 つの辺の中点を結ぶ線分が付け加えられると ··· という話：中点連結定理

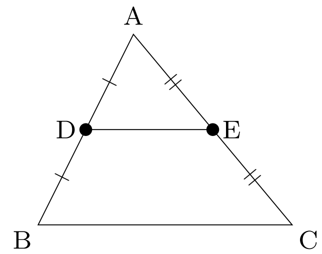
右の図を見てください。まず △ABC があるとします。



次にこの三角形の辺 AB 上に点 D、辺 AC 上に点 E を打ちますが、点 D は辺 AB の中点（つまり辺 AD の真ん中のところ）に打ち、点 E は辺 AC の中点（つまり辺 AC の真ん中のところ）に打ちます。



次に中点 D と中点 E をまっすぐ結び線分 DE を作ります。

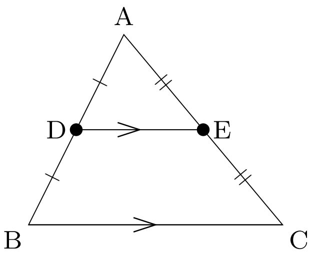


そうすると、驚くべきことに、絶対に、

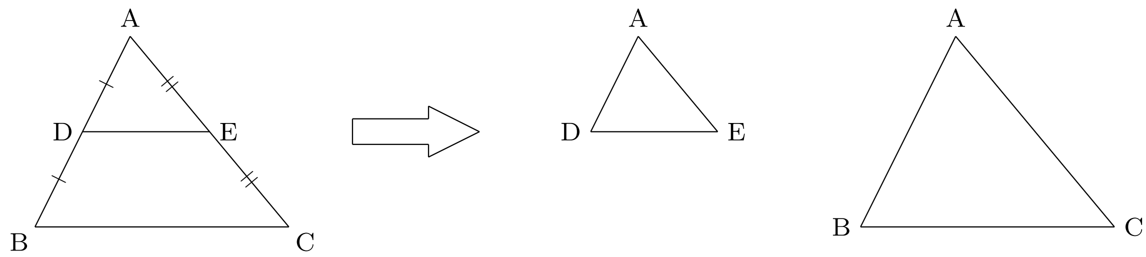
(1) DE は BC と平行

(2) DE の長さは BC の長さの半分

となってしまうのです。



これが中点連結定理と呼ばれているものです。念のため、どうしてこのようなことが成り立つのか簡単に説明しておきましょう。この手の話はどれもそうなのですが、話の中に「2 つの相似な三角形が出てきている」ということ、「相似な図形では対応している部分の長さの比はどこでも同じになっている」ということ、「同位角や錯角が等しくなっていたらどっかとどっかの線は平行になっている」ということが重要になっています。では次の図を見てください。この図はもともとの図から △ADE と △ABC を取り出し、比べやすいように並べているところを表しています。



この図を見るとわかると思いますが、今説明している中点連結定理の話では、△ADE と △ABC が相似になっているわけです。そして D や E は辺 AB や辺 AC の中点なのですから、例えば AD の長さは AB の長さの半分なわけです。相似な三角形では対応している部分の長さの比はどこでも同じなのですから DE だって BC の長さの半分になるわけです。また相似な三角形では対応する角の大きさは等しいのですから、例えば ∠E と ∠C の大きさは同じなわけです。これは、もともとの図（つまり一番左の図）で考えると同位角の大きさが等しいということを意味しています。ですから DE と BC は平行であると断言できるのです。これで中点連結定理とその証明ができました。というわけでこれから

中点連結定理を利用して解くこともできる問題を練習することにします。

例題 11　△ABC があるとします。△ABC の 3 つの辺 AB、BC、CA の中点をそれぞれ D、E、F と呼ぶことにします。

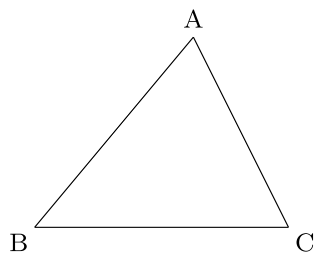
(1) 問題文ををよく読んで、まず図を描きなさい。

(2) (1) で描いた図でさらに D と E、E と F、F と D を結びなさい。△DEF と △ABC は相似ですか、それとも相似ではないですか？根拠をつけて答えなさい。

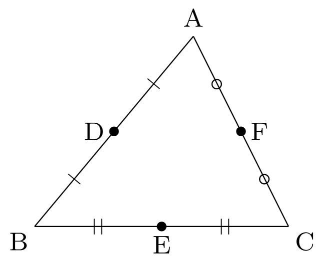
(3) (2) で描いた図を見て考えなさい。この図の中に △DEF と合同な三角形はありますか？もしあるならば、あるだけ全部答えなさい。合同であると判断した根拠も答えなさい。

解答

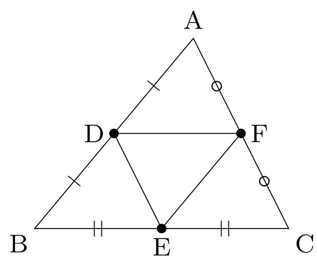
(1) 右の図を見てください。まず、△ABC があるのでしたね。



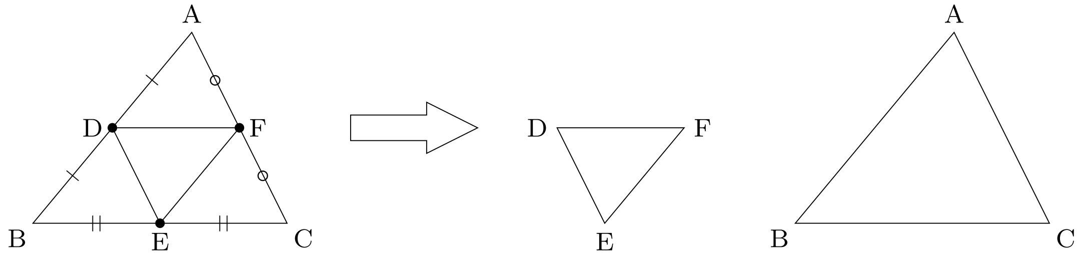
そして 3 つの辺 AB、BC、CA の中点をそれぞれ D、E、F と呼ぶことにしたのですよね。ですから右の図のようになりますね。



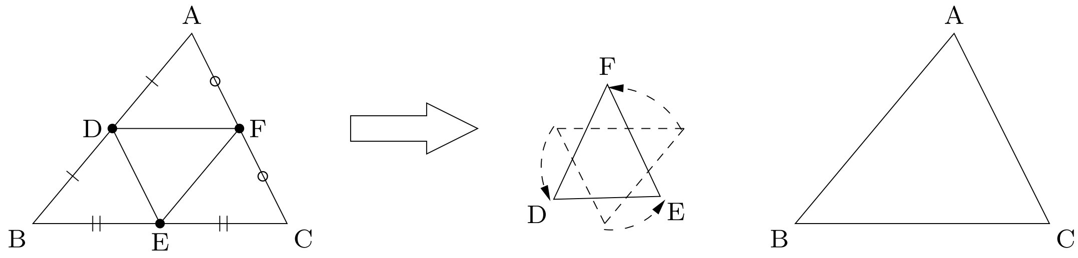
(2) さらに D と E、E と F、F と D を結ぶのでしたね。ですから右の図のようになりますね。そして、「△DEF と △ABC は相似ですか、それとも相似ではないですか？根拠をつけて答えなさい。」という問題でしたね。ではこの図を見て考えることにしましょう。あなた、



どう思います？相似になっているように見えますか？うーん、この図を見ているだけでは相似なのか違うのか、なんとも言えないですね。そこでいつもの手を使うことにしましょう。もともとの図から △DEF と △ABC を取り出して並べてみることにします。そして予想を立ててみるのです。次の図を見てください。

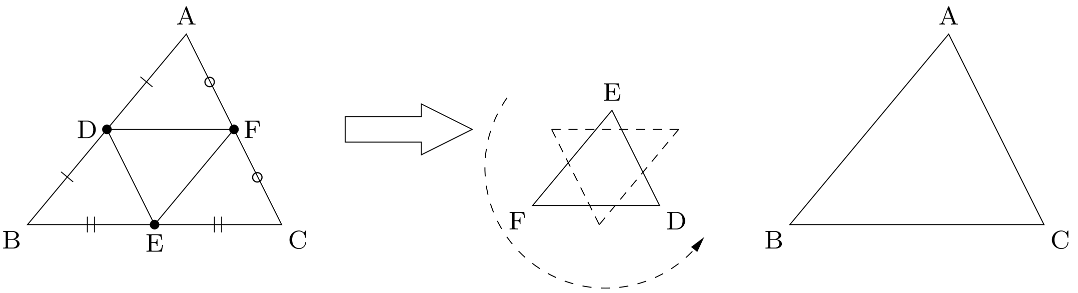


これでは向きが悪いですね。相似なのか違うのか全然予想ができません。そこで △DEF を回転させて向きを変えることにしましょう。そうすると、例えば次の図のようになります。



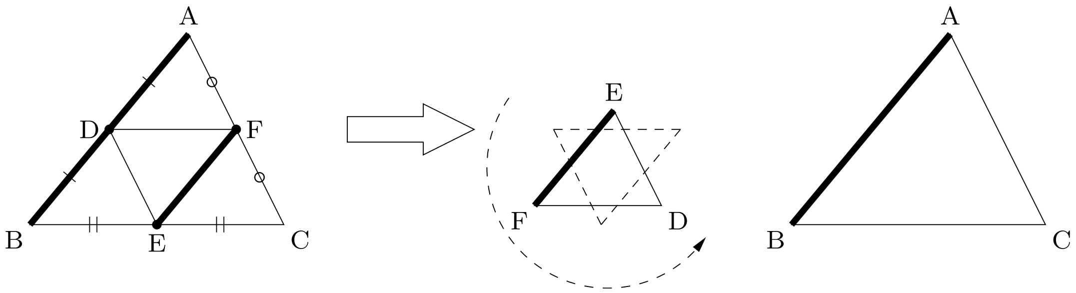
△DEF の辺 DE が水平になるように回転してみたのですが、2 つの三角形は相似には見えないですね。この向きで見ると 2 つの三角形は形が違って見えます。この向きで見る限り、△DEF は縦長の三角形ですが、△ABC は横長の三角形ですね。（念のための注意です。前にも言いましたが、見た目だけで判断をするのは危険です。図が正確ではないかもしれないからです。しかし、今のところ 2 つの三角形をどの向きにそろえると良いのかわからないので、予想がたてられるまで当分の間、見かけに頼ることにしているのです。ですから、この問題を解こうとしている人は、形に十分注意してできるだけ正確な図を描かないといけないのです。）

ではまた △DEF を回転させて向きを変えることにしましょう。そうすると、例えば次の図のようになります。



今度は △DEF の FD が水平になるように回転してみました。これ、かなりいい線いってますよね。この向きで見ると 2 つの三角形は形が同じように見えますよね。あくまでも見た目ですけど。そこで、この向きで本当に 2 つの三角形が相似になっているのかどうか、きちんと証拠を探すことにしましょう。ところでどんな証拠が見つかれば相似になっていると断言できるんでしたっけ。つまり、三角形の相似条件をここで思い出さないといけないんですが、たしか 3 種類ありましたね。「3 組の辺の長さの比が全て等しくなっている」というやつと「2 組の辺の長さの比が等しく、その間の角の大きさが等しい」というやつと「2 組の角の大きさは等しい」というやつがあるのでしたね。このうちのどれでいくとうまく行くのでしょうか。もう一度図を見て考えてみましょう。

今、私たちはさっきの図を見ながら △DEF と △ABC が相似であることを証明できたらいいなーと思っているわけです。ところで、三角形の相似条件のうち、1 つは辺の長さのことしか出てきませんが、残りの 2 つはとにかく角の大きさが出てきます。この問題では辺の長さのことだけでなんとかなるのでしょうか。それとも角の大きさの話をした方が良いのでしょうか。図を見て悩んでみると ··· うーん、そうですねぇ ···、もともと △DEF は △ABC の中点ばかり結んで作られているのですから ··· あっ、辺の長さの話をするのが良いではないですか。気づいてしまいました。中点連結定理であっさり行きそうです。どういうことか説明しましょう。次の図を見てください。あなたのためにもう一度、さっきの図を描いておきました。ただし、△DEF の辺 EF と △ABC の辺 AB に注目しようと思うのでその 2 つの辺を太くしておきました。



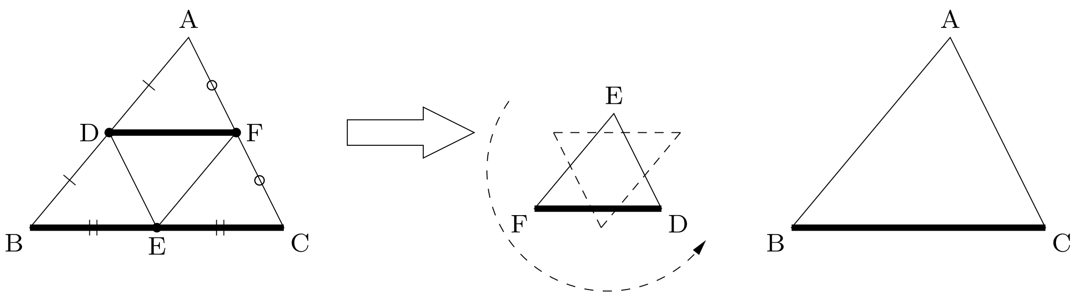
△DEF と △ABC をとり出す前のもともとの図（つまりこの図の一番左の図）を見てください。△ABC で、E は辺 CB の中点になっていて F は辺 CA の中点になっているわけです。ということは、中点連結定理によれば、E と F を結んでできる線分 EF の長さは △ABC の辺 AB の長さの半分であると断言してよいわけです。つまり、比の記号を使って書くと、

$$\mathrm{EF} : \mathrm{AB} = 1 : 2 \cdots ①$$

であると断言できるわけです。

今、△DEF の辺 EF と △ABC の辺 AB に注目して EF の長さは AB の長さの半分であると結論できたわけですが、これと全く同じようにして他の辺の比のことも結論できますね。念のため図を使って詳しく説明します。

次の図を見てください。今度は △DEF の辺 FD と △ABC の辺 BC に注目しようと思うのでその 2 つの辺を太くしておきました。



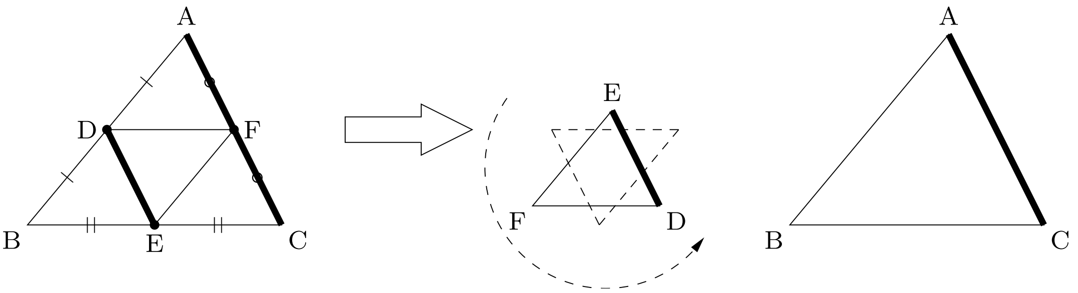
△DEF と △ABC をとり出す前のもともとの図（つまりこの図の一番左の図）を見てください。△ABC で、F は辺 AC の中点になっていて D は辺 AB の中点になっているわけです。ということは、中点連結定理によれば、F と D を結んでできる

線分 FD の長さは △ABC の辺 BC の長さの半分であると断言してよいわけです。つまり、比の記号を使って書くと、

$$\mathrm{FD} : \mathrm{BC} = 1 : 2 \cdots ②$$

であると断言できるわけです。

では最後に次の図を見てください。今度は △DEF の辺 ED と △ABC の辺 AC に注目しようと思うのでその 2 つの辺を太くしておきました。



△DEF と △ABC をとり出す前のもともとの図（つまりこの図の一番左の図）を見てください。△ABC で、E は辺 BC の中点になっていて D は辺 BA の中点になっているわけです。ということは、中点連結定理によれば、E と D を結んでできる線分 ED の長さは △ABC の辺 AC の長さの半分であると断言してよいわけです。つまり、比の記号を使って書くと、

$$\mathrm{ED} : \mathrm{AC} = 1 : 2 \cdots ③$$

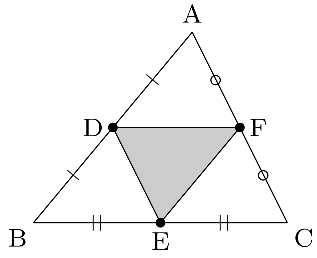
であると断言できるわけです。

これでケリがつきますね。つまり、①、②、③から △DEF と △ABC では 3 組の辺の比がどこでも等しくなっているということになります。ですから、

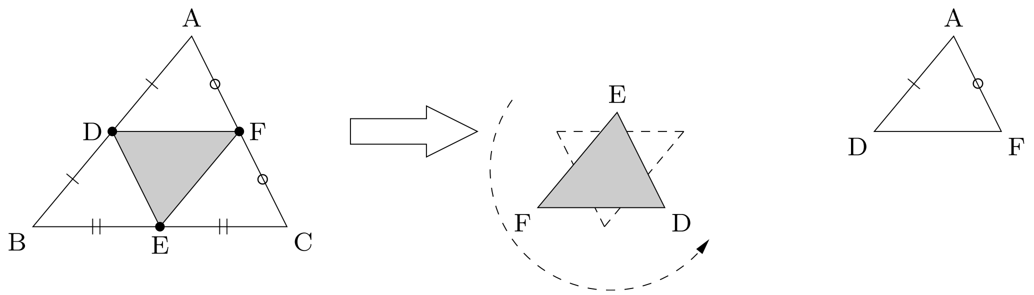
$$\triangle\mathrm{EFD} \backsim \triangle\mathrm{ABC}$$

であると断言できますね。

(3) 「(2) で描いた図を見て考えなさい。この図の中に △DEF と合同な三角形はありますか？もしあるならば、あるだけ全部答えなさい。合同であると判断した根拠も答えなさい。」という問題でしたね。では右の図を見てください。考えやすくするために、△DEF を灰色にしておきました。この図の中から灰色の三角形と合同な三角形を探したいわけです。つまり形も大きさも同じ三角形を探すわけです。この図の中には結構たくさん三角形がありますね。一体どれと合同なのでしょうか。



試しにまず、灰色の三角形は △ADF と合同なのか調べてみることにします。では次の図を見てください。いつものように、比べたい三角形を取り出して並べてみることにしました。

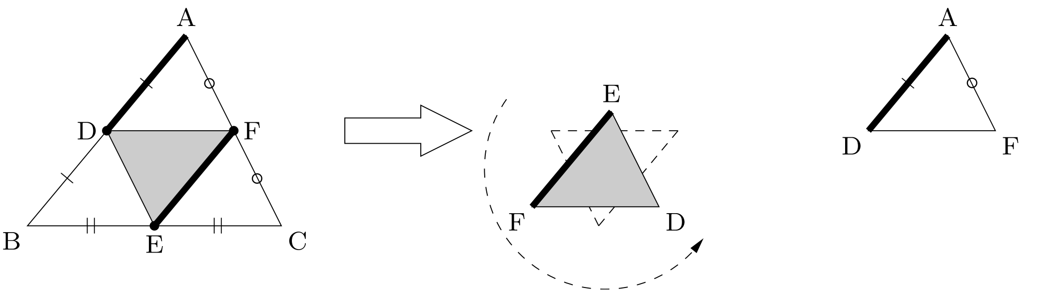


灰色の三角形と △ADF の形を気にすると、灰色の三角形が △ADF と合同なのかどうか考えるためには、灰色の三角形は取り出したあと回転して向きをかえておいたほうが良さそうですよね。ですからこの図では灰色の三角形の辺 FD が水平になるようにしてあります。

この図はかなり正確に描いた図です。この図を見ると、灰色の三角形は △ADF と形も大きさも同じように見えます。そこで証拠を探しましょう。ところでどんな証拠が見つかれば合同になっていると断言できるんでしたっけ。つまり、三角形の合同条件をここで思い出さないといけないんですが、たしか 3 種類ありましたね。（かなり昔に学んだのですが、覚えていますよね。）「3 組の辺の長さが全て等しくなっている」というやつと「2 組の辺の長さが等しく、その間の角の大きさが等し

い」というやつと「2 組の角の大きさは等しく、そのあいだの辺の長さが等しい」というやつがあるのでしたね。このうちのどれでいくとうまく行くのでしょうか。もう一度図を見て考えてみましょう。

今、私たちはさっきの図を見ながら灰色の三角形とと △ADF が合同であることを証明できたらいいなーと思っているわけです。ところで、三角形の合同条件のうち、1 つは辺の長さのことしか出てきませんが、残りの 2 つはとにかく角の大きさが出てきます。この問題では辺の長さのことだけでなんとかなるのでしょうか。それとも角の大きさの話をした方が良いのでしょうか。図を見て悩んでみると ··· うーん、そうですねぇ ···、もともと灰色の三角形は △ABC の中点ばかり結んで作られているのですから ··· あっ、辺の長さの話をするのが良いではないですか。気づいてしまいました。中点連結定理であっさり行きそうです。どういうことか説明しましょう。次の図を見てください。あなたのためにもう一度、さっきの図を描いておきました。ただし、灰色の三角形の辺 EF と △ABC の辺 AD に注目しようと思うのでその 2 つの辺を太くしておきました。



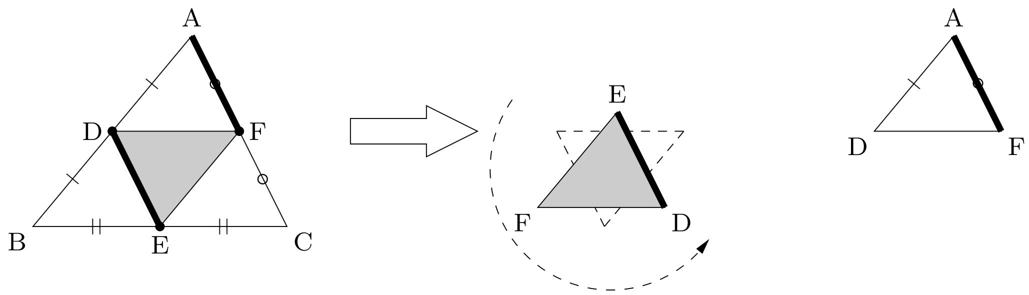
灰色の三角形と △ADF をとり出す前のもともとの図（つまりこの図の一番左の図）を見てください。△ABC で、E は辺 CB の中点になっていて F は辺 CA の中点になっているわけです。ということは、中点連結定理によれば、E と F を結んでできる線分 EF の長さは △ABC の辺 AB の長さの半分であると断言してよいわけです。また D は辺 AB の中点ですから、AD の長さは AB の長さの半分です。ということは EF の長さと AD の長さは等しいということになりますね。つまり、

$$\mathrm{EF} = \mathrm{AD} \cdots ①$$

となっていることが判明したのです。

今、灰色の三角形の辺 EF と △ADE の辺 AD に注目して話をしましたが、、これと全く同じようにして他の辺の話もできますね。もうおわかりでしょうが念のため、図を使って説明しておきます。

次の図を見てください。今度は灰色の三角形の辺 ED と △ADE の辺 AF に注目しようと思うのでその 2 つの辺を太くしておきました。



灰色の三角形と △ADF をとり出す前のもともとの図（つまりこの図の一番左の図）を見てください △ABC で、D は辺 CA の中点になっていて E は辺 BC の中点になっているわけです。ということは、中点連結定理によれば、E と D を結んでできる線分 ED の長さは △ABC の辺 AC の長さの半分であると断言してよいわけです。また F は辺 AC の中点ですから、AC の長さは AB の長さの半分です。ということは ED の長さと AF の長さは等しいということになりますね。つまり、

$$\mathrm{ED} = \mathrm{AF} \cdots ②$$

となっていることが判明したのです。

さて、ここまでで、灰色の三角形と △ADF では 2 組の辺の長さが等しいということが突き止められました。ですから、あとは、例えば、残っているもう一組の辺の長さが等しいということが突き止められれば良いわけです。でもこれは少し考えるとあまりにも明らかです。残りのもう一組の辺は辺 FD と辺 DF ですね。これってもともと共通なんですよね。ですから、

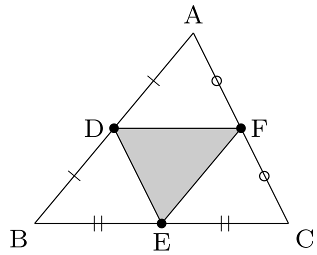
$$\mathrm{FD} = \mathrm{DF} \cdots ③$$

以上、①、②、③で灰色の三角形と △ADF では 3 組の辺の長さが等しいということが判明しました。ですから、

$$\text{灰色の三角形} \equiv \triangle\mathrm{ADF}$$

と断言できますね。

これでやっとひとつ、灰色の三角形と合同な三角形を見つけることができました。でもこの問題は、灰色の三角形と合同な三角形をあるだけ全部見つけるのでしたね。ではもう一度はじめの図を見ることにしましょう。あなたのためにもう一度右に図を描いておきました。灰色の三角形と合同なのかどうか、まだ調べていない三角形が 2 つ残っていますね。△DBE と △FEC のことですよ。説明するのが大変になってきたのでこの先はあなたに任せることにします。実はこれらの三角形は灰色の三角形と合同なのです。私たちはすでに、灰色の三角形と △ADF が合同であることを証明しましたが、全く同じように議論をすると、灰色の三角形は △DBE や △FEC と合同であることが証明できるのです。その証明を次の問であなたに作ってもらうことにしましょう。

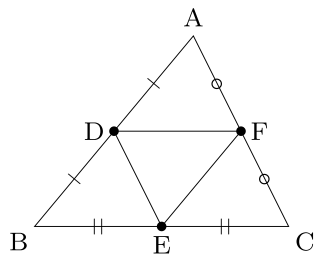


問 28. 例題 11 の解答が理解できた人のための問題です。

右の図で D、E、F はそれぞれ辺 AB、辺 BC、辺 CA の中点です。このとき以下の問に答えなさい。

(1) △EFD と △DBE は合同であることを証明しなさい。

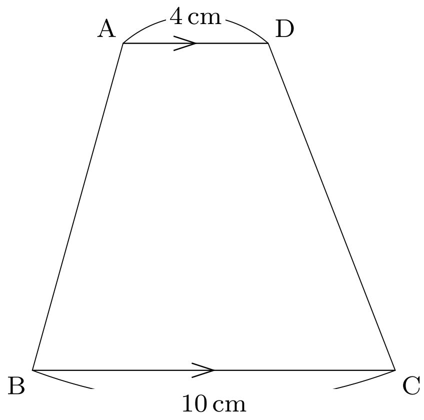
(2) △EFD と △FEC は合同であることを証明しなさい。



答えを見る

さて次は、「中点が出てくるからと言って必ずしも中点連結定理を使えるわけではない」という話です。どうして中点連結定理を使えないのかしっかりと理解するようにしましょう。

例題 12　右の図で、四角形 ABCD は辺 AD と辺 BC が平行になっている台形です。辺 AD の長さは 4 cm で辺 BC の長さは 10 cm です。このとき、以下の問に答えなさい。



(1)　辺 AB の中点を E とします。そして点 E から辺 BC に平行な線をひいていき、辺 DC とぶつかる点を G とします。この状況を図に描きなさい。

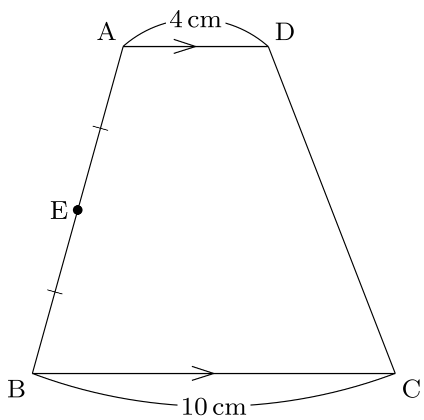
(2)　EG の長さを求めなさい。

解答

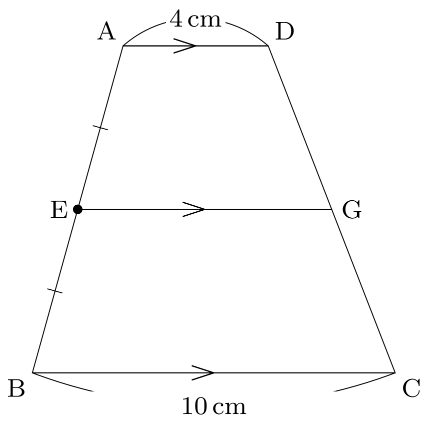
実はこの問題には、学ぶべき重要なことがたくさん隠れています。ですからこの解答の中で、あなたにいくつか質問をすることにします。しっかりひとつひとつのことを考えに入れて質問に答えてください。

(1)「辺 AB の中点を E とします。そして点 E から辺 BC に平行な線をひいていき、辺 DC とぶつかる点を G とします。この状況を図に描きなさい。」ということでしたね。

まず、辺 AB の中点を E とするのですから右の図のようになります。

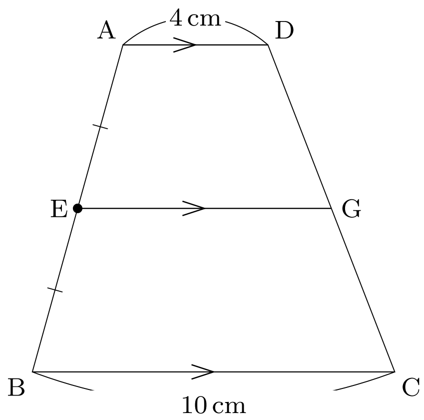


次は、点 E から辺 BC に平行な線をひいていき、辺 DC とぶつかる点を G とするのですから右の図のようになります。



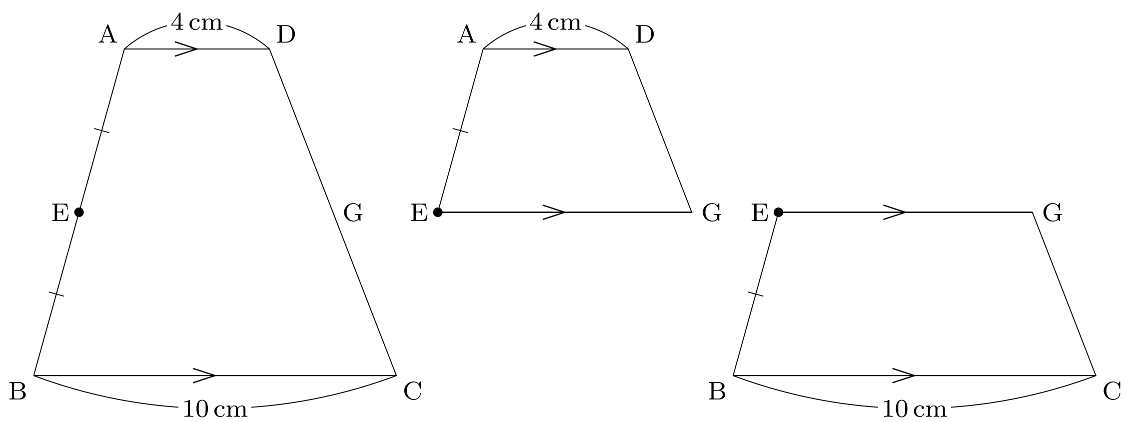
質問 この図を見ると、G は辺 DC のどまんなかにあるようにも見えますが、本当はどうなのでしょう？あなたはどう思いますか？話を思い出してみると、点 G は点 E から辺 BC に平行な線をひいていき、DC とぶつかるところに出てきたんですよね。DC の中点を G としたわけではないですよね。それでも G は DC の中点なのでしょうか？証拠はありますか？

(2) 「EG の長さを求めなさい。」ということでしたね。でも一体どうすればよいのでしょうか。だって、今のところわかっている長さといえば、辺 AD は 4 cm であるということと辺 BC は 10 cm であるということだけですよね。こんなの、EG の長さとなにか関係あるんでしょうか。あー、そうか、もしかするとこの図の中に相似な台形があるのかもしれませんね。



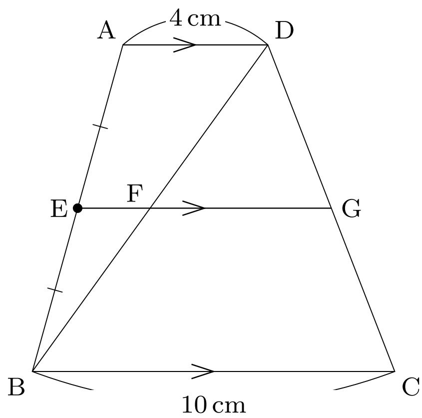
質問 もしかすると、台形 ABCD と台形 AEGD は相似なのでしょうか？
質問 もしかすると、台形 ABCD と台形 EBCG は相似なのでしょうか？
質問 もしかすると、台形 AEGD と台形 EBCG は相似なのでしょうか？

では次の図を見てください。3 つの台形を並べてみました。



図を見てしっかり形を比べると、縦長だったり横長だったりと、どの 2 つの台形を

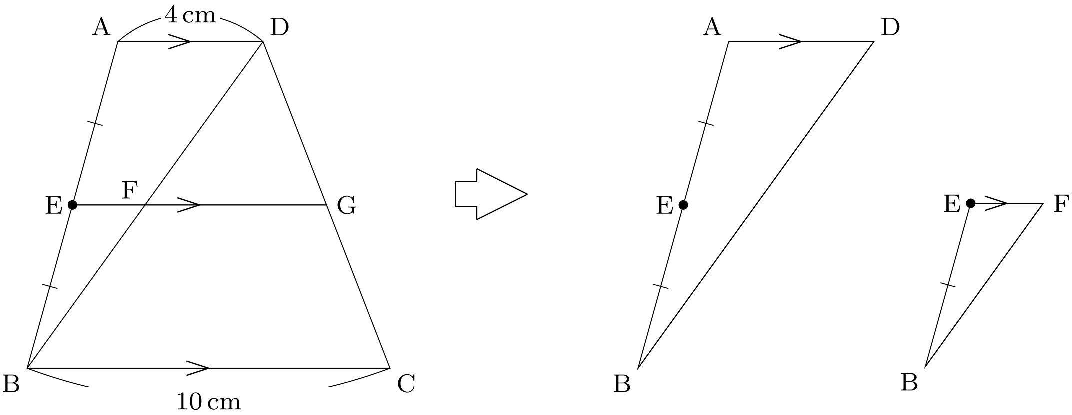
くらべても形は同じだとは言えそうもないですよね。ですから相似な台形は無いようです。というわけで、相似な台形を頼って EG の長さを求めるというたくらみは見事に打ち砕かれたのです。作戦を変更しなくてはなりませんね。でも、どうしましょうか。もう何も頼れないではありませんか。あー、そうか、この図のまま考えようとしているから無理なのかもしれませんね。どこかに線を引くと、相似な図形が出てくるのかもしれません。でもどこに線を引くのでしょう。まあ、とりあえず考えられるのは台形の対角線ですね。



では右の図を見てください。試しに対角線 DB を引いてみました。おー、三角形がいくつか出てきましたね。もしかすると相似な三角形がこの図の中にあるかもしれません。考えてみることにしますが、説明しやすいように EG と DB の交点になにか名前をつけておきましょう。そうですねぇ、F とでも名づけましょうか。（実はすでに図には F と書いておきました。）

質問 この図を見ると、F は対角線 DB のどまんなかにあるようにも見えますが、本当はどうなのでしょう？あなたはどう思いますか？話を思い出してみると、点 F は「点 E から辺 BC に平行な線をひいた線」と「対角線 DB」の交点として出てきたんですよね。対角線 DB の中点を F としたわけではないですよね。それでも F は対角線 DB の中点なのでしょうか？証拠はありますか？

では相似な三角形を見つけることにします。そこでさっきの図から、例えば △ABD と △EBF を取り出してみることにしましょう。次の図を見てください。



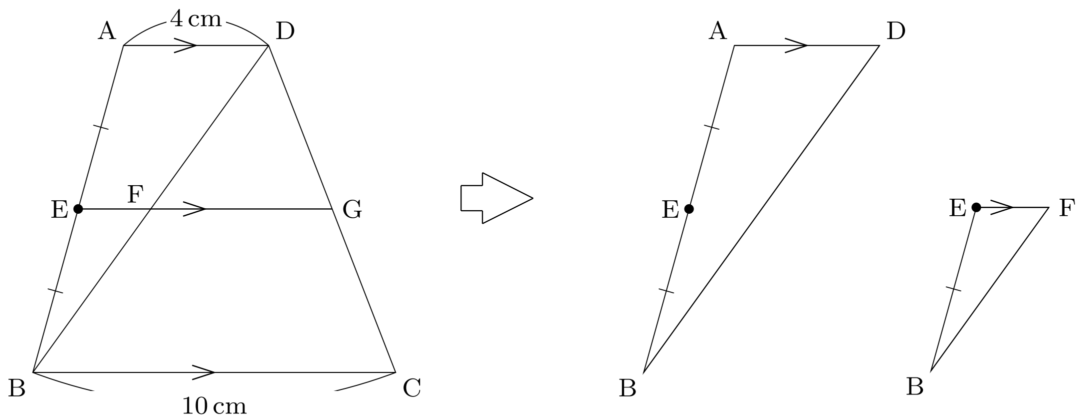
取り出してみた 2 つの三角形ですが、大きさは違いますがどっちも縦長で、形が同じような感じがしますよね。きっと相似なのだと思いますが、見た目だけで判断するわけにはいきません。証拠が必要ですね。ところでどんな証拠が見つかれば相似になっていると断言できるんでしたっけ。つまり、三角形の相似条件をここで思い出さないといけないんですが、たしか 3 種類ありましたね。「3 組の辺の長さの比が全て等しくなっている」というやつと「2 組の辺の長さの比が等しく、その間の角の大きさが等しい」というやつと「2 組の角の大きさは等しい」というやつがあるのでしたね。このうちのどれでいくとうまく行くのでしょうか。もう一度図を見て考えてみましょう。

では、△ABD と △EBF を取り出す前の図（つまり一番左の図）を見てください。

まず念のための注意です。この問題では、E そもそも AB の中点です。しかし、（この解答の中であなたに質問したことですが、）F は辺 BD の中点なのかどうか今のところわからないわけです。ですから、△ABD で、点 E と点 F に注目して中点連結定理を頼ることはできません。また、2 つの三角形で辺の長さについてなにか言えるのは、AB の長さは BE の長さの 2 倍であるということだけです。辺の長さの話が出てくる相似条件は、「3 組の辺の長さの比が全て等しくなっている」というやつと「2 組の辺の長さの比が等しくなっているというやつですから、とにかく辺の長さの話が 1 組だけではどうにもならないわけです。ということは、今頼りに

なるのは「2 組の角の大きさは等しい」というやつだけです。このことを頭に入れて、2 つの三角形が相似であることを証明します。

ではまた図を描いておきます。この図を見ながら証明を読んでみてください。



△ABD と △EBF において、

△ABD と △EBF を取り出す前の図（つまり一番左の図）を見るとわかりますが、AD と EF は平行なので同位角は等しいはずです。ですから、

$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{BEF} \cdots ①$$

であると断言できます。

また △ABD の ∠ABD と △EBF の ∠EBF はもともとピッタリ重なっています。ですから、

$$\angle \mathrm{ABD} = \angle \mathrm{EBF} \cdots ②$$

であると断言できます。

①、②で、△ABD と △EBF では対応している 2 組の角の大きさが等しいということが判明しました。ですから、

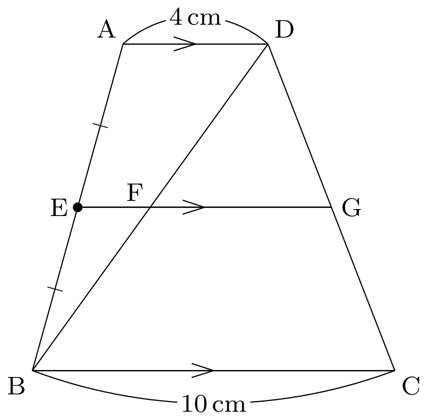
$$\triangle \mathrm{ABD} \backsim \triangle \mathrm{EDF}$$

であると断言できます。

これでめでたく、△ABD と △EBF が相似であるということが判明しました。ところで、何のために △ABD と △EBF が相似であるということを突き止めようとしていたのでしたっけ。覚えていますか？そもそもこの問題では、EG の長さを求める問題でしたね。そして、そのために、なにか役に立つ相似な図形はないのかなぁ？と思ったのでしたね。今、△ABD と △EBF が相似であるということが判明しましたが、これって EG の長さを求めるために何か役に立つでしょうか？ではもう一度図を見てください。△EBF の EF の長さは △ABD の AB の長さの半分ですよね。そして、相似な三角形では対応する部分の長さの比はどこでも一緒なわけです。ですから、EF の長さだって AB の長さの半分ということになります。これは重要な発見です。AD の長さは 4 cm なのですから EF の長さは 2 cm であるということになりますね。この問題で求めようとしている EG の長さまはまだわかりませんが、EF の長さだったら求めることができたのです。

ところで、ここではついでに、BF の長さは BD の長さの半分であるということも断言できますね。

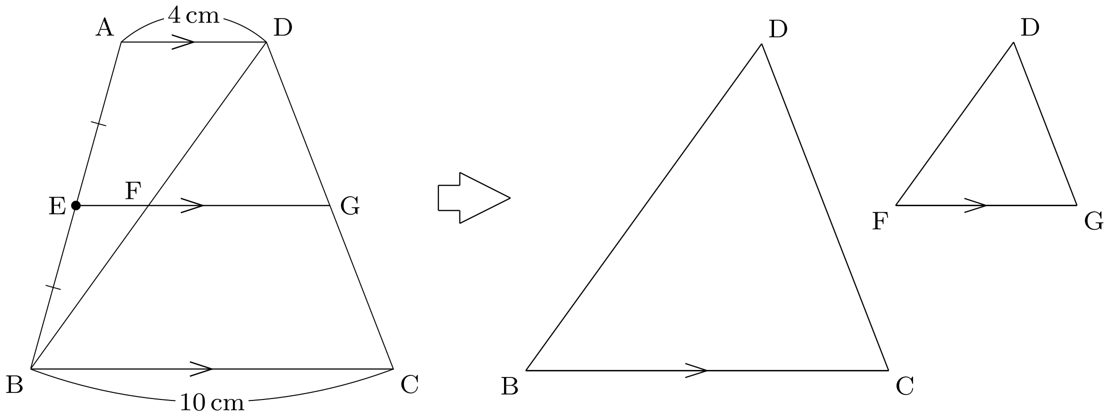
もう一度あなたのためにもともとの図を描いておきます。右の図を見てください。



今 EF の長さが 2 cm であることがわかったのですから、あとは、FG の長さがわかればこの問題は解決するわけです。

この図を見ると、FG の長さはきっと EF の長さを求めた時と同じように考えることができそうですよね。つまり、今度は △DBC と △DFG が相似になっていることが証明できればよさそうです。そこで、もともとの図から、△DBC と △DFG を取り出して

みることにしましょう。次の図を見てください。

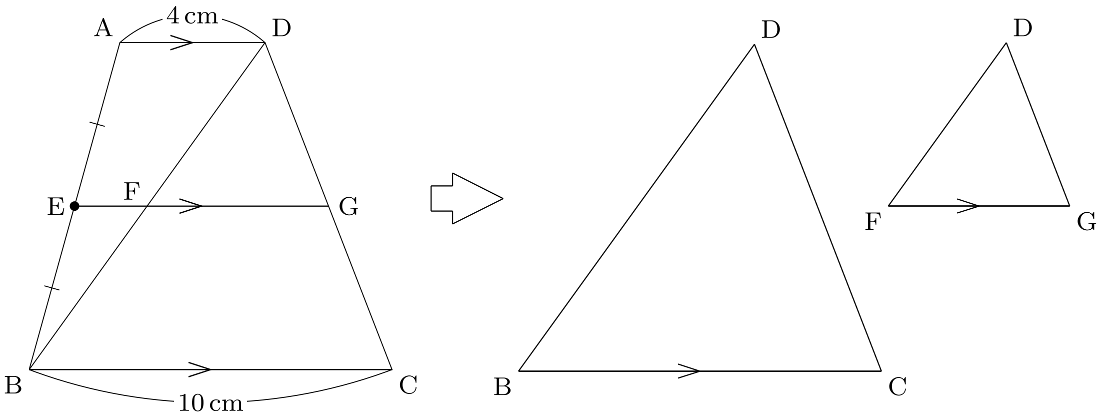


質問　F は DB の中点であると断言できますか？

質問　G は DC の中点であると断言できますか？

もうおわかりですね。さっき、BF の長さは BD の長さの半分であるということがついでにわかったのでしたね。ですから F は DB の中点であると断言できます。しかし、まだ、 G は DC の中点であると断言できませんよね。ですから、△DBC で、点 F と点 G に注目して中点連結定理を頼ることはできません。また、2 つの三角形で辺の長さについてなにか言えるのは、DB の長さは DF の長さの 2 倍であるということだけです。辺の長さの話が出てくる相似条件は、「3 組の辺の長さの比が全て等しくなっている」というやつと「2 組の辺の長さの比が等しくなっているというやつですから、とにかく辺の長さの話が 1 組だけではどうにもならないわけです。ということは、今頼りになるのは「2 組の角の大きさは等しい」というやつだけです。このことを頭に入れて、2 つの三角形が相似であることを証明します。

ではまた次に図を描いておきます。次の図を見ながら証明を読んでみてください。



△DBC と △DFG において、

△DBC と △DFG を取り出す前の図（つまり一番左の図）を見るとわかりますが、BC と FG は平行なので同位角は等しいはずです。ですから、

$$\angle \mathrm{DBC} = \angle \mathrm{DFG} \cdots ①$$

であると断言できます。

また △DBC の ∠BDC と △DFG の ∠FDG はもともとピッタリ重なっています。ですから、

$$\angle \mathrm{BDC} = \angle \mathrm{FDG} \cdots ②$$

であると断言できます。

①、②で、△DBC と △DFG では対応している 2 組の角の大きさが等しいということが判明しました。ですから、

$$\triangle \mathrm{DBC} \backsim \triangle \mathrm{DFG}$$

であると断言できます。

これでめでたく、△DBC と △DFG が相似であるということが判明しました。たしか、△DFG の DF の長さは △DBC の BD の長さの半分であることはとっくにわかっているのですよね。そして、相似な三角形では対応する部分の長さの比はど

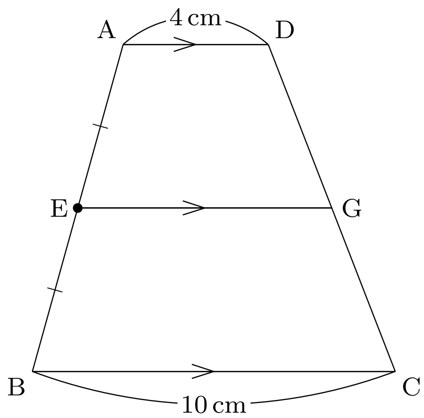
こでも一緒なわけです。ですから、FG の長さだって BC の長さの半分ということになります。これは重要な発見です。BC の長さは 10 cm なのですから FG の長さは 5 cm であるということになりますね。

ここまでくれば、もう EG の長さを求めることができますね。EF の長さは 2 cm で、FG の長さは 5 cm ですから、

$$\mathrm{EG} = \mathrm{EF} + \mathrm{FG} = 2 + 5 = 7\,(\mathrm{cm})$$

ですよね。

問 29. 例題 12 の解答がきちんと理解できたかどうか確認する問題です。

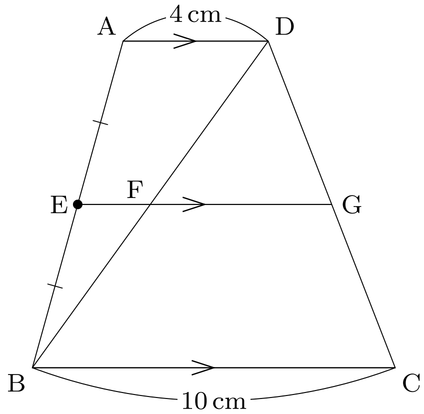


右の図を見てください。AD と BC が平行になっている台形 ABCD があります。AD の長さは 4 cm で、BC の長さは 10 cm です。辺 AB の中点 E から辺 BC と平行な線を引いて行き、その線が台形の辺 DC と交わる点を G としました。このとき EG の長さを求めようと思い、次のように考えることにしました。以下の問に答えなさい。

(1) いま、G が DC の中点になっているという証拠はありますか。

(2) この図には 3 つの台形があります。台形 ABCD と台形 ADEG と台形 EBCG です。この 3 つの台形のうち、相似になっている台形はありますか。

(3) 右の図を見てください。EG の長さを求めるため、どこかに線を引き、相似な図形が出てくるようにしようと思いました。そして、台形 ABCD の対角線 DB を引き、EG と BD の交点を F としました。



(a) いま、F が DB の中点になっているという

証拠はありますか。

(b) △ABD と △EBF は相似であることを証明しなさい。

(c) △ABD と △EBF は相似であることが証明出来た人は次の文の空欄に正しい言葉、数を記入してください。

E は AB の中点なので、EB の長さは AB の長さの半分です。相似な図形では、対応している部分の比はどこでも $\boxed{}$ ので、EF の長さも AD の長さの半分ということになります。AD の長さは 4 cm なので EF の長さは $\boxed{}$ cm ということなります。

(d) △ABD と △EBF は相似であることが証明出来た人への質問です。いま、F が DB の中点になっているという証拠はありますか。

(e) △DBC と △DFG は相似であることを証明しなさい。

(f) △DBC と △DFG は相似であることが証明出来た人は次の文の空欄に正しい言葉、数を記入してください。

F は DB の中点なので、DF の長さは DB 長さの半分です。相似な図形では、対応している部分の比はどこでも $\boxed{}$ ので、FG の長さも BC の長さの半分ということになります。BC の長さは 10 cm なので FG の長さは $\boxed{}$ cm ということなります。

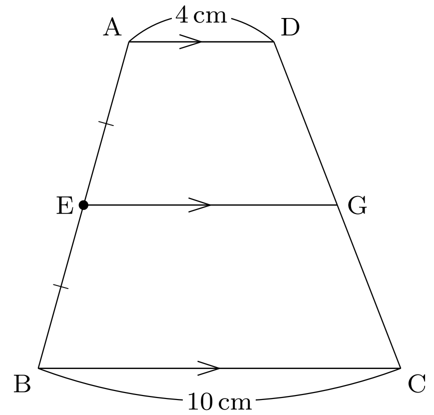
(g) EG の長さを求めなさい。

(h) 台形 ABCD に対角線 AC を引くことによって EG の長さを求めることはできますか。

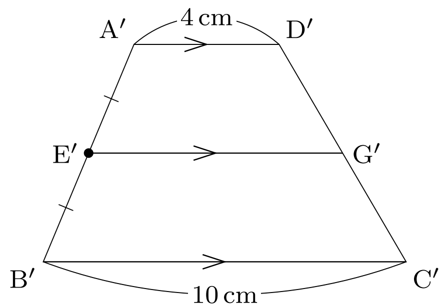
答えを見る

問 30. 例題 12 の解答がきちんと理解できたかどうか確認する問題です。

右の図を見てください。この図には台形が 2 つ描かれています。



上に描かれている台形 ABCD では AD と BC が平行になっていて、AD の長さは 4 cm で、BC の長さは 10 cm です。辺 AB の中点 E から辺 BC と平行な線を引いて行き、その線が台形の辺 DC と交わる点を G としました。



下に描かれている台形 A′B′C′D′ では A′D′ と B′C′ が平行になっていて、A′D′ の長さは 4 cm で、B′C′ の長さは 10 cm です。辺 A′B の中点 E′ から辺 B′C′ と平行な線を引いて行き、その線が台形の辺 D′C と交わる点を G′ としました。

ここまでの話は 台形 ABCD と台形 A′B′C′D′ でと全く同じです。しかし図を見るとわかるように、台形 ABCD と台形 A′B′C′D′ では高さが違います。以下の問に答えなさい。

(1) EG の長さを求めなさい。

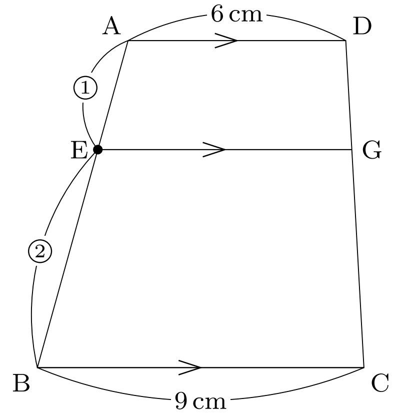
(2) E′G′ の長さを求めなさい。

(3) EG の長さと E′G′ の長さは同じでしたか？違いましたか？

答えを見る

問 31. 例題 12 の解答がきちんと理解できたかどうか確認する問題です。

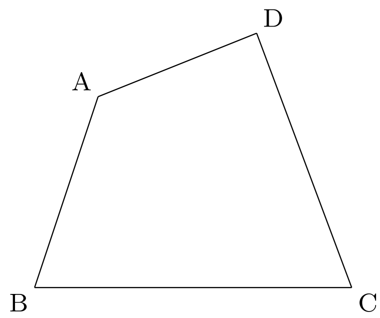
右の図を見てください。AD と BC が平行になっている台形 ABCD があります。AD の長さは 6 cm で、BC の長さは 9 cm です。点 E は辺 AB 上にありますが AE : EB = 1 : 2 となっています。点 E から辺 BC と平行な線を引いて行き、その線が台形の辺 DC と交わる点を G としました。このとき EG の長さを求めなさい。



答えを見る

では話を進めます。また、中点連結定理を使うことのできる問題です。

例題 13　右の図を見てください。まず、あまり形の整っていない四角形 ABCD があるとします。このとき、以下の問に答えなさい。

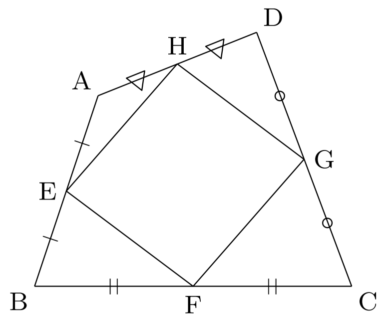


(1) 辺 AB 辺 BC、辺 CD、辺 DA の中点をそれぞれ E、F、G、H とし、さらに E と F、F と G、F と H、H と E を結んだ図を作りなさい。

(2) 実は、 (1) のようにして図を作ると、四角形 EFGH は平行四辺形になることを証明しなさい。

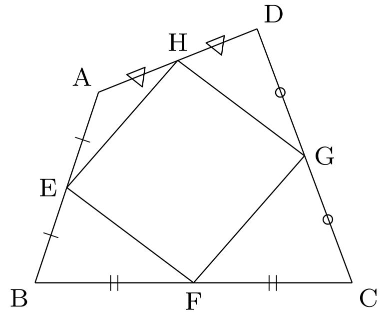
解答

(1) 辺 AB 辺 BC、辺 CD、辺 DA の中点をそれぞれ E、F、G、H とし、さらに E と F、F と G、F と H、H と E を結ぶのですから右の図のようになりますね。（同じ長さの辺には同じマークをつけておきました。）



(2) 「四角形 EFGH は平行四辺形になることを証明しなさい。」という問題でしたね。ところで、ある四角形が平行四辺形であるということを断言するためにはどんな証拠が揃えばいいんでしたっけ。覚えていますか？かなり昔にかなり詳しく学びましたよね。忘れてしまった人は、今すぐ昔の図形のテキスト（このシリーズの）を探して平行四辺形について復習してください。いろいろな手があったと思います。どの手で行くのがよいか考えるため、この問題の図をもう一度よく観察することにしましょう。

では右の図を見てください。あなたのためにもう一度、この問題の図を描いておきました。



たしか、そもそも、平行四辺形って「2 組の向かい合っている辺がそれぞれ平行になっている四角形」のことでしたよね。だとすると、四角形 EFGH では、

実は辺 EH と辺 FG は平行になっている

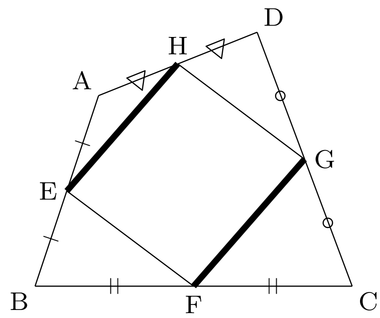
ということと、

実は辺 EF と辺 HG は平行になっている

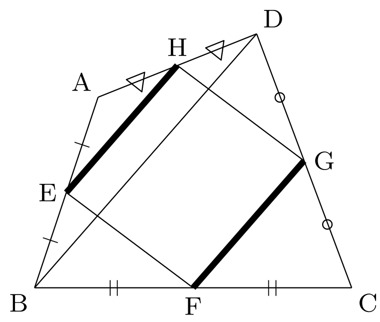
ということが判明すれば良いわけですね。

ではこの手でうまくいくかどうか探ってみることにしましょう。

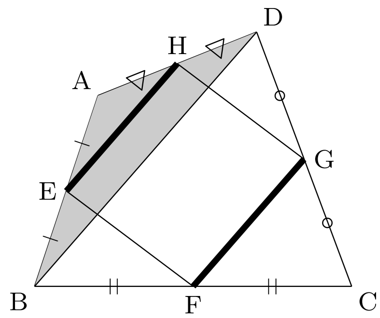
えーと、まず、「実は辺 EH と辺 FG は平行になっているのかどうか」悩んでみます。右の図を見てください。考えやすいように。注目している辺 EH と辺 FG を太く描いてみました。この図を見る限り、辺 EH と辺 FG は平行になっているように見えますが見た目だけで判断するわけには行きません。証拠を探します。うーん、どうすればよいのでしょうか。E とか F とか G とか H って何かしらの中点なんでしたよね。ということは · · · 、あっ、もしかすると中点連結定理が役に立つのかもしれません。でも、中点連結定理って三角形が出てくる定理ですよね。この問題の図には三角形がありません。困りました。あー、でもそうか、きっとどっかに線を引いて三角形が出てくるようにするのですね。だとすると · · · 、今の場合 B と D を結ぶのが良さそうではありませんか。



では右の図を見てください。B と D を結んでみました。そうすると、台形が 2 つの三角形にわかれます。ちゃんと三角形が出てきたわけです。そこで、たくらんでいたように中点連結定理が使えるのかどうか考えてみましょう。



まず、△ABD に注目してみましょう。右の図を見てください。わかりやすいように、注目してほしい △ABD を灰色にしておきました。E は辺 AB の中点で H は辺 AD の中点なのでしたね。そうすると、中点連結定理によれば、

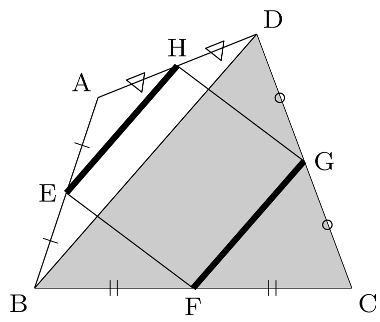


EH と BD は平行 · · · ①

EH の長さは BD の長さの半分 · · · ②

と断言してよいわけです。

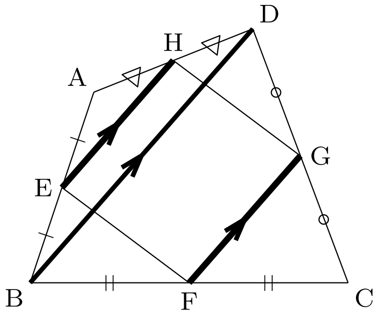
今度は、△CDB に注目してみましょう。右の図を見てください。わかりやすいように、注目してほしい △CDB を灰色にしておきました。F は辺 CB の中点で G は辺 CD の中点なのでしたね。そうすると、中点連結定理によれば、



FG と BD は平行 · · · ③

FG の長さは BD の長さの半分 · · · ④

と断言してよいわけです。



これでかなり重要なことがわかりました。右の図を見てください。

①では EH と BD が平行であることが判明していて②では FG と BD が平行であることが判明したわけです。ということは、EH、BD、FG はすべて平行であるということになりますね。ですから、とにかく、

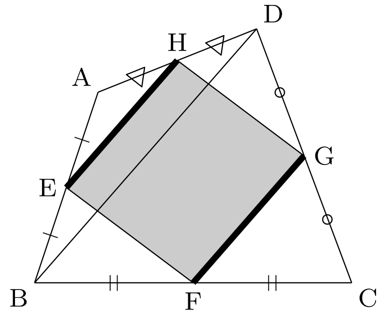
$$\mathrm{EH} \mathbin{/\!/} \mathrm{FG} \cdots ⑤$$

と断言できます。これで一歩前進できましたね。あとは、四角形 EFGH で、辺 EF と辺 HG が平行になっている証拠が見つかれば良いわけです。どうすれば良いのかもうおわかりですね。今度は A と C を結ぶ対角線 AC を引いて四角形 ABCD を三角形にわければよいですよね。そうすれば、今⑤で EH と FG が平行であることを示したのと同じような議論をすれば良いわけです。あー、でもちょっと待ってください。もっといいい事に気づきました。ある四角形が平行四辺形であるということを断言するためには「向かい合っている 2 組の辺がそれぞれ平行になっている」ということを示せば良いわけですが、「向かい合っている 1 組の辺が平行になっていてしかも長さが等しい」ということを示しても良いのでしたね。（覚えていますよね。むかし、かなり詳しく学習しましたよね。忘れてしまった人は今すぐ復習しておいてください。）どうしてこんなことを言い出したのかというと、さっき②と④でなかなか良いことが判明していたからです。つまり、②では「EH の長さは BD の長さの半分」ということが判明していて、④では「FG の長さは BD の長さの半分」ということが判明しているわけです。ですからとにかく「EH の長さも FG の長さも BD の長さの半分」なわけです。ということは、

$$\text{EH の長さとも FG の長さは等しい} \cdots ⑥$$

と断言できますね。

これですべての証拠が揃いましたね。四角形 EFGH では、⑤で EH と FG は平行になっているということが判明し、⑥で EF と FG の長さは等しいということが判明したわけです。つまり四角形 EFGH では「向かい合っている 1 組の辺が平行になっていてしかも長さが等しい」ということが判明したわけです。ですから、



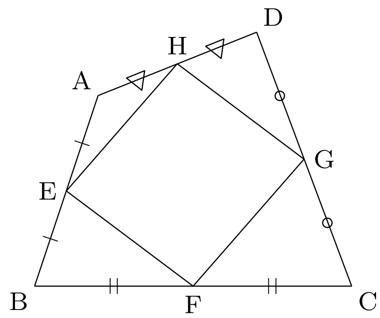
この図の灰色の四角形では、太く描かれている 2 つの辺は平行になっていてしかも長さも等しいということが判明した。

四角形 EFGH は平行四辺形である

と断言できますね。

問 32. 例題 13 の解答が理解できたかどうか確認するための問題です。

どんな四角形でも 4 つの辺の中点をすべて結んで四角形を作ると平行四辺形ができることを証明しようと思います。つまり、右の図の四角形 ABCD で、辺 AB 辺 BC、辺 CD、辺 DA の中点をそれぞれ E、F、G、H とし、さらに E と F、F と G、F と H、H と E を結んで四角形を作ると、 実は、四角形 EFGH は平行四辺形になることを証明しようと思います。次の証明の空欄に正しい言葉、記号、文を記入しなさい。



（証明）

B と D を結びます。すると、△ABD と △CDB が現れます。

まず、△ABD に注目します。

E は AB の中点で、H は AD の中点ですから中点連結定理より、

EH と BD は $\boxed{}$ $\cdots$ ①

EH の長さは BD の長さの $\boxed{}$ $\cdots$ ②

と断言できます。

次は △CBD に注目します。

F は CB の中点で、G は CD の中点ですから中点連結定理より、

$\boxed{\qquad}$ と $\boxed{\qquad}$ は平行 $\cdots$ ③

$\boxed{\qquad}$ の長さは $\boxed{\qquad}$ の長さの半分 $\cdots$ ④

と断言できます。

①、③より、EH、BD、FG はすべて平行であるということになるので、特に、

EH と FG は $\boxed{\qquad}$ $\cdots$ ⑤

と断言できます。

②、④より、EH の長さと FG の長さはどちらも BD の長さの半分であるということになるので、特に、

EH の長さと FG の長さは $\boxed{\qquad}$ $\cdots$ ⑥

と断言できます。

⑤、⑥より四角形 EFGH では、

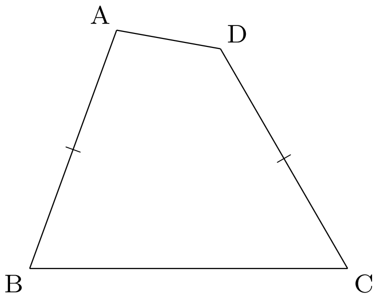
$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

ということが判明しました。ですから、

四角形 EFGH は平行四辺形である

と断言できます。　（証明おわり）　答えを見る

問 33. 右の図の四角形 ABCD では AB の長さと CD の長さが等しくなっているとします。このとき以下の問に答えなさい。



(1) 四角形 ABCD の対角線 AC の中点を P、辺 AD の中点を Q、辺 BC の中点を R とし、P、Q、R を結んで △PQR を作ります。このようにすると、実は △PQR はある特徴を持った三角形になります。△PQR にはどんな特徴があると思いますか？あなたの考えを答えなさい。

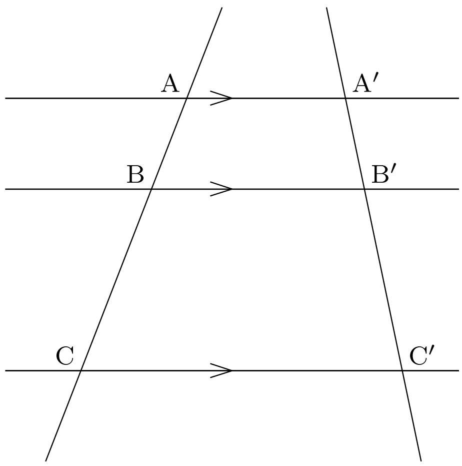
(2) △PQR には、あなたが (1) で答えた特徴があるということを証明しなさい。

答えを見る

1.4.4　相似になっている三角形を見つけ、平行線と比について考えてみよう

相似な図形では対応する部分の長さの比はどこでも同じになっているのでしたね。ということは、もし、ある図の中に相似な三角形を見つけることができると、「ある長さとある長さの比」は「別のところの、ある長さの比とある長さの比」と等しいということが判明するわけです。この説明だけではどういうことなのかまだわからない人が多いと思います。これから詳しく学んでいくことにします。

まず、平行線が何本か描かれているとします。そしてそこに何本かの直線が適当に交わっているとします。例えば右の図のように、3 本の平行線が描かれてれているところにさらに 2 本の直線が適当に交わっているとしましょう。



ここであなたに質問です。

質問　この図の「AB 間の長さ」、「BC 間の長さ」、「A′B′ 間の長さ」、「B′C′ 間の長さ」に注目してください。そして AB : BC と A′B′ : B′C’ の値は等しいのかどうか考えて予想を立ててください。そしてあなたの予想を証明してください。

　では 30 分待ちます。しっかり自分のあたまを使って悩んでください。

・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

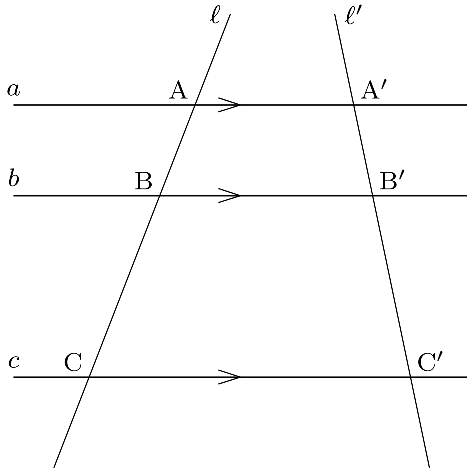
・・・・・・・・・・・・・・・

はい、30 分たちました。あなたの考えはまとまりましたか？証明はできましたか？では答えを教えることにしましょう。自分の頭を使ってしっかり悩んだ人だけ答えを読んでください。

質問の答え　AB : BC と A′B′ : B′C’ の値は等しくなっています。

（証明）

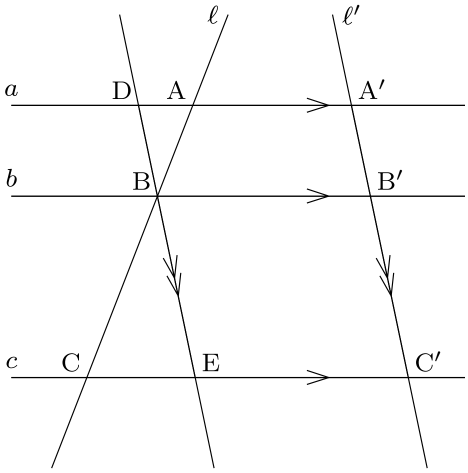
　右の図を見てください。あなたのためにもう一度質問の図を描いておきました。説明がしやすいように。この図に現れている直線に名前をつけておきました。



　この図のままいくら考えていても、 AB : BC と A′B′ : B′C’ の値は等しくなっているのかどうか考えようがありません。AB や BC は A′B′やC′D′ と離れているところにありますし、これらを全部含ん

でいるような三角形はないからです。そこで何か考えの補助になる線を描こうと思います。どうするのかというと、ℓ' に平行な直線を点 B を通るように引くのです。

では右の図を見てください。ℓ' に平行な直線を点 B を通るように引いてみました。そしてその直線と直線 a、直線 c との交点をそれぞれ D、E と呼ぶことにしました。どうして ℓ' に平行な直線を点 B を通るように引いてみたのか説明しましょう。



この直線を引くと、平行四辺形 DBB′A′ が現れます。（この四角形が平行四辺形であるのはどうしてなのか、あなたはちゃんと理由を言うことができますか？）ところで平行四辺形では必ず向かい合っている辺は長さが等しいのでしたよね。ですから A′B′ の長さと DB の長さは同じであると断言できます。全く同じように考えると、四角形 BEC′B′ は平行四辺形になっているわけですから B′C′ の長さと BE の長さは同じであると断言できます。というわけで、A′B′ や B′C′ の長さの代わりに DB や BE の長さを使って話をすることができるようになるわけです。そうすると、気になる長さはすべて △BAD と △BCE のところに集まったことになりますね。これで議論がしやすくなったわけです。

前置きの話はここまでにして、証明をしてみます。

ℓ' に平行な直線を点 B を通るように引き、その直線と直線 a、直線 c との交点をそれぞれ D、E としたわけですね。すると、四角形 DBB′A′ は平行四辺形になっていますから、向かい合う辺の長さは等しいので、

$$\mathrm{DB} = \mathrm{A'B'} \quad \cdots \text{①}$$

であると断言できます。

同じように、四角形 BEC′B′ は平行四辺形になっていますから、向かい合う辺の長さは等しいので、

$$\mathrm{BE} = \mathrm{B'C'} \quad \cdots \text{②}$$

であると断言できます。

ということは、①、②から当然、

$$\mathrm{DB} : \mathrm{BE} = \mathrm{A'B'} : \mathrm{B'C'} \quad \cdots \text{③}$$

が成り立っていることになります。

ところで △BAD と △BCE に注目してみましょう。実はこの 2 つの三角形は相似です。どうしてなのかこれから説明します。

直線 a と直線 c は平行なので、錯角である ∠DAB と ∠ECB の大きさは同じです、つまり、

$$\angle\mathrm{DAB} = \angle\mathrm{ECB} \cdots \text{④}$$

となっています。また、対頂角は必ず大きさが等しいのですから、

$$\angle\mathrm{DBA} = \angle\mathrm{EBC} \cdots \text{⑤}$$

となっています。

④、⑤より、△BAD と △BCE では 2 組の角の大きさが等しいのですから、

$$\triangle\mathrm{BAD} \backsim \triangle\mathrm{BCE}$$

であると断言できるわけです。

相似な三角形では対応している部分の長さの比はどこでも等しいので、

$$\mathrm{AB} : \mathrm{BC} = \mathrm{DB} : \mathrm{BE} \quad \cdots \text{⑥}$$

が成り立っています。よって、③、⑥から、

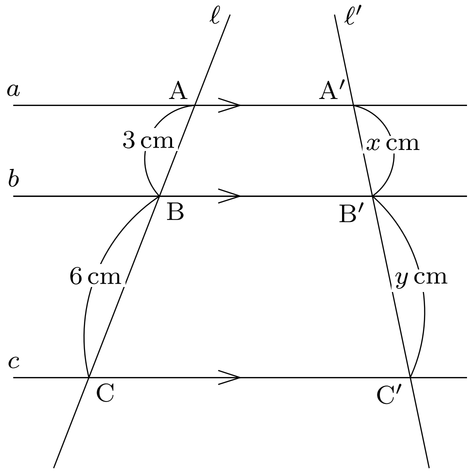
$$\mathrm{AB} : \mathrm{BC} = \mathrm{A'B'} : \mathrm{B'C'}$$

が成り立っていると断言できますね。

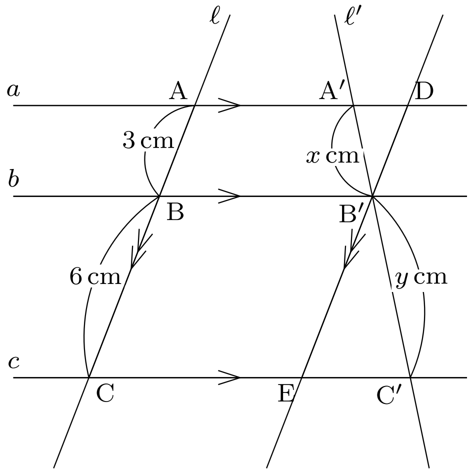
（証明おわり）

問 34.　134 ページから始まる質問とその答えが理解できたかどうか確認する問題です。以下の文の空欄に正しい数、言葉、文を記入しなさい。

(1) 右の図で、3 つの直線 a、b、c は平行になっているとします。このとき $x : y$ が何対何になっているのか、きちんと根拠を示して考えてみることにします。



右の図を見てください。ℓ に平行な直線を点 B′ を通るように引き、その直線と直線 a、直線 c との交点をそれぞれ D、E としました。



四角形 ABB′D に注目すると、AB と DB′ は平行で、AD と BB′ も平行です。ですから四角形 ABB′D は $\boxed{}$ 形です。平行四辺形の向かい合う辺の長さは $\boxed{}$ ので、AB の長さと DB′ の長さは $\boxed{}$ ということになります。今、AB の長さは 3 (cm) ですから、DB′ の長さも $\boxed{}$ (cm) ということになります。

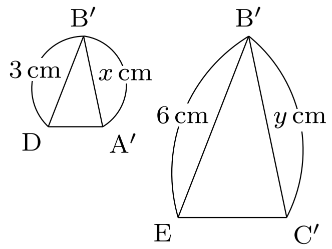
同じように考えると、四角形 BCEB′ も平行四辺形であることがわかります。ですから、向かい合っている辺の長さは等しいということになり、B′E の長さは $\boxed{}$ (cm) ということになります。

次は △B′DA′ と △B′EC′ に注目してみます。

実はこの 2 つの三角形は相似です。どうしてなのか説明することにします。直線 a

と直線 c はそもそも平行です。平行線では $\boxed{}$ 角は等しいのですから、$\triangle \mathrm{B'DA'}$ の $\angle \mathrm{D}$ と $\triangle \mathrm{B'EC'}$ の $\angle \mathrm{E}$ の大きさは等しいということになります。また、$\triangle \mathrm{B'DA'}$ の $\angle \mathrm{B'}$ と $\triangle \mathrm{B'EC'}$ の $\angle \mathrm{B'}$ は対頂角の関係にありますから大きさは等しいわけです。というわけで、$\triangle \mathrm{B'DA'}$ と $\triangle \mathrm{B'EC'}$ では $\boxed{}$ ということが判明しました。ですからこの 2 つの三角形は相似であると断言できるのです。

それではここで、相似であることが判明した $\triangle \mathrm{B'DA'}$ と $\triangle \mathrm{B'EC'}$ を図から取り出し並べて描いて見ることにします。右の図を見てください。2 つの三角形を比べやすくするために、この図では $\triangle \mathrm{B'DA'}$ を回転して向きを変えてあります。また、すでにわかっている辺の長さも記入してあります。

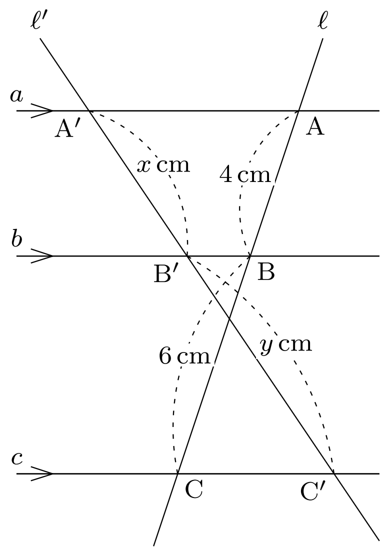


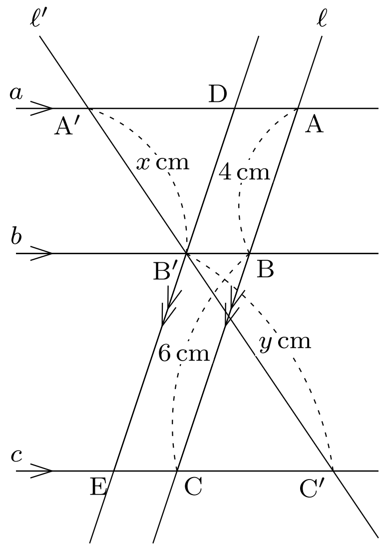
相似な三角形では対応する部分の長さの比はどこでも等しくなっているのですよね。ということは、この図を見れば、

$$x : y = 3 : 6 = \boxed{} : \boxed{}$$

であることがわかりますね。

(2) 右の図で、3 つの直線 a、b、c は平行になっているとします。このとき $x : y$ が何対何になっているのか、きちんと根拠を示して考えてみることにします。





右の図を見てください。ℓ に平行な直線を点 B′ を通るように引き、その直線と直線 a、直線 c との交点をそれぞれ D、E としました。

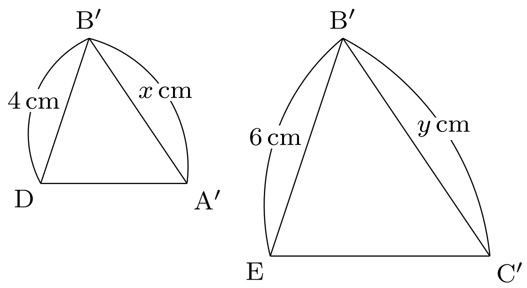
四角形 DB′BA に注目してみます。今 ℓ と平行な直線を描いたのですから四角形 DB′BA の辺 AB と辺 $\boxed{}$ はもちろん平行です。またもともと直線 a と直線 b は平行なのですから、四角形 DB′BA の辺 DA と辺 $\boxed{}$ はもちろん平行です。ということは、そもそも向かい合っている 2 組の辺が平行になっている四角形を平行四辺形と呼んでいるわけですから四角形 DB′BA は $\boxed{}$ 形であると断言できます。平行四辺形の向かい合う辺の長さは $\boxed{}$ ので、AB の長さと DB′ の長さは $\boxed{}$ ということになります。今、AB の長さは 4 (cm) ですから、DB′ の長さも $\boxed{}$ (cm) ということになります。

同じように考えると、四角形 B′ECB も $\boxed{}$ 形であることがわかります。ですから、向かい合っている辺の長さは等しいということになり、B′E の長さは $\boxed{}$ (cm) ということになります。

次は △B′DA′ と △B′EC′ に注目してみます。

実はこの 2 つの三角形は相似です。どうしてなのか説明することにします。直線 a と直線 c はそもそも平行です。平行線では 錯角は等しいのですから、△B′DA′ の ∠D と △B′EC′ の ∠ $\boxed{}$ の大きさは等しいということになります。また、△B′DA′ の ∠B′ と △B′EC′ の ∠B′ は対頂角の関係にありますから大きさは等しいわけです。というわけで、△B′DA′ と △B′EC′ では $\boxed{}$ ということが判明しました。ですからこの 2 つの三角形は相似であると断言できるのです。

それではここで、相似であることが判明した $\triangle \mathrm{B'DA'}$ と $\triangle \mathrm{B'EC'}$ を図から取り出し並べて描いて見ることにします。右の図を見てください。2 つの三角形を比べやすくするために、この図では $\triangle \mathrm{B'DA'}$ を回転して向きを変えてあります。また、すでにわかっている辺の長さも記入してあります。



相似な三角形では対応する部分の長さの比はどこでも等しくなっているのですよね。ということは、この図を見れば、

$$x : y = 4 : 6 = \boxed{} : \boxed{}$$

であることがわかりますね。 答えを見る

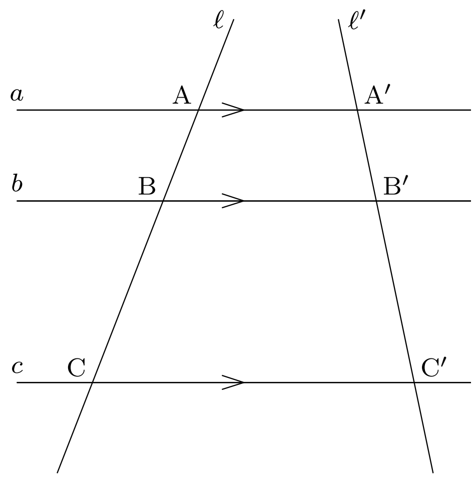
それではここで、これまで学んできたことをまとめておくことにしましょう。134 ページから始まる「質問」、「質問の答え」が理解できた人は次のことを証明したことになります。

重要な事実：平行線と比

右の図のように平行な 3 つの直線 a、b、c に 2 本適当な向きの直線 ℓ、ℓ' が交わっているとします。ℓ が a、b、c と交わる点をそれぞれ A、B、C と呼ぶことにし、ℓ' が a、b、c と交わる点をそれぞれ A′、B′、C′ と呼ぶことにします。すると必ず、

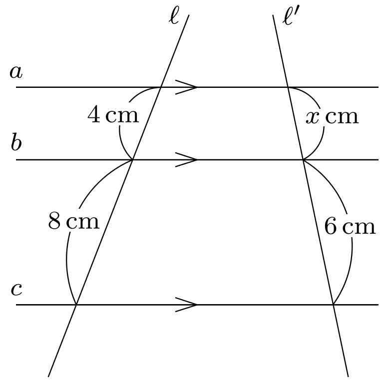
$$\mathrm{AB : BC = A'B' : B'C'}$$

が成り立っているのです。



数学では一度証明されたことはいろいろな問題を解くときに自由に使うことができます。次の例題で、いま学んだばかりの重要な事実を使う練習をしてみることにしましょう。

例題 14　右の図で、3 つの直線 a、b、c は平行になっているとします。このとき x の値を求めなさい。



解答

3 つの直線 a、b、c は平行になっているのですから、「重要な事実：平行線と比」によれば、

$$4 : 8 = x : 6$$

が成り立っているわけです。この式を使えば x の値を求めることができますね。例えば、「内項の積と外項の積は等しい」ということが理解出来ている人は、この式をまず、

$$8 \times x = 4 \times 6$$

という式に書き換えれば良いわけです。そうすると、次はこの式の両辺を 8 でわって、

$$x = \frac{4 \times 6}{8} = 3$$

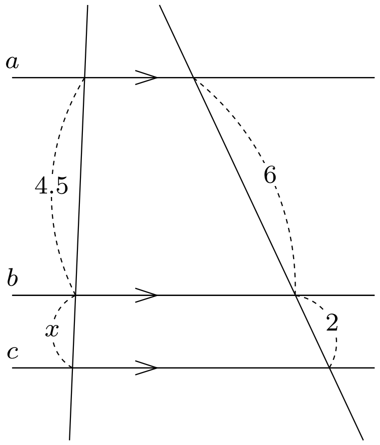
であることがわかりますね。

念のために少し補足をしておきます。この問題は、「重要な事実：平行線と比」に書いてあることの意味がわかっている人は次のように考えることができます。とにかく「直線 a と b の間隔」と「直線 b と c の間隔」の比はどこでどの向きで考えても同じなわけです。「直線 a と b の間隔」と「直線 b と c の間隔」の比を直線 ℓ に沿って考えると $4 : 8$ です

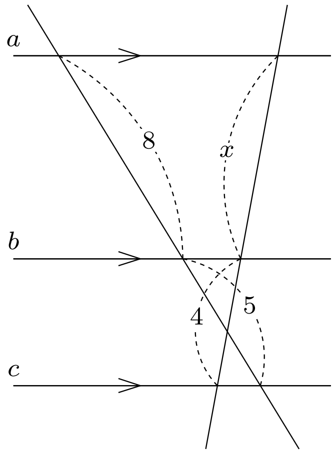
ね。この比を簡単にすると 1 : 2 となります。ですから直線 ℓ’ に沿って考えても「直線 a と b の間隔」と「直線 b と c の間隔」の比は 1 : 2 なわけです。つまり x は 6 の半分になっていることになりますね。ですから、x の値は 3 ですよね。

問 35. 次の図ではいずれも 3 直線 a、b、c は平行であるとします。このとき x の値を求めなさい。

(1)



(2)

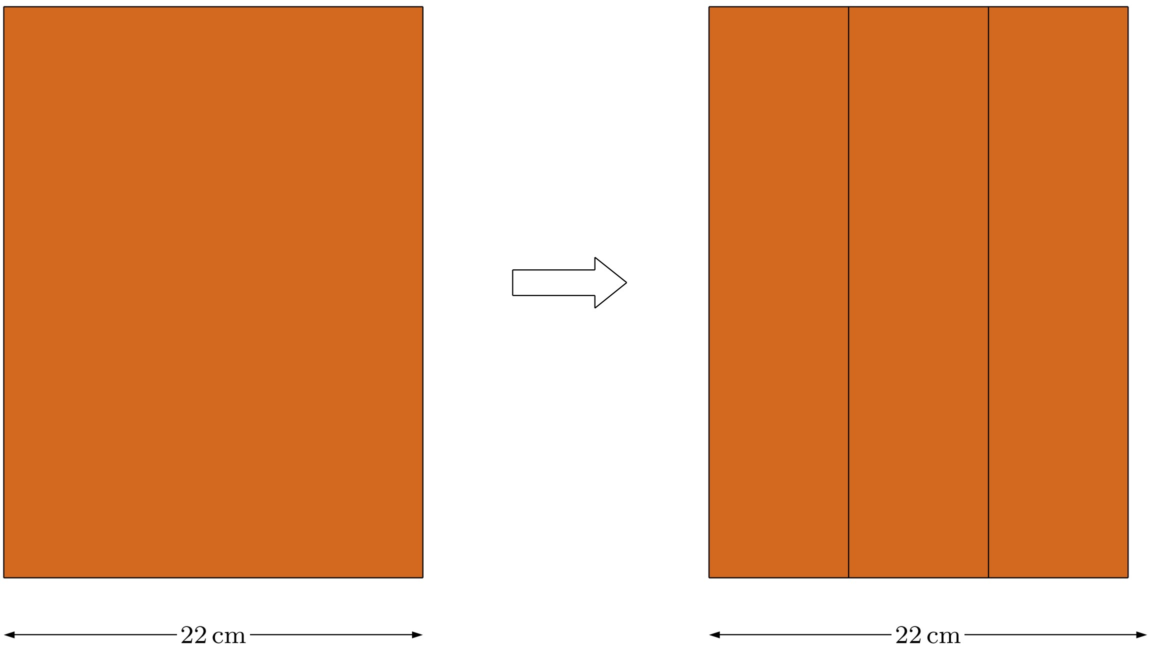


答えを見る

1.4.5　平行線と比の関係を利用して楽をしよう

長方形の板を正確に 3 等分するには・・・

　次の図を見てください。



幅が 22 cm の板　　　縦に 3 等分するための線を描く

　この図のように、幅が 22 cm の長方形の板を縦に切り、できるだけ正確に 3 等分したいと思います。そのために、まず、切るための線を定規を使って描くことにします。

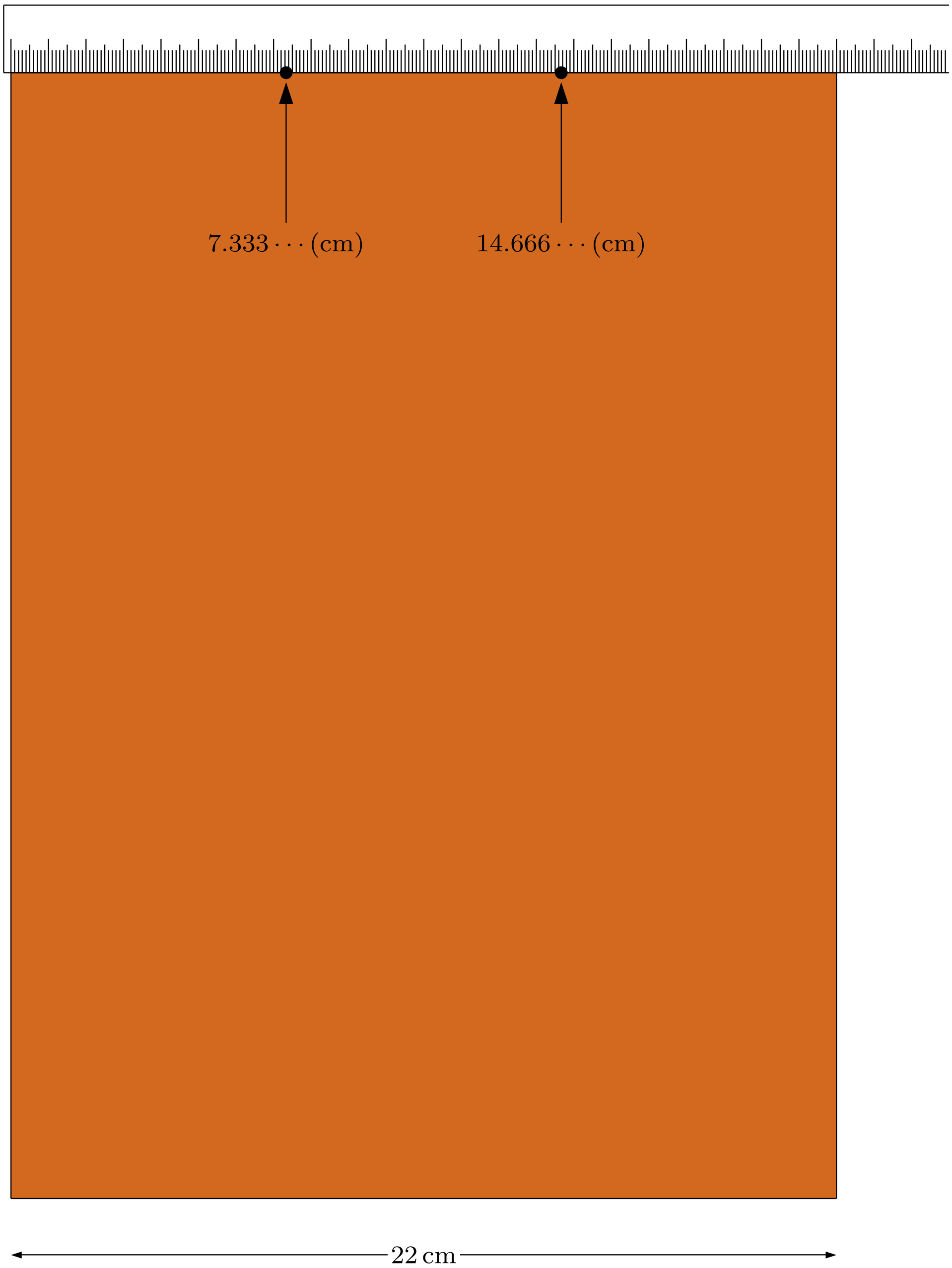
　どのようにするのかというと、例えば次のような方法があります。

　まず 3 等分されてできる 1 つの板の幅を計算してみます。すると、

$$22 \div 3 = 7.333\cdots \text{ (cm)}$$

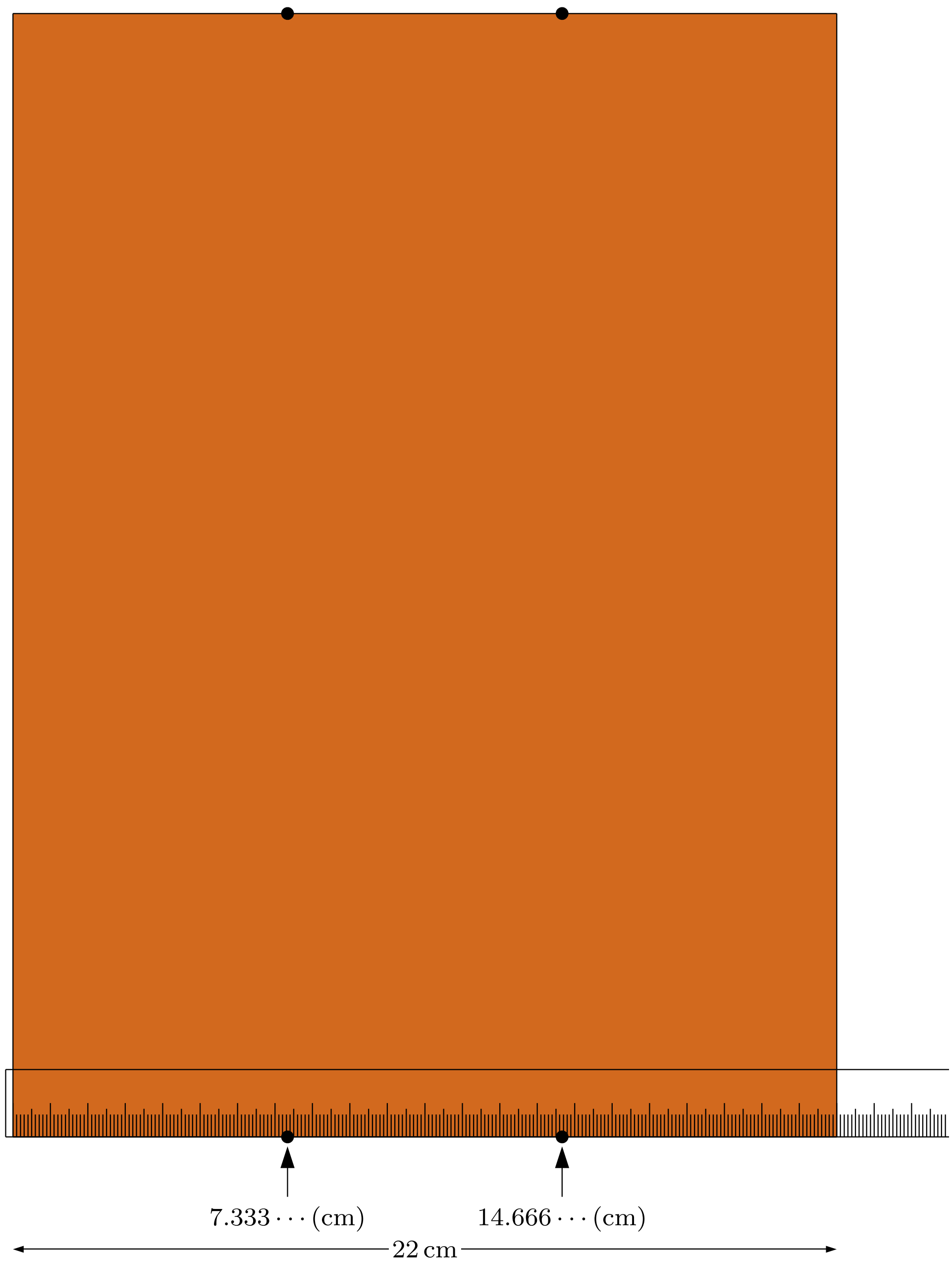
となりますよね。

　そして次は定規を板に当てて線を描くわけですが、まず次の図を見てください。

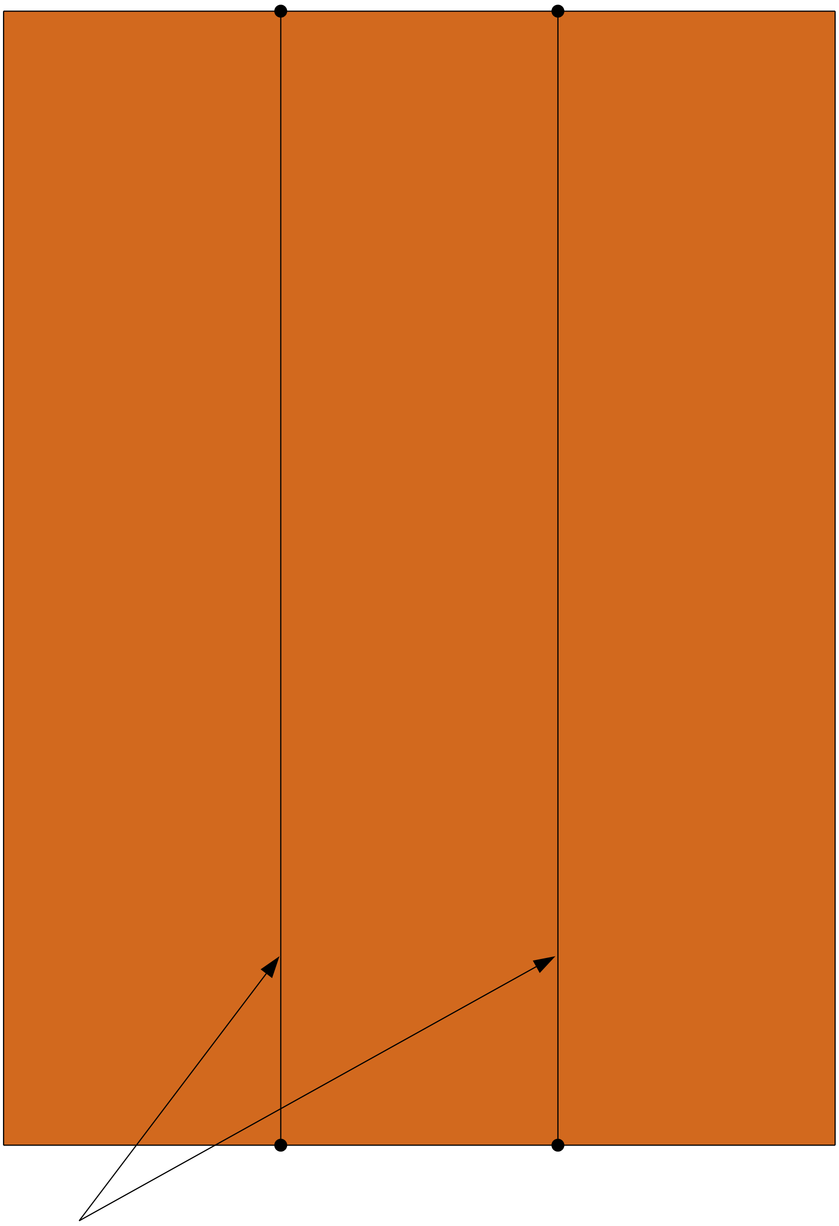


3 等分された 1 つの板の幅は 7.333 ⋯ (cm) ですから、定規をこの図のように板の上に沿って当て、左の端から 7.333 ⋯ (cm) のところと 14.666 ⋯ (cm) のところにマークをつけます。しかし実際には 7.333 ⋯ (cm) のところや 14.666 ⋯ (cm) のところに正確にマークをつけるのは難しいことです。たいていの定規も目盛りは 1 mm ごとに付けられているだけなので、「ななてんさんさんさん ⋯」などという数値を定規で正確に読み取ることはできないのです。ですから「だいたい 7.333 ⋯ (cm) のところ」と「だいたい 14.666 ⋯ (cm) のところ」にマークすることになってしまうのです。まあ、その点には目

をつぶることにして次に進みましょう。次は今と同じようにして、定規を板の下側に沿って当て、左の端から「だいたい $7.333\cdots$ (cm) のところ」と「だいたい $14.666\cdots$ (cm) のところ」にマークをつけます。

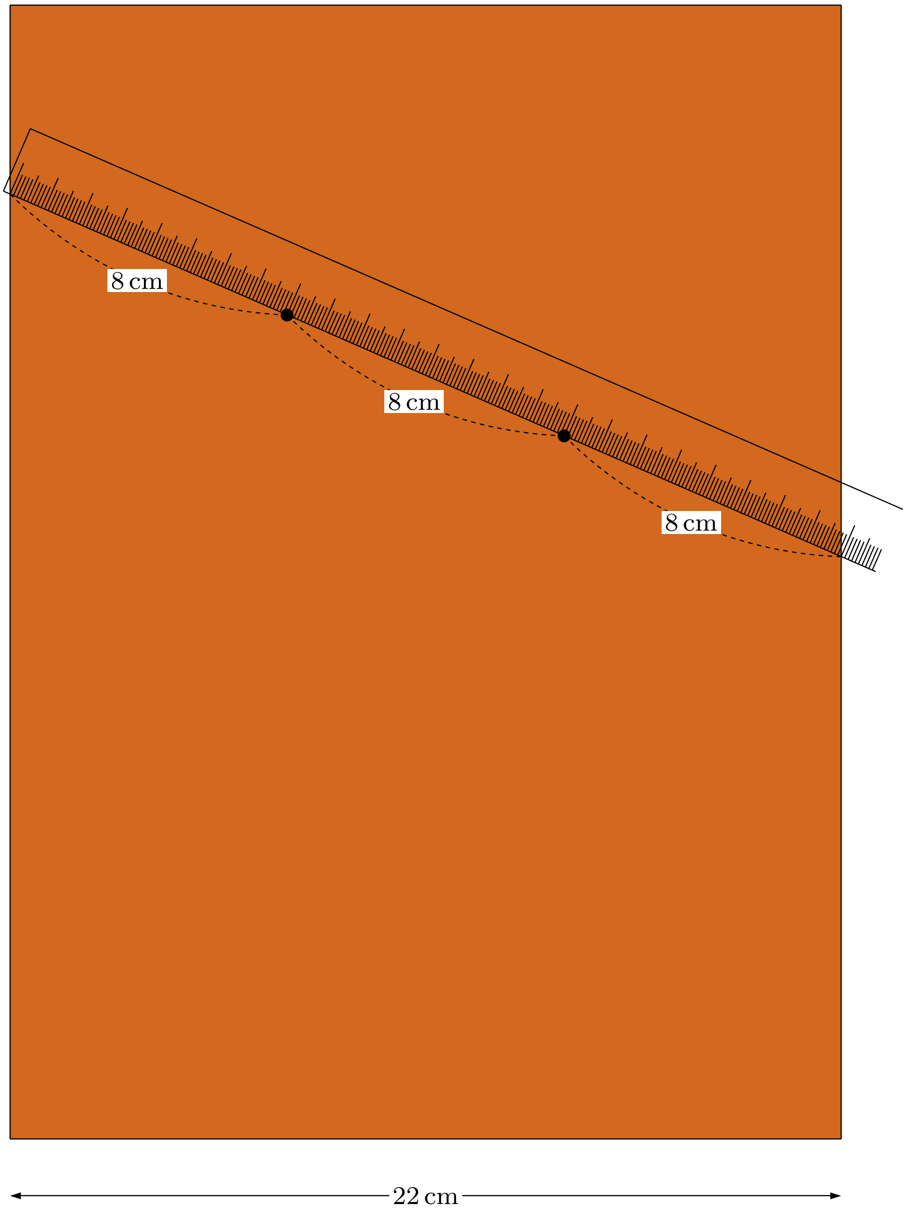


ここまでできたらあとは、定規を使ってマークをした点を縦にまっすぐ結べば良いですよね。すると次のようになるわけです。



さてこれで、目標達成ですね。ところで今紹介した方法ですが、ちょっと気にいらないところがあります。板を 3 等分するための線をできるだけ正確に描きたかったのですよね。それなのに、だいたい $7.333\cdots$ cm のところとか、だいたい $14.666\cdots$ cm のところとかに点をマークしたのですよね。どうしてこんなことになったのかというと、定規の目盛りは 1 mm おきにしかついていないので、「てんさんさんさん $\cdots$」なんて数値は定規の目盛りでは扱うことができないからですよね。この他にも気に入らないところがあります。それは $7.333\cdots$ とか $14.666\cdots$ という数値です。これらの数は小数点以下が永遠に

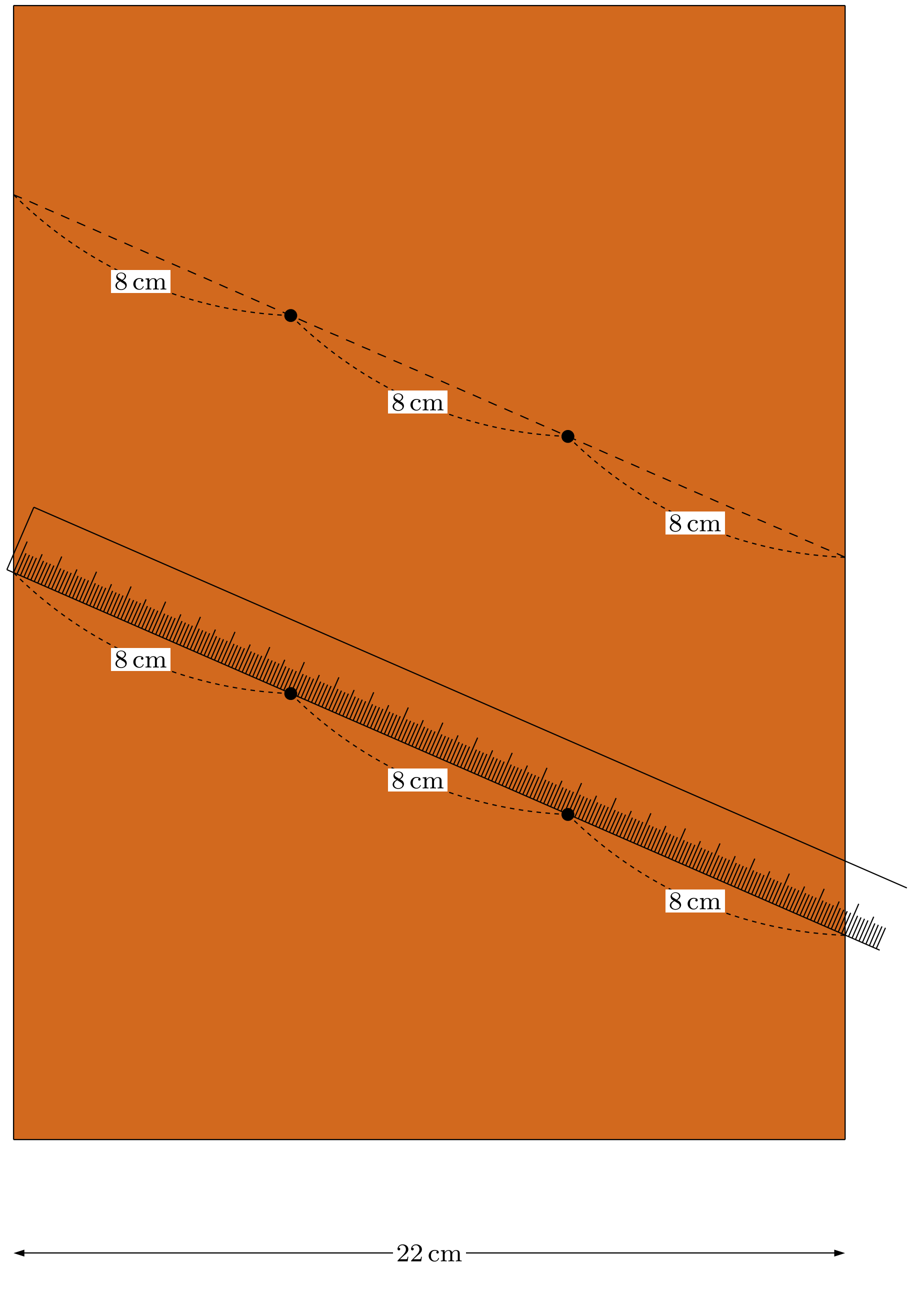
続く数です。どうしてこんな数が出てきたのかというと、それは $22 \div 3$ というわり算をしたからですね。22 は 3 とは相性が悪く、このわり算は割り切れないのです。そこで少し工夫をすることにしましょう。$22 \div 3$ というわり算は割り切れませんが、$24 \div 3$ だったら割り切れます。暗算ですぐに、$24 \div 3$ の答えは 8 だってわかりますよね。えっ、幅が 22 cm の板を 3 等分する話なのにどうして $24 \div 3$ をするのかですって？では説明することにしましょう。次の図を見てください。



この図のように、定規の目盛りが 24 cm のところが板の右側に当たるように定規をうま

く斜めに置くのです。そして定規の目盛りが 8 cm のところと 16 cm のところにマークをつけます。

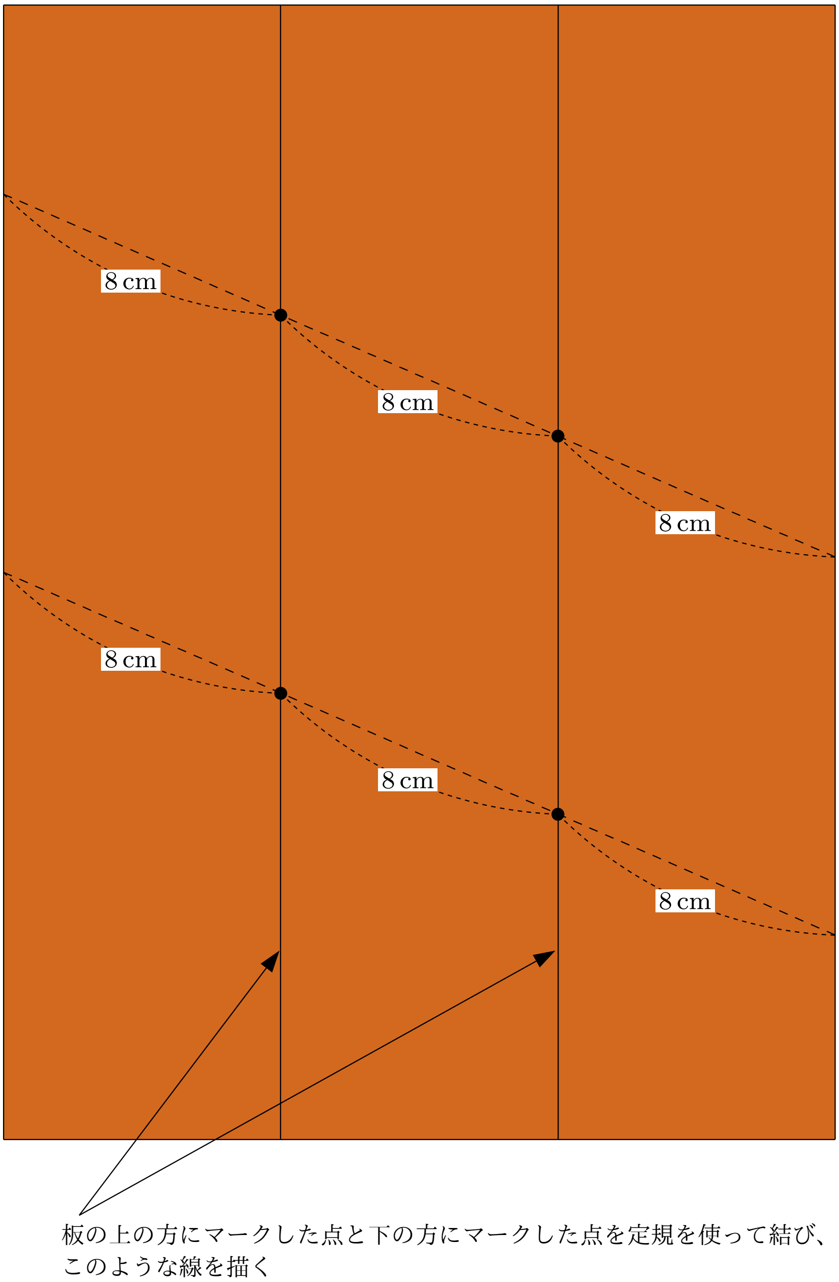
　では次の図を見てください。



　この図のように、定規を下の方にずらしてさっきと同じように、定規の目盛りが 24 cm のところが板の右側に当たるように定規をうまく斜めに置きます。そして定規の目盛りが

8 cm のところと 16 cm のところにマークをつけます。

　では最後に次の図を見てください。こまでできたらあとは、定規を使ってマークをした点を縦にまっすぐ結べば良いですよね。



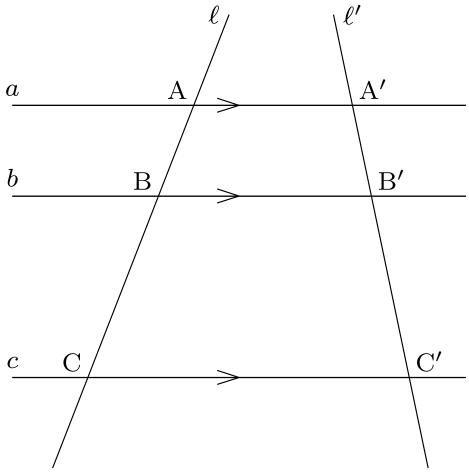
　さてこれで、目標達成です。ちゃんとこの方法でもちゃんと板を 3 等分する線を描くことができるのです。どうしてなのか説明することにしましょう。私たちはすでに、平行線

と比について学んでいますね。どんな話だったか簡単に思い出しておきます。

140 ページで次のような「重要な事実」を学びましたよね。

重要な事実：平行線と比

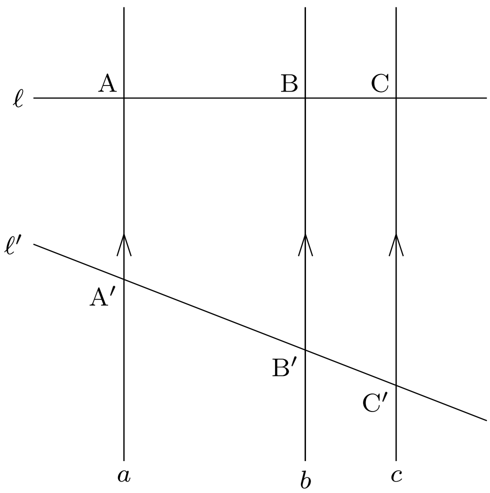
右の図のように平行な 3 つの直線 a、b、c に 2 本適当な向きの直線 ℓ、ℓ' が交わっているとします。ℓ が a、b、c と交わる点をそれぞれ A、B、C と呼ぶことにし、ℓ' が a、b、c と交わる点をそれぞれ A$'$、B$'$、C$'$ と呼ぶことにします。すると必ず、



$$\mathrm{AB} : \mathrm{BC} = \mathrm{A'B'} : \mathrm{B'C'}$$

が成り立っているのです。

この「重要な事実」の説明の図では平行線は横向きに描いてありましたが、あなたがこのテキストを 90° 傾ければ平行線は縦になります。



右の図を見てください。この図のように 3 つの直線が縦に平行になっていてもやはり、

$$\mathrm{AB} : \mathrm{BC} = \mathrm{A'B'} : \mathrm{B'C'}$$

が成り立っているわけです。「直線 a と b の間隔」と「直線 b と c の間隔」の比を直線 ℓ に沿って考えても直線 ℓ' に沿って考えても同じなのです。つまりとにかく、「直線 a と b の間隔」と「直線 b と c の間隔」の比はどこでどの向きで考えても同じということです。ですからある板を縦に 3 等分するとき、定規をこの図の ℓ の向き（つまり水平な向き）に置こうが、この図の ℓ' の

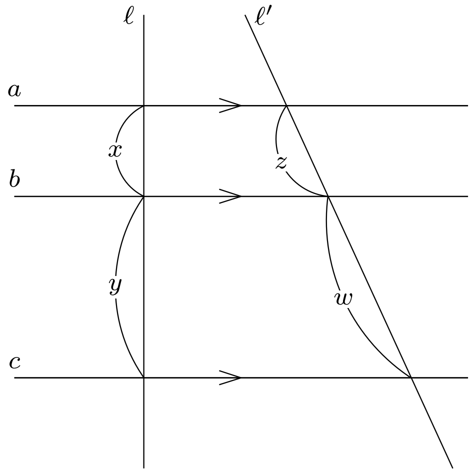
向き（つまり斜めな向き）に置こうが、とにかく等分するようにマークをつければ良いのです。

さっき思い出してもらった「重要な事実」と同じことですが、念のため、大切な物の見方をここでまとめておきましょう。

重要な事実：平行線どうしの間隔と比

いくつかの平行線が描かれているとき、平行線どうしの間隔の比はどのような向きで考えてみても必ず同じになります。

例えば右の図のように平行な 3 つの直線 a、b、c があるとします。このとき、図の ℓ に沿って平行線たちに垂直に平行線の間隔を測って比を考えても、図の ℓ' に沿って平行線たちに斜めに平行線の間隔を測って比を考えても、必ず比は同じになるのです。



a、b、c が平行ならば、ℓ や ℓ' がどんな向きでも必ず $x : y = z : w$ が成り立つ

例 6　3 等分専用定規の作り方と使い方

(1)　3 等分専用定規の作り方を説明します。

まず、定規のような形の板とか、まっすぐな棒などを用意してください。長さは適当で良いのですが、そうですねぇ、あなたの肘から手首までぐらいの長さにしておくと良いかもしれません。

次に、用意した「定規のような形の板」または「真っ直ぐな棒」にマークをつけます。右の図を見てください。

これは定規のような板に、いくつか黒い点をつけたものです。黒い点をどのようにつけるのか説明しましょう。

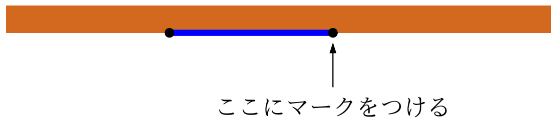
マークをつけるために例えば、適当な長さの「ひも」を使うことができます。

右の図を見てください。ここでは青いひもを使ってみました。この図のようにひもをピンと張り、板の左端から板に沿うようにピッタリ当てます。

そしてひもの右端に合わせて板にマークをつけるのです。これで 1 つ目のマークをつけることができました。

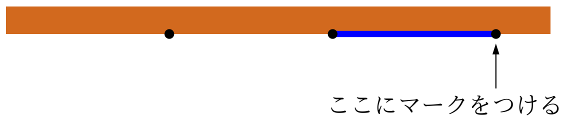
2 つ目のマークも同じようにしてつけます。

右の図を見てください。この図のようにひもをピンと張り、ひもの左端をさっきつけた 1 つ目のマークに合わせ、ひもを板に沿うようにピッタリ当てます。そしてひもの右端に合わせて板にマークをつけるのです。これで 2 つ目のマークをつけることができました。



3 つめのマークも同じようにしてつけます。

右の図を見てください。この図のようにひもをピンと張り、ひもの左端をさっきつけた 2 個目のマークに合わせ、ひもを板に沿うようにピッタリ当てます。そしてひもの右端に合わせて板にマークをつけるのです。これで 3 つ目のマークをつけることができました。



これで 3 等分専用定規は完成です。このように作れば、右の図のように、1 つ目、2 つ目、3 つ目のマークは等間隔に並んでいるわけです。

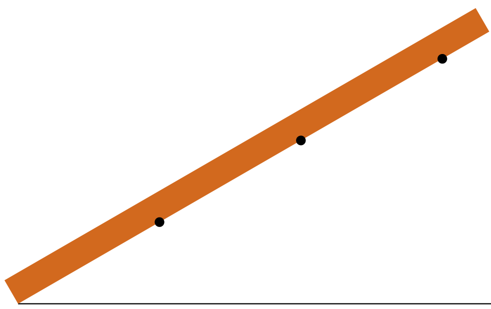
この「3 等分専用定規」を作るとき、「普通の定規の目盛りを使って長さを測る」などということは全くしていません。ですから、「左端から 1 つ目のマークまでの長さ」、「1 つ目のマークから 2 つ目のマークまでの長さ」、「2 つ目のマークから 3 つ目のマークまでの長さ」はすべて同じですが何 cm なのかは分からないのです。もっと言うと、何 cm でも良いのです。**大事なことは「左端から 1 つ目のマークまでの長さ」、「1 つ目のマークから 2 つ目のマークまでの長さ」、「2 つ目のマークから 3 つ目のマークまでの長さ」はすべて同じである**ということです。

(2)　3 等分専用定規の使い方

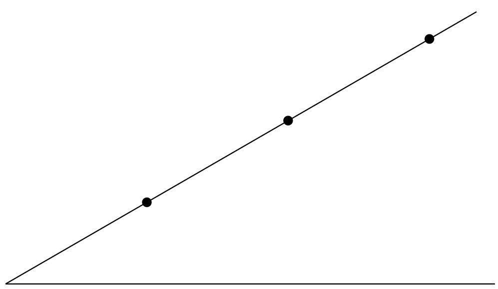
(1) で作られた「3 等分専用定規」を使うと、まぁ、どんな長さの線分でも正確に 3 等分することができます。どのように使うのかこれから説明しましょう。

右の図を見てください。ある長さの線分があるとします。これからこの線分を正確に 3 等分したいと思います。

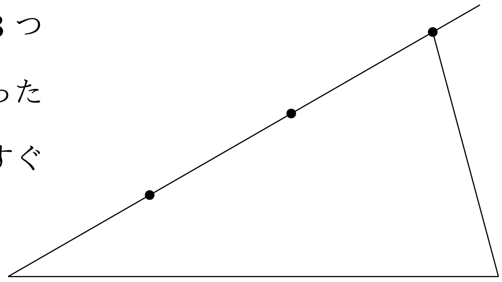
右の図のように、まず、「3 等分専用定規」の左端を線分の左端にあわせ、「3 等分専用定規」を適当な向きに置きます。ここでは「3 等分専用定規」を右上がりになる感じに置いてみました。



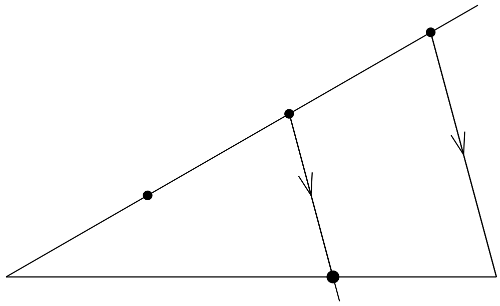
右の図を見てください。次は、「3 等分専用定規」に沿って線を引き、黒いマークをうつし、「3 等分専用定規」を取り去ります。



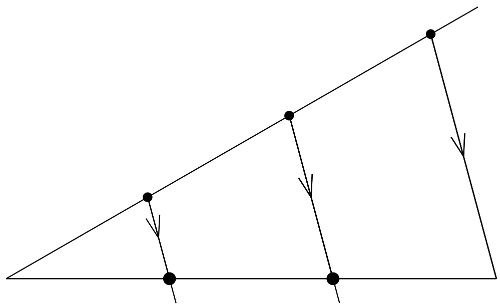
右の図を見てください。次は、「3 つめのマーク」と「初めに描いてあった線分の右端」を定規か何かでまっすぐ結びます。



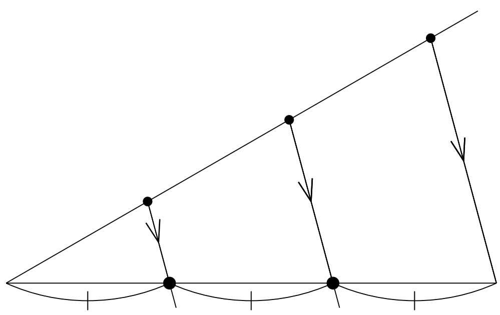
右の図を見てください。次は、「2 つめのマーク」から「初めに描いてあった線分」へ向かってさっき描いた線と平行な線を描いていきます。そして「初めに描いてあった線分」とぶつかるところにマークをつけます。（平行な線を描くには、例えば三角定規を 2 枚合わせて使えばよいですよね。）



右の図を見てください。次は、「1 つめのマーク」から「初めに描いてあった線分」へ向かってさっき描いた線と平行な線を描いていきます。そして「初めに描いてあった線分」とぶつかるところにマークをつけます。



このようにすると、初めにあった線分を正確に 3 等分するところにマークをつけることができるのです。



問 36. 例 6 の説明が理解できた人のための問題です。

例 6 で説明したように「3 等分専用定規」を使うと、どんな線分でも 3 等分できる理由をきちんと説明しなさい。

答えを見る

問 37. 例 6 の説明が理解できた人のための問題です。

(1) 適当な長さの「定規のような形の板」、「真っ直ぐな棒」などを用意してください。そしてそれに、適当な長さの「ひも」を使ってマークをつけ、「5 等分専用定規」を作りなさい。

(2) (1) で作った 5 等分専用定規と三角定規 2 枚を使い、次の図の線分を $2:3$ に分けるところにマークをつけなさい。

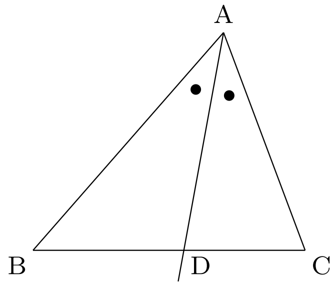
答えを見る

例題 15　三角形の角の二等分線の持っている面白い性質を証明する問題

右の図は、ある $\triangle ABC$ の $\angle A$ の二等分線を描いたものです。この図では $\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D と呼ぶことにしました。このとき、

$$AB : AC = BD : DC$$

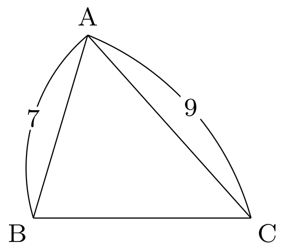
が成り立っていることを証明しなさい。



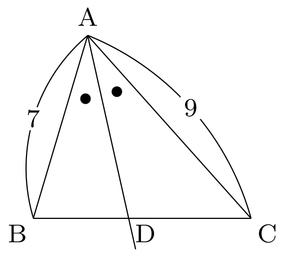
解答

証明に入る前に、念のためこの問題の主張の意味を確認しておきます。

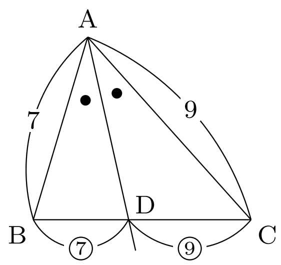
右の図を見てください。この図のように、まず例えば、AB の長さが 7 で AC の長さが 9 の △ABC があるとします。



そして次に、右の図のように ∠A の二等分線を辺 BC とぶつかるまで引きます。ぶつかった点をここでは D と呼ぶことにしておきます。



そうすると、BD の長さと DC の長さの比は 7 : 9 になると主張しているのです。



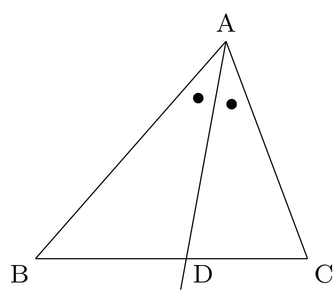
BD : DC = 7 : 9 となっているはずなのである

どうですか？これで意味はわかってもらえたと思いますが、今のところ、これが本当なのかどうか証拠はないですよね。ですからこの問題は、あなたにこのことが本当であるという証明をしてほしいと言っているのです。

それではいよいよこの主張の証明をすることにしましょう。

（証明）

あなたのためにこの問題の図をもう一度右に描いておきました。実はこの問題は少しむずかしく、この図を見ているだけではいくら考えても証明はできません。ですからあなたにヒントをあげることにします。この問題の主張を証明するためには、例えばいくつか補助線を引くと良いのです。そして、これまで詳しく学んできた「平行線と比」の性質を使うのです。これから丁寧に説明していきますが、その説明を読む前に、ぜひあなただけで一度証明を考えてみてください。では 15 分待ちます。



・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

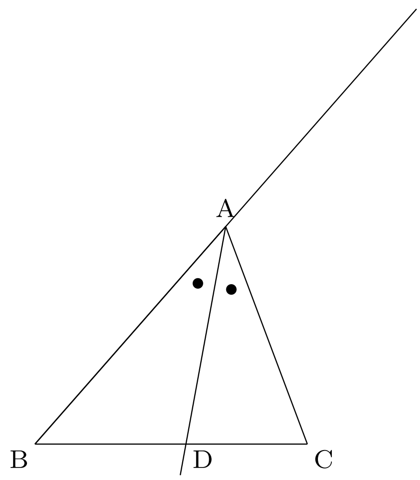
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・

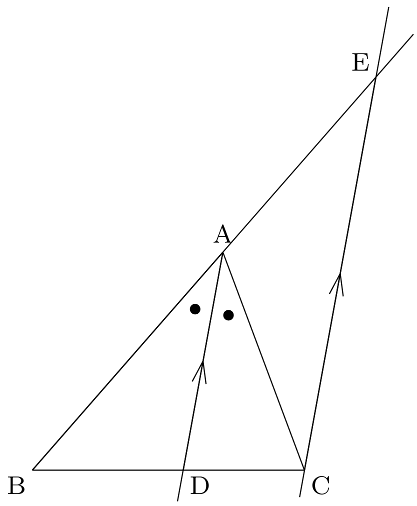
　はい 15 分たちました。

　それでは、どこにどのような補助線を引くのか教えることにしましょう。

　まず右の図のように、辺 BA を A の方にさらに延長しておきます。



次は右の図のように、点 C から DA に平行な線をさっき描いた線とぶつかるまで引きます。ここではぶつかった点を E と呼ぶことにしました。



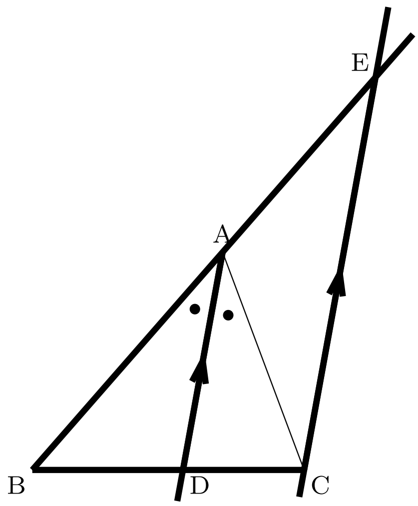
これで補助線を全部描きました。準備完了です。ではこの図を見ながら証明することにしましょう。

右の図を見てください。まず注目して欲しいところだけを太く描いておきました。

DA と CE は平行なのですから、

$$\mathrm{BA} : \mathrm{AE} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC} \cdots ①$$

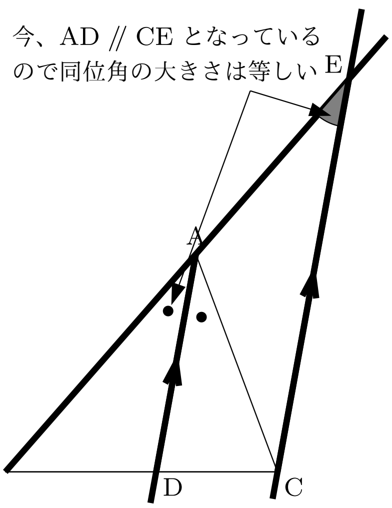
と断言することができますよね。



今度は 右の図を見てください。次に注目して欲しいところだけを太く描いておきました。

平行線では同位角は必ず大きさが等しくなっているのでしたね。ところでこの図を見るとわかるように、∠BAD と ∠AEC は同位角の位置関係にあります。今、この問題では DA と CE は平行なのですから、

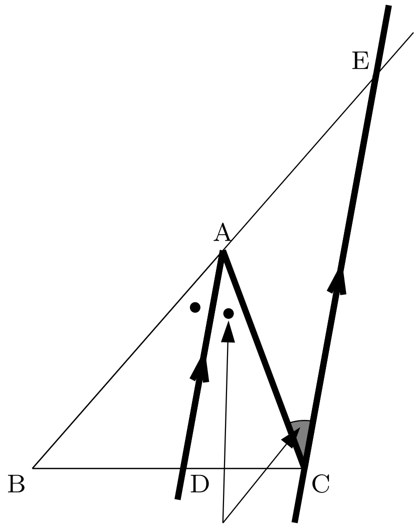
$$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{AEC} \cdots ②$$



と断言することができますよね。

今度は 右の図を見てください。次に注目して欲しいところだけをまた太く描いておきました。

平行線では錯角は必ず大きさが等しくなっているのでしたね。ところでこの図を見るとわかるように、∠DAC と ∠ACE は錯角の位置関係にあります。今、この問題では DA と CE は平行なのですから、



今、AD // CE となっているので錯角の大きさは等しい

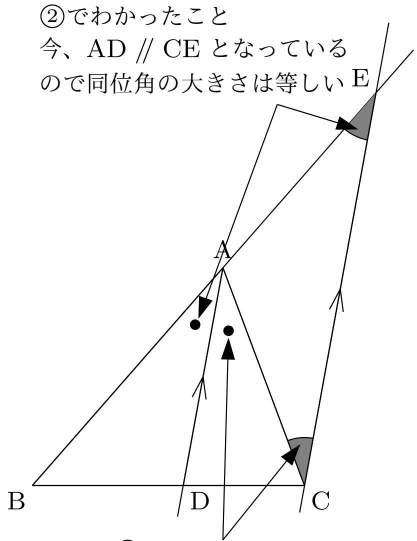
$$\angle \mathrm{DAC} = \angle \mathrm{ACE} \cdots ③$$

と断言することができますよね。

頭の中を整理するために、ここまで角の大きさについてわかったことを 右の図にまとめておきます。

この図を見ながら考えると分かると思いますが、 この問題ではもともと、

②でわかったこと
今、AD // CE となっているので同位角の大きさは等しい



③でわかったこと
今、AD // CE となっているので錯角の大きさは等しい

$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{DAC} \cdots ④$$

なのですから、②、③でわかったことと考え合わせると、

$$\angle \mathrm{AEC} = \angle \mathrm{ACE} \cdots ⑤$$

であると断言できますね。ということは、△ACE は二等辺三角形ということになるので、

$$\mathrm{AC} = \mathrm{AE} \cdots ⑥$$

であると断言できることになります。

ではここで、①を思い出してみましょう。確か、DA と CE は平行なので、

$$\mathrm{BA} : \mathrm{AE} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC} \cdots ①$$

が成り立っていると言うことでしたね。そこで今⑥でわかったこと、つまり、

$$\mathrm{AC} = \mathrm{AE} \cdots ⑥$$

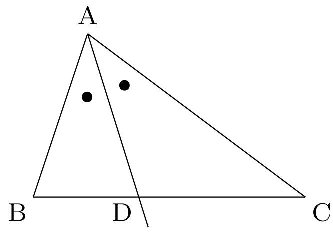
ということを考えに入れると、①の AE を AC に取り替えることができるので結局、

$$\mathrm{BA} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$$

であると断言できますね。

（証明終わり）

問 38. 例題 15 の解答が理解できているかどうか確認する問題です。



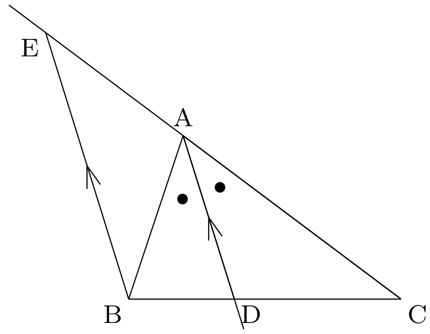
A さんはある日、三角形の角の二等分線には面白い性質があるということに気がつきました。右の図を見てください。$\triangle$ABC の $\angle$A の二等分線を向かい合う辺にぶつかるまで引いていきます。この図では $\angle$A の二等分線と辺 BC の交点を D と呼ぶことにします。このとき、どうも、

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$$

ということが成り立っているということに気づいたのです。しかし、どうしてこんなことが成り立つのか A さんにはわかりませんでした。そこで、A さんの代わりにあなたにこのことを証明してもらうことにします。以下の文の空欄に正しい記号、言葉を記入して証明を完成してください。

（証明）

点 B を通り AD に平行な線と CA を A の方に延長した線の交点を E とします。



AD と BE は平行なので平行線と比の性質から、

$$\mathrm{EA} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \boxed{} \cdots ①$$

が成り立ちます。

AD と BE は平行なので同位角の大きさは等しいはずです。ですから、

$$\angle\mathrm{BEA} = \angle\boxed{} \cdots ②$$

が成り立ちます。

AD と BE は平行なので錯角の大きさは等しいはずです。ですから、

$$\angle\mathrm{ABE} = \angle\boxed{} \cdots ③$$

が成り立ちます。

この問題ではもともと AD は ∠BAC の二等分線ですから、

$$\angle\mathrm{DAC} = \angle\mathrm{BAD} \cdots ④$$

が成り立っています。

ということは、②、③、④より、△ABE では、

$$\angle\mathrm{BEA} = \angle\mathrm{ABE} \cdots ⑤$$

が成り立っていると断言できます。ですから、△ABE は $\boxed{}$ 辺三角形です。特に、

$$\mathrm{EA} = \boxed{} \cdots ⑥$$

が成り立っていると断言できます。

そうすると、①、⑥から、

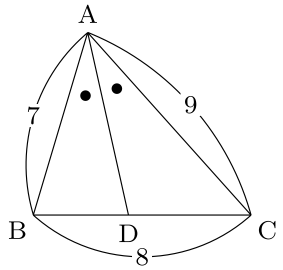
$$\boxed{} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \boxed{}$$

が成り立っていることになります。

（証明終わり）

答えを見る

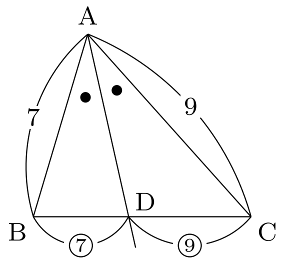
例題 16　右の図は △ABC の ∠A の二等分線をひき、辺 BC とぶつかる点を D したものです。AB = 7、AC = 9、BC = 8 のとき、BD の長さを求めなさい。



解答

右の図を見てください。例題 15 で証明したことを思い出すと、この三角形では、

$$7 : 9 = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$$



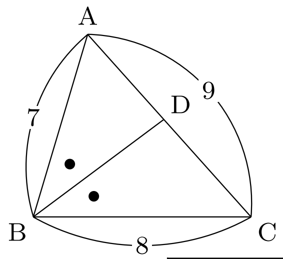
BD : DC = 7 : 9 となっているはずなのである

となっていると断言できます。ですから、特に、BD の長さは BC の長さを 16 等分（7 と 9 をたすと 16 ですよね）したうちの 7 個分であることがわかります。よって、

$$\mathrm{BD} = \mathrm{BC} \times \frac{7}{16} = 8 \times \frac{7}{16} = \frac{7}{2}$$

であるとわかります。

問 39. 右の図は △ABC の ∠B の二等分線をひき、辺 AC とぶつかる点を D したものです。AB = 7、AC = 9、BC = 8 のとき、AD の長さと DC の長さを求めなさい。

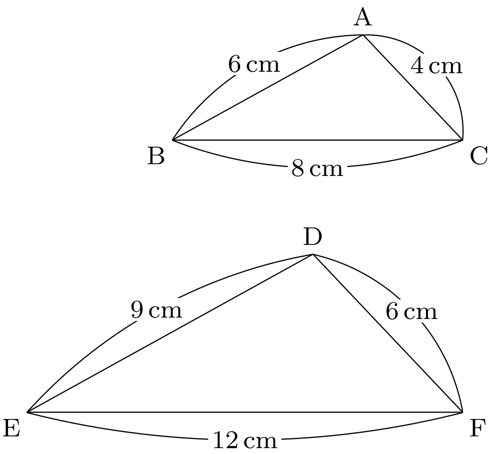


答えを見る

1.5　相似な図形の面積や体積には何か関係があるの？

2 つの図形があるとします。そしてこの 2 つの図形では、大きさは違ったとしても形は同じであるとします。このようなとき、2 つの図形は相似であるというのでしたね。

ここではこれから、2 つの相似な図形があるときに「面積の比はどうなっているのか」ということや「体積の比はどうなっているのか」ということを学びます。ところで、相似な図形には「相似比」というものがあるのでしたね。たしか、2 つの相似な図形の相似比というのは「2 つの図形で対応している部分の長さの比」のことでしたね。例えば、右の図のような相似な 2 つの三角形があるとします。△ABC と △DEF は大きさは違いますが形は同じです。この 2 つの三角形では、例えば辺 AB は辺 DE に対応しています。そして辺 AB と辺 DE の長さの比は



$$\mathrm{AB} : \mathrm{DF} = 6 : 9 = 2 : 3$$

となっています。ですから

△ABC と △DEF の相似比は 2 : 3

ということになるわけですね。

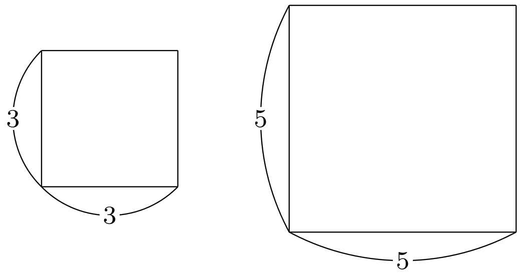
念のためもう一度確認しておきます。2 つの相似な図形の相似比というのは「2 つの図形で対応している部分の長さの比」のことです。ですから △ABC と △DEF の「面積の比」が 2 : 3 になっているわけではありません。

1.5.1　相似な図形では面積の比はどうなっているの？

いくつかの簡単な図形で調べてみることにしましょう。

まず正方形で考えてみます。

例 7　相似な 2 つの正方形の面積比ってどうなってるの？



右の図を見てください。「小さい正方形」と「大きい正方形」があります。2 つの正方形は大きさは違いますが形は同じですから相似です。そして、対応する辺の長さの比は $3:5$ です。ですから、この 2 つの正方形の相似比は $3:5$ ということになりますね。

それでは、この 2 つの正方形の面積の比はどうなっているのでしょうか。それぞれの正方形の面積を計算して調べてみることにします。すると、

$$\text{小さい正方形の面積} = 3 \times 3 = 3^2$$

$$\text{大きい正方形の面積} = 5 \times 5 = 5^2$$

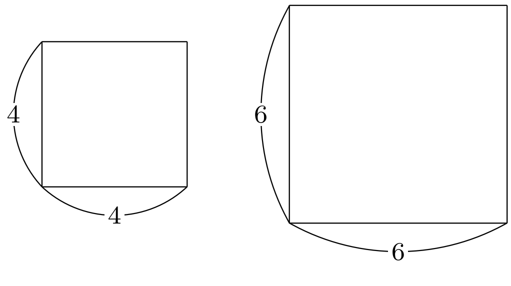
となりますから

$$\begin{aligned}\text{小さい正方形の面積} : \text{大きい正方形の面積} &= 3^2 : 5^2 \\ &= 9 : 25\end{aligned}$$

ということになります。つまり、面積比は $9:25$ ということです。

以上で、相似比が $3:5$ であるこの 2 つの正方形では、面積比は $3^2 : 5^2$ になっている（つまり $9:25$ になっている）ということがわかりました。

問 40. 右の図の 2 つの正方形について考えることにします。以下の問に答えなさい。



(1) 2 つの正方形は相似であるといえますか？相似だといえると思った人は相似比も答えなさい。

(2) 2 つの正方形の面積をそれぞれ求めなさい。

(3) 次の文に正しい言葉、数を記入してください。

(2) で計算した 2 つの正方形の面積を使うと

$$\begin{aligned}\text{小さい正方形の面積} : \text{大きい正方形の面積} &= 16 : 36 \\ &= \square : \square\end{aligned}$$

となります。ところで、$4 : 9$ という比は $2^2 : 3^2$ というように書き換えられます。一方 (1) では 2 つの正方形の相似比は $2 : 3$ であることがわかっています。ですからもしかすると、

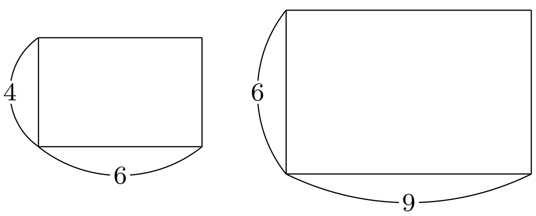
$$2\text{ つの相似な正方形の相似比が } m : n \text{ のとき、面積比は } \square^2 : \square^2 \text{ になる}$$

のかもしれません。 答えを見る

次は長方形で調べてみましょう。

例 8　相似な 2 つの長方形の面積比ってどうなってるの？

右の図を見てください。「小さい長方形」と「大きい長方形」があります。ところで 2 つの「正方形」は必ず相似ですが、2 つの「長方形」は必ずしも相似とは限りません。そこでまず、この図の 2 つの長方形が相似かどうか考えてみましょう。



この 2 つの長方形では

横の辺の長さの比は $6 : 9$、つまり $2 : 3$

縦の辺の長さの比は $4 : 6$、つまり $2 : 3$

となっています。ですから横の辺の長さの比と縦の辺の長さの比は一致しています。ということは、小さい長方形を横にも縦にも同じように拡大すれば大きい長方形になります。ですから、小さい長方形と大きい長方形は大きさは違いますが形は同じと言えます。これで 2 つの長方形が相似であることがはっきりしました。そして、この 2 つの長方形の相似比は $2 : 3$ ということになりますね。

それでは、この 2 つの長方形の面積の比はどうなっているのでしょうか。それぞれの長方形の面積を計算して調べてみることにします。すると、

$$\text{小さい長方形の面積} = 6 \times 4 = 24$$

$$\text{大きい長方形の面積} = 9 \times 6 = 54$$

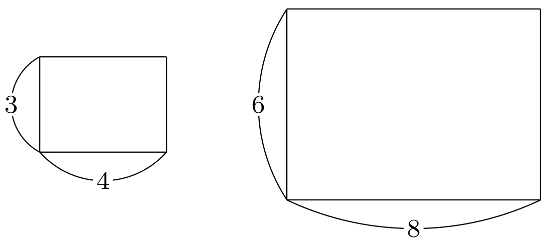
となりますから

$$\begin{aligned}\text{小さい長方形の面積} : \text{大きい長方形の面積} &= 24 : 54\\ &= 4 : 9\end{aligned}$$

ということになります。ところで、$4 : 9$ という比は $2^2 : 3^2$ というように書き換えられます。

以上で、相似比が $2 : 3$ であるこの 2 つの長方形では、面積比は $2^2 : 3^2$ になっている（つまり $4 : 9$ になっている）ということがわかりました。

問 41. 右の図の 2 つの長方形について考えることにします。以下の問に答えなさい。



(1) 2 つの長方形は相似であるといえますか？相似だといえると思った人は相似比も答えなさい。

(2) 2 つの長方形の面積をそれぞれ求めなさい。

(3) 次の文に正しい言葉、数を記入してください。

(2) で計算した 2 つの長方形の面積を使うと

$$\begin{aligned}\text{小さい長方形の面積} : \text{大きい長方形の面積} &= 12 : 48\\ &= \boxed{} : \boxed{}\end{aligned}$$

となります。ところで、$1 : 4$ という比は $1^2 : 2^2$ というように書き換えられます。

一方 (1) では 2 つの長方形の相似比は 1 : 2 であることがわかっています。ですからもしかすると、

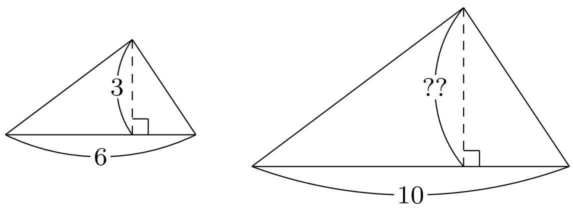
$$2\text{ つの相似な長方形の相似比が } m : n \text{ のとき、面積比は } \boxed{}^2 : \boxed{}^2 \text{ になる}$$

のかもしれません。 答えを見る

次は三角形で調べてみましょう。

例 9　相似な 2 つの三角形の面積比ってどうなってるの？

右の図を見てください。「小さい三角形」と「大きい三角形」があります。そして今、この 2 つの三角形は相似であるとします。



まず、大きい三角形の ?? の長さがいくつなのか考えてみましょう。

相似な図形では対応している部分の長さの比はどこでも同じです。小さい三角形の「長さが 6 の辺」は大きい三角形の「長さが 10 の辺」に対応しています。ですから、この 2 つの相似な三角形では、対応している部分の長さの比はどこでも 6 : 10、つまり 3 : 5 になっているはずです。ですから、小さい三角形の「点線で描かれた長さが 3 の部分」と大きい三角形の「点線で描かれた長さが ?? の部分」の比も 3 : 5 のはずです。ということは ?? = 5 ということになりますね。

話を進める前にここで確認しておきます。この 2 つの三角形の相似比は 3 : 5 ですね。

それでは、この 2 つの三角形の面積の比はどうなっているのでしょうか。それぞれの三角形の面積を計算して調べてみることにします。すると、

$$\text{小さい三角形の面積} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$

$$\text{大きい三角形の面積} = \frac{1}{2} \times 10 \times 5 = 25$$

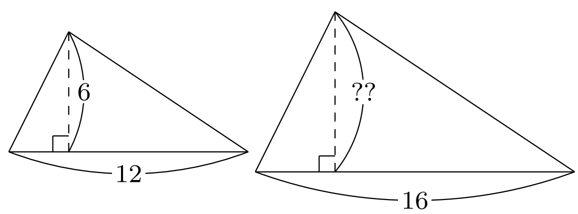
となりますから

$$\text{小さい三角形の面積} : \text{大きい三角形の面積} = 9 : 25$$

ということになります。ところで、$9:25$ という比は $3^2 : 5^2$ というように書き換えられます。

以上で、相似比が $3:5$ であるこの 2 つの三角形では、面積比は $3^2 : 5^2$ になっている（つまり $9:25$ になっている）ということがわかりました。

問 42. 右の図の 2 つの三角形について考えることにします。ただし、この 2 つの三角形は相似になっているとします。以下の問に答えなさい。



(1) 2 つの三角形の相似比を答えなさい。

(2) 大きい三角形の ?? の長さを求めなさい。

(3) 2 つの三角形の面積をそれぞれ求めなさい。

(4) 次の文に正しい言葉、数を記入してください。

(3) で計算した 2 つの三角形の面積を使うと

$$\begin{aligned}\text{小さい三角形の面積} : \text{大きい三角形の面積} &= 36 : 64 \\ &= \boxed{} : \boxed{}\end{aligned}$$

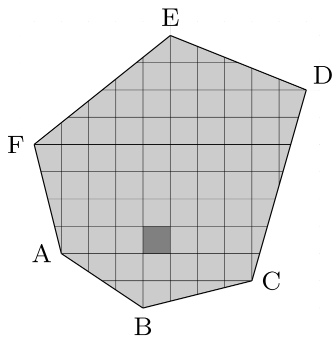
となります。ところで、$9:16$ という比は $3^2 : 4^2$ というように書き換えられます。一方 (1) では 2 つの三角形の相似比は $3:4$ であることがわかっています。ですからもしかすると、

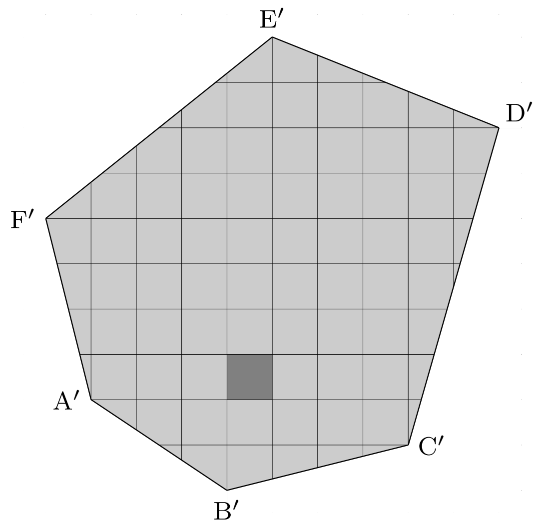
2 つの相似な三角形の相似比が $m:n$ のとき、面積比は $\boxed{}^2 : \boxed{}^2$ になる

のかもしれません。

答えを見る

これまで、正方形、長方形、三角形を使って、相似な図形の面積比のことを調べてきました。そして、ここまでじっくりと学んできた人は、「どうも、2 つの相似な図形の相似比が $m:n$ のとき、面積比は $m^2:n^2$ となるらしい」ということに気づいたと思います。それではここで、どうしてそんなことになるのか、一番本質的なことだけを説明しておきましょう。次の図を見てください。





六角形 ABCDEF と六角形 A′B′C′D′E′F′ が描かれています。そしてこの 2 つの六角形は相似です。

この図では、これらの六角形に線を縦や横に同じ間隔でたくさんひき、マス目を付けました。そうすると、六角形の大部分はたくさんの「正方形」で敷きつめられ、六角形のふちに近いところは「端が欠けた正方形」で敷きつめられます。つまり、どちらの六角形も「正方形」や「端が欠けた正方形」で分割されているわけです。ただし、小さい六角形と大きい六角形では分割の仕方は全く同じにしてあります。ですから小さい六角形を敷きつめている 1 つ 1 つの「正方形」や「端が欠けた正方形」には必ず大きい六角形を敷きつめている「正方形」や「端が欠けた正方形」が 1 つだけ対応し、逆に、大きい六角形を敷きつめている 1 つ 1 つの「正方形」や「端が欠けた正方形」には必ず小さい六角形を敷きつめている「正方形」や「端が欠けた正方形」が 1 つだけ対応しています。この図では、例えば、「小さい六角形で濃い灰色になっている正方形」と、「大きい六角形で濃い灰色になっている正方形」は対応しています。

いま、小さい六角形と大きい六角形の相似比が $m:n$ になっているとしましょう。

相似な図形では対応する部分の長さの比はどこでも同じです。ですから、「小さい六角形で濃い灰色になっている正方形」と「大きい六角形で濃い灰色になっている正方形」の横の長さの比も $m:n$ です。ところで、正方形どうしだったら、横の長さの比も $m:n$ のとき面積比は $m^2:n^2$ になるということを前に悟っています。ですから、「小さい六角形で濃い灰色になっている正方形」と「大きい六角形で濃い灰色になっている正方形」の面積比は $m^2:n^2$ ということになります。

この 2 つの六角形には、濃い灰色になっている正方形の他にもたくさんの正方形が含まれていますが、濃い灰色の正方形のときと全くと同じ理由で、対応している正方形どうしに注目すれば、面積比は $m^2:n^2$ となっていることがわかるわけです。

さらに、この 2 つの六角形にはたくさんの「端の欠けた正方形」も含まれています。完全な正方形ではないので嫌な気がするかも知れませんが、実は、濃い灰色の正方形のときと全くと同じ理由で、対応している端の欠けた正方形どうしに注目すれば、面積比は $m^2:n^2$ となっているのです。（本当はこの点をもっときちんと議論しなくてはいけないのですが、ここではちょっと乱暴な説明で納得してもらうことにしましょう。分割を徹底的に細かくしていくことを想像してみてください。そうすれば、端の欠けた正方形はどんどん小さいものばかりになっていきます。そうすると、端が欠けているとか欠けていないとかいうことはどんどん無視できるようになります。つまり、端が欠けている正方形が小さければ小さいほど、それを完全な正方形だと思っても、面積の違いは無視できるようになっていくわけです。）

ここまで考えてみたことをまとめてみましょう。

どんな形をしていても構わないのですが、2 つの図形があり、相似になっているとします。そして相似比が $m:n$ になっているとします。すると・・・

- 2 つの図形をたくさんの小さな「正方形」や「端の欠けた正方形」で分割します。ただし、2 つの図形では分割の仕方は全く同じにしておきます。すると、2 つの図形に含まれているそれぞれの「正方形」や「端の欠けた正方形」の間には対応がつきます。
- 正方形では相似比が $m:n$ ならば面積比は $m^2:n^2$ となるのでした。

- 分割が徹底的に細かくしていくことを想像してみると、端の欠けた正方形はどんどん小さいものばかりになっていきます。ですから完全な正方形と見分けられなくなくなっていきます。すると「正方形」であろうが「端の欠けた正方形」であろうが、対応している部分の面積の比は $m^2 : n^2$ であるといえます。

ということでしたね。このように図形を小さな部品に分割して考えてみると、対応している 1 つ 1 つの部品の面積比は $m^2 : n^2$ となるのですから、全ての部品を合わせた面積のことを考えてみれば、分割する前の 2 つの図形の面積の比だって $m^2 : n^2$ となるはずですね。

重要な事実：相似な図形の面積比

2 つの相似な図形があるとします。そして相似比は $m : n$ になっているとします。2 つの相似な図形がどんな形をしていようと、このとき実は、面積比は $m^2 : n^2$ になっているのです。

補足 もう少しだけ、どうしてこんなことになるのか「とても雑」な説明をしておきます。

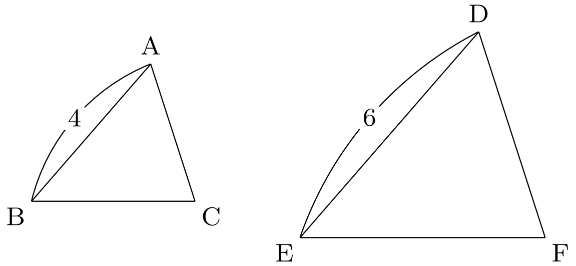
小さい図形と大きい図形があり、この 2 つの図形が相似になっているとしましょう。そうすると、「小さい図形の縦の長さを何倍にすると大きい図形の縦の長さになるのか」という倍率と「小さい図形の横の長さを何倍にすると大きい図形の横の長さになるのか」という倍率は同じはずです。つまり小さい図形を縦方向にも横方向にも同じ倍率で拡大すると大きい図形になるわけです。

ところで、相似比というのは「長さの比」のことでした。また面積というのは、乱暴に言うと「縦かける横」というようにして計算するものです。ですから、面積の計算では、「縦方向の倍率」と「横方向の倍率」が掛け合わさった効果が出るわけですが、「縦方向の倍率」と「横方向の倍率」は同じなので 2 乗された効果が出るのです。

補足おわり

それでは今学んだ「重要な事実」を使う練習をしてみましょう。

例題 17　右の図を見てください。△ABC と △DEF があります。そして



$$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$$

となっているとします。また、辺 AB の長さは 4 で辺 DE の長さは 6 であるとします。このとき、以下の問に答えなさい。

(1) △ABC と △DEF の相似比を答えなさい。

(2) BC の長さがもし 5 だったら EF の長さはいくつですか。

(3) BC の長さがもし 3 だったら EF の長さはいくつですか。

(4) △ABC の周の長さと △DEF の周の長さの比を答えなさい。

(5) △ABC の面積と △DEF の面積の比を答えなさい。

(6) △ABC の面積がもし 24 だったら △DEF の面積はどれだけですか。

(7) △ABC の面積がもし 32 だったら △DEF の面積はどれだけですか。

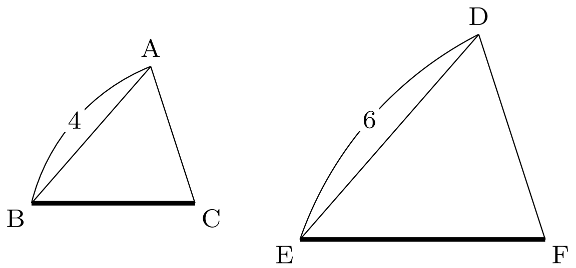
解答

(1) △ABC の辺 AB は △DEF の辺 DE に対応しています。そして、辺 AB の長さは 4 で辺 DE の長さは 6 です。相似比とは、対応している部分の長さの比ですから、

$$\triangle ABC \text{ と } \triangle DEF \text{ の相似比} = 4 : 6 = 2 : 3$$

ということになります。

(2) 相似な図形では対応している部分の長さの比はどこでも同じです。そして、△ABC と △DEF の相似比は 2 : 3 です。ということは



$$BC : EF = 2 : 3$$

となっているはずです。ここでは「BC の長さがもし 5 だったら」ということです

から

$$5 : \mathrm{EF} = 2 : 3$$

となってます。この式から

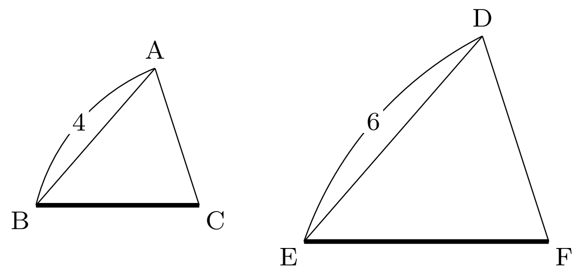
$$2 \times \mathrm{EF} = 5 \times 3$$

さらに

$$\mathrm{EF} = \frac{15}{2}$$

ということがわかります。

(3) 相似な図形では対応している部分の長さの比はどこでも同じです。そして、△ABC と △DEF の相似比は 2 : 3 です。ということは



$$\mathrm{BC} : \mathrm{EF} = 2 : 3$$

となっているはずです。ここでは「BC の長さがもし 3 だったら」ということですから

$$3 : \mathrm{EF} = 2 : 3$$

となってます。この式から

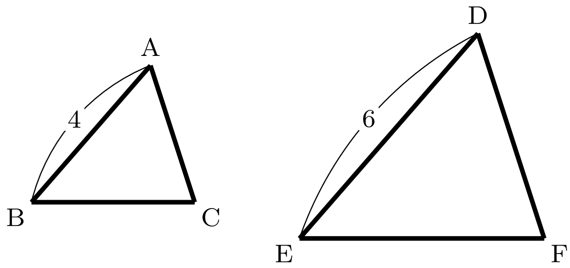
$$2 \times \mathrm{EF} = 3 \times 3$$

さらに

$$\mathrm{EF} = \frac{9}{2}$$

ということがわかります。

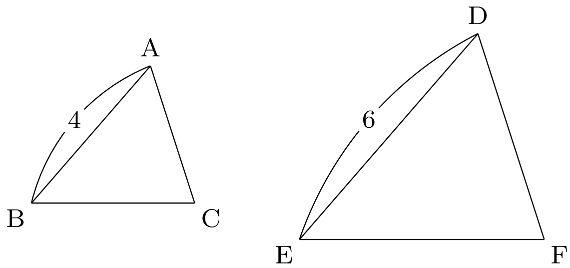
(4) 相似な図形では対応している部分の長さの比はどこでも同じです。そして「△ABC の周」には「△DEF の周」が対応します。また △ABC と △DEF の相似比は 2 : 3 です。ということは



$$\triangle \text{ABC の周の長さと } \triangle \text{DEF の周の長さの比} = 2 : 3$$

となっているはずです。

(5) この例題の前に学んだ「重要な事実」によると、「2 つの相似な図形があり、相似比は $m : n$ になっているとしたら、2 つの相似な図形がどんな形をしていようと面積比は $m^2 : n^2$ になっている」のでした。



この問題では △ABC と △DEF の相似比は 2 : 3 です。ですから

$$\triangle \text{ABC と } \triangle \text{DEF の面積比} = 2^2 : 3^2 = 4 : 9$$

となっているはずです。

(6) (5) で △ABC と △DEF の面積比は 4 : 9 であることがわかりました。ですから、△ABC の面積がもし 24 だったら、

$$24 : \triangle \text{DEF の面積} = 4 : 9$$

が成り立っているはずです。この式から、

$$4 \times \triangle \text{DEF の面積} = 24 \times 9$$

さらに

$$\triangle\mathrm{DEF}\ \text{の面積} = 54$$

ということがわかります。

(7) (5) で △ABC と △DEF の面積比は 4 : 9 であることがわかりました。ですから、△ABC の面積がもし 32 だったら、

$$32 : \triangle\mathrm{DEF}\ \text{の面積} = 4 : 9$$

が成り立っているはずです。この式から、

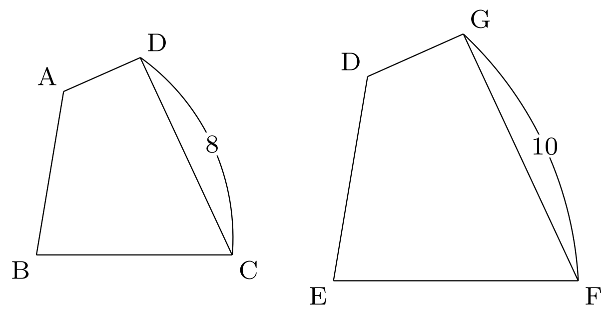
$$4 \times \triangle\mathrm{DEF}\ \text{の面積} = 32 \times 9$$

さらに

$$\triangle\mathrm{DEF}\ \text{の面積} = 72$$

ということがわかります。

問 43. 右の図を見てください。四角形 ABCD と四角形 DEFG があります。そして



四角形 ABCD ∽ 四角形 DEFG

となっているとします。また、辺 CD の長さは 8 で辺 FG の長さは 10 であるとします。このとき、以下の問に答えなさい。

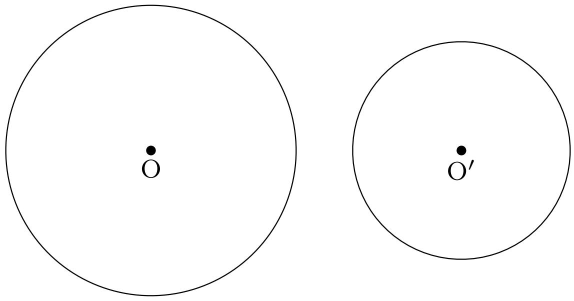
(1) 四角形 ABCD の周の長さと四角形 DEFG の周の長さの比を答えなさい。

(2) 四角形 ABCD の面積と四角形 DEFG の面積の比を答えなさい。

(3) 四角形 ABCD の面積がもし 36 だったら四角形 DEFG の面積はどれだけですか。

答えを見る

問 44. 右の図を見てください。円 O と円 O′ があります。以下の問に答えなさい。



(1) 円 O と円 O′ は相似ですか。

(2) 円 O と円 O′ の相似比が $4:3$ のとき、円 O の周の長さと円 O′ の周の長さの比を答えなさい。

(3) 円 O と円 O′ の相似比が $4:3$ のとき円 O の面積と円 O′ の面積の比を答えなさい。

(4) 円 O と円 O′ の相似比が $4:3$ のとき、円 O の面積がもし 48π だったら円 O′ の面積はどれだけですか。

(5) 円 O と円 O′ の相似比が $4:3$ のとき、円 O の面積がもし 32 だったら円 O′ の面積はどれだけですか。

答えを見る

問 45. 紙にある図形が描かれています。この図形の面積は $40\,\mathrm{cm}^2$ です。コピー機を使ってこの図形を（縦方向にも横方向にも）倍率 1.6 倍で拡大しました。拡大後の図形の面積を求めなさい。

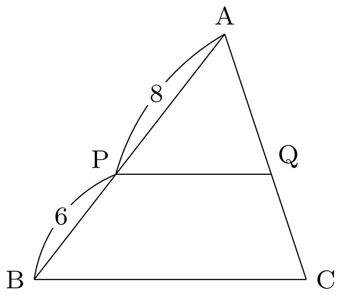
答えを見る

問 46. 紙にある図形が描かれています。この図形の面積は $75\,\mathrm{cm}^2$ です。コピー機を使ってこの図形を（縦方向にも横方向にも）倍率 $\dfrac{3}{5}$ 倍で縮小しました。縮小後の図形の面積を求めなさい。

答えを見る

1.5.2　図の中に隠れている相似な図形を見つけて面積を求めよう

例題 18　右の図を見てください。△ABC の辺 AB 上に点 P 、辺 AC 上に点 Q があり、PQ//BC となっているとします。また、AP の長さは 8 で PB の長さは 6 であるとします。このとき、以下の問に答えなさい。



(1) この図の中には相似な三角形が隠れています。どの三角形とどの三角形が相似になっているのか答えてください。また、相似になっている証拠を見せてください。

(2) $\triangle$APQ と $\triangle$ABC の相似比を答えてください。

(3) $\triangle$APQ と $\triangle$ABC の面積比を答えてください。

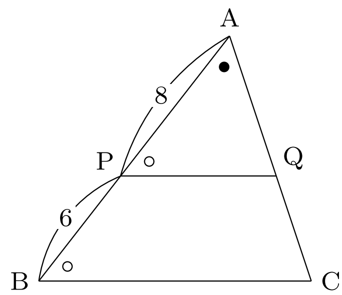
(4) $\triangle$APQ と台形 PBCQ の面積比を答えてください。

(5) もし $\triangle$APQ の面積が 32 だとしたら、台形 PBCQ の面積はいくつですか。

解答

(1) $\triangle$APQ と $\triangle$ABC が相似になっています。

（証明）



右の図を見てください。

$\triangle$APQ と $\triangle$ABC では ● マークのついている角は共通です。ですから

$$\angle \mathrm{PAQ} = \angle \mathrm{BAC} \qquad \cdots\cdots\cdot \text{①}$$

が成り立っています。

ところで、平行線の同位角は等しいのでした。そして今 PQ//BC となっています。ですから、この図で ∘ のついている 2 つの角の大きさは同じです。つまり

$$\angle \mathrm{APQ} = \angle \mathrm{ABC} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

が成り立っています。

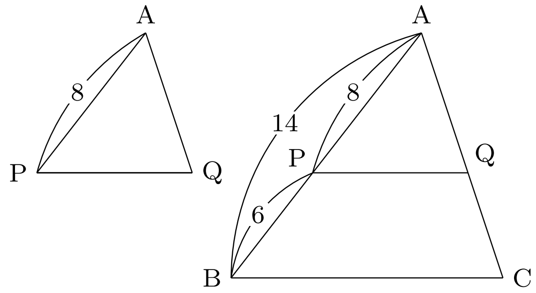
①、②より、$\triangle$APQ と $\triangle$ABC では「2 組の角の大きさが等しい」ということがわかりました。ですから

$$\triangle \mathrm{APQ} \backsim \triangle \mathrm{ABC}$$

であると断言できます。

（証明終わり）

(2) (1) で △APQ と △ABC は相似であることがわかりました。では右の図を見てください。AP の長さは 8 で、AB の長さは（8 + 6 なので）14 ですよね。相似比というのは対応している部分の長さの比ですから、



$$\triangle\text{APQ} \text{ と } \triangle\text{ABC} \text{ の相似比} = 8 : 14 = 4 : 7$$

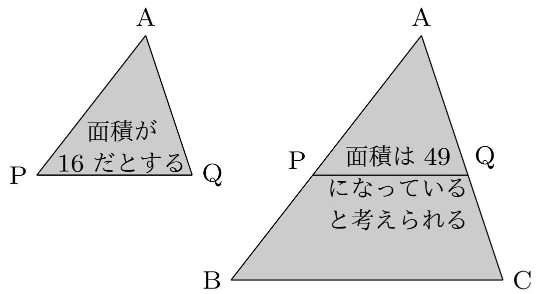
ということになります。

(3) (2) で △APQ と △ABC の相似比は 4 : 7 であることがわかりました。ということは

$$\triangle\text{APQ} \text{ と } \triangle\text{ABC} \text{ の面積比} = 4^2 : 7^2 = 16 : 49$$

ということになります。

(4) (3) で △APQ と △ABC の面積比は 16 : 49 になっていることがわかりました。つまり、△APQ の面積が 16 だとすれば △ABC の面積は 49 になっているということです。



そうすると、このとき、

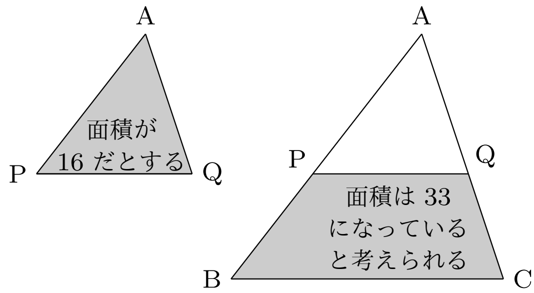
$$\text{台形 PQBC の面積} = 49 - 16 = 33$$

ということになります。つまり、△APQ の面積が 16 だとすれば台形 PQBC の面積は 33 になるわけです。ですから、

$$\triangle\text{ABC} \text{ と台形 PQBC の面積比} = 16 : 33$$

ということになります。

(5) (4) で △ABC と台形 PQBC の面積比は 16 : 33 であることがわかりました。ということは、もし △APQ の面積が 32 だとしたら、



$$32 : 台形\ \mathrm{PQBC}\ の面積 = 16 : 33$$

が成立っています。この式から

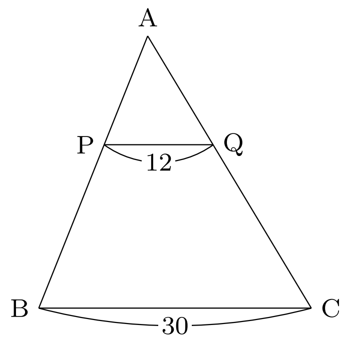
$$16 \times 台形\ \mathrm{PQBC}\ の面積 = 32 \times 33$$

さらに

$$台形\ \mathrm{PQBC}\ の面積 = 66$$

ということがわかります。

問 47. 右の図を見てください。△ABC の辺 AB 上に点 P 、辺 AC 上に点 Q があり、PQ//BC となっているとします。また、PQ の長さは 12 で BC の長さは 30 であるとします。このとき、以下の問に答えなさい。



(1) この図の中には相似な三角形が隠れています。どの三角形とどの三角形が相似になっているのか答えてください。また、相似になっている証拠を見せてください。

(2) △APQ と △ABC の相似比を答えてください。

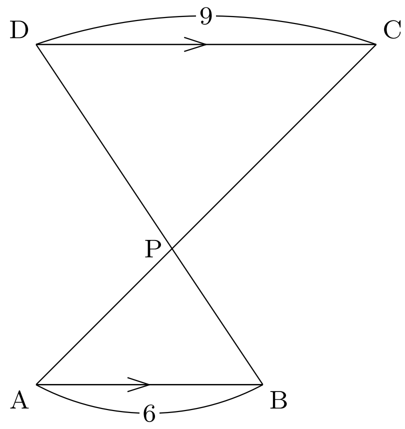
(3) △APQ と △ABC の面積比を答えてください。

(4) △APQ と台形 PBCQ の面積比を答えてください。

(5) もし △APQ の面積が 36 だとしたら、台形 PBCQ の面積はいくつですか。

答えを見る

問 48. 右の図では AB//CD であるとします。また AB の長さは 6 で AB の長さは 9 であるとします。このとき以下の問に答えなさい。



(1) △PCD の周の長さが 24 のとき、△PAB の周の長さはいくつですか。

(2) △PCD の面積が 36 のとき、△PAB の面積はいくつですか。

答えを見る

1.5.3　相似な立体図形では表面積や体積の比はどうなっているの？

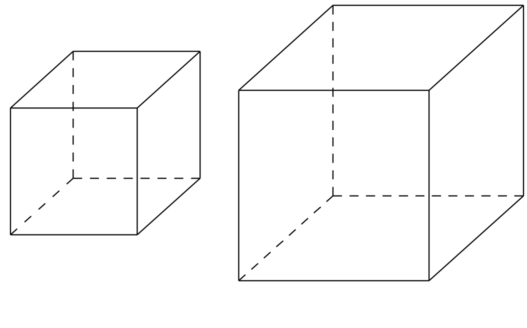
これまで私たちは平面図形のことばかり学んできましたが、ここから少し、立体図形のことを考えてみることにします。

立体図形でも、平面図形のときと同じように、「大きさは違っても形が同じ図形」のことを「相似な図形」と呼びます。

前置きの話：この 2 つの立体は相似？見分けてみよう

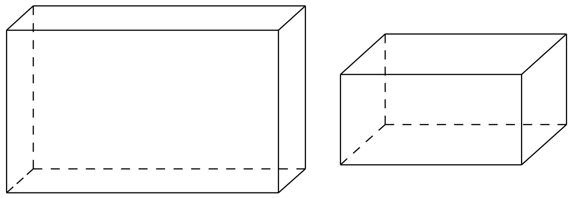
例 10　2 つの立方体があったら、その 2 つの立方体は必ず相似です。

右の図を見てください。立方体が 2 つ描かれています。この図を見るとわかると思いますが、2 つの立方体は「形は同じ」です。どんな立方体も「（大きさは違ったとしても）形は必ず同じ」になっているわけです。つまり、2 つの立方体があったら、その 2 つの立方体は必ず相似です。

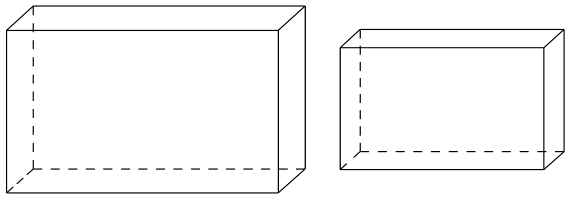


例 11　2 つの直方体があっても、その 2 つの直方体は相似とは限りません。

　まず右の図を見てください。直方体が2つ描かれています。この図を見るとわかると思いますが、この2つの直方体は「形は同じ」ではありません。つまり、この2つの直方体は相似ではありません。



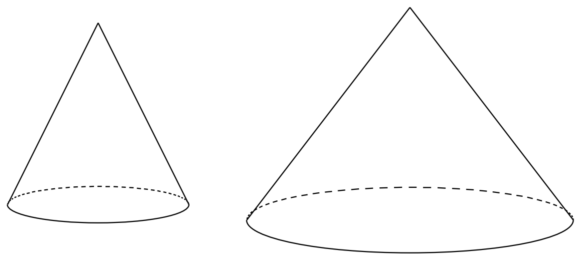
　今度は右の図を見てください。直方体が2つ描かれています。この図を見るとわかると思いますが、この2つの直方体は「形は同じ」です。つまり、この2つの直方体は相似です。



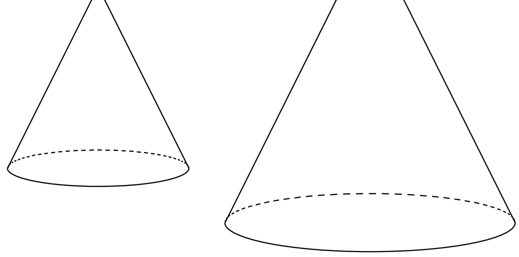
　この2つの直方体では、左の直方体を縮小すると右の直方体になるわけですが、「横方向」にも「奥行きの方向」にも「高さの方向」にも同じ倍率で縮小されているわけです。

例 12　2つの円すいがあっても、その2つの円すいは相似とは限りません。

　まず右の図を見てください。円すいが2つ描かれています。この図を見るとわかると思いますが、この2つの円すいは「形は同じ」ではありません。つまり、この2つの円すいは相似ではありません。



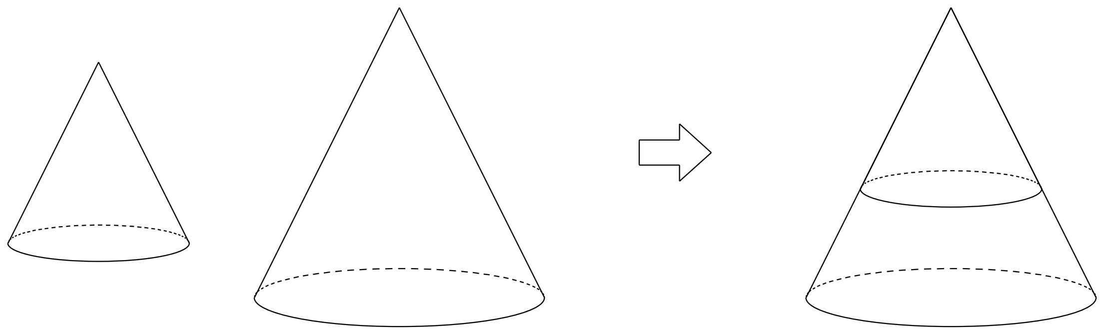
　今度は右の図を見てください。円すいが2つ描かれています。この図を見るとわかると思いますが、この2つの円すいは「形は同じ」です。つまり、この2つの円すいは相似です。



　この2つの円すいでは、左の円すいを拡大すると右の円すいになるわけですが、「横方向」にも「奥行きの方向」にも「高さの方向」にも同じ倍率で拡大されているわけです。

ここまで見たきたように、2 つの円すいがあるとき、その 2 つの円すいは相似であることもあれば相似でないこともあるわけです。それでは、2 つの円すいが相似なのか相似でないのか見分けるにはどんなことに気をつければよいでしょうか。

では次の図を見てください。これは相似な 2 つの円すいがあるときに、2 つの円すいを頂点のところで一致するように重ねているところを表しています。



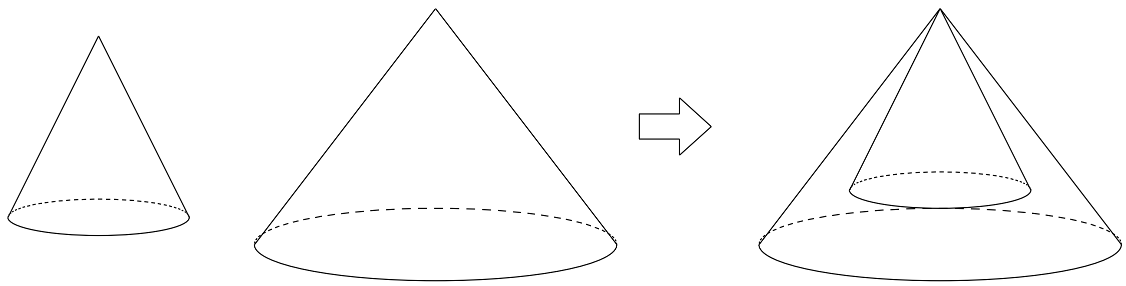
2 つの円すいが相似になっているときは、この図のように、

2 つの円すいは頂点のところでぴったり重なり、

2 つの円すいの底面は平行

となるのです。

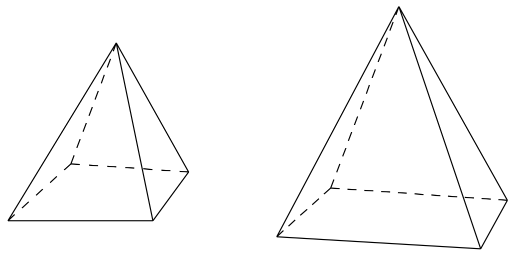
今度は次の図を見てください。これは相似ではない 2 つの円すいがあるときに、2 つの円すいを頂点のところで一致するように重ねようとしているところを表しています。



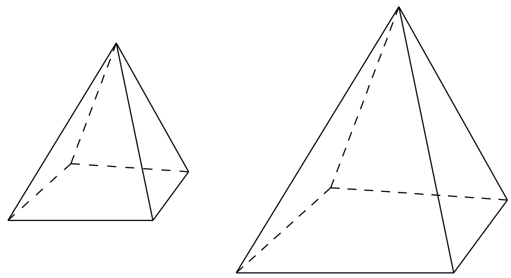
2 つの円すいが相似になっていないときは、この図のように、2 つの円すいは頂点のところでぴったり重ならないのです。

例 13　2 つの四角すいがあっても、その 2 つの四角すいは相似とは限りません。

まず右の図を見てください。四角すいが 2 つ描かれています。この図を見るとわかると思いますが、この 2 つの四角すいは「形は同じ」ではありません。つまり、この 2 つの四角すいは相似ではありません。



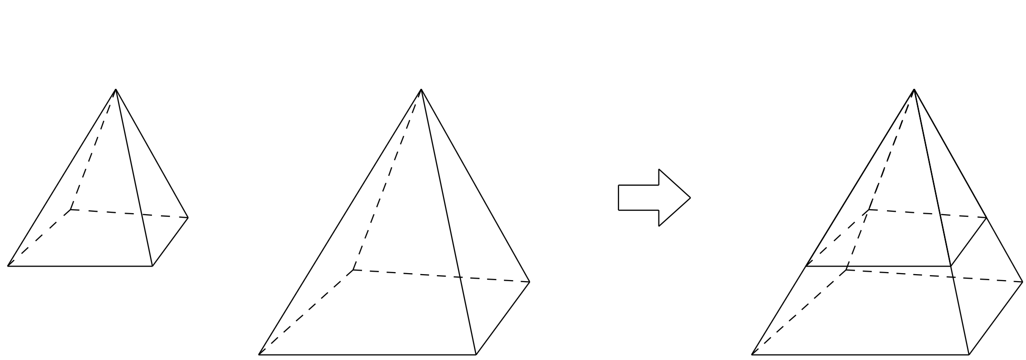
今度は右の図を見てください。四角すいが 2 つ描かれています。この図を見るとわかると思いますが、この 2 つの四角すいは「形は同じ」です。つまり、この 2 つの四角すいは相似です。



この 2 つの四角すいでは、左の四角すいを拡大すると右の四角すいになるわけですが、「横方向」にも「奥行きの方向」にも「高さの方向」にも同じ倍率で拡大されているわけです。

ここまで見たきたように、2 つの四角すいがあるとき、その 2 つの四角すいは相似であることもあれば相似でないこともあるわけです。それでは、2 つの四角すいが相似なのか相似でないのか見分けるにはどんなことに気をつければよいでしょうか。

では次の図を見てください。これは相似な 2 つの四角すいがあるときに、2 つの四角すいを頂点のところで一致するように重ねているところを表しています。



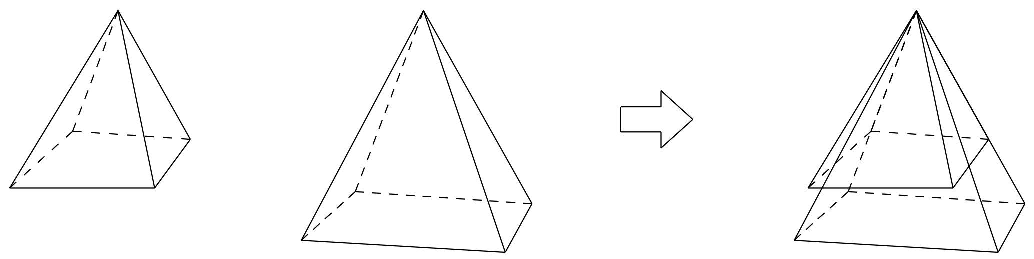
2 つの四角すいが相似になっているときは、この図のように、

2 つの四角すいは頂点のところでぴったり重なり、

2 つの四角すいの底面は平行

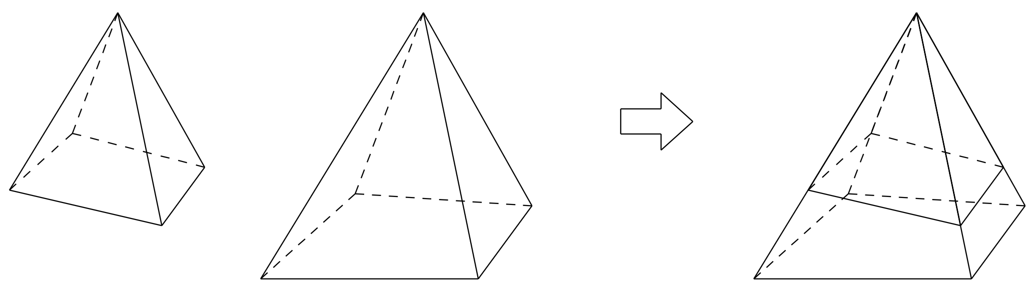
となるのです。

今度は次の図を見てください。これは相似ではない 2 つの四角すいがあるときに、2 つの四角すいを頂点のところで一致するように重ねようとしているところを表しています。



2 つの四角すいが相似になっていないときは、この図のように、2 つの四角すいは頂点のところでぴったり重ならなかったりします。

さらに次の図を見てください。これも相似ではない 2 つの四角すいがあるときに、2 つの四角すいを頂点のところで一致するように重ねようとしているところを表しています。



2 つの四角すいが相似になっていないときは、この図のように、たとえ頂点のところでぴったり重なっても、底面が平行になっていないのです。

問 49. 以下の問に答えなさい。

(1) 2 つの球があったら、その 2 つの球は必ず相似になっているといえますか？

(2) 2 つの円柱があったら、その 2 つの円柱は必ず相似になっているといえますか？

(3) 2 つの三角柱があったら、その 2 つの三角柱は必ず相似になっているといえますか？

(4) 2 つの正三角柱があったら、その 2 つの正三角柱は必ず相似になっているといえま

すか？

(5) 2 つの四角すいがあったら、その 2 つの四角すいは必ず相似になっているといえますか？

(6) 2 つの正四角すいがあったら、その 2 つの正四角すいは必ず相似になっているといえますか？

(7) 2 つの三角すいがあったら、その 2 つの三角すいは必ず相似になっているといえますか？

(8) 2 つの正三角すいがあったら、その 2 つの正三角すいは必ず相似になっているといえますか？

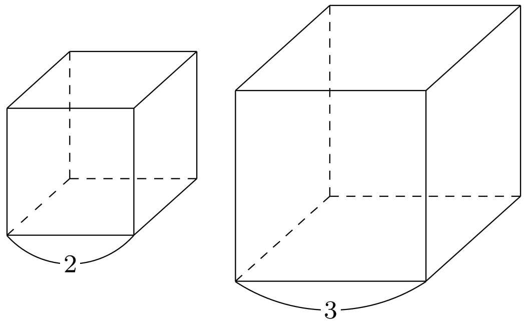
答えを見る

相似な立体図形の表面積や体積の比を考えてみよう

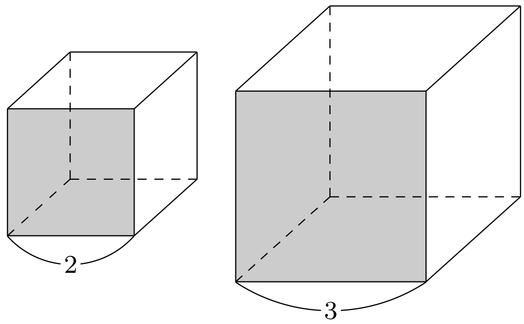
私たちは平面図形の相似比と面積比について考えたとき、まず、いくつかの簡単な図形について調べてみました。まず、正方形について調査をし、次に長方形について調査をし、次に三角形について調査をし、・・・というように調べて行ったわけです。そしてその経験をもとにして、もっと複雑な図形についての結論を導いたわけです。ここではこれから、立体図形の「相似比と面積比の関係」や「相似比と体積比の関係」ついて考えていくわけですが、平面図形のときと同じように、やはりまず、いくつかの簡単な図形について調べてみることにしましょう。

例 14　相似な立方体の表面積や体積の比はどうなっているの？

右の図を見てください。「小さい立方体」と「大きい立方体」があります。2 つの立方体は形は同じですから相似です。そして、対応する辺の長さの比は 2 : 3 です。ですから、この 2 つの立方体の相似比は 2 : 3 ということになりますね。



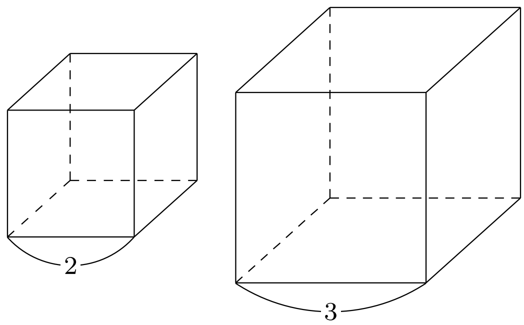
それではまず、この 2 つの立方体の表面積の比を求めてみましょう。



右の図で灰色になっている面に注目してください。相似な図形では対応する部分はどこでも同じように拡大、または縮小されています。ですから、この 2 つの灰色の面は相似なはずです。そして相似比はもちろん $2:3$ です。ですから、平面図形の面積比のところで学んだことを思い出せば、この 2 つの灰色の面の面積比は $2^2:3^2$ になっていると結論できますね。

この 2 つの立方体には他にも面があるわけですが、今と全く同じ理由で対応している面どうしの面積比はどれも $2^2:3^2$ になっていると結論できます。そうすると、全ての面を合計して考えてみれば、この 2 つの立方体の表面積の比は $2^2:3^2$ になっていると結論できるわけです。

では次に、この 2 つの立方体の体積の比を求めてみましょう。



今の所手がかりが何もないので、2 つの立方体の体積を真面目に計算してみることにします。すると

$$\text{小さい立方体の体積} = 2\times 2\times 2 = 2^3$$

$$\text{大きい立方体の体積} = 3\times 3\times 3 = 3^3$$

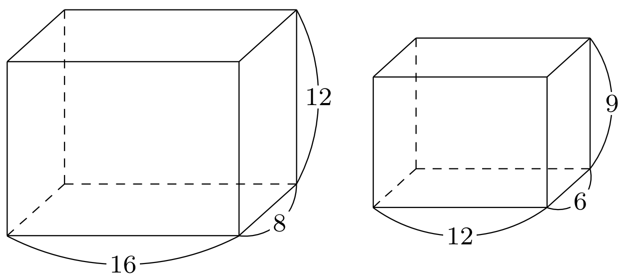
となりますから

$$\begin{aligned}\text{小さい立方体の体積} : \text{大きい立方体の体積} &= 2^3:3^3\\ &= 8:27\end{aligned}$$

ということになります。つまり、面積比は $8:27$ ということです。

以上で、相似比が $2:3$ であるこの 2 つの立方体では、体積比は $2^3:3^3$ になっている（つまり $8:27$ になっている）ということがわかりました。

例 15　相似な直方体の表面積や体積の比はどうなっているの？



右の図を見てください。「大きい直方体」と「小さい直方体」があります。この 2 つの直方体では

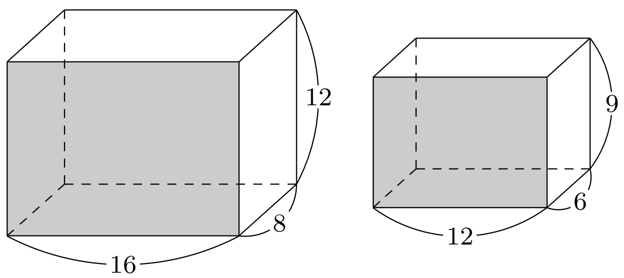
$$\text{横の長さの比} = 16 : 12 = 4 : 3$$

$$\text{奥行きの長さの比} = 8 : 6 = 4 : 3$$

$$\text{高さの比} = 12 : 9 = 4 : 3$$

となっています。つまり、「横方向の比」、「奥行きの方向の比」、「高さの方向の比」が全て同じです。ですからこの 2 つの直方体は相似です。そして、もちろんこの 2 つの立方体の相似比は $4 : 3$ ということになりますね。

それではまず、この 2 つの直方体の表面積の比を求めてみましょう。

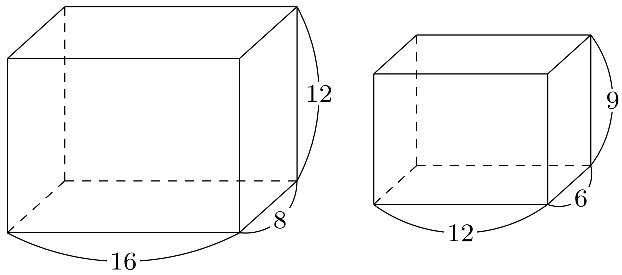


右の図で灰色になっている面に注目してください。相似な図形では対応する部分はどこでも同じように拡大、または縮小されています。ですから、この 2 つの灰色の面は相似なはずです。そして相似比はもちろん $4 : 3$ です。ですから、平面図形の面積比のところで学んだことを思い出せば、この 2 つの灰色の面の面積比は $4^2 : 3^2$ になっていると結論できますね。

この 2 つの直方体には他にも面があるわけですが、今と全く同じ理由で対応している面どうしの面積比はどれも $4^2 : 3^2$ になっていると結論できます。そうすると、全ての面を合計して考えてみれば、この 2 つの直方体の表面積の比は $4^2 : 3^2$ になっていると結論できるわけです。

では次に、この 2 つの直方体の体積の比を求めてみましょう。

今の所手がかりが何もないので、2 つの直方体の体積を真面目に計算してみることにします。すると



大きい直方体の体積 $= 16\times8\times12 = 1536$

小さい直方体の体積 $= 12\times6\times9 = 648$

となりますから

$$
\begin{aligned}
\text{大きい直方体の体積} : \text{小さい直方体の体積} &= 1536 : 648\\
&= 64 \times 24 : 27 \times 24\\
&= 64 : 27
\end{aligned}
$$

ということになります。つまり、体積比は $64 : 27$ ということです。ところで、ちょっと考えてみると $64 : 27$ って $4^3 : 3^3$ ですよね。

以上で、相似比が $4 : 3$ であるこの 2 つの直方体では、体積比は $4^3 : 3^3$ になっている（つまり $64 : 27$ になっている）ということがわかりました。

例 14 や例 15 をきちんと学んだ人は、立方体や直方体でなくても、「相似な 2 つの立体の相似比が $m : n$ になっていたら、きっと、表面積の比は $m^2 : n^2$ になっていて、体積の比は $m^3 : n^3$ となっているんじゃないのかな」って思ったことでしょう。実はそのとおりなのです。どうしてこんなことになるのか「とても雑」な説明をしておきます。

小さい立体と大きい立体があり、この 2 つの立体が相似になっているとしましょう。

それぞれの立体の表面では対応している面どうしは必ず同じ形、つまり相似になっています。ですから対応している面どうしの面積比には、平面図形で学んだように、2 つの立体の相似比の 2 乗の効果が出ます。

体積比には相似比の 3 乗の効果が出るのはどうしてでしょう。

「小さい立体の横の長さを何倍にすると大きい立体の横の長さになるのか」という倍率と「小さい立体の奥行きの長さを何倍にすると大きい立体の奥行きの長さになるのか」と

いう倍率と「小さい立体の高さを何倍にすると大きい立体の高さになるのか」という倍率は同じはずです。つまり小さい立体を横方向にも奥行き方向にも高さ方向にも同じ倍率で拡大すると大きい立体になるわけです。

ところで、相似比というのは「長さの比」のことでした。また体積というのは、乱暴に言うと「横かける奥行きかける高さ」というようにして計算するものです。ですから、体積の計算では、「横方向の倍率」と「奥行き方向の倍率」と「高さ方向の倍率」が掛け合わさった効果が出るわけですが、「横方向の倍率」と「奥行き方向の倍率」と「高さ方向の倍率」は同じなので 3 乗された効果が出るのです。

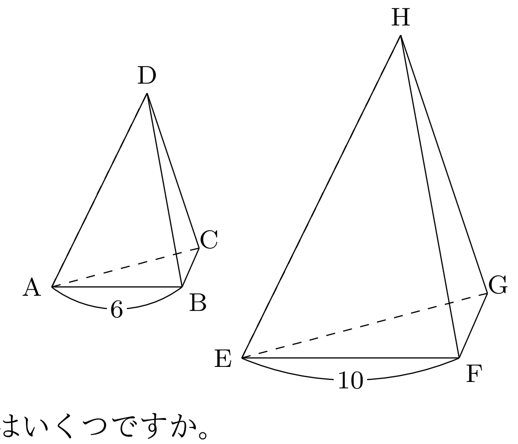
ではここで、これまで考えてきたことをまとめておきましょう。

重要な事実：相似な立体の表面積比と体積比

2 つの相似な立体があるとします。そして相似比は $m : n$ になっているとします。2 つの相似な立体がどんな形をしていようと、このとき実は、表面積比は $m^2 : n^2$ になっていて、体積比は $m^3 : n^3$ になっているのです。

それでは、今学んだ「重要な事実」を使う練習をしてみましょう。

例題 19　右の図の三角すい ABCD と三角すい EFGH は相似になっているとします。また AB の長さは 6 で EF の長さは 10 です。このとき以下の問に答えなさい。



(1)　三角すい ABCD と三角すい EFGH の相似比を答えなさい。

(2)　BC の長さがもし 5 だったら、FG の長さはいくつですか。

(3)　$\triangle$ABD と $\triangle$EFH の面積比を答えなさい。

(4)　三角すい ABCD と三角すい EFGH の表面積比を答えなさい。

(5)　三角すい ABCD の表面積がもし 63 だったら三角すい EFGH の表面積はどれだけ

ですか。

(6) 三角すい ABCD と三角すい EFGH の体積比を答えなさい。

(7) 三角すい ABCD の体積がもし 32 だったら三角すい FGH の体積はどれだけですか。

解答

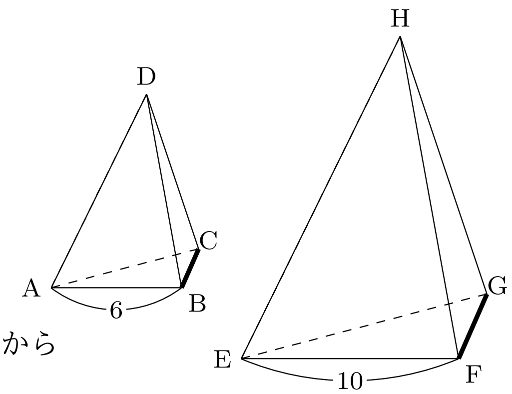
(1) 相似な図形の相似比とは、対応する部分の長さの比でした。この 2 つの立体では辺 AB は辺 EF に対応しています。そして AB の長さは 6 で EF の長さは 10 です。ですから、

$$三角すい\ \mathrm{ABCD}\ と三角すい\ \mathrm{EFGH}\ の相似比 = 6 : 10 = 3 : 5$$

ということになります。

(2) BC は FG に対応しています。そしてこの 2 つの立体の相似比は 3 : 5 です。そうすると、BC の長さがもし 5 だったら、

$$5 : \mathrm{FG} = 3 : 5$$



が成り立っていることになります。この式から

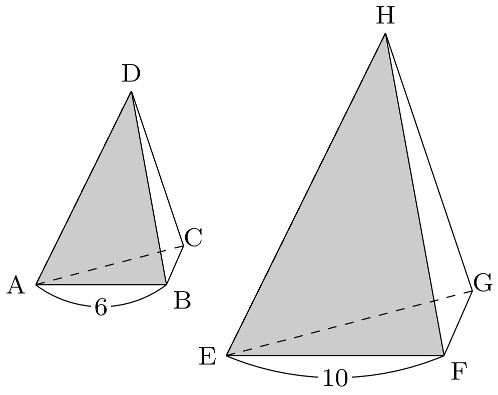
$$3 \times \mathrm{FG} = 5 \times 5$$

さらに

$$\mathrm{FG} = \frac{25}{3}$$

ということがわかります。

(3) この 2 つの立体は相似ですから、対応している面どうしも相似です。ですから、△ABD と △EFH は相似です。そしてちろん △ABD と △EFH の相似比は 3 : 5 です。そうすると、平面図形の面積比のところで学んだことを思い出せば、



$$\triangle\text{ABD と }\triangle\text{EFH の面積比} = 3^2 : 5^2 = 9 : 25$$

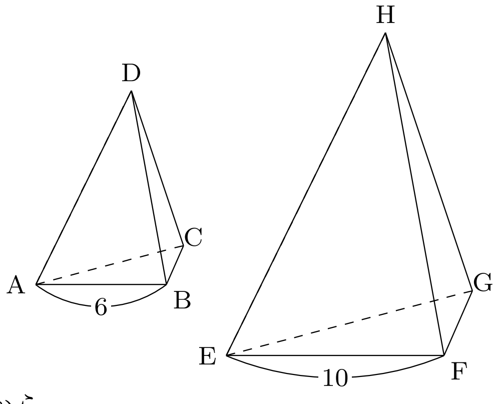
ということがわかります。

(4) この例題の前に学んだ「重要な事実」によると、「2 つの相似な立体があり相似比が $m : n$ になっているとすると、2 つの相似な立体がどんな形をしていようと表面積比は $m^2 : n^2$ になっている」のでした。いまこの例題の 2 つの立体は相似で相似比は 3 : 5 です。ですから、

$$\text{三角すい ABCD と三角すい EFGH の表面積比} = 3^2 : 5^2 = 9 : 25$$

ということになります。

(5) (4) で、三角すい ABCD と三角すい EFGH の表面積比は 9 : 25 であることがわかりました。そうすると、三角すい ABCD の表面積がもし 63 だったら



$$63 : \text{三角すい EFGH の表面積} = 9 : 25$$

が成り立っていることになります。この式から

$$9 \times \text{三角すい EFGH の表面積} = 63 \times 25$$

さらに

$$\text{三角すい EFGH の表面積} = 175$$

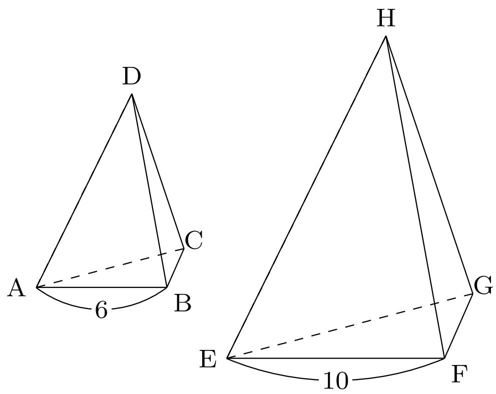
ということがわかります。

(6) この例題の前に学んだ「重要な事実」によると、「2 つの相似な立体があり相似比が $m : n$ になっているとすると、2 つの相似な立体がどんな形をしていようと体積比は $m^3 : n^3$ になっている」のでした。いまこの例題の 2 つの立体は相似で相似比は $3 : 5$ です。ですから、

$$\text{三角すい ABCD と三角すい EFGH の体積比} = 3^3 : 5^3 = 27 : 125$$

ということになります。

(7) (6) で、三角すい ABCD と三角すい EFGH の体積比は 27 : 125 であることがわかりました。そうすると、三角すい ABCD の体積がもし 32 だったら



$$32 : \text{三角すい EFGH の体積} = 27 : 125$$

が成り立っていることになります。この式から

$$27 \times \text{三角すい EFGH の体積} = 32 \times 125$$

さらに

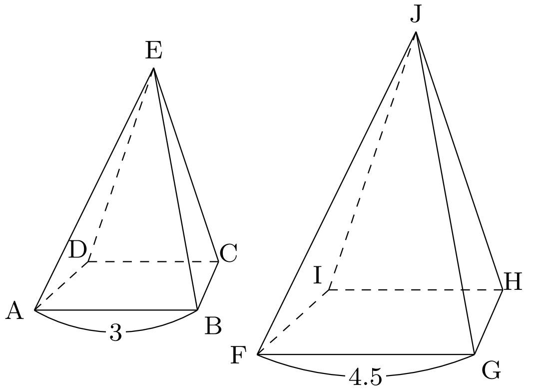
$$\text{三角すい EFGH の体積} = \frac{4000}{27}$$

ということがわかります。

問 50. 右の図を見てください。四角すい ABCDE と四角すい FGHIJ があります。そして

四角すい ABCDE ∽ 四角すい FGHIJ

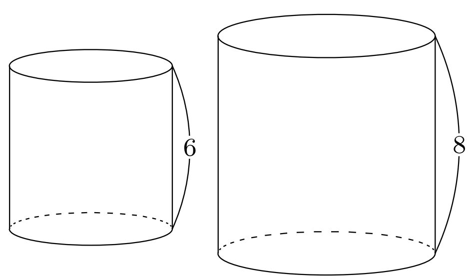
となっているとします。また、辺 AB の長さは 3 で辺 FG の長さは 4.5 であるとします。このとき、以下の問に答えなさい。



(1) 四角すい ABCDE と四角すい FGHIJ の相似比を答えなさい。
(2) CE の長さがもし 6 だったら、HJ の長さはどれだけですか。
(3) 四角形 ABCD の周の長さと四角形 FGHI の周の長さの比を答えなさい。
(4) 四角すい ABCDE の高さと四角すい FGHIJ の高さの比を答えなさい。
(5) 四角形 ABCD の面積がもし 5.2 だったら四角形 FGHI の面積はどれだけですか。
(6) 四角すい ABCDE と四角すい FGHIJ の表面積の比を答えなさい。
(7) 四角すい ABCDE の表面積がもし 36 だったら四角すい FGHIJ の表面積はどれだけですか。
(8) 四角すい ABCDE と四角すい FGHIJ の体積比を答えなさい。
(9) 四角すい FGHIJ の体積がもし 12 だったら四角すい ABCDE の体積はどれだけですか。

答えを見る

問 51. 右の図を見てください。小さい円柱と大きい円柱があります。そして小さい円柱と大きい円柱は相似になっているとします。また、小さい円柱の母線の長さは 6 で大きい円柱の母線の長さは 8 であるとします。このとき、以下の問に答えなさい。



(1) 「小さい円柱」と「大きい円柱」の相似比を答えなさい。

(2) 「小さい円柱の底面の周りの長さ」と「大きい円柱の底面の周りの長さ」の比を答えなさい。

(3) 「大きい円柱の底面の周りの長さ」がもし 12 だったら「大きい円柱の底面の周りの長さ」はどれだけですか。

(4) 「小さい円柱の底面の半径」と「大きい円柱の底面の半径」の比を答えなさい。

(5) 「小さい円柱の側面の面積」と「大きい円柱の側面の面積」の比を答えなさい。

(6) 「小さい円柱の側面の面積」がもし 27π だったら「大きい円柱の側面の面積」どれだけですか。

(7) 「小さい円柱の表面積」と「大きい円柱の表面積」の比を答えなさい。

(8) 「小さい円柱の表面積」がもし 99 だったら「大きい円柱の表面積」はどれだけですか。

(9) 「小さい円柱」と「大きい円柱」の体積比を答えなさい。

(10) 「大きい円柱の体積」がもし 72π だったら「小さい円柱の体積」はどれだけですか。

答えを見る

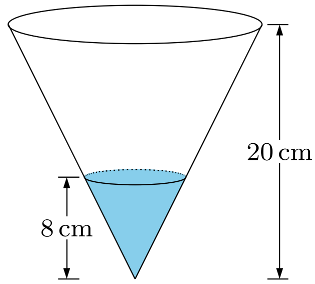
問 52. ある立体図形があるとします。この図形の表面積は $94\,\mathrm{cm}^2$ で、体積は $60\,\mathrm{cm}^3$ です。立体図形拡大機を発明したので、立体図形拡大機を使ってこの立体図形を（横方向にも奥行き方向にも高さ方向にも）倍率 1.6 倍で拡大しました。拡大後の図形の表面積と体積を求めなさい。

答えを見る

問 53. ある立体図形があるとします。この図形の表面積は $990\,\mathrm{cm}^2$ で、体積は $1125\,\mathrm{cm}^3$ です。立体図形縮小機を発明したので、立体図形縮小機を使ってこの立体図形を（横方向にも奥行き方向にも高さ方向にも）倍率 $\dfrac{2}{5}$ 倍で縮小しました。縮小後の図形の表面積と体積を求めなさい。

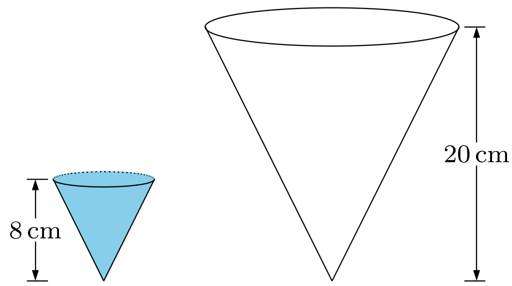
答えを見る

1.5.4　図の中に隠れている相似な立体図形を見つけて表面積や体積を求めよう



例題 20　右の図は、深さが 20 cm の円すい形の容器に深さが 8 cm になるまで水を入れたところを表しています。このとき入れた水の体積は 136 cm^3 でした。この円すい形の容器の容積を求めなさい。

解答



右の図を見てください。円すい形の容器から水の部分を取り出して並べてみました。

「水の部分の円すい」と「容器の円すい」では、頂点のところはもともとぴったり重なっていて、「円形の水面」と「容器の一番上の円形の面」はもともと平行です。ですから、この 2 つの円すいは相似であるといえます。そして、

$$2\text{ つの円すいの相似比} = 8 : 20 = 2 : 5$$

となっているわけです。

そうすると、189 ページで学んだ「重要な事実」を思い出してみると、

$$2\text{ つの円すいの体積比} = 2^3 : 5^3 = 8 : 125$$

ということがわかります。つまり

$$\text{水の体積} : \text{容器の容積} = 8 : 125$$

となっているわけです。

いまこの問題では、水の体積は $136\,\mathrm{cm}^3$ ですから

$$136 : \text{容器の容積} = 8 : 125$$

が成り立っているはずです。この式から

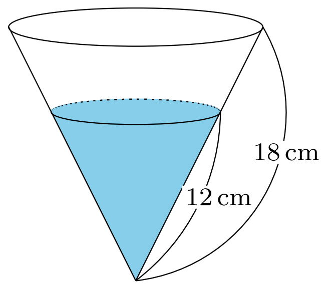
$$8 \times \text{容器の容積} = 136 \times 125$$

さらに、

$$\text{容器の容積} = 2125\,\mathrm{cm}^3$$

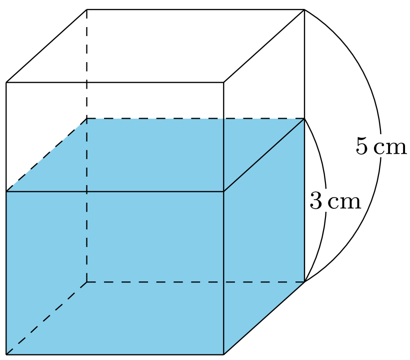
ということがわかります。

問 54. 右の図は、円すい形の容器にある深さまで水を入れたところを表しています。この容器の容積は $1080\,\mathrm{cm}^3$ です。容器の母線に沿って長さを測った所、容器の頂点から水面までは $12\,\mathrm{cm}$、容器の頂点から容器のふちまでは $18\,\mathrm{cm}$ でした。それではこのとき、水の体積はどれだけですか。

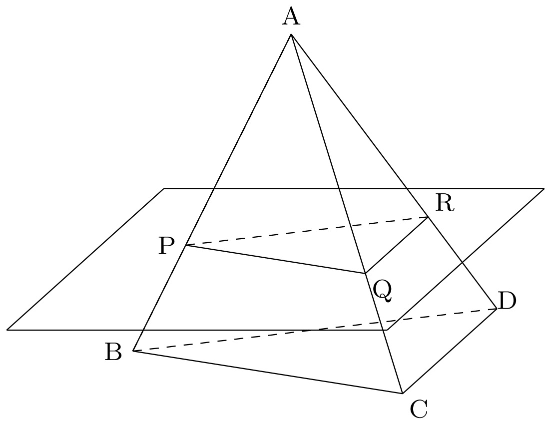


答えを見る

問 55. 右の図は、直方体の形をした深さが $5\,\mathrm{cm}$ の容器に深さが $3\,\mathrm{cm}$ になるまで水を入れたところを表しています。このとき入れた水の体積は $36\,\mathrm{cm}^3$ でした。この直方体の形をした容器の容積を求めなさい。



答えを見る



例題 21　右の図は、三角すい ABCD を底面に平行な平面で切っているところをあらわしています。切り口としてできた三角形を △PQR と呼ぶことにします。また、AP と AB の長さをくらべて比を求めてみたところ

$$\mathrm{AP} : \mathrm{AB} = 2 : 3$$

となっていました。このとき以下の問に答えなさい。

(1)　三角すい APQR と三角すい ABCD は相似ですか。もし相似なら、相似である理由を簡単に言いなさい。

(2)　(1) で、三角すい APQR と三角すい ABCD は相似であると考えた人に質問です。三角すい APQR と三角すい ABCD の相似比を答えなさい。

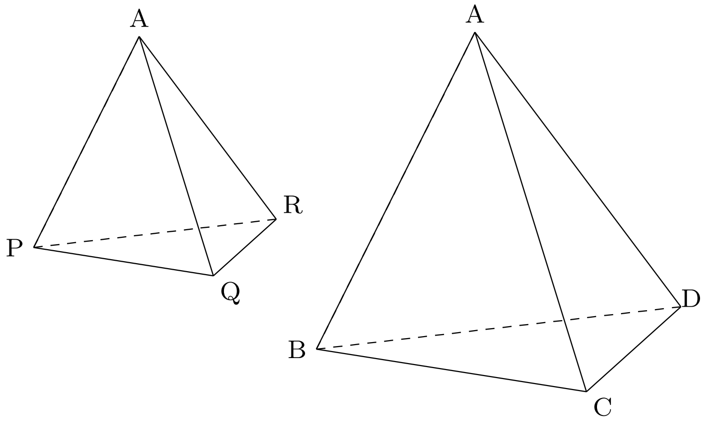
(3)　(1) で、三角すい APQR と三角すい ABCD は相似であると考えた人に質問です。三角すい APQR と三角すい ABCD の表面積の比を答えなさい。

(4)　(1) で、三角すい APQR と三角すい ABCD は相似であると考えた人に質問です。三角すい APQR と三角すい ABCD の体積比を答えなさい。

(5)　(1) で、三角すい APQR と三角すい ABCD は相似であると考えた人に質問です。三角すい APQR と立体 PQRBCD の体積の比を求めなさい。（念のための注意です。立体 PQRBCD とは、三角すい ABCD から三角すい APQR を取り除いてできる立体のことです。）

解答

(1) 右の図を見てください。三角すい APQR と三角すい ABCD を並べてみました。



2 つの三角すいはもともと頂点 A のところでぴったり重なっていて、2 つの三角すいの底面は平行になっているのですから、2 つの三角すいは相似です。（どういうことかわからない人は、181 ページの例 12 や 182 ページの例 13 をじっくり読みなおしてください。）

(2) 2 つの図形の相似比とは、対応している部分の長さの比でした。三角すい APQR と三角すい ABCD では、AP は AB に対応しています。そしてこの問題では、AP : AB = 2 : 3 となっているのでしたね。ですから

$$\text{三角すい APQR と三角すい ABCD の相似比} = 2 : 3$$

ということになります。

(3) (2) で、

$$\text{三角すい APQR と三角すい ABCD の相似比} = 2 : 3$$

ということがわかりました。そうすると、189 ページで学んだ「重要な事実」を思い出してみると、

$$\text{三角すい APQR と三角すい ABCD の表面積比} = 2^2 : 3^2 = 4 : 9$$

ということがわかります。

(4) (2) で、

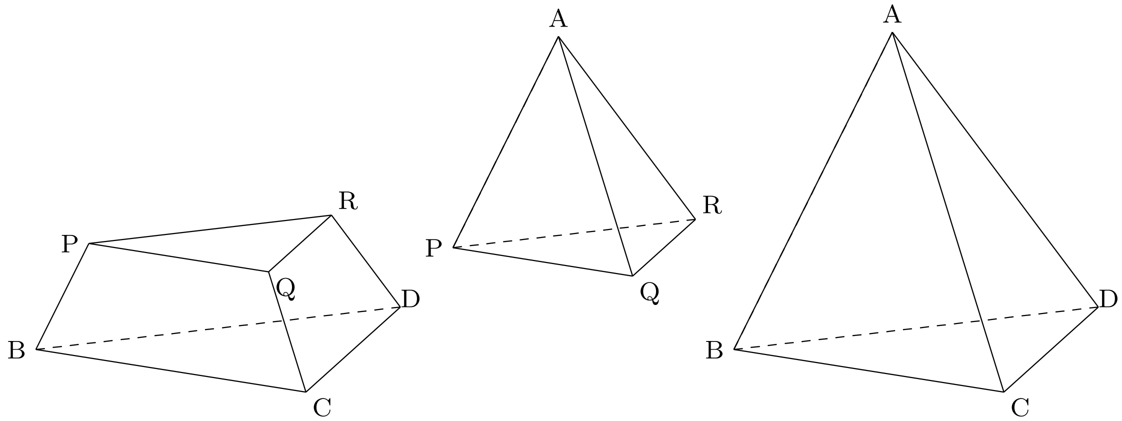
$$\text{三角すい APQR と三角すい ABCD の相似比} = 2 : 3$$

ということがわかりました。そうすると、189 ページで学んだ「重要な事実」を思い出してみると、

$$\text{三角すい APQR と三角すい ABCD の体積比} = 2^3 : 3^3 = 8 : 27$$

ということがわかります。

(5) 次の図を見てください。

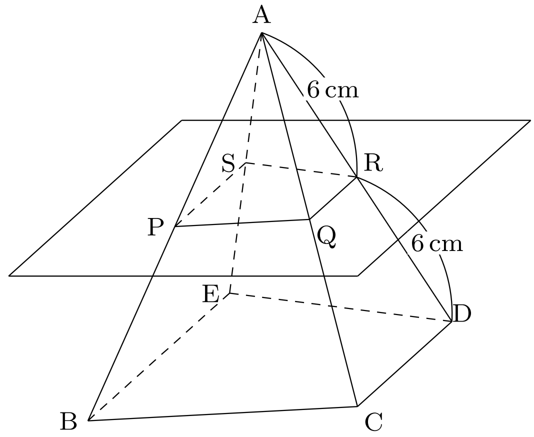


(4) で、三角すい APQR と三角すい ABCD の体積比は 8 : 27 ということがわかりました。これは、仮に三角すい APQR（この図の真ん中の立体）の体積が 8 だったら、三角すい ABCD（この図の右の立体）の体積は 27 になっているということを意味します。そうすると、立体 PQRBCD（この図の左の立体）の体積は $27 - 8 = 21$ ということになります。ですから

$$\text{三角すい APQR と立体 PQRBCD の体積の比} = 8 : 21$$

ということになります。

問 56. 右の図は、四角すい ABCDE を底面に平行な平面で切っているところをあらわしています。切り口としてできた四角形を四角形 PQRS と呼ぶことにします。また、AR の長さは 6 cm、RD の長さは 6 cm です。このとき以下の問に答えなさい。



(1) 四角すい APQRS と四角すい ABCDE は相似ですか。もし相似なら、相似である理由を簡単に言いなさい。

(2) (1) で、四角すい APQRS と四角すい ABCDE は相似であると考えた人に質問です。

四角すい APQRS と四角すい ABCDE の相似比を答えなさい。

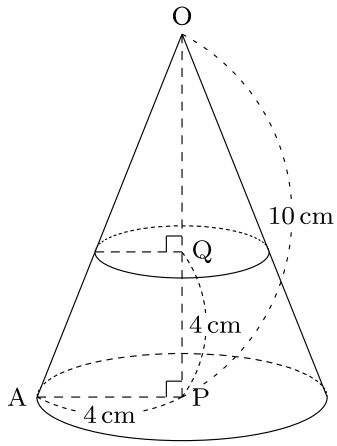
(3) 四角すい ABCDE の表面積がもし 268 cm^2 だったら、四角すい APQRS の表面積はどれだけですか。

(4) 四角すい APQRS の体積がもし 32 cm^3 だったら、四角すい ABCDE の体積はどれだけですか。

(5) 四角すい ABCDE と立体 PQRSBCDE の体積の比を求めなさい。（念のための注意です。立体 PQRSBCDE とは、四角すい ABCDE から四角すい APQRS を取り除いてできる立体のことです。）

(6) 四角すい ABCDE の体積がもし 240 cm^3 だったら、立体 PQRSBCDE の体積はどれだけですか。

答えを見る



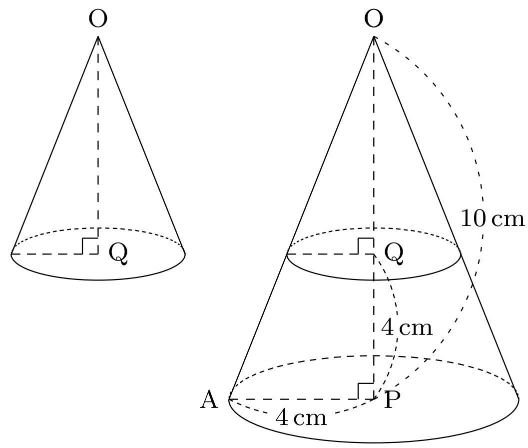
例題 22　右の図を見てください。この図は、底面の半径 PA が 4 cm、高さ OP が 10 cm の円すいを底面からの高さが 4 cm のところで底面に平行な平面で切ったところをあらわしています。切り口にできた円の中心をここでは Q と呼ぶことにします。以下の問に答えなさい。

(1)　切り口の上側にできた円すいの体積を求めなさい。

(2)　切り口の下側にできた丸い台のような形の立体の体積を求めなさい。

解答

右の図を見てください。「切り口の上側にできた円すい」と「切る前の円すい」を並べてみました。



「切り口の上側にできた円すい」と「切る前の円すい」はもともと頂点のところでぴったり重なっていて、「切り口の上側にできた円すいの底面」と「切る前の円すいの底面」はもともと平行です。ですからこの 2 つの円すいは相似です。

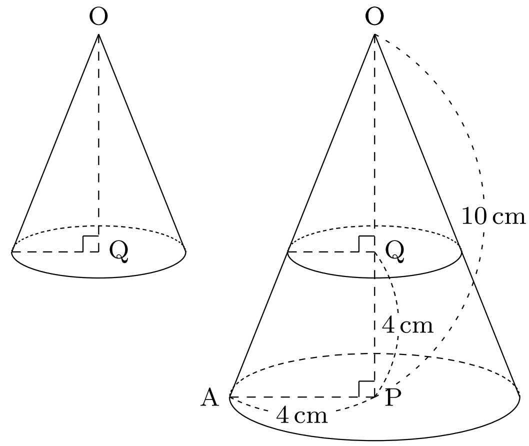
このことに注意してそれぞれの問題を解いていくことにしましょう。

(1) 図を見るとわかりますが、OQ の長さは 6 cm ですね。OQ は OP に対応しています。ですから「切り口の上側にできた円すい」と「切る前の円すい」の相似比は $6:10$、つまり $3:5$ です。

そうすると、

$$\begin{aligned}\text{「切り口の上側にできた円すい」と「切る前の円すい」の体積比} &= 3^3 : 5^3 \\ &= 27 : 125\end{aligned}$$

ということになります。



2 つの円すいの体積の比はわかりましたが、今のところどちらの円すいの体積もわかっていません。ですからこのままでは 27 : 125 という比を使うことができません。そこで、もう一度図を見て考えてみると、「切る前の円すいの体積だったら求めることができる」ということがわかります。たしか、ナントカすいの体積は「底面積かける高さかける $\dfrac{1}{3}$」を計算すれば求められるのでしたね。

「切る前の円すいの底面」は半径が $4\,cm$ の円です。そして、たしか、円の面積は「半径かける半径かける円周率」を計算すると求められるのでした。ですから、

$$\text{切る前の円すいの底面積} = 4 \times 4 \times \pi = 16\pi\,\mathrm{cm}^2$$

ということになります。そうすると、

$$\text{切る前の円すいの体積} = 16\pi \times 10 \times \frac{1}{3} = \frac{160}{3}\pi\,\mathrm{cm}^3$$

ということがわかります。

これでいよいよ 27 : 125 という体積比を使うことができます。

$$\text{切り口の上側にできた円すいの体積} : \frac{160}{3}\pi = 27 : 125$$

ということになるので、この式から

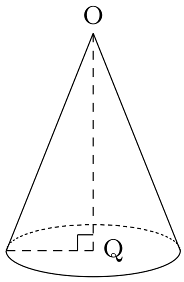
$$125 \times \text{切り口の上側にできた円すいの体積} = \frac{160}{3}\pi \times 27$$

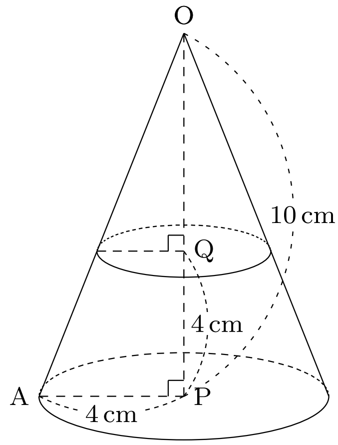
さらに

$$\text{切り口の上側にできた円すいの体積} = \frac{288}{25}\pi\,\mathrm{cm}^3$$

ということがわかります。

(2) 切る前の円すいの体積は $\dfrac{160}{3}\pi\,\mathrm{cm}^3$、切り口の上側にできた円すいの体積は $\dfrac{288}{25}\pi\,\mathrm{cm}^3$ ということがわかりました。ですから、





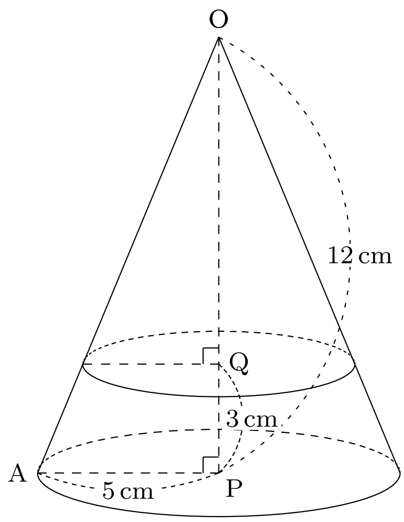
$$\text{切り口の下側にできた丸い台のような形の立体の体積} = \frac{160}{3}\pi - \frac{288}{25}\pi = \frac{4000}{75}\pi - \frac{864}{75}\pi = \frac{3136}{25}\pi\,\mathrm{cm}^3$$

ということがわかります。

問 57. 右の図を見てください。この図は、底面の半径 PA が 5 cm、高さ OP が 12 cm の円すいを底面からの高さが 3 cm のところで底面に平行な平面で切ったところをあらわしています。切り口にできた円の中心をここでは Q と呼ぶことにします。以下の問に答えなさい。

(1) 切り口の上側にできた円すいの体積を求めなさい。

(2) 切り口の下側にできた丸い台のような形の立体の体積を求めなさい。

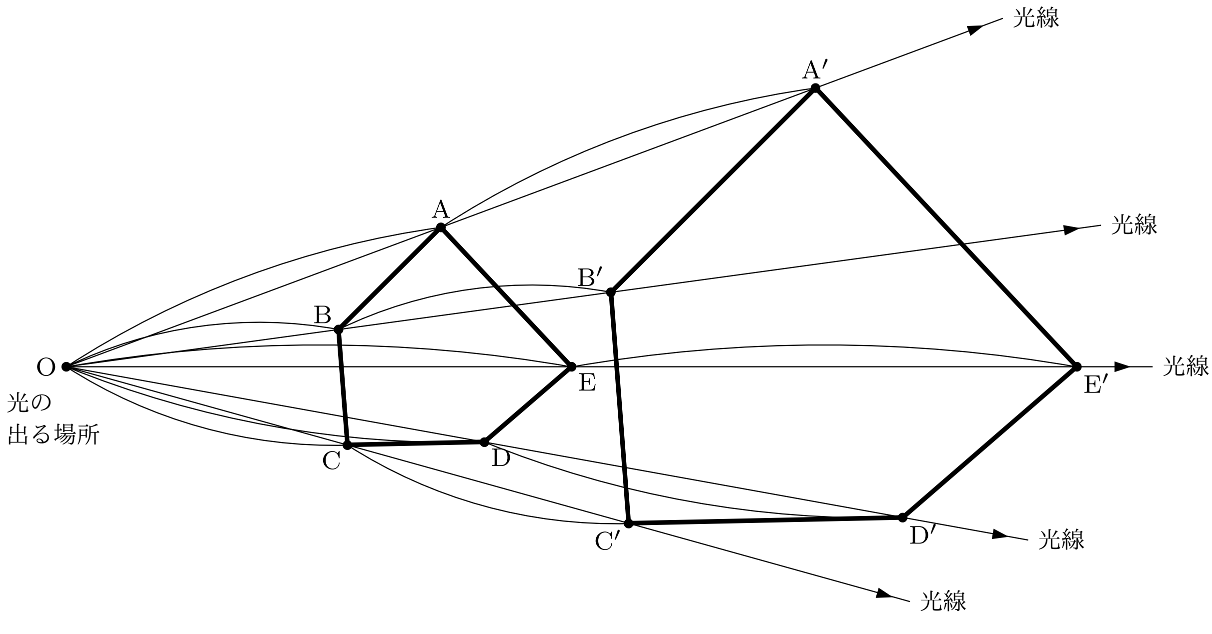


答えを見る

問の解答

問 1. 『目盛りのついた定規と紙と鉛筆を用意してください。そしてまず、自分の好きな形の五角形を紙の上に描いてください。ここまでの準備ができたら、例 2 の方法をまねして、自分の描いた五角形を 2 倍に拡大した五角形を描いてください。』という問題でした。

例えば次の図のようになります。

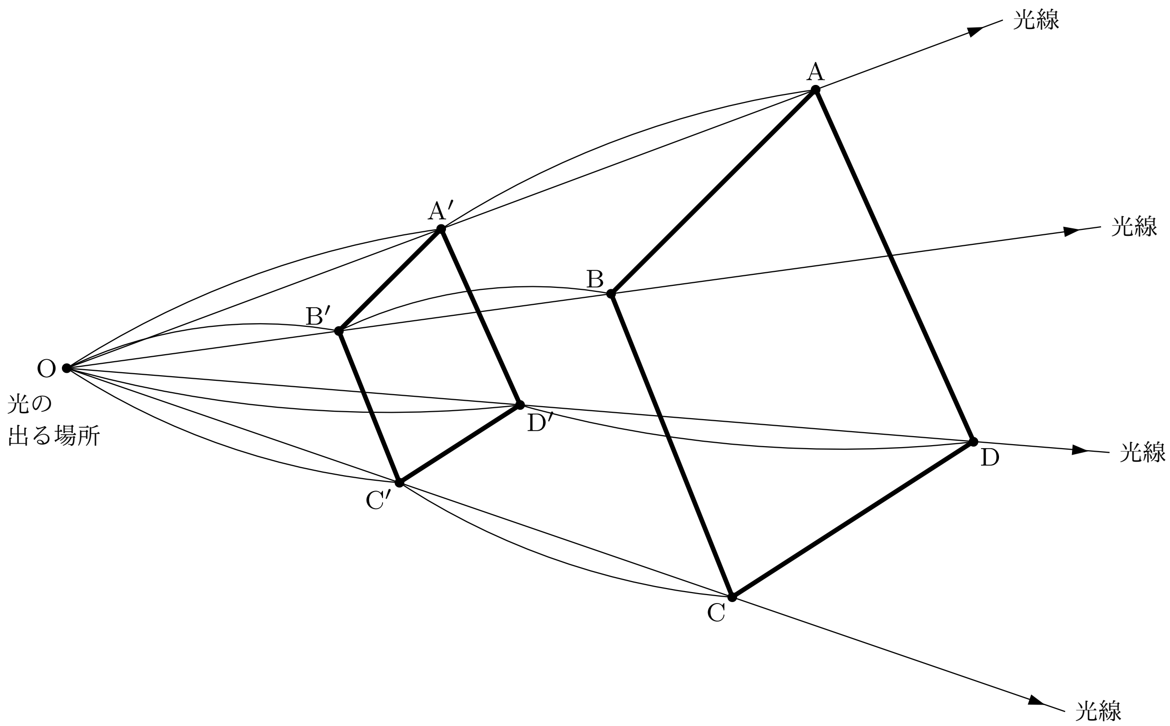


このようにして、もとの五角形 ABCDE と形は同じで、2 倍に拡大された五角形 A′B′C′D′E′ ができるわけです。

本文へ戻る

問 2. 『目盛りのついた定規と紙と鉛筆を用意してください。そしてまず、自分の好きな形の四角形を紙の上に描いてください。ここまでの準備ができたら、例 2 の方法をまねして、自分の描いた四角形を $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小した四角形を描いてください。』という問題でしたね。

例えば次の図のようになります。

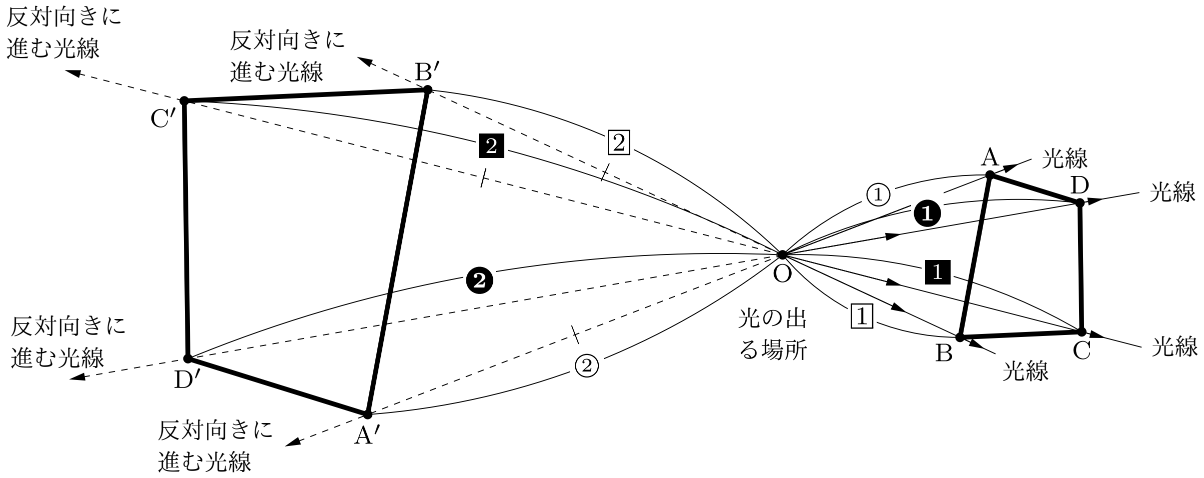


このようにして、もとの四角形 ABCD と形は同じで、$\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小された四角形 $\mathrm{A'B'C'D'}$ ができるわけです。（この図では右にあるのがもとの四角形で、縮小された四角形は左の四角形です。）

本文へ戻る

問 3. 『目盛りのついた定規と紙と鉛筆を用意してください。そしてまず、自分の好きな形の四角形を紙の上に描いてください。ここまでの準備ができたら、例 3 の方法をまねして、自分の描いた四角形を 2 倍に拡大した四角形を描いてください。』という問題でしたね。

例えば次の図のようになります。

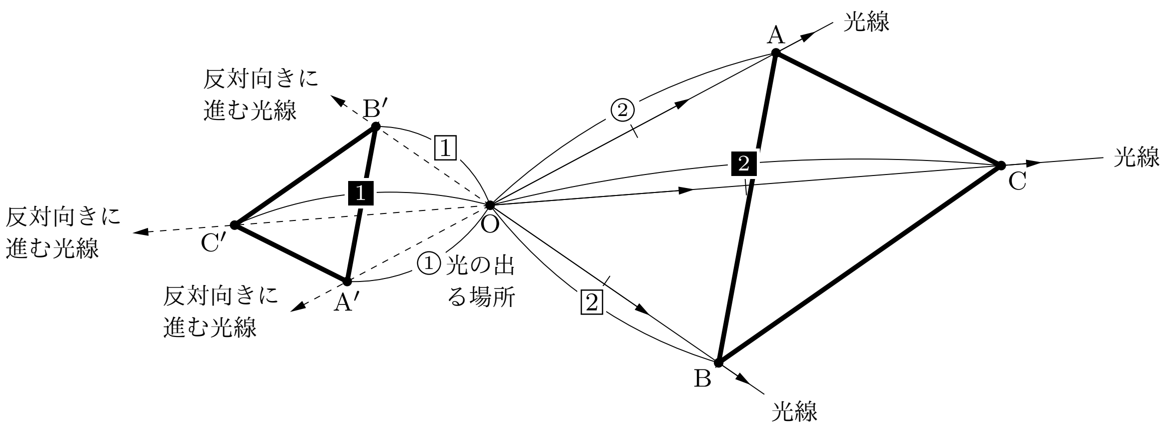


このようにして、もとの四角形 ABCD と形は同じで、2 倍に拡大された四角形 A′B′C′D′ ができるわけです。

本文へ戻る

問 4. 『目盛りのついた定規と紙と鉛筆を用意してください。そしてまず、自分の好きな形の三角形を紙の上に描いてください。ここまでの準備ができたら、例 3 の方法をまねして、自分の描いた三角形を $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小した三角形を描いてください。』という問題でしたね。

例えば次の図のようになります。



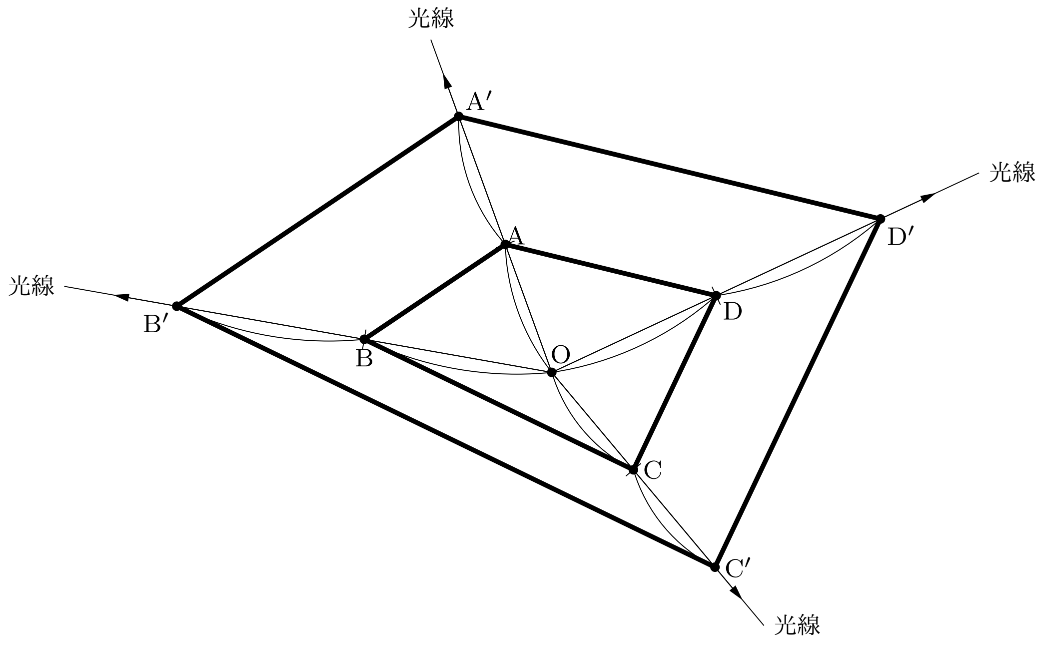
このようにして、もとの三角形 ABC と形は同じで、$\dfrac{1}{2}$ 倍 に縮小された三角形 A′B′C′ ができるわけです。（この図では右にあるのがもとの三角形で、縮小された三角形は左にあ

ります。）

本文へ戻る

問 5. 『目盛りのついた定規と紙と鉛筆を用意してください。そしてまず、自分の好きな形の四角形を紙の上に描いてください。ここまでの準備ができたら、例 4 の方法をまねして、自分の描いた四角形を 2 倍に拡大した四角形を描いてください。』という問題でしたね。

例えば次の図のようになります。

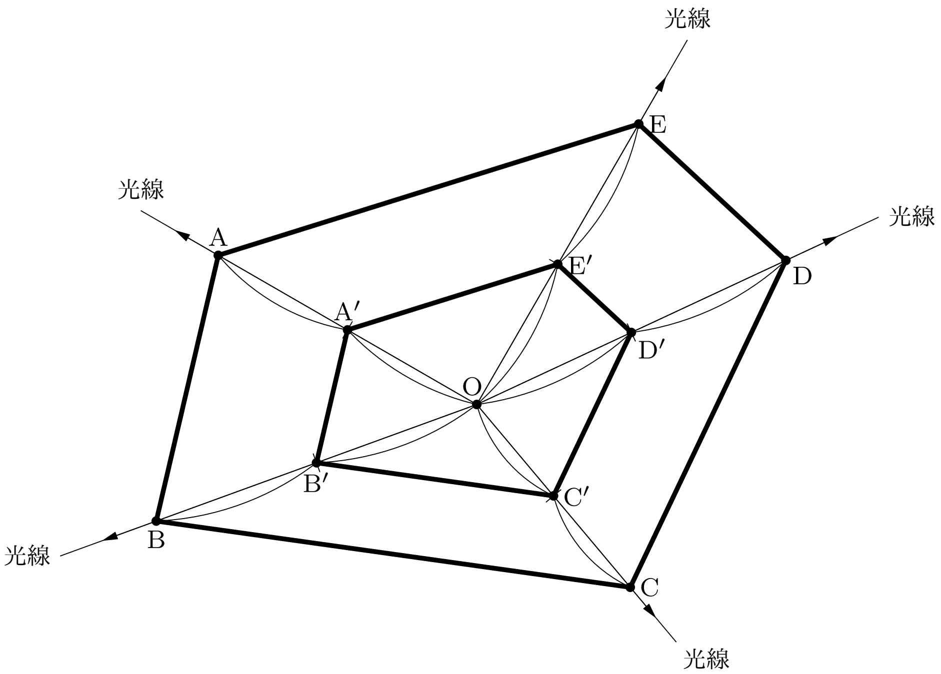


このようにして、もとの四角形 ABCD と形は同じで、2 倍に拡大された四角形 A′B′C′D′ ができるわけです。

本文へ戻る

問 6. 『目盛りのついた定規と紙と鉛筆を用意してください。そしてまず、自分の好きな形の五角形を紙の上に描いてください。ここまでの準備ができたら、例 4 の方法をまねして、自分の描いた五角形を $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小した五角形を描いてください。』という問題でしたね。

例えば次の図のようになります。

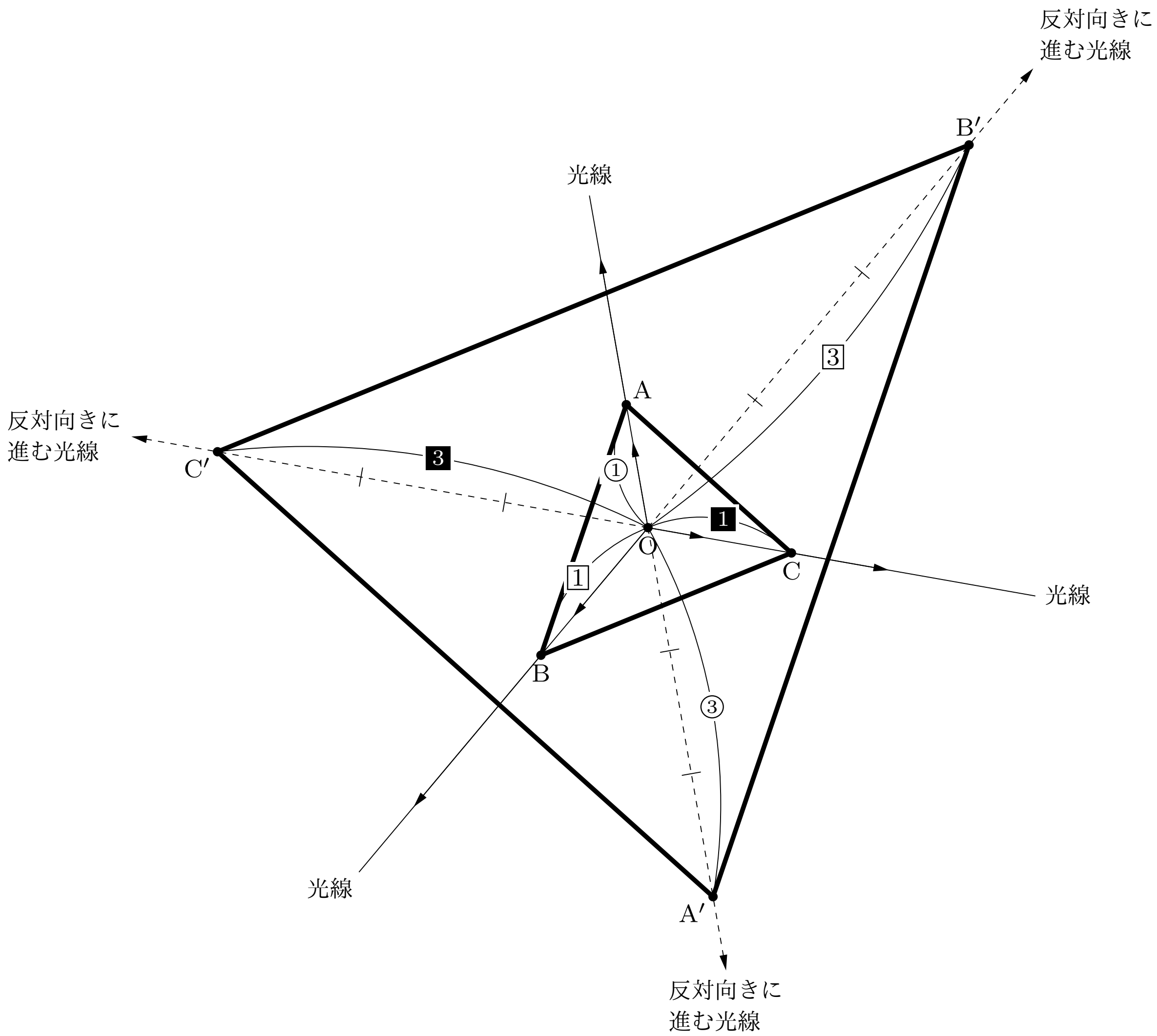


このようにして、もとの五角形 ABCDE と形は同じで、$\dfrac{1}{2}$倍 に縮小された五角形 A′B′C′D′E′ ができるわけです。(この図では外側にあるのがもとの五角形で、縮小された五角形は内側にあります。)

本文へ戻る

問 7. 『目盛りのついた定規と紙と鉛筆を用意してください。そしてまず、自分の好きな形の三角形を紙の上に描いてください。ここまでの準備ができたら、例 2、例 3、例 4 とは違う方法で、自分の描いた三角形を 3 倍に拡大した三角形を描いてください。(ヒント：光の出る場所は三角形の内側にします。そして、反対向きに進む光線を利用します。)』という問題でしたね。

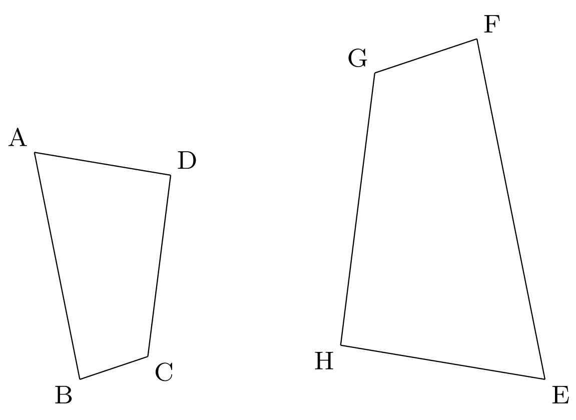
例えば次の図のようになります。



このようにして、もとの三角形 ABC と形は同じで、3 倍に拡大された三角形 A′B′C′ ができるわけです。（この図では内側にあるのがもとの三角形で、拡大された三角形は外側にあります。）

本文へ戻る

問 8.　『右の図を見てください。紙の上に 2 つの四角形が描かれています。この 2 つの四角形がある点を中心にして相似の位置にあるのかどうか調べるためにはどんなことをすれば良いか考えなさい。ただし、使ってよいのは目盛りのついた定規と鉛筆だけです。』という問題でしたね。

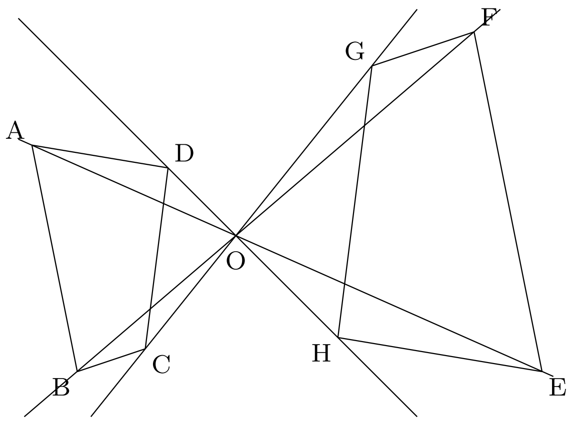


四角形 ABCD と四角形 GHEF は大きさは違っていますが、図をじっくり見ると形は同じようです。つまり、多分この 2 つの四角形は相似なのでしょう。そして、きっと、A は E に対応していて、B は F に対応していて、C は G に対応していて、D は H に対応していているのでしょう。ということは、この 2 つの四角形が相似の位置にあるかどうか知りたければ、次の 2 つのことを調べる必要があります。

(1) A と E を通る直線や、B と F を通る直線や、C と G を通る直線や、D と H を通る直線を描いてみて、それらの直線がどこか 1 つの点で全部交わるのかどうかを調べる。

(2) (1) で描いた 4 つの直線が全て 1 点で交わったとしても、その 1 点から対応する頂点までの距離の比がどこでも同じになっているかどうかを調べる。

右の図を見てください。、A と E を通る直線や、B と F を通る直線や、C と G を通る直線や、D と H を通る直線を描いてみました。4 本の直線は全部 1 つの点で交わりました。ここではその点を O と呼ぶことにします。あとは定規の目盛りを使って、OA の長さ、OA の長さ、OB の長さ、OC の長さ、OD の長さ、OE の長さ、OF の長さ、OH の長さを測る必要があります。そして、



$$\mathrm{OA : OE = OB : OF = OC : OG = OD : OH}$$

が成り立つかどうか調べれば良いわけです。定規の目盛りを使って慎重にできるだけ正確に距離を測り、慎重に比を計算すると、

$$\mathrm{OA : OE} = 1 : 1.5$$

$$\mathrm{OB : OF} = 1 : 1.5$$

$$\mathrm{OC : OG} = 1 : 1.5$$

$$\mathrm{OD} : \mathrm{OH} = 1 : 1.5$$

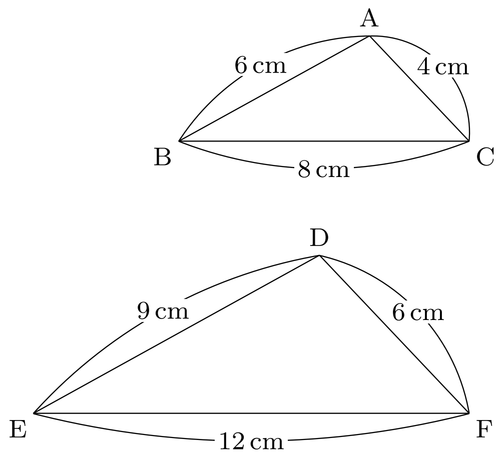
となっていることがわかります。全て比は等しくなっていました。（あなたも定規をテキストにあてて距離を測り、比の値を電卓などで計算して確かめてください。）

以上から、四角形 ABCD と四角形 GHEF はさっき見つけた点 O を相似の中心として相似の位置にあると断言できます。

本文へ戻る

問 9. 『例 5 の説明が理解できた人のための問題です。

右の図を見てください。例 5 と同じ 2 つの相似な三角形が描かれています。例 5 の説明では、△ABC と △DEF の相似比を、辺 AB と辺 DE に注目したり、辺 AC と辺 DF に注目したりすることによって求めました。今度は辺 BC と辺 EF に注目して △ABC と △DEF の相似比を求めなさい。』という問題でしたね。



辺 BC の長さは 8 cm で辺 EF の長さは 12 cm ですから

$$\text{辺 BC の長さ} : \text{辺 EF の長さ} = 8 : 12 = 2 : 3$$

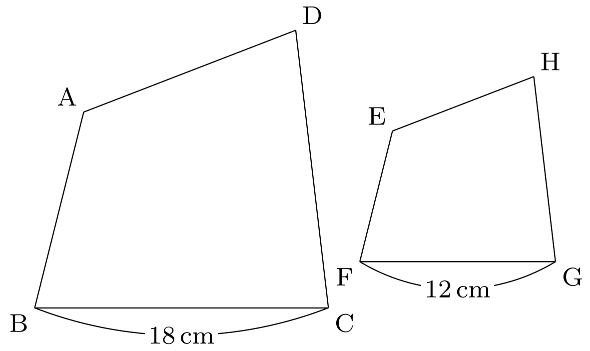
ですね。ですから

$$\triangle\mathrm{ABC} \text{ と } \triangle\mathrm{DEF} \text{ の相似比は } 2 : 3 \text{ である}$$

ということがわかるわけです。

本文へ戻る

問 10. 『右の図で、



四角形 ABCD ∽ 四角形 EFGH

であるとします。四角形 ABCD と四角形 EFGH の相似比を求めなさい。』という問題でしたね。

この 2 つの四角形では辺 BC は辺 FG に対応しています。そして辺 BC の長さは 18 cm で辺 EF の長さは 12 cm ですから

$$\text{辺 BC の長さ} : \text{辺 EF の長さ} = 18 : 12 = 3 : 2$$

ですね。ですから

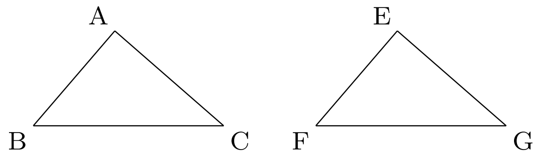
四角形 ABCD と四角形 EFGH の相似比は 3 : 2 である

ということがわかるわけです。

本文へ戻る

問 11. 合同な図形があるときの話でした。

(1) 『右の図で、



$$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{EFG}$$

であるとします。このとき、△ABC と △EFG は相似であるといえますか。また、もし相似であるといえるなら、△ABC と △EFG の相似比も答えなさい。』という問題でしたね。

△ABC と △EFG は合同です。2 つの三角形はぴったり重なるのですから、形は同じです。ですからこの 2 つの三角形はもちろん相似です。

合同な図形では対応する部分の長さは同じなのですから、対応する部分の長さの比は 1 : 1 です。ですから

△ABC と △EFG の相似比は 1 : 1 である

ということになります。

(2) 『2 つの図形があり、その 2 つの図形は合同であるとします。このとき、この 2 つの図形は相似であるといえますか。また、もし相似であるといえるなら、この 2 つの図形の相似比も答えなさい。』という問題でしたね。

合同な図形とは、ぴったり重なる図形のことですから、形は同じです。ですから合同な 2 つの図形はもちろん相似です。

合同な図形では対応する部分の長さは同じなのですから、対応する部分の長さの比は $1:1$ です。ですから

合同な 2 つの図形の相似比は $1:1$ である

ということになります。

本文へ戻る

問 12. 『次の等式を満たす x の値を求めなさい。』ということでした。例題 1 で学んだ 2 つの解き方のうちのどちらかを使えば良いですね。

(1) $x:8=3:2$

$x:8$ というのは $\dfrac{x}{8}$ のことで、$3:2$ というのは $\dfrac{3}{2}$ のことですね。ということは、

$$x:8=3:2$$

という等式は

$$\frac{x}{8}=\frac{3}{2}$$

という等式に書き換えることができますね。この式をもとに、謎の数 x を見つけることにしましょう。

この式の左辺と右辺に 8 をかけてみます。すると、

$$\frac{x}{8}\times 8=\frac{3}{2}\times 8$$

となりますが、約分をすると、

$$x = 12$$

であることがわかります。

(2) $9 : 4 = x : 6$ という等式は

$$4 \times x = 9 \times 6$$

という等式に書き換えることができますね。つまり、

$$4x = 9 \times 6$$

が成り立っているわけです。

この等式の左辺と右辺を 4 でわると、

$$\frac{4x}{4} = \frac{9 \times 6}{4}$$

となりますが、約分をすると、

$$x = \frac{27}{2}$$

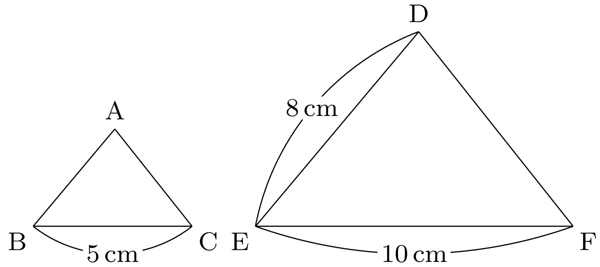
であることがわかります。

本文へ戻る

問 13. 『右の図で、

$\triangle$ABC $\backsim$ $\triangle$DEF

であるとき、辺 AB の長さを求めなさい。』という問題でしたね。



相似な図形では、対応する部分の長さを比べると、どこを比べても長さの比は同じになっているのでしたね。

この問題の 2 つの図形では、辺 AB と辺 DE が対応し、辺 BC と辺 EF が対応してい

ます。ですから、

$$\begin{array}{ccccccc} \text{AB の長さ} & : & 8 & = & 5 & : & 10 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{AB の} & & \text{DE の} & & \text{AC の} & & \text{DF の} \\ \text{長さ} & & \text{長さ} & & \text{長さ} & & \text{長さ} \end{array}$$

となっているはずなのです。すると、

$$\text{AB の長さ} \times 10 = 8 \times 5$$

となります。そうすると、

$$\text{AB の長さ} = \frac{8 \times 5}{10}$$

となりますが、右辺を約分して見かけをマシにすると、

$$\text{AB の長さ} = 4$$

であることがわかります。つまり、辺 AB の長さは 4 cm だったのです。

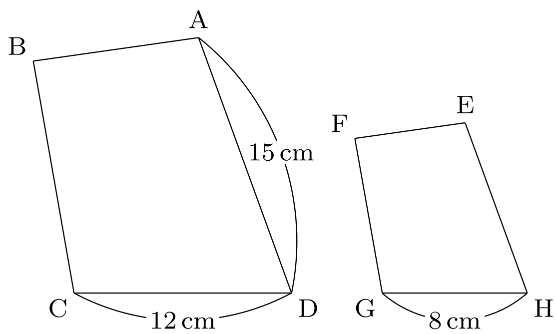
（まぁ、あまりややこしく考えなくても、5 cm の辺と 10 cm の辺が対応しているのですから、「左の三角形のいろいろなところの長さは右の三角形のいろいろなところの長さの半分になっている」ということはすぐにわかりますね。）

本文へ戻る

問 14. 右の図のような

四角形 ABCD ∽ 四角形 EFGH

である 2 つの四角形についての問題でした。



(1) 『四角形 ABCD と四角形 EFGH の相似比をできるだけ簡単な数で表しなさい。』ということでした。相似比とは「対応している部分の長さの比」のことでした。こ

の 2 つの図形では辺 CD が辺 GH に対応しているのですから、

$$\text{四角形 ABCD と四角形 DEFG の相似比} = 12 : 8 = 3 : 2$$

ということになります。

(2) 『辺 EH の長さを求めなさい。』ということでした。

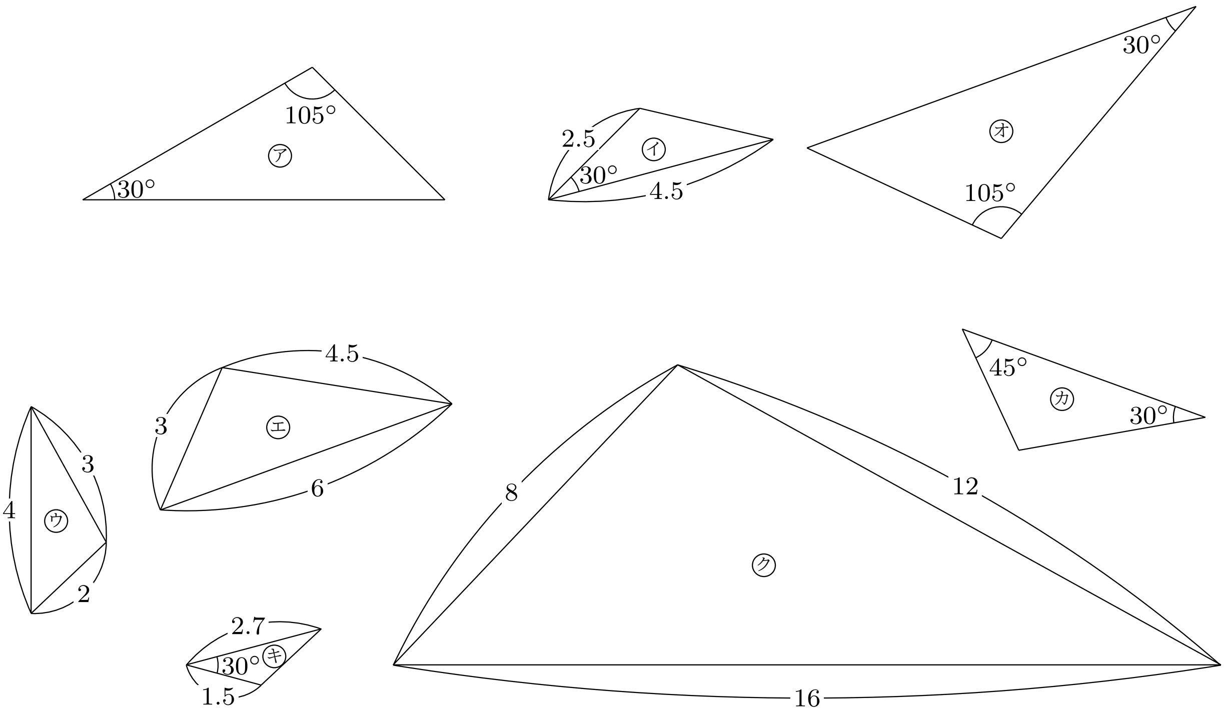
(1) で、2 つの四角形では対応している部分の比が 3 : 2 であるということがわかりました。ですから右の四角形のいろいろなところの長さは左の四角形のいろいろなところの長さの $\dfrac{2}{3}$ になっているわけです。というわけで、

$$\begin{aligned}\text{EH の長さ} &= \text{AD の長さ} \times \frac{2}{3} \\ &= 15 \times \frac{2}{3} \\ &= 10\,\text{cm}\end{aligned}$$

ということになります。

本文へ戻る

問 15. 『次の図の中に相似になっている三角形があるかどうか調べ、相似になっている三角形の組を全て答えなさい。また、相似であると判断するときに使った相似条件も答えなさい。』という問題でした。



例題 3 の解答がしっかり理解できた人にはもうくどい説明は必要ないですね。答えだけ描いておきます。

- ㋐と㋔と㋕は相似です。

  相似であると判断するために使った相似条件は「2 組の角の大きさが等しくなっている」です。

- ㋑と㋖は相似です。

  相似であると判断するために使った相似条件は「2 組の辺の比が等しくなっていて、その 2 組の辺の間にある角の大きさが等しくなっている」です。

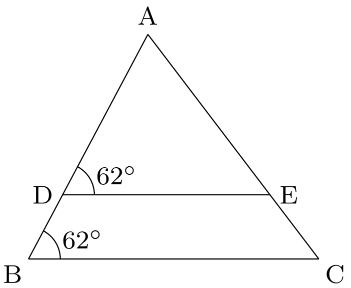
- ㋒と㋓と㋗は相似です。

  相似であると判断するために使った相似条件は「3 組の辺の 1 比が全て等しくなっている」です。

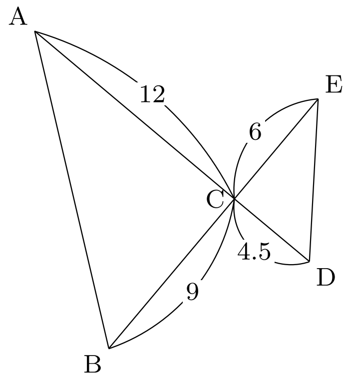
本文へ戻る

問 16. 『次のそれぞれの図において、相似な三角形の組を見つけ記号 ∽ を使って表しなさい。また、その時に使った相似条件を答えなさい。』という問題でした。

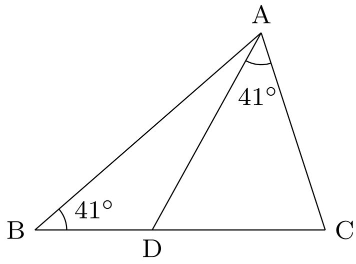
(1)



(2)



(3)

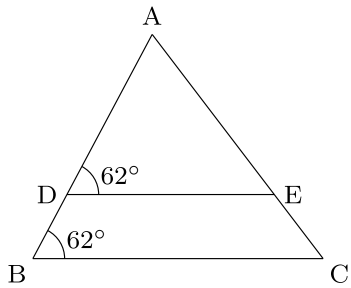


例題 4 の解答がしっかり理解できた人にはもうくどい説明は必要ないですね。あっさり説明します。

(1) △ABC と △ADE では

$$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{DAE}$$

$$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{ADE} = 62^\circ$$



となっています。ということは

$$\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{ADE}$$

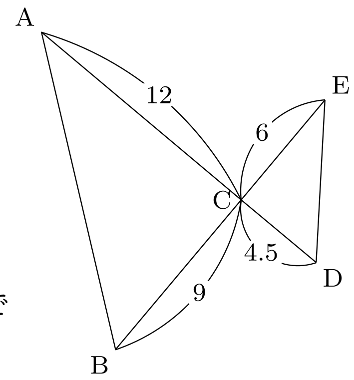
であると断言できます。

相似条件は

「2 組の角の大きさが等しい」

ということですね。

(2) △ABC と △ECD では



$$AC : EC = 12 : 6 = 2 : 1$$

$$BC : EC = 9 : 4.5 = 2 : 1$$

となっています。また、対頂角の大きさは必ず等しいので

$$\angle ACE = \angle ECD$$

となっています。ということは

$$\triangle ABC \backsim \triangle ECD$$

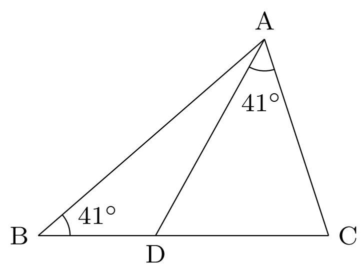
であると断言できます。

相似条件は

「2 組の辺の長さが等しくなっていて、その 2 組の間にある角の大きさが等しい」

ということですね。

(3) △ABC と △DAC では



$$\angle BCA = \angle ACD$$

$$\angle ABC = \angle DAC = 41^\circ$$

となっています。ということは

$$\triangle ABC \backsim \triangle DAC$$

であると断言できます。

相似条件は

「2 組の角の大きさが等しい」

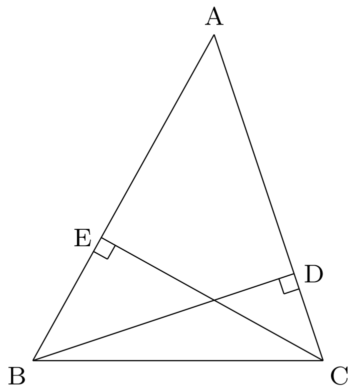
ということですね。

本文へ戻る

問 17. 『右の図のような △ABC があり、頂点 B、C から辺 AC、辺 AB へそれぞれ垂線 BD と CE を引きました。このとき、

$$\triangle \mathrm{ABD} \backsim \triangle \mathrm{ACE}$$

であることを証明しなさい。』という問題でした。



例題 5 の解答がよく理解できた人にはもうくどい説明は必要ないですね。数学の答案っぽい証明を書いておきます。

（証明）

△ABD と △ACE において、

$$\angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{AEC} = 90^\circ \quad \text{（仮定）} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{CAE} \quad \text{（共通）} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ②$$

①、②より、2 組の角の大きさがそれぞれ等しい。

よって

$$\triangle \mathrm{ABD} \backsim \triangle \mathrm{ACE}$$

（証明おわり）

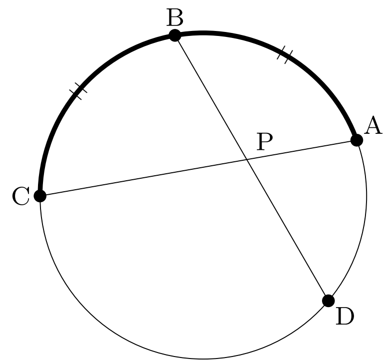
本文へ戻る

問 18. あなたにお任せします。 本文へ戻る

問 19. 『円 O があり、円 O の円周上に 4 つの点 A、B、C、D がこの順に反時計回り（つまり時計の針の回転する向きとは反対周り）に並んでいるとします。また、さらに弧 AB と弧 BC の長さは等しくなっているとします。弦 AC と弦 BD は交わっているはずですが、交わった点を P と呼ぶことにします。以下の問に答えなさい。』ということでした。

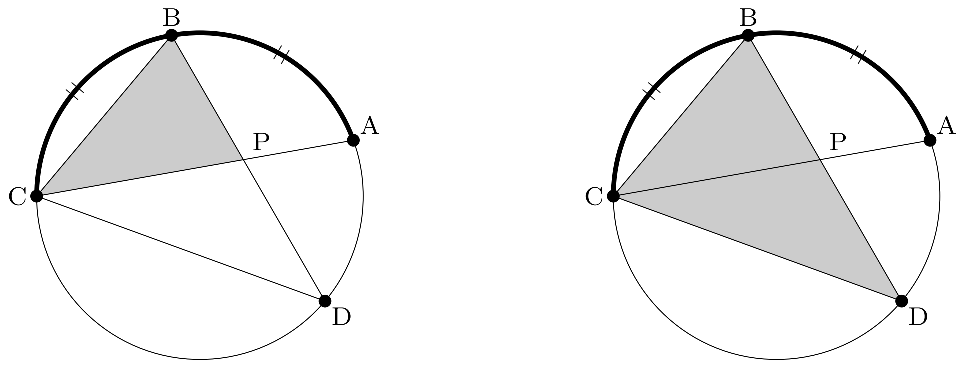
(1) この問題をよく読んで、この問題の状況を図にするのでしたね。

例えば右のようになります。



(2) 『$\triangle$BPC ∽ $\triangle$BCD であることを証明しなさい。』ということでしたね。

では次の図を見てください。



わかりやすくするために、左の図では $\triangle$BPC を灰色にし、右の図では $\triangle$BCD を灰色にしておきました。この図を見ながら証明することにします。

（証明）

$\triangle$BPC の $\angle$CBP と $\triangle$BCD の $\angle$DBC はもともとぴったり重なっているので大きさは同じです。つまり、

$$\angle \mathrm{CBP} = \angle \mathrm{DBC} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立っています。

$\triangle$BPC の $\angle$BCP は $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の円周角で、$\triangle$BPC の $\angle$BDC は $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の円周角です。そしてこの問題では $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の長さと $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の長さは同じです。ということは

$$\angle \mathrm{BCP} = \angle \mathrm{BDC} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立っていることになります。①、②により、△BPC と △BCD では 2 組の角の大きさが等しいということになるので、

$$\triangle\mathrm{BPC} \backsim \triangle\mathrm{BCD}$$

であると断言できます。

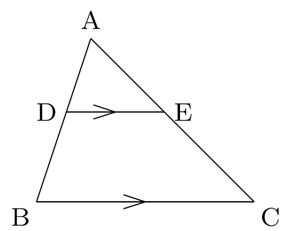
（証明おわり）

本文へ戻る

問 20. 2 つの図形が相似であることを証明する問題でした。

(1) 『△ABC があり、辺 AB 上に点 D、辺 AC 上に点 E をとります。このとき、D と E を結んでできる線分 DE が辺 BC と平行ならば、△ADE ∽ △ABC であることを証明しなさい。』という問題でした。

図を作ると右のようになりますね。ではこの図を見ながら証明することにしましょう。



（証明）

△ADE の ∠DAE と △ABC の ∠BAC はもともとぴったり重なっているので大きさは同じです。つまり、

$$\angle\mathrm{DAE} = \angle\mathrm{BAC} \qquad \cdots\cdots\cdot \ ①$$

が成り立っています。

△ADE の ∠ADE と △ABC の ∠ABC は 2 直線 DE、BC に関する同位角です。そしてこの問題ではもともと DE は BC に平行になっています。2 直線が平行なとき同位角は等しいはずですから、

$$\angle\mathrm{ADE} = \angle\mathrm{ABC} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ②$$

が成り立っていることになります。

①、②により、$\triangle$ADE と $\triangle$ABC では 2 組の角の大きさが等しいということになるので、

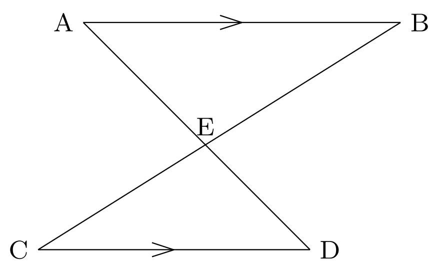
$$\triangle \mathrm{ADE} \backsim \triangle \mathrm{ABC}$$

であると断言できます。

（証明おわり）

(2) 『線分 AB と線分 CD があり、この 2 つの線分は平行になっているとします。また、B と C を結び、A と D を結びます。すると BC と AD は交わるはずですが、交点を E と呼ぶことにします。このとき、$\triangle$AEB $\backsim$ $\triangle$DEC であることを証明しなさい。』という問題でした。

図を作ると右のようになりますね。ではこの図を見ながら証明することにしましょう。



（証明）

$\triangle$AEB の $\angle$AEB と $\triangle$DEC の $\angle$DEC は対頂角の関係になっています。対頂角の大きさは必ず等しいのですから、

$$\angle \mathrm{AEB} = \angle \mathrm{DEC} \qquad \cdots\cdots\cdot \ ①$$

が成り立っています。

$\triangle$AEB の $\angle$ABE と $\triangle$DEC の $\angle$DCE は 2 直線 AB、CD に関する錯角です。そしてこの問題ではもともと AB と CD は平行になっています。2 直線が平行なとき錯角は等しいはずですから、

$$\angle \mathrm{ABE} = \angle \mathrm{DCE} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ②$$

が成り立っていることになります。

①、②により、$\triangle$AEB と $\triangle$DEC では 2 組の角の大きさが等しいということにな

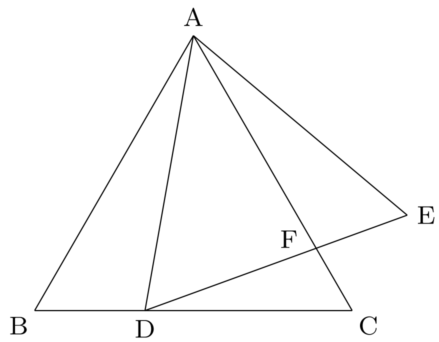
るので、

$$\triangle AEB \backsim \triangle DEC$$

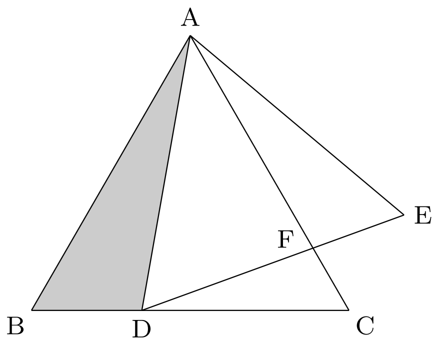
であると断言できます。

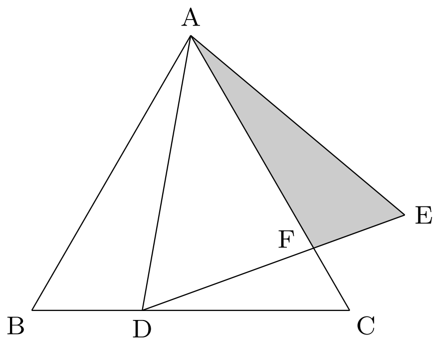
（証明おわり）

(3) 『右の図の $\triangle$ABC と $\triangle$ADE は正三角形であるとします。辺 AC と辺 DE の交点を F とします。$\triangle$ABD $\backsim$ $\triangle$AEF であることを証明しなさい。』という問題でした。



では次の図を見てください。





わかりやすくするために、左の図では $\triangle$ABD を灰色にし、右の図では $\triangle$AEF を灰色にしておきました。この図を見ながら証明することにします。

（証明）

この問題ではもともと $\triangle$ABC と $\triangle$ADE は正三角形です。ですから、$\angle$ABD や $\angle$AEF の大きさは 60° です。というわけで、$\triangle$ABD の $\angle$ABD と $\triangle$AEF の $\angle$AEF の大きさは同じです。つまり、

$$\angle \mathrm{ABD} = \angle \mathrm{AEF} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立っています。

この問題ではもともと $\triangle$ABC と $\triangle$ADE は正三角形です。ですから、$\angle$BAC や $\angle$DAE の大きさは 60° です。ところで、$\triangle$ABD の $\angle$BAD の大きさは $\angle$BAC の大きさ（つまり 60°）から $\angle$DAC の大きさを引いたものになっていて、$\triangle$AEF の $\angle$EAF の大きさは $\angle$DAE の大きさ（つまり 60°）から $\angle$DAC の大きさを引いたものになっています。つまり、$\angle$BAD や $\angle$EAF の大きさはどちらも 60° から $\angle$DAE の大きさを引いたものになっているわけです。ですから、$\angle$BAD と $\angle$EAF の大きさは同じはずです。つまり、

$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{EAF} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立っています。

①、②により、$\triangle$ABD と $\triangle$EAF では 2 組の角の大きさが等しいということになるので、

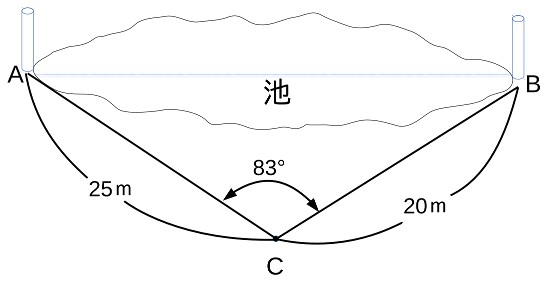
$$\triangle \mathrm{ABD} \backsim \triangle \mathrm{EAF}$$

であると断言できます。

（証明おわり）

本文へ戻る

問 21. 『ある町に、右のような池があります。池をはさんだ 2 つの地点 A と B の距離を測りたいのですが池の中をジャブジャブと歩きたくはありません。ですから、A 地点と B 点の間の距離を直接測るのはやめることにします。その代わり A 地点と B 地点を見渡すことのできる C 地点を決め、C 地点から A 地点までの距離と C 地点から B 地点までの距離を測ってみました。そうすると、AC 間の距離は 25 m で BC 間の距離は 20 m でした。また、∠ACB の大きさを測ったところ 83° でした。できるだけ正確な縮図を描いて AB 間の距離を求めなさい。』という問題でした。



それでは分度器や目盛りのついた定規を使い、紙の上に縮図を描くことにしましょう。

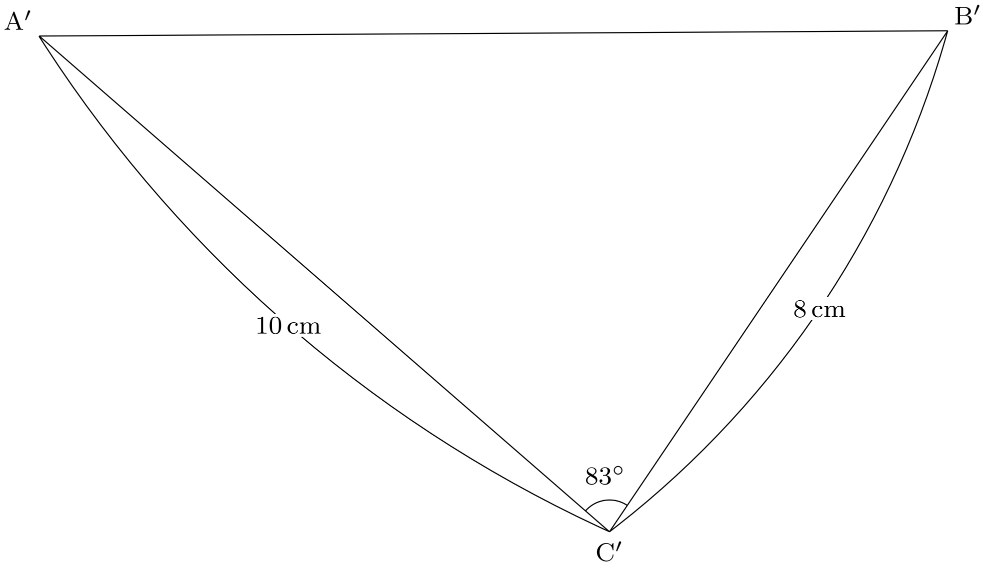
まず測量の結果をよく思い出しておきましょう。たしか、AC 間の距離が 25 m、BC 間の距離が 20 m 、陸地で測った ∠ACB の大きさが 83° でしたね。（さっきの図を見てください。）ですから、そうですねぇ、例えば長さを全て $\frac{1}{250}$ にした縮図を作るとうまく、紙の上に手頃な大きさの縮図を描くことができそうですよね。

まず、25 m を $\frac{1}{250}$ にすると何 cm になるのか考えてみます。25 m って 2500 cm ですから $\frac{1}{250}$ にすると 10 cm ですよね。

次は 20 m を $\frac{1}{250}$ にすると何 cm になるのか考えてみます。25 m の時と同じように考えると、20 mって 2000 cm ですから $\frac{1}{250}$ にすると 8 cm ですよね。

さらに、$\angle ACB = 83°$ であったことも思い出して、定規と分度器を使い、できる限り正確な縮図を作りましょう。1 mm のずれ、1° のずれが重大な影響を与えてしますのです。気を抜いてはいけません。慎重に縮図を作ることにします。

次の図を見てください。これはある人が定規と分度器を使って正確に作った縮図です。



ある人が定規と分度器を使って正確に作った縮図
（あなたの見ている画面の設定を 100% にすると、この図は正確な大きさになります。）

縮図に描かれた三角形を $\triangle \mathrm{A'B'C'}$ と呼ぶことにしましょう。ところで池のそばにできた（本物の大きな）$\triangle \mathrm{ABC}$ と縮図としてできた $\triangle \mathrm{A'B'C'}$ は相似になっているのですが、念のため、どうして相似になっているか証拠を言っておきます。

これは本当の $\triangle \mathrm{ABC}$ の辺 AC や辺 BC の長さを $\dfrac{1}{250}$ にした縮図ですよね。ということは、

$$\mathrm{AC} : \mathrm{A'C'} = 250 : 1$$

$$\mathrm{BC} : \mathrm{B'C'} = 250 : 1$$

となっているはずですね。ですから、

$$\mathrm{AC} : \mathrm{A'B'} = \mathrm{BC} : \mathrm{B'C'}$$

と断言できますね。また、もとの $\triangle \mathrm{ABC}$ の $\angle \mathrm{ACB}$ の大きさが変わらないように縮図を作るわけですから、

$$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{A'B'C'}$$

が成り立っていますよね。

以上で、$\triangle \mathrm{ABC}$ と $\triangle \mathrm{A'B'C'}$ では 2 組の辺の比が等しく、その間にある角の大きさが

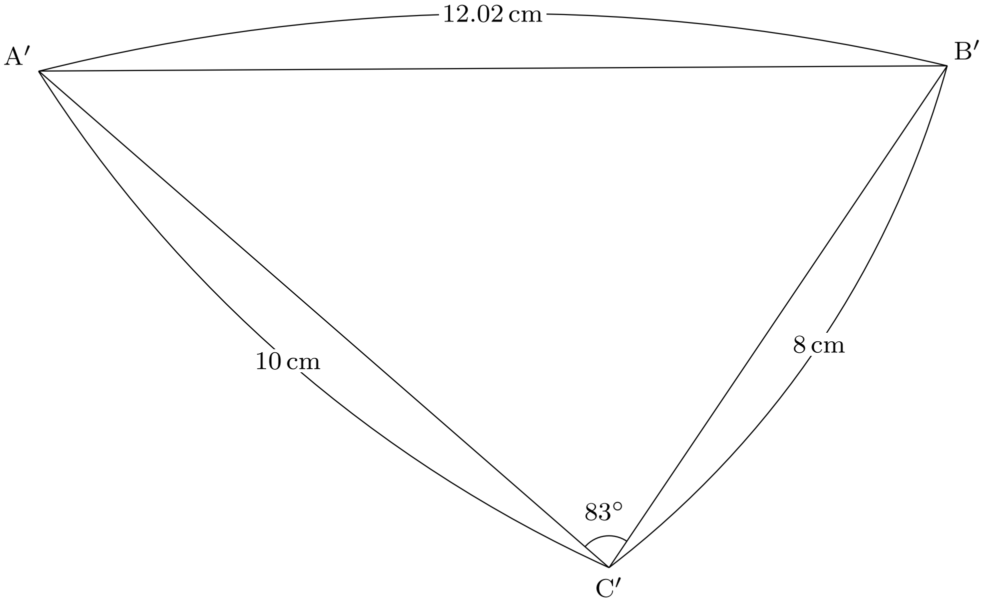
等しいということがわかったので、

$$\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{A'B'C'}$$

と断言してよいですよね。

　ではこれからいよいよ、正確に作られた縮図を利用して、池をはさむ 2 地点 AB 間の（本当の）距離を求めることにしましょう。

　次にするべきことは、縮図の A′ と B′ の間の長さを定規を使って正確に測ることです。



ある人が定規と分度器を使って正確に作った縮図
A′ と B′ の間の長さを定規を使ってできるだけ正確に測ると 12.02 cm となった。
（あなたの見ている画面の設定を 100% にすると、この図は正確な大きさになります。）

　この図に定規をあててみればわかりますが、A′ と B′ の間の長さを測ると 12.02 cm となります。

　ということは、本当の AC 間の距離は、この値を 250 倍して、

$$\begin{aligned} AC &= 12.02 \times 250\,(\mathrm{cm}) \\ &= 3005\,(\mathrm{cm}) \\ &= 30.05\,(\mathrm{m}) \end{aligned}$$

となります。つまり、池をはさむ A 地点と B 地点の間の距離は、およそ 30 (m) ということです。

本文へ戻る

問 22. 例題 8 の解答が理解できた人にはくどい説明は必要ないですね。答えだけ書いておきます。

この問題の木の高さはおよそ 6.4 m です。 本文へ戻る

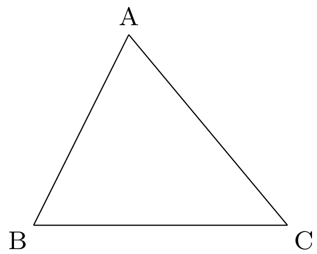
問 23. 例題 8 の解答が理解できた人にはくどい説明は必要ないですね。答えだけ書いておきます。

A 地点から P 地点までの距離はおよそ 222 m です。 本文へ戻る

問 24. 次の話を証明する問題でしたね。

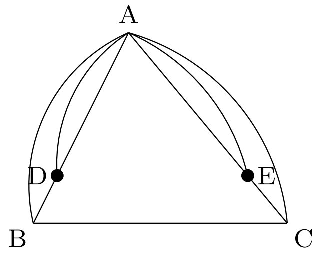
三角形に線分が付け加えられると・・・という話その 2

右の図を見てください。まず △ABC があるとします。

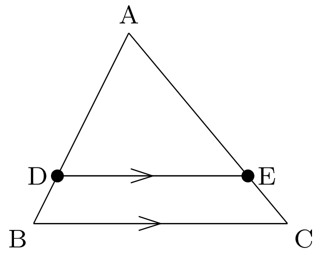


次にこの三角形の辺 AB 上に点 D、辺 AC 上に点 E を打ちますが、

$$AD : AB = AE : AC$$

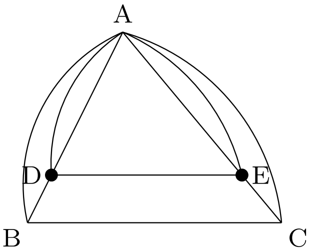


となるように点 D と点 E を打ちます。
そうすると、驚くべきことに、点 D と E を結んでできる線分 DE は、絶対に、辺 BC と平行になってしまうのです。



（証明）

△ADE と △ABC において



$$AD : AB = AE : AC\text{（仮定）} \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

$$\angle DAE = \angle BAC\text{（共通）} \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

①、②より、△ADE と △ABC では「2 組の辺の比が等しくなっていて、その 2 組の辺の間にある角の大きさも等しい」ということになるので

$$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$$

であると断言できます。

相似な図形では、対応する角の大きさは等しいので、例えば

$$\angle ADE = \angle ABC$$

が成り立っているはずです。ということは 2 直線 DE、BC の同位角の大きさが等しいことになるので

$$DE \parallel BC$$

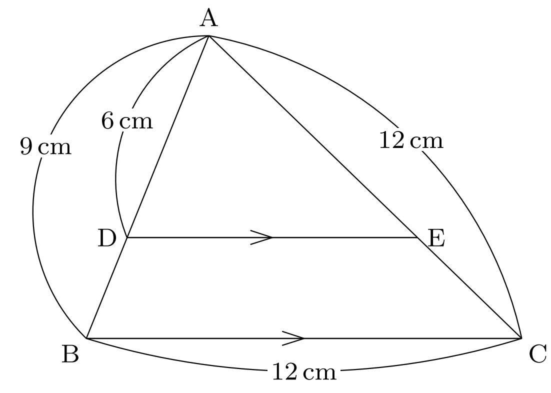
であると断言できます。

本文へ戻る

問 25.

(1) 『右の図で、AE の長さを求めなさい。』

という問題でした。



DE // BC となっているのですから、

$$AD : AB = AE : AC$$

が成り立っているはずです。ですから

$$6 : 9 = AE : 12$$

となっています。この式からまず、

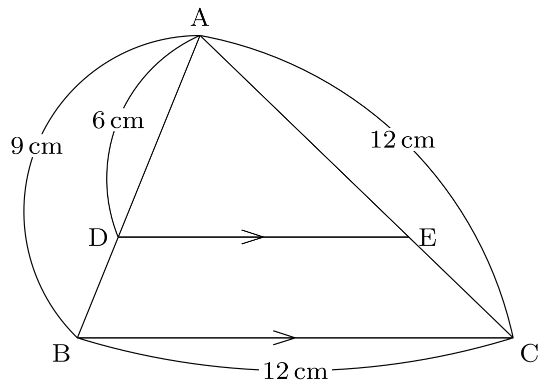
$$9 \times \mathrm{AE} = 6 \times 12$$

ということがわかり、さらに

$$\mathrm{AE} = \frac{6 \times 12}{9} = 8\,\mathrm{cm}$$

ということがわかります。

(2) 『EC の長さを求めなさい。』という問題でした。

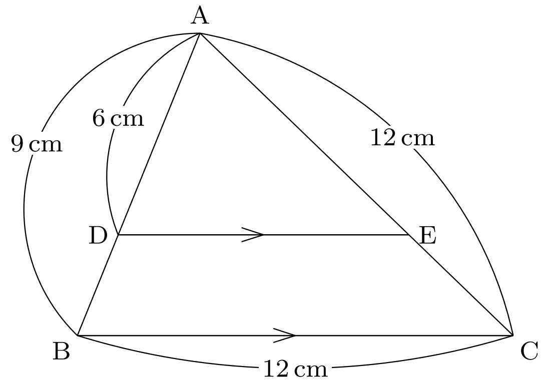


(1) で AE の長さは 8 cm であることがわかったのですから、

$$\begin{aligned}\mathrm{EC} &= \mathrm{AC} - \mathrm{AE}\\ &= 12 - 8\\ &= 4\,\mathrm{cm}\end{aligned}$$

ということがわかります。

(3) 『DE の長さを求めなさい。』という問題でしたね。



この問題では DE // BC となっているのですから、

$$\mathrm{AD} : \mathrm{AB} = \mathrm{AE} : \mathrm{AC}$$

が成り立っているはずです。また当然、

$$\angle\mathrm{DAE} = \angle\mathrm{BAC}$$

が成り立っています。ですから

$$\triangle \mathrm{ADE} \backsim \triangle \mathrm{ABC}$$

であると断言できます。相似な図形では、対応する部分の長さの比はどこでも同じです。ですから例えば、

$$\mathrm{AD} : \mathrm{AB} = \mathrm{DE} : \mathrm{BC}$$

が成り立っているはずです。つまり、

$$6 : 9 = \mathrm{DE} : 12$$

が成り立っています。この式からまず、

$$9 \times \mathrm{DE} = 6 \times 12$$

ということがわかり、さらに

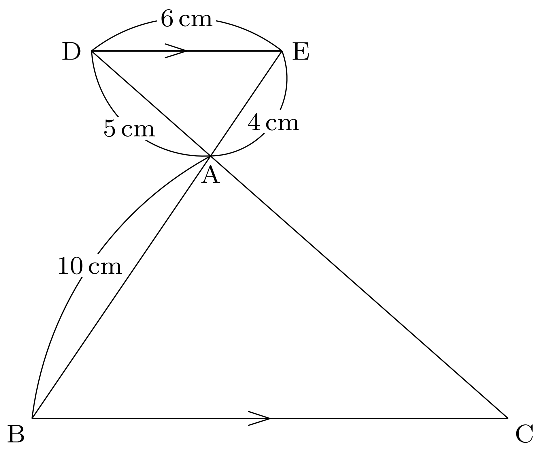
$$\mathrm{DE} = \frac{6 \times 12}{9} = 8\,\mathrm{cm}$$

ということがわかります。

本文へ戻る

問 26. 図の中から相似な図形を見つけ、対応する部分の長さを求める問題でした。

(1) 『この図の中から相似になっている 2 つの三角形を見つけ、相似であることを証明しなさい。』ということでしたね。



△AED と △ABC は相似になっています。

（証明）

△AED と △ABC において

$$\angle \mathrm{EAD} = \angle \mathrm{BAC}\ （対頂角は等しいから） \quad \cdots\cdots ①$$

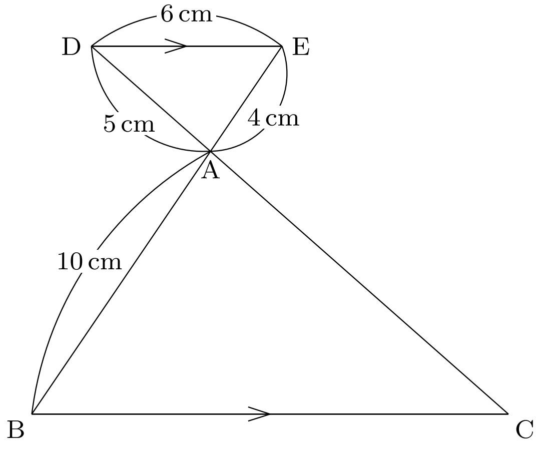
$$\angle \mathrm{AED} = \angle \mathrm{ABC}\ （\mathrm{DE} \mathbin{/\!/} \mathrm{BC}\ なので錯角は等しいから） \quad \cdots\cdots ②$$

①、②より、△AED と △ABC では「2 組の角の大きさが等しい」ということになるので

$$\triangle \mathrm{AED} \backsim \triangle \mathrm{ABC}$$

であると断言できます。

(2) 『(1) で見つけた相似な三角形では、対応している部分の長さの比はどこでも等しいということを考えに入れて AC の長さを求めなさい。』ということでした。



△AED ∽ △ABC なのですから、

$$\mathrm{AE} : \mathrm{AB} = \mathrm{AD} : \mathrm{AC}$$

が成り立っているはずです。つまり、

$$4 : 10 = 5 : \mathrm{AC}$$

が成り立っています。この式からまず、

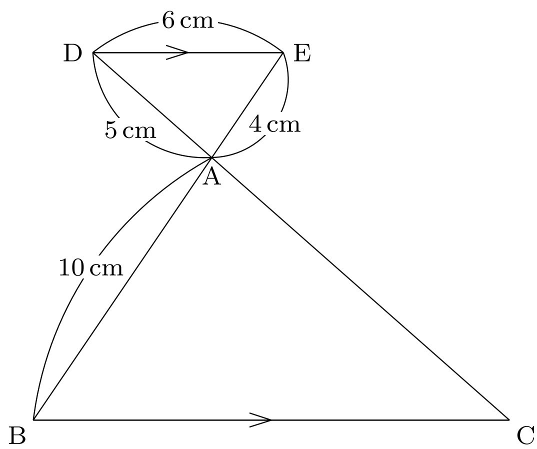
$$4 \times \mathrm{AC} = 10 \times 5$$

ということがわかり、さらに

$$\mathrm{AC} = \frac{10 \times 5}{4} = 12.5\,\mathrm{cm}$$

ということがわかります。

(3) 『(1) で見つけた相似な三角形では、対応している部分の長さの比はどこでも等しいということを考えに入れて BC の長さを求めなさい。』ということでした。



$\triangle\mathrm{AED} \backsim \triangle\mathrm{ABC}$ なのですから、

$$\mathrm{AE} : \mathrm{AB} = \mathrm{DE} : \mathrm{BC}$$

が成り立っているはずです。つまり、

$$4 : 10 = 6 : \mathrm{BC}$$

が成り立っています。この式からまず、

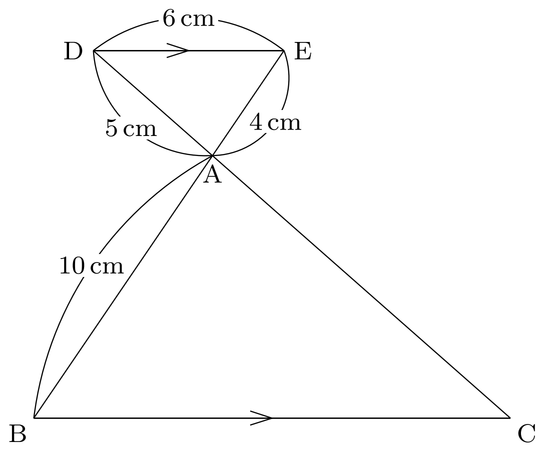
$$4 \times \mathrm{BC} = 10 \times 6$$

ということがわかり、さらに

$$\mathrm{BC} = \frac{10 \times 6}{4} = 15\,\mathrm{cm}$$

ということがわかります。

(4) 『DC の長さを求めなさい。』ということでした。



AC の長さが 12.5 cm であることがわかったのですから、

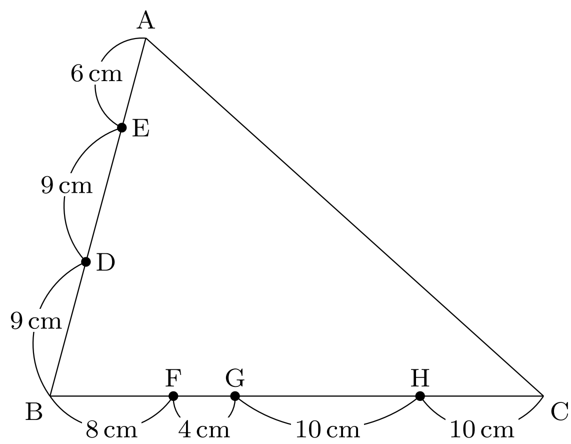
$$\mathrm{DC} = \mathrm{DA} + \mathrm{AC} = 5 + 12.5 = 17.5\,\mathrm{cm}$$

ということになります。

本文へ戻る

問 27. 平行線と比の関係についての問題でしたね。

(1) 『点 D を辺 BC 上のどの点を結ぶと辺 AC と平行な線分ができると思いますか？根拠も答えなさい。』ということでした。



点 D を点 G と結んだ時だけ、辺 AC と平行な線分ができます。

なぜかというと・・・

△ABC の辺の長さを調べてみると

$$\mathrm{BA} = 6 + 9 + 9 = 24\,\mathrm{cm}$$

$$\mathrm{BC} = 8 + 4 + 10 + 10 = 32\,\mathrm{cm}$$

となっています。ですから

$$\mathrm{BA} : \mathrm{BC} = 24 : 32 = 3 : 4$$

ということになります。

というわけで、点 D を辺 BC 上の点ほにゃららを結んで辺 AC と平行な線分ができるには、

$$\mathrm{BD} : \mathrm{B}\text{ほにゃらら} = 3 : 4$$

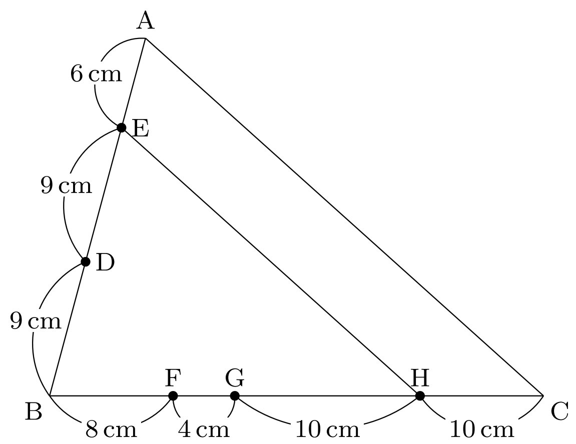
となっていれば良いわけです。

そうすると、BD の長さは 9 cm ですから、3 : 4 という比になるためには点 B からの長さが 12 cm である点ほにゃららを探さなくなりません。すると G が見つかるわけです。

(2) 『点 E と点 H を結ぶと辺 AC と平行な線分ができると思いますか？根拠も答えなさい。』ということでした。

点 E と点 H を結んでも辺 AC と平行な線分はできません。

なぜかというと・・・



$$\mathrm{BE} = 9 + 9 = 18\,\mathrm{cm}$$

$$\mathrm{BH} = 8 + 4 + 10 = 22\,\mathrm{cm}$$

なのですから、

$$\mathrm{BE} : \mathrm{BH} = 18 : 22 = 9 : 11$$

となっています。

一方 (1) で求めたように、

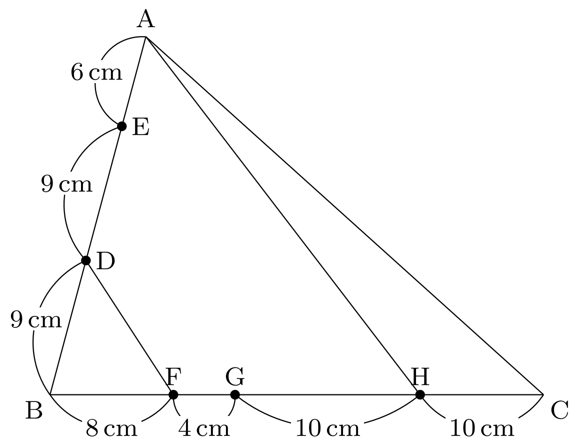
$$\mathrm{BA} : \mathrm{BC} = 24 : 32 = 3 : 4$$

となっています。

9 : 11 と 3 : 4 ということですから、比が一致しません。ですから平行にはならな

いのです。

(3)『点 D と、点 F を結びます。また、点 A と、点 H を結びます。このとき、線分 DF と線分 AH は平行になると思いますか？根拠も答えなさい。』ということでした。



線分 DF と線分 AH は平行になりません。

なぜかというと・・・

$$\mathrm{BD} = 9\,\mathrm{cm}$$

$$\mathrm{BF} = 8\,\mathrm{cm}$$

なのですから、

$$\mathrm{BD} : \mathrm{BF} = 9 : 8$$

となっています。

一方

$$\mathrm{BA} = 9 + 9 + 6 = 24\,\mathrm{cm}$$

$$\mathrm{BH} = 8 + 4 + 10 = 22\,\mathrm{cm}$$

なのですから、

$$\mathrm{BA} : \mathrm{BH} = 24 : 22 = 12 : 11$$

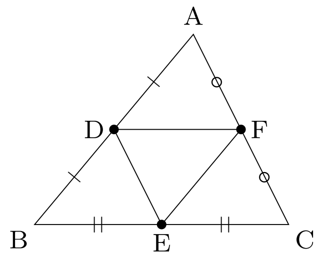
となっています。

$9 : 8$ と $12 : 11$ ということですから、比が一致しません。ですから平行にはならないのです。

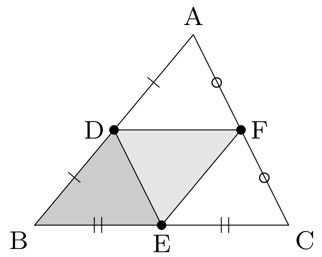
本文へ戻る

問 28. 例題 11 の解答が理解できた人のための問題でした。

右の図では D、E、F はそれぞれ辺 AB、辺 BC、辺 CA の中点なのでしたね。



(1) 『△EFD と △DBE は合同であることを証明しなさい。』ということでした。



（証明）

△EFD の辺 DE と △DBE の辺 ED はぴったり重なっているのですから長さは同じです。つまり、

$$\mathrm{DE} = \mathrm{ED} \qquad \cdots\cdots\cdots \ ①$$

が成り立っています。

E、F はそれぞれ、辺 BC、辺 CA の中点なのですから、中点連結定理より、EF の長さは AB の長さの半分であると断言できます。また点 D は AB の中点ですから DB の長さは AB の長さの半分です。つまり、△EFD の辺 EF の長さと △DBE の辺 DB の長さはどちらも AB の長さの半分です。ですから

$$\mathrm{EF} = \mathrm{DB} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ②$$

が成り立っています。

D、F はそれぞれ、辺 AB、辺 AC の中点なのですから、中点連結定理より、DF の長さは BC の長さの半分であると断言できます。また点 E は BC の中点ですから EB の長さは BC の長さの半分です。つまり、△EFD の辺 DF の長さと △DBE の辺 EB の長さはどちらも BC の長さの半分です。ですから

$$\mathrm{DF} = \mathrm{EB} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ③$$

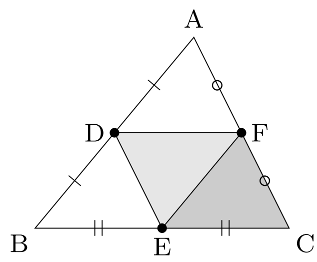
が成り立っています。

①、②、③より、△EFD と △DBE では 3 組の辺の長さがそれぞれ等しくなっているということが判明しました。ですから

$$\triangle \mathrm{EFD} \equiv \triangle \mathrm{DBE}$$

であると断言できます。

(2) 『△EFD と △FEC は合同であることを証明しなさい。』ということでした。



（証明）

△EFD の辺 EF と △FEC の辺 FD はぴったり重なっているのですから長さは同じです。つまり、

$$\mathrm{EF} = \mathrm{FE} \qquad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

が成り立っています。

D、E はそれぞれ、辺 BA、辺 BC の中点なのですから、中点連結定理より、DE の長さは AC の長さの半分であると断言できます。また点 F は AC の中点ですから FC の長さは AC の長さの半分です。つまり、△EFD の辺 DE の長さと △FEC の辺 FC の長さはどちらも AC の長さの半分です。ですから

$$\mathrm{DE} = \mathrm{FC} \qquad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

が成り立っています。

D、F はそれぞれ、辺 AB、辺 AC の中点なのですから、中点連結定理より、DF の長さは BC の長さの半分であると断言できます。また点 E は BC の中点ですから CE の長さは BC の長さの半分です。つまり、△EFD の辺 DF の長さと △FEC の

辺 CE の長さはどちらも BC の長さの半分です。ですから

$$\mathrm{DF} = \mathrm{CE} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ③$$

が成り立っています。

①、②、③より、△EFD と △FEC では 3 組の辺の長さがそれぞれ等しくなっているということが判明しました。ですから

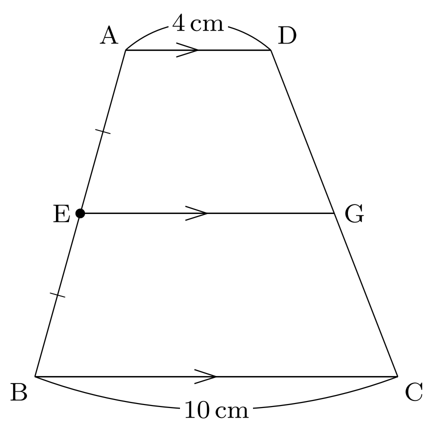
$$\triangle\mathrm{EFD} \equiv \triangle\mathrm{FEC}$$

であると断言できます。

本文へ戻る

問 29. 例題 12 の解答がきちんと理解できたかどうか確認する問題でした。

『右の図を見てください。AD と BC が平行になっている台形 ABCD があります。AD の長さは 4 cm で、BC の長さは 10 cm です。辺 AB の中点 E から辺 BC と平行な線を引いて行き、その線が台形の辺 DC と交わる点を G としました。このとき EG の長さを求めようと思い、次のように考えることにしました。以下の問に答えなさい。』ということでした。



(1) 『いま、G が DC の中点になっているという証拠はありますか。』という問題でした。

今の所証拠は何もありませんね。

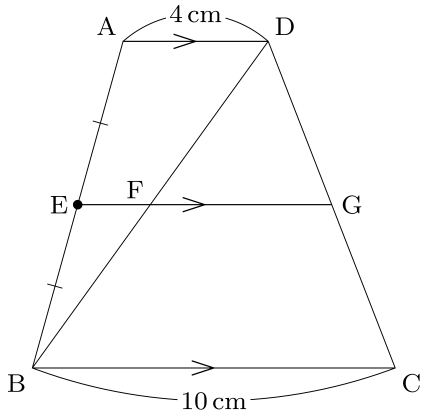
(2) 『この図には 3 つの台形があります。台形 ABCD と台形 ADEG と台形 EBCG です。この 3 つの台形のうち、相似になっている台形はありますか。』という問題でした。

相似になっている台形はありませんね。

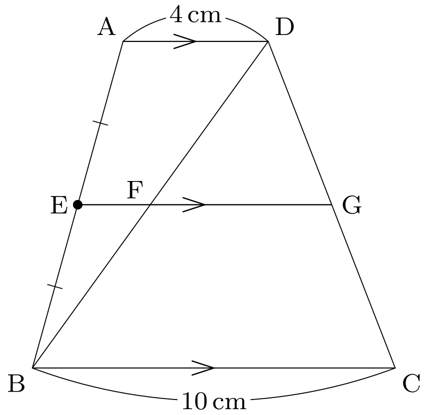
(3) EG の長さを求めるため、どこかに線を引き、相似な図形が出てくるようにしようと思い、台形 ABCD の対角線 DB を引き、EG と BD の交点を F としたのでしたね。

(a) 『いま、F が DB の中点になっているという証拠はありますか。』という問題でした。

今の所証拠は何もありませんね。



(b) 『△ABD と △EBF は相似であることを証明しなさい。』という問題でした。



（証明）

△ABD と △EBF において、

$$\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{EBF}\ （共通）\quad \cdots\cdots ①$$

$$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{BEF}\ （\mathrm{AD} \mathbin{/\!/} \mathrm{EG}\ なので同位角は等しい）\quad \cdots\cdots ②$$

①、②より △ABD と △EBF では「2 組の角の大きさがそれぞれ等しい」ということになります。ですから

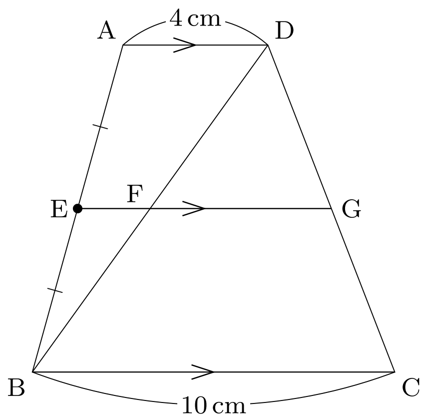
$$\triangle\mathrm{ABD} \backsim \triangle\mathrm{EBF}$$

であると断言できます。

(c) 『△ABD と △EBF は相似であることが証明出来た人は次の文の空欄に正しい言葉、数を記入してください。』ということでした。

E は AB の中点なので、EB の長さは AB の長さの半分です。相似な図形では、対応している部分の比はどこでも $\boxed{\text{等しい}}$ ので、EF の長さも AD の長さの半分ということになります。AD の長さは 4 cm なので EF の長さは $\boxed{2}$ cm ということなります。

(d) 『△ABD と △EBF は相似であることが証明出来た人への質問です。いま、F が DB の中点になっているという証拠はありますか。』ということでした。



証拠はあります。今から証拠を見せます。

△ABD と △EBF は相似なのですから、対応する辺の比はどこでも同じです。そうすると、例えば、

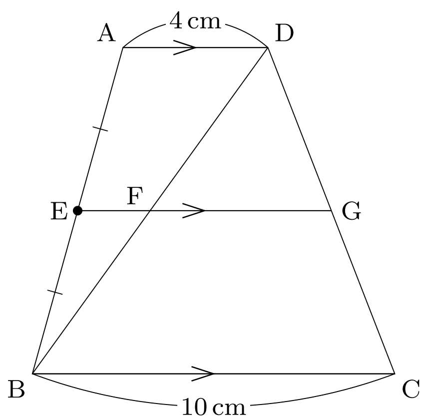
$$\mathrm{BE} : \mathrm{BA} = 1 : 2$$

なのですから、

$$\mathrm{BF} : \mathrm{BD} = 1 : 2$$

ということになります。これは F が DB の中点になっているということを意味します。

(e) 『△DBC と △DFG は相似であることを証明しなさい。』ということでした。



（証明）

$\triangle$DBC と $\triangle$DFG において、

$$\angle\mathrm{BDC} = \angle\mathrm{FDG}\ （共通） \quad \cdots\cdots\ ①$$

$$\angle\mathrm{BCD} = \angle\mathrm{FGD}\ （\mathrm{FG} \mathbin{/\!/} \mathrm{BC}\ なので同位角は等しい） \quad \cdots\cdots\ ②$$

①、②より $\triangle$DBC と $\triangle$DFG では「2 組の角の大きさがそれぞれ等しい」ということになります。ですから

$$\triangle\mathrm{DBC} \backsim \triangle\mathrm{DFC}$$

であると断言できます。

（f）$\triangle$DBC と $\triangle$DFC は相似であることが証明出来た人は次の文の空欄に正しい言葉、数を記入してください。

F は DB の中点なので、DF の長さは DB 長さの半分です。相似な図形では、対応している部分の比はどこでも $\boxed{\text{等しい}}$ ので、FG の長さも BC の長さの半分ということになります。BC の長さは 10 cm なので FG の長さは $\boxed{5}$ cm ということなります。

（g）『EG の長さを求めなさい。』ということでした。これまでに、EF の長さは 2 cm で FG の長さは 5 cm であることがわかったのですから、

$$\mathrm{EG} = \mathrm{EF} + \mathrm{FG} = 2 + 5 = 7\,\mathrm{cm}$$

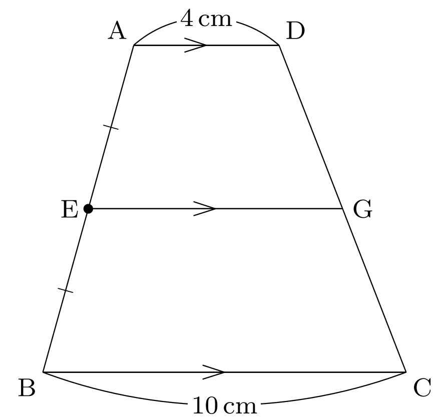
ということがわかります。

（h）『台形 ABCD に対角線 AC を引くことによって EG の長さを求めることはできますか。』ということでした。

もちろんできます。ここまでの解答が理解できた人はどうすれば良いかわかりますね。ではあなたにお任せします。

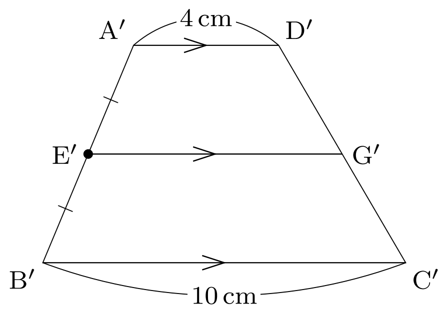
本文へ戻る

問 30. 例題 12 の解答がきちんと理解できたかどうか確認する問題でしたね。



『右の図を見てください。この図には台形が 2 つ描かれています。

上に描かれている台形 ABCD では AD と BC が平行になっていて、AD の長さは 4 cm で、BC の長さは 10 cm です。辺 AB の中点 E から辺 BC と平行な線を引いて行き、その線が台形の辺 DC と交わる点を G としました。



下に描かれている台形 A′B′C′D′ では A′D′ と B′C′ が平行になっていて、A′D′ の長さは 4 cm で、B′C′ の長さは 10 cm です。辺 A′B の中点 E′ から辺 B′C′ と平行な線を引いて行き、その線が台形の辺 D′C と交わる点を G′ としました。

ここまでの話は 台形 ABCD と台形 A′B′C′D′ でと全く同じです。しかし図を見るとわかるように、台形 ABCD と台形 A′B′C′D′ では高さが違います。以下の問に答えなさい。』ということでした。

(1) 『EG の長さを求めなさい。』という問題でした。

例題 12 の解答がきちんと理解できた人は対角線 DC または対角線 AC をひいて相似な三角形を見つけることにより、

$$\mathrm{EG} = 7\,\mathrm{cm}$$

であることがわかるでしょう。

(2) 『E′G′ の長さを求めなさい。』という問題でした。

例題 12 の解答がきちんと理解できた人は対角線 $\mathrm{D'C'}$ または対角線 $\mathrm{A'C'}$ をひいて相似な三角形を見つけることにより、

$$\mathrm{E'G'} = 7\,\mathrm{cm}$$

であることがわかるでしょう。

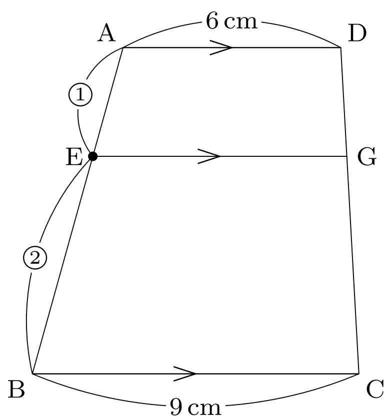
(3) 『EG の長さと $\mathrm{E'G'}$ の長さは同じでしたか？違いましたか？』という問題でした。

同じ（どちらも 7 cm）でしたね。

本文へ戻る

問 31. 例題 12 の解答がきちんと理解できたかどうか確認する問題でした。

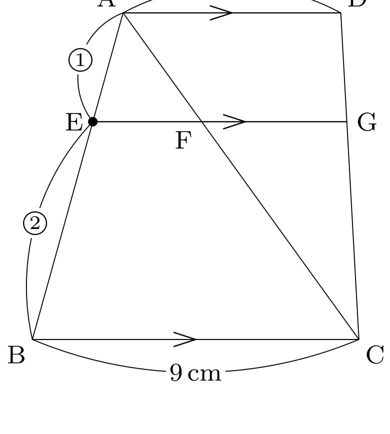
『右の図を見てください。AD と BC が平行になっている台形 ABCD があります。AD の長さは 6 cm で、BC の長さは 9 cm です。点 E は辺 AB 上にありますが $\mathrm{AE : EB} = 1 : 2$ となっています。点 E から辺 BC と平行な線を引いて行き、その線が台形の辺 DC と交わる点を G としました。このとき EG の長さを求めなさい。』ということでしたね。



右の図のように、対角線 AC をひいてみます。そしてここでは AC と EG の交点を F と呼ぶことにします。

まず △AEF と △ABC に注目してください。

∠EAF と ∠BAC の大きさは当然同じです。また、EG // BC なのですから同位角である ∠AEF と ∠ABC の大きさは同じです。というわけで、△AEF と △ABC では「2 組の角の大きさがそれぞれ等しい」ということ



になるので、

$$\triangle \mathrm{AEF} \backsim \triangle \mathrm{ABC}$$

であると断言できます。相似な図形では対応している辺の長さの比はどこでも同じですから、

$$\mathrm{EF} : \mathrm{BC} = \mathrm{AE} : \mathrm{AB} = 1 : 3$$

ということがわかります。つまり、EF の長さは BC の長さの $\dfrac{1}{3}$ なのです。ですから

$$\mathrm{EF} = 9 \times \frac{1}{3} = 3\,\mathrm{cm}$$

ということになります。

また、

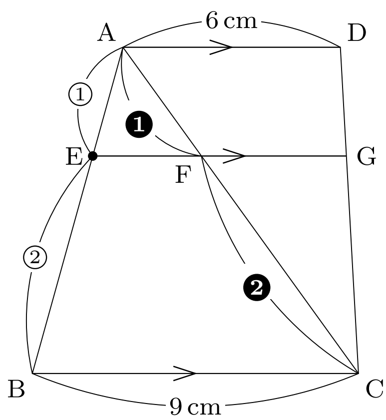
$$\mathrm{AF} : \mathrm{AC} = \mathrm{AE} : \mathrm{AB} = 1 : 3$$

なのですから

$$\mathrm{AF} : \mathrm{FC} = 1 : 2$$

ということもわかります。

次は △FCG と △ACD に注目してください。∠FCG と ∠ACD の大きさは当然同じです。また、EG // AD なのですから同位角である ∠FGC と ∠ADG の大きさは同じです。というわけで、△FCG と △ACD では「2 組の角の大きさがそれぞれ等しい」ということになるので、



$$\triangle \mathrm{FCG} \backsim \triangle \mathrm{ACD}$$

であると断言できます。相似な図形では対応している辺の長さの比はどこでも同じです

から、

$$\mathrm{FG} : \mathrm{AD} = \mathrm{CF} : \mathrm{CA} = 2 : 3$$

ということがわかります。つまり、FG の長さは AD の長さの $\dfrac{2}{3}$ なのです。ですから

$$\mathrm{FG} = 6 \times \frac{2}{3} = 4\,\mathrm{cm}$$

ということになります。

これまでに、EF の長さが $3\,\mathrm{cm}$ で FG の長さが $4\,\mathrm{cm}$ であることがわかりました。ですから

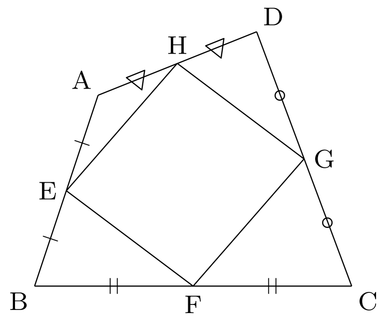
$$\mathrm{EG} = \mathrm{EF} + \mathrm{FG} = 3 + 4 = 7\,\mathrm{cm}$$

ということになります。

本文へ戻る

問 32. 例題 13 の解答が理解できたかどうか確認するための問題でした。

『どんな四角形でも 4 つの辺の中点をすべて結んで四角形を作ると平行四辺形ができることを証明しようと思います。つまり、右の図の四角形 ABCD で、辺 AB 辺 BC、辺 CD、辺 DA の中点をそれぞれ E、F、G、H とし、さらに E と F、F と G、F と H、H と E を結んで四角形を作ると、 実は、四角形 EFGH は平行四辺形になることを証明しようと思います。次の証明の空欄に正しい言葉、記号、文を記入しなさい。』ということでしたね。



（証明）

B と D を結びます。すると、$\triangle$ABD と $\triangle$CDB が現れます。

まず、$\triangle$ABD に注目します。

E は AB の中点で、H は AD の中点ですから中点連結定理より、

$$\text{EH と BD は } \boxed{\text{平行}} \cdots ①$$

$$\text{EH の長さは BD の長さの } \boxed{\text{半分}} \cdots ②$$

と断言できます。

次は $\triangle$CBD に注目します。

F は CB の中点で、G は CD の中点ですから中点連結定理より、

$$\boxed{\text{FG}} \text{ と } \boxed{\text{BD}} \text{ は平行} \cdots ③$$

$$\boxed{\text{FG}} \text{ の長さは } \boxed{\text{BD}} \text{ の長さの半分} \cdots ④$$

と断言できます。

①、③より、EH、BD、FG はすべて平行であるということになるので、特に、

$$\text{EH と FG は } \boxed{\text{平行}} \cdots ⑤$$

と断言できます。

②、④より、EH の長さと FG の長さはどちらも BD の長さの半分であるということになるので、特に、

EH の長さと FG の長さは $\boxed{\text{等しい}}$ $\cdots$ ⑥

と断言できます。

⑤、⑥より四角形 EFGH では、

$\boxed{\text{1 組の向かい合う辺が平行で長さも等しい}}$

ということが判明しました。ですから、

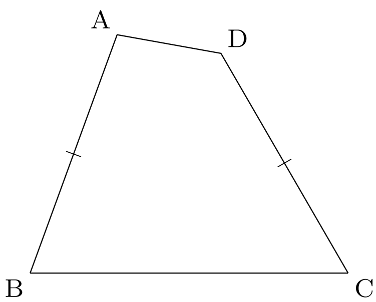
四角形 EFGH は平行四辺形である

と断言できます。

（証明おわり）

本文へ戻る

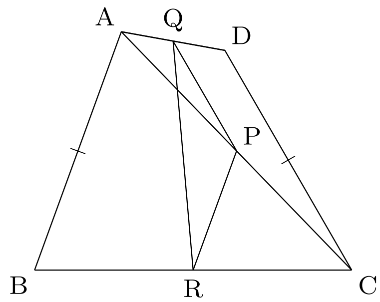
問 33. 右の図のような、AB の長さと CD の長さが等しくなっている四角形 ABCD があるのでしたね。



(1) 『四角形 ABCD の対角線 AC の中点を P、辺 AD の中点を Q、辺 BC の中点を R とし、P、Q、R を結んで △PQR を作ります。このようにすると、実は △PQR はある特徴を持った三角形になります。△PQR にはどんな特徴があると思いますか？あなたの考えを答えなさい。』ということでした。

右の図を見てください。図を完成してみました。

このようにしてできる △PQR はきっと二等辺三角形です。

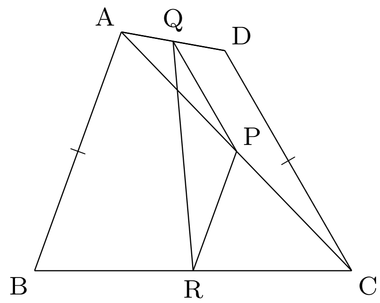


(2) 『△PQR には、あなたが (1) で答えた特徴があるということを証明しなさい。』ということでした。

（証明）

まず、△ABC に注目してください。

P、R はそれぞれ CA、CB の中点ですから、中点連結定理より、



PR の長さは AB の半分 ……· ①

となっています。

次は、△ACD に注目してください。

P、Q はそれぞれ AC、AD の中点ですから、中点連結定理より、

PQ の長さは CD の半分 ………………… ②

となっています。

ところでこの問題では、もとから AB の長さと CD の長さが等しくなっています。

ですから①、②によると、PR の長さも PQ の長さも AB の長さの半分ということになるので

$$\mathrm{PR} = \mathrm{PQ}$$

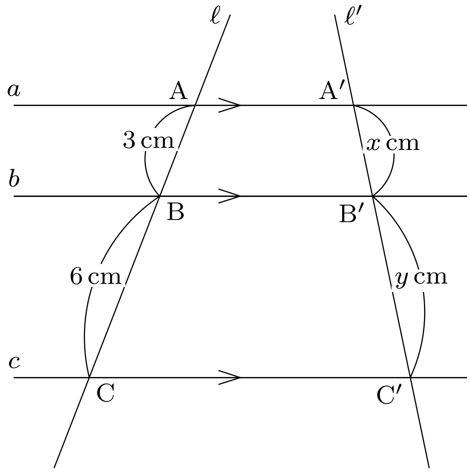
が成立っているわけです。つまり △PQR は二等辺三角形であると断言できます。

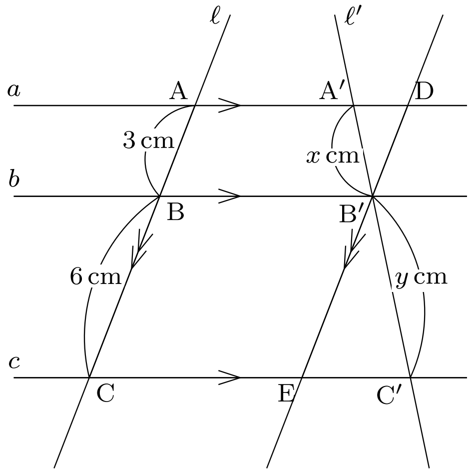
（証明終わり）

本文へ戻る

問 34. 134 ページから始まる質問とその答えが理解できたかどうか確認する問題でした。『以下の文の空欄に正しい数、言葉、文を記入しなさい。』ということでしたね。

(1) 右の図で、3 つの直線 a、b、c は平行になっているとします。このとき $x : y$ が何対何になっているのか、きちんと根拠を示して考えてみることにします。





右の図を見てください。ℓ に平行な直線を点 B′ を通るように引き、その直線と直線 a、直線 c との交点をそれぞれ D、E としました。

四角形 ABB′D に注目すると、AB と DB′ は平行で、AD と BB′ も平行です。ですから四角形 ABB′D は $\boxed{\text{平行四辺}}$ 形です。平行四辺形の向かい合う辺の長さは $\boxed{\text{等しい}}$ ので、AB の長さと DB′ の長さは $\boxed{\text{等しい}}$ ということになります。今、AB の長さは 3 (cm) ですから、DB′ の長さも $\boxed{3}$ (cm) ということになります。

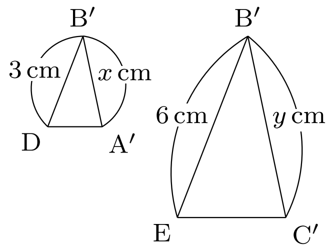
同じように考えると、四角形 BCEB′ も平行四辺形であることがわかります。ですから、向かい合っている辺の長さは等しいということになり、B′E の長さは $\boxed{6}$ (cm) ということになります。

次は △B′DA′ と △B′EC′ に注目してみます。

実はこの 2 つの三角形は相似です。どうしてなのか説明することにします。直線 a

と直線 c はそもそも平行です。平行線では $\boxed{錯}$ 角は等しいのですから、$\triangle \mathrm{B'DA'}$ の $\angle \mathrm{D}$ と $\triangle \mathrm{B'EC'}$ の $\angle \mathrm{E}$ の大きさは等しいということになります。また、$\triangle \mathrm{B'DA'}$ の $\angle \mathrm{B'}$ と $\triangle \mathrm{B'EC'}$ の $\angle \mathrm{B'}$ は対頂角の関係にありますから大きさは等しいわけです。というわけで、$\triangle \mathrm{B'DA'}$ と $\triangle \mathrm{B'EC'}$ では $\boxed{\text{2 組の角の大きさがそれぞれ等しい}}$ ということが判明しました。ですからこの 2 つの三角形は相似であると断言できるのです。

それではここで、相似であることが判明した $\triangle \mathrm{B'DA'}$ と $\triangle \mathrm{B'EC'}$ を図から取り出し並べて描いて見ることにします。右の図を見てください。2 つの三角形を比べやすくするために、この図では $\triangle \mathrm{B'DA'}$ を回転して向きを変えてあります。また、すでにわかっている辺の長さも記入してあります。

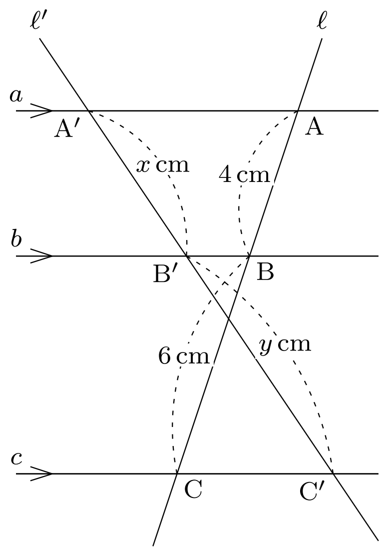


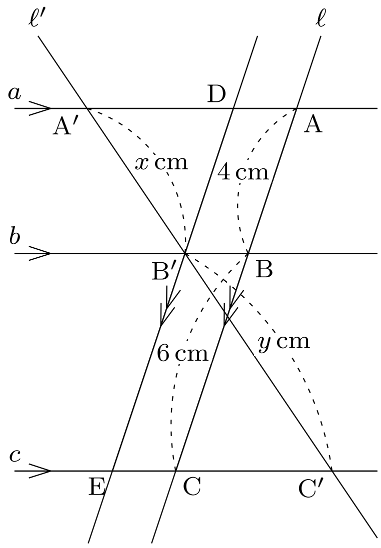
相似な三角形では対応する部分の長さの比はどこでも等しくなっているのですよね。ということは、この図を見れば、

$$x : y = 3 : 6 = \boxed{1} : \boxed{2}$$

であることがわかりますね。

(2) 右の図で、3 つの直線 a、b、c は平行になっているとします。このとき $x : y$ が何対何になっているのか、きちんと根拠を示して考えてみることにします。





右の図を見てください。ℓ に平行な直線を点 B$'$ を通るように引き、その直線と直線 a、直線 c との交点をそれぞれ D、E としました。

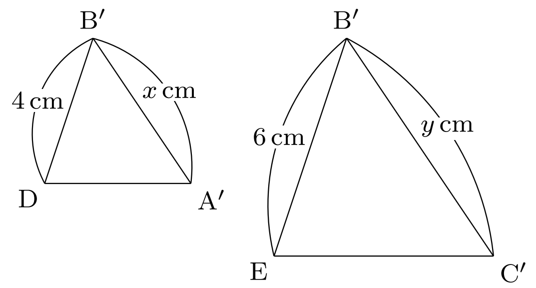
四角形 DB$'$BA に注目してみます。今 ℓ と平行な直線を描いたのですから四角形 DB$'$BA の辺 AB と辺 $\boxed{\mathrm{DB}'}$ はもちろん平行です。またもともと直線 a と直線 b は平行なのですから、四角形 DB$'$BA の辺 DA と辺 $\boxed{\mathrm{B}'\mathrm{B}}$ はもちろん平行です。ということは、そもそも向かい合っている 2 組の辺が平行になっている四角形を平行四辺形と呼んでいるわけですから四角形 DB$'$BA は $\boxed{\text{平行四辺}}$ 形であると断言できます。平行四辺形の向かい合う辺の長さは $\boxed{\text{等しい}}$ ので、AB の長さと DB$'$ の長さは $\boxed{\text{等しい}}$ ということになります。今、AB の長さは 4 (cm) ですから、DB$'$ の長さも $\boxed{4}$ (cm) ということになります。

同じように考えると、四角形 B$'$ECB も $\boxed{\text{平行四辺}}$ 形であることがわかります。ですから、向かい合っている辺の長さは等しいということになり、B$'$E の長さは $\boxed{6}$ (cm) ということになります。

次は △B$'$DA$'$ と △B$'$EC$'$ に注目してみます。

実はこの 2 つの三角形は相似です。どうしてなのか説明することにします。直線 a と直線 c はそもそも平行です。平行線では 錯角は等しいのですから、△B$'$DA$'$ の ∠D と △B$'$EC$'$ の ∠ $\boxed{\mathrm{E}}$ の大きさは等しいということになります。また、△B$'$DA$'$ の ∠B$'$ と △B$'$EC$'$ の ∠B$'$ は対頂角の関係にありますから大きさは等しいわけです。というわけで、△B$'$DA$'$ と △B$'$EC$'$ では $\boxed{\text{2 組の角の大きさがそれぞれ等しい}}$ ということが判明しました。ですからこの 2 つの三角形は相似であると断言できるのです。

それではここで、相似であることが判明した $\triangle B'DA'$ と $\triangle B'EC'$ を図から取り出し並べて描いて見ることにします。右の図を見てください。2 つの三角形を比べやすくするために、この図では $\triangle B'DA'$ を回転して向きを変えてあります。また、すでにわかっている辺の長さも記入してあります。



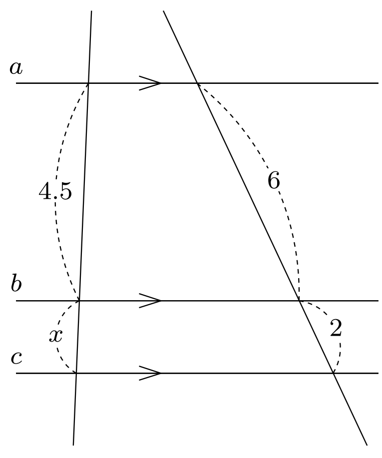
相似な三角形では対応する部分の長さの比はどこでも等しくなっているのですよね。ということは、この図を見れば、

$$x : y = 4 : 6 = \boxed{2} : \boxed{3}$$

であることがわかりますね。 本文へ戻る

問 35. 平行線と比の関係を使う練習でした。例題 14 の解答がきちんと理解できた人はくどい説明は必要ないですね。

(1) 3 直線 a、b、c は平行なのですから



$$4.5 : x = 6 : 2$$

が成り立っています。この式からまず、

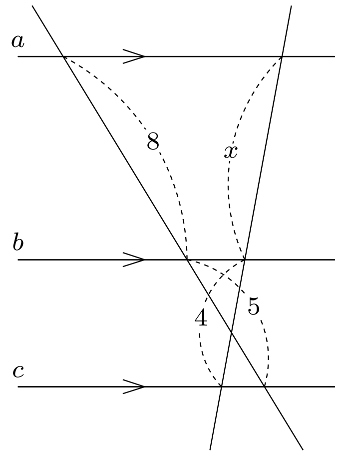
$$6x = 4.5 \times 2$$

となり、さらに

$$x = \frac{3}{2} = 1.5$$

であることがわかります。

(2) 3 直線 a、b、c は平行なのですから



$$4 : x = 5 : 8$$

が成り立っています。この式からまず、

$$5x = 4 \times 8$$

となり、さらに

$$x = \frac{32}{5} = 6.4$$

であることがわかります。

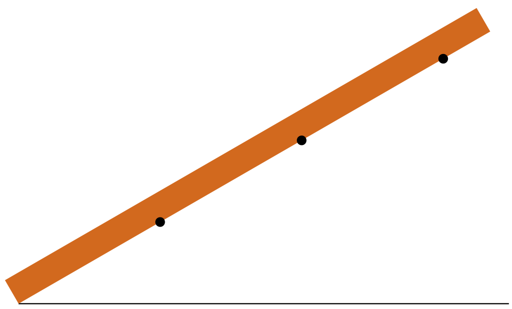
本文へ戻る

問 36. 例 6 の説明が理解できた人のための問題でした。

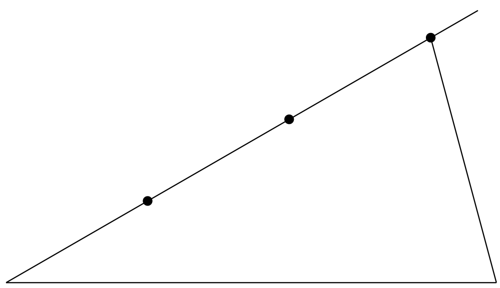
『 例 6 で説明したように「3 等分専用定規」を使うと、どんな線分でも 3 等分できる理由をきちんと説明しなさい。』ということでしたね。

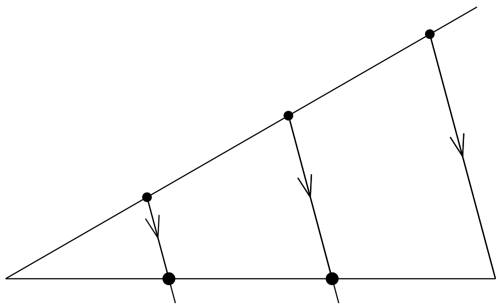
初めに、どんな方法で 3 等分するのだったか簡単に振り返っておきましょう。

まず、右の図のように、「3 等分専用定規」の左端を「3 等分しようとしている線分」の左端にあわせ、「3 等分専用定規」を適当な向きに置くのでした。



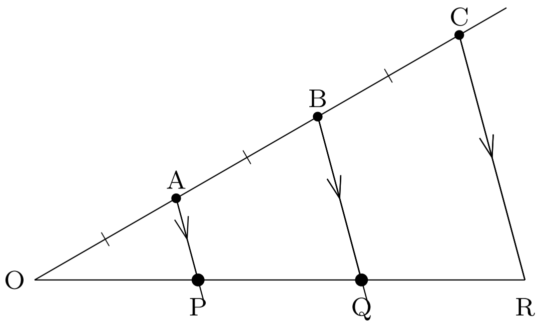
次は、右の図のように「3 等分定規についている 3 つめのマーク」と「初めに描いてあった線分の右端」をまっすぐ結ぶのでした。





そして最後に、右の図のように「3 等分定規に付いているマーク」から「3 等分しようとしている線分」へ向かってさっき描いた線と平行な線を描いていき、「初めに描いてあった線分」とぶつかるところにマークをつけるのでした。

では、なぜこの方法で初めにあった線分が 3 等分されるのか説明することにしましょう。



右の図を見てください。説明のためにいろいろな点に名前を付けておきました。

右斜め上へ伸びている直線は 3 等分定規をおいてあったところです。そして 3 等分定規を使って印を付けたわけです。ですから

$$\mathrm{OA} : \mathrm{AB} : \mathrm{BC} = 1 : 1 : 1 \qquad \cdots\cdots\cdots \ ①$$

となっています。

また、AP と BQ と CR は平行になるように描いたのでしたね。 ですから、151 ページで学んだ「重要な事実：平行線どうしの間隔と比」を思い出してみると、

$$\mathrm{OP} : \mathrm{PQ} : \mathrm{QR} = \mathrm{OA} : \mathrm{AB} : \mathrm{BC} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ②$$

が成り立っているはずです。

以上①、②から

$$\mathrm{OP} : \mathrm{PQ} : \mathrm{QR} = 1 : 1 : 1$$

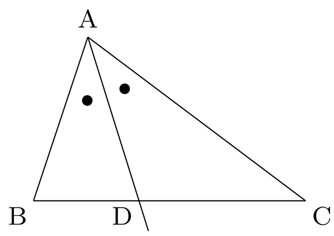
であると断言できます。これは、初めにあった線分 OR が、点 P、点 Q で 3 等分さているということを意味しています。

本文へ戻る

問 37. あなたはきっと、例 6 の説明が理解できていることと思います。ですからこの問題はあなたにお任せします。

本文へ戻る

問 38. 例題 15 の解答が理解できているかどうか確認する問題でした。

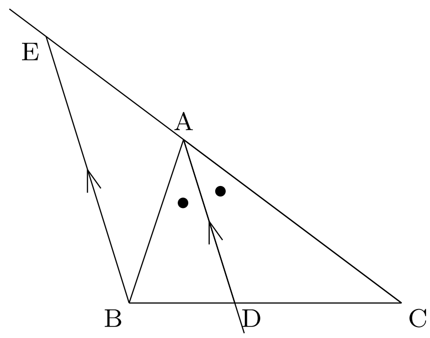


『A さんはある日、三角形の角の二等分線には面白い性質があるということに気がつきました。右の図を見てください。△ABC の ∠A の二等分線を向かい合う辺にぶつかるまで引いていきます。この図では ∠A の二等分線と辺 BC の交点を D と呼ぶことにします。このとき、どうも、

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$$

ということが成り立っているということに気づいたのです。しかし、どうしてこんなことが成り立つのか A さんにはわかりませんでした。そこで、A さんの代わりにあなたにこのことを証明してもらうことにします。以下の文の空欄に正しい記号、言葉を記入して証明を完成してください。』ということでしたね。

（証明）



点 B を通り AD に平行な線と CA を A の方に延長した線の交点を E とします。

AD と BE は平行なので平行線と比の性質から、

$$\mathrm{EA} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \boxed{\mathrm{DC}} \cdots ①$$

が成り立ちます。

AD と BE は平行なので同位角の大きさは等しいはずです。ですから、

$$\angle\mathrm{BEA} = \angle\boxed{\mathrm{DAC}} \cdots ②$$

が成り立ちます。

AD と BE は平行なので錯角の大きさは等しいはずです。ですから、

$$\angle\mathrm{ABE} = \angle\boxed{\mathrm{BAD}} \cdots ③$$

が成り立ちます。

この問題ではもともと AD は $\angle$BAC の二等分線ですから、

$$\angle \mathrm{DAC} = \angle \mathrm{BAD} \cdots ④$$

が成り立っています。

ということは、②、③、④より、△ABE では、

$$\angle \mathrm{BEA} = \angle \mathrm{ABE} \cdots ⑤$$

が成り立っていると断言できます。ですから、△ABE は $\boxed{\text{二等}}$ 辺三角形です。特に、

$$\mathrm{EA} = \boxed{\mathrm{AB}} \cdots ⑥$$

が成り立っていると断言できます。

そうすると、①、⑥から、

$$\boxed{\mathrm{AB}} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \boxed{\mathrm{DC}}$$

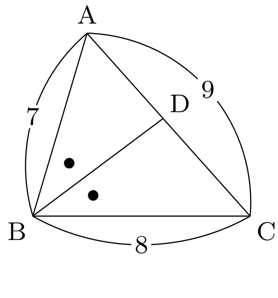
が成り立っていることになります。

（証明終わり）

本文へ戻る

問 39.

『右の図は △ABC の $\angle$B の二等分線をひき、辺 AC とぶつかる点を D したものです。AB = 7、AC = 9、BC = 8 のとき、AD の長さと DC の長さを求めなさい。』という問題でした。



15 で証明したことを思い出すと、この三角形では、

$$8 : 7 = \mathrm{DC} : \mathrm{AD}$$

となっていると断言できます。

そうすると、AD の長さは AC の長さを 15 等分（8 と 7 をたすと 15 ですよね）したうちの 7 個分であることがわかります。よって、

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AC} \times \frac{7}{15} = 9 \times \frac{7}{15} = \frac{21}{5}$$

であるとわかります。

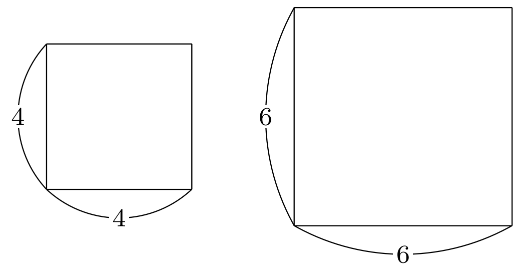
また、DC の長さは AC の長さを 15 等分（8 と 7 をたすと 15 ですよね）したうちの 8 個分であることがわかります。よって、

$$\mathrm{DC} = \mathrm{AC} \times \frac{8}{15} = 9 \times \frac{8}{15} = \frac{24}{5}$$

であるとわかります。

本文へ戻る

問 40. 『右の図の 2 つの正方形について考えることにします。以下の問に答えなさい。』ということでした。



(1) 『2 つの正方形は相似であるといえますか？相似だといえると思った人は相似比も答えなさい。』という問題でしたね。

相似であるといえます。相似比は 2 : 3 です。

(2) 『2 つの正方形の面積をそれぞれ求めなさい。』という問題でしたね。

小さい正方形の面積は 16、大きい正方形の面積は 36 ですね。

(3) 『次の文に正しい言葉、数を記入してください。』という問題でしたね。

(2) で計算した 2 つの正方形の面積を使うと

$$\begin{aligned}\text{小さい正方形の面積} : \text{大きい正方形の面積} &= 16 : 36 \\ &= \boxed{4} : \boxed{9}\end{aligned}$$

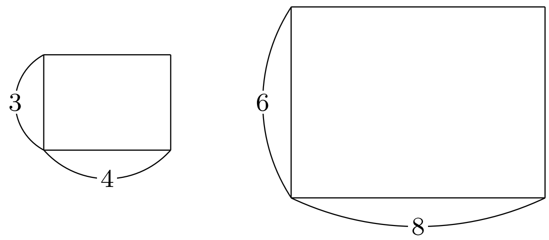
となります。ところで、$4:9$ という比は $2^2:3^2$ というように書き換えられます。一方 (1) では 2 つの正方形の相似比は $2:3$ であることがわかっています。ですからもしかすると、

2 つの相似な正方形の相似比が $m:n$ のとき、面積比は $\boxed{m}^2:\boxed{n}^2$ になる

のかもしれません。

本文へ戻る

問 41. 『右の図の 2 つの長方形について考えることにします。以下の問に答えなさい。』ということでした。



(1) 『2 つの長方形は相似であるといえますか？相似だといえると思った人は相似比も答えなさい。』という問題でしたね。

この 2 つの長方形では

横の辺の長さの比は $4:8$、つまり $1:2$

縦の辺の長さの比は $3:6$、つまり $1:2$

となっています。ですから横の辺の長さの比と縦の辺の長さの比は一致しています。ということは、小さい長方形を横にも縦にも同じように拡大すれば大きい長方形になります。ですから、小さい長方形と大きい長方形は大きさは違いますが形は同じと言えます。これで 2 つの長方形が相似であることがはっきりしました。そして、この 2 つの長方形の相似比は $1:2$ ということになります。

(2) 『2 つの長方形の面積をそれぞれ求めなさい。』という問題でしたね。

小さい長方形の面積は 12、大きい長方形の面積は 48 です。

(3) 次の文に正しい言葉、数を記入してください。

(2) で計算した 2 つの長方形の面積を使うと

$$
\begin{aligned}
\text{小さい長方形の面積} : \text{大きい長方形の面積} &= 12 : 48 \\
&= \boxed{1} : \boxed{4}
\end{aligned}
$$

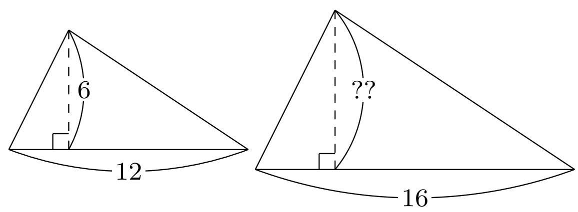
となります。ところで、1 : 4 という比は $1^2 : 2^2$ というように書き換えられます。一方 (1) では 2 つの長方形の相似比は 1 : 2 であることがわかっています。ですからもしかすると、

2 つの相似な長方形の相似比が $m : n$ のとき、面積比は $\boxed{m}^2 : \boxed{n}^2$ になる

のかもしれません。

本文へ戻る

問 42. 『右の図の 2 つの三角形について考えることにします。ただし、この 2 つの三角形は相似になっているとします。以下の問に答えなさい。』ということでした。



(1) 『2 つの三角形の相似比を答えなさい。』という問題でしたね。

小さい三角形の長さが 12 の辺は大きい三角形の長さが 16 の辺に対応しています。ですから、2 つの三角形の相似比 12 : 16 つまり 3 : 4 ということになりますね。

(2) 『大きい三角形の ?? の長さを求めなさい。』という問題でしたね。

相似な図形では対応している部分の長さの比はどこでも同じです。小さい三角形の「長さが 12 の辺」は大きい三角形の「長さが 16 の辺」に対応しています。ですから、この 2 つの相似な三角形では、対応している部分の長さの比はどこでも 12 : 16、つまり 3 : 4 になっているはずです。ですから、小さい三角形の「点線で描かれた長さが 6 の部分」と大きい三角形の「点線で描かれた長さが ?? の部分」の比も 3 : 4 のはずです。ということは ?? = 8 ということになりますね。

(3) 『2 つの三角形の面積をそれぞれ求めなさい。』という問題でしたね。

$$小さい三角形の面積 = \frac{1}{2} \times 12 \times 6 = 36$$

$$大きい三角形の面積 = \frac{1}{2} \times 16 \times 8 = 64$$

となります。

(4) 『次の文に正しい言葉、数を記入してください。』という問題でしたね。

(3) で計算した 2 つの三角形の面積を使うと

$$\begin{aligned} 小さい三角形の面積 : 大きい三角形の面積 &= 36 : 64 \\ &= \boxed{9} : \boxed{16} \end{aligned}$$

となります。ところで、9 : 16 という比は $3^2 : 4^2$ というように書き換えられます。一方 (1) では 2 つの三角形の相似比は 3 : 4 であることがわかっています。ですからもしかすると、

2 つの相似な三角形の相似比が $m : n$ のとき、面積比は $\boxed{m}^2 : \boxed{n}^2$ になる

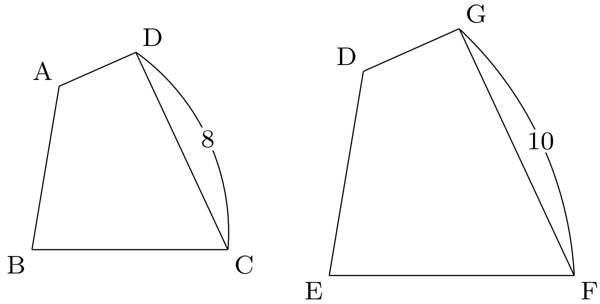
のかもしれません。

本文へ戻る

問 43. 『右の図を見てください。四角形 ABCD と四角形 DEFG があります。そして

四角形 ABCD ∽ 四角形 DEFG

となっているとします。また、辺 CD の長さは 8 で辺 FG の長さは 10 であるとします。このとき、以下の問に答えなさい。』ということでした。



(1) 『四角形 ABCD の周の長さと四角形 DEFG の周の長さの比を答えなさい。』とい

う問題でしたね。

この 2 つの四角形は相似で辺 CD は辺 FG に対応しています。そして辺 CD の長さは 8 で辺 FG の長さは 10 です。ですから、四角形 ABCD と四角形 DEFG の相似比は 8 : 10 つまり 4 : 5 です。相似な図形では対応している部分の比はどこでも同じなのですから、四角形 ABCD の周の長さと四角形 DEFG の周の長さの比も 4 : 5 です。

(2) 『四角形 ABCD の面積と四角形 DEFG の面積の比を答えなさい。』という問題でしたね。

189 ページで学んだ「重要な事実」によると、「2 つの相似な図形があり、相似比は $m : n$ になっているとしたら、2 つの相似な図形がどんな形をしていようと面積比は $m^2 : n^2$ になっている」のでした。

この問題では四角形 ABCD と四角形 DEFG の相似比は 4 : 5 です。ですから

$$\text{四角形 ABCD と四角形 DEFG の面積比} = 4^2 : 5^2 = 16 : 25$$

となっているはずです。

(3) 『四角形 ABCD の面積がもし 36 だったら四角形 DEFG の面積はどれだけですか。』という問題でしたね。

(2) で四角形 ABCD と四角形 DEFG の面積比は 16 : 25 であることがわかりました。ですから、四角形 ABCD の面積がもし 36 だったら

$$36 : \text{四角形 DEFG の面積} = 16 : 25$$

が成り立ちます。この式から

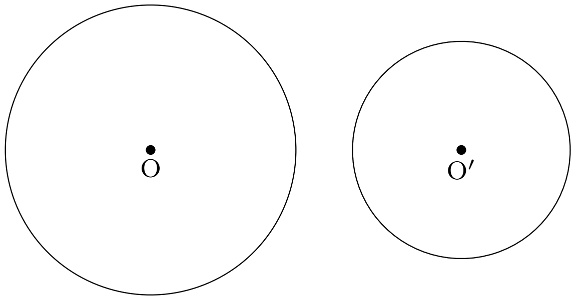
$$16 \times \text{四角形 DEFG の面積} = 36 \times 25$$

さらに

$$四角形 \mathrm{DEFG} の面積 = \frac{225}{4}$$

ということがわかります。 本文へ戻る

問 44. 『右の図を見てください。円 O と円 O′ があります。以下の問に答えなさい。』ということでした。



(1) 『円 O と円 O′ は相似ですか。』という問題でしたね。

円にもいろいろな大きさのものがありますが、形はどれも同じです。ですから、2 つの円があったら必ず相似になっています。

(2) 『円 O と円 O′ の相似比が 4 : 3 のとき、円 O の周の長さと円 O′ の周の長さの比を答えなさい。』という問題でしたね。

相似な図形では対応している部分の比はどこでも同じなのですから、円 O の周の長さと円 O′ の周の長さの比も 4 : 3 です。

(3) 『円 O と円 O′ の相似比が 4 : 3 のとき円 O の面積と円 O′ の面積の比を答えなさい。』という問題でしたね。

189 ページで学んだ「重要な事実」によると、「2 つの相似な図形があり、相似比は $m : n$ になっているとしたら、2 つの相似な図形がどんな形をしていようと面積比は $m^2 : n^2$ になっている」のでした。

この問題では円 O と円 O′ の相似比は 4 : 3 です。ですから

$$円 \mathrm{O} と円 \mathrm{O'} の面積比 = 4^2 : 3^2 = 16 : 9$$

となっているはずです。

(4) 『円 O と円 O′ の相似比が 4 : 3 のとき、円 O の面積がもし 48π だったら円 O′ の面積はどれだけですか。』という問題でしたね。

$$\text{円 O と円 O}' \text{ の面積比} = 4^2 : 3^2 = 16 : 9$$

となっているはずです。ですから、円 O の面積がもし 48π だったら

$$48\pi : \text{円 O}' \text{ の面積} = 16 : 9$$

が成り立っています。この式から

$$16 \times \text{円 O}' \text{ の面積} = 48\pi \times 9$$

さらに

$$\text{円 O}' \text{ の面積} = 27\pi$$

ということがわかります。

(5) 『円 O と円 O′ の相似比が 4 : 3 のとき、円 O の面積がもし 32 だったら円 O′ の面積はどれだけですか。』という問題でしたね。

$$\text{円 O と円 O}' \text{ の面積比} = 4^2 : 3^2 = 16 : 9$$

となっているはずです。ですから、円 O の面積がもし 32 だったら

$$32 : \text{円 O}' \text{ の面積} = 16 : 9$$

が成り立っています。この式から

$$16 \times \text{円 O}' \text{ の面積} = 32 \times 9$$

さらに

$$\text{円 O}' \text{ の面積} = 18$$

ということがわかります。

本文へ戻る

問 45. 『紙にある図形が描かれています。この図形の面積は $40\,\text{cm}^2$ です。コピー機を使ってこの図形を（縦方向にも横方向にも）倍率 1.6 倍で拡大しました。拡大後の図形の面積を求めなさい。』という問題でした。

コピー機を使ってこの図形を（縦方向にも横方向にも）倍率 1.7 倍で拡大したのですから、拡大前の図形と拡大後の図形は相似です。そして相似比は $1:1.6$ です。ということは、面積比は $1:1.6^2$、つまり $1:2.56$ ということになります。（長さは 1.6 倍、面積は 2.56 倍になるわけですね。）よって、

$$\text{拡大後の図形の面積} = 40 \times 2.56 = 102.4\,\mathrm{cm}^2$$

ということになります。

本文へ戻る

問 46. 『紙にある図形が描かれています。この図形の面積は $75\,\mathrm{cm}^2$ です。コピー機を使ってこの図形を（縦方向にも横方向にも）倍率 $\dfrac{3}{5}$ 倍で縮小しました。縮小後の図形の面積を求めなさい。』という問題でした。

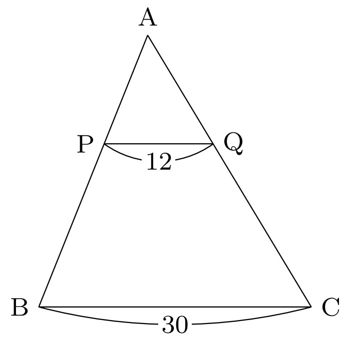
コピー機を使ってこの図形を（縦方向にも横方向にも）倍率 $\dfrac{3}{5}$ 倍で縮小したのですから、縮小前の図形と縮小後の図形は相似です。そして相似比は $1:\dfrac{3}{5}$ です。ということは、面積比は $1:\left(\dfrac{3}{5}\right)^2$、つまり $1:\dfrac{9}{25}$ ということになります。（長さは $\dfrac{3}{5}$ 倍、面積は $\dfrac{9}{25}$ 倍になるわけですね。）よって、

$$\text{縮小後の図形の面積} = 75 \times \frac{9}{25} = 27\,\mathrm{cm}^2$$

ということになります。

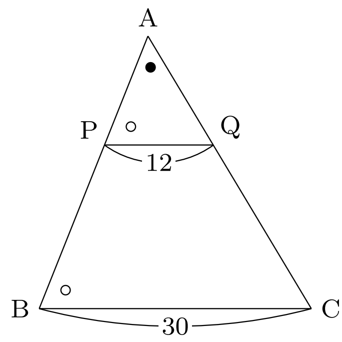
本文へ戻る

問 47. 『右の図を見てください。△ABC の辺 AB 上に点 P 、辺 AC 上に点 Q があり、PQ//BC となっているとします。また、PQ の長さは 12 で BC の長さは 30 であるとします。このとき、以下の問に答えなさい。』ということでした。



(1) 『この図の中には相似な三角形が隠れています。どの三角形とどの三角形が相似になっているのか答えてください。また、相似になっている証拠を見せてください。』という問題でしたね。

△APQ と △ABC が相似になっています。



（証明）

右の図を見てください。

△APQ と △ABC では ● マークのついている角は共通です。ですから

$$\angle \mathrm{PAQ} = \angle \mathrm{BAC} \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

が成り立っています。

ところで、平行線の同位角は等しいのでした。そして今 PQ//BC となっています。ですから、この図で ∘ のついている 2 つの角の大きさは同じです。つまり

$$\angle \mathrm{APQ} = \angle \mathrm{ABC} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

が成り立っています。

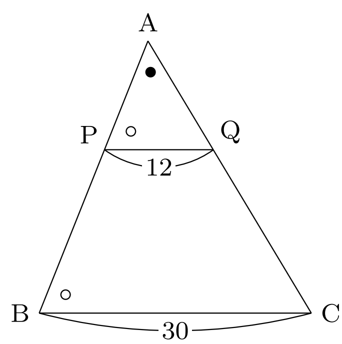
①、②より、△APQ と △ABC では「2 組の角の大きさが等しい」ということがわかりました。ですから

$$\triangle \mathrm{APQ} \backsim \triangle \mathrm{ABC}$$

であると断言できます。

（証明終わり）

(2) 『△APQ と △ABC の相似比を答えてください。』という問題でしたね。



(1) で △APQ と △ABC は相似であることがわかりました。では右の図を見てください。PQ の長さは 12 で、BC の長さは 30 ですよね。相似比というのは対応している部分の長さの比ですから、

$$\triangle \mathrm{APQ}\ \text{と}\ \triangle \mathrm{ABC}\ \text{の相似比} = 12 : 30 = 2 : 5$$

ということになります。

(3) 『$\triangle$APQ と $\triangle$ABC の面積比を答えてください。』という問題でしたね。

(2) で $\triangle$APQ と $\triangle$ABC の相似比は $2:5$ であることがわかりました。ということは

$$\triangle\text{APQ と }\triangle\text{ABC の面積比} = 2^2 : 5^2 = 4 : 25$$

ということになります。

(4) 『$\triangle$APQ と台形 PBCQ の面積比を答えてください。』という問題でしたね。

(3) で $\triangle$ABC と台形 PQBC の面積比は $4:25$ であることがわかりました。ということは、もし $\triangle$APQ の面積が 4 だとしたら、そうすると、このとき、

$$\text{台形 PQBC の面積} = 25 - 4 = 21$$

ということになります。つまり、$\triangle$APQ の面積が 4 だとすれば台形 PQBC の面積は 21 になるわけです。ですから、

$$\triangle\text{ABC と台形 PQBC の面積比} = 4 : 21$$

ということになります。

(5) 『もし $\triangle$APQ の面積が 36 だとしたら、台形 PBCQ の面積はいくつですか。』という問題でしたね。

(4) で $\triangle$ABC と台形 PQBC の面積比は $4:21$ であることがわかりました。ということは、もし $\triangle$APQ の面積が 36 だとしたら、

$$36 : \text{台形 PQBC の面積} = 4 : 21$$

が成立っています。この式から

$$4 \times \text{台形 PQBC の面積} = 36 \times 21$$

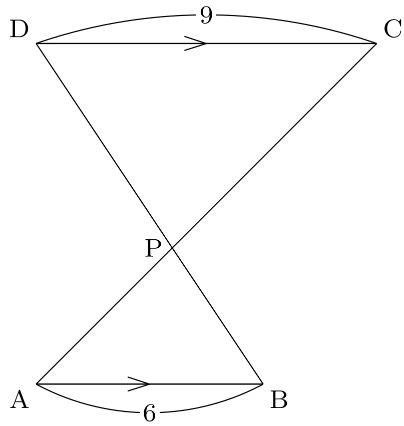
さらに

$$\text{台形 PQBC の面積} = 189$$

ということがわかります。

本文へ戻る

問 48. 『右の図では AB//CD であるとします。また AB の長さは 6 で AB の長さは 9 であるとします。このとき以下の問に答えなさい。』ということでした。



(1) 『△PCD の周の長さが 24 のとき、△PAB の周の長さはいくつですか。』という問題でしたね。

△PCD の周の長さが 24 のとき、△PAB は相似です。（対頂角は等しいとか、平行線の錯角は等しいとかうことを理解している人は、この 2 つの三角形では 2 組の角の大きさが等しくなっていることが納得いくはずです。）

AB は CD に対応し、AB の長さは 6 で AB の長さは 9 ですから

$$\triangle\text{PAB と }\triangle\text{PCD の相似比} = 6 : 9 = 2 : 3$$

ということがわかります。

相似な図形では対応している部分の長さの比はどこでも同じです。ですから

$$\triangle\text{PAB の周の長さと }\triangle\text{PCD の周の長さ} = 2 : 3$$

となっているはずです。そうすると、△PCD の周の長さが 24 のとき

$$24 : \triangle\text{PCD の周の長さ} = 2 : 3$$

が成り立っていることになります。この式から

$$\triangle\text{PCD の周の長さ} = 36$$

ということがわかります。

(2) 『△PCD の面積が 36 のとき、△PAB の面積はいくつですか。』という問題でしたね。

$$\triangle \mathrm{PAB} \text{ と } \triangle \mathrm{PCD} \text{ の相似比} = 2 : 3$$

ということがわかっているのですから、

$$\triangle \mathrm{PAB} \text{ と } \triangle \mathrm{PCD} \text{ の面積比} = 2^2 : 3^2 = 4 : 9$$

ということになります。そうすると、△PCD の面積が 36 のとき

$$\triangle \mathrm{PAB} \text{ の面積} : 36 = 4 : 9$$

ということが成り立っているはずです。この式から

$$\triangle \mathrm{PAB} \text{ の面積} = 16$$

ということがわかります。

本文へ戻る

問 49. ある種の 2 つの立体があるとき、その 2 つの立体が必ず相似になるのか必ずしも相似にはならないのか考える問題でした。

(1) 『2 つの球があったら、その 2 つの球は必ず相似になっているといえますか？』ということでした。

必ず相似になりますよね。

(2) 『2 つの円柱があったら、その 2 つの円柱は必ず相似になっているといえますか？』ということでした。

必ず相似になるとは言えません。相似でないこともあります。

(3) 『2 つの三角柱があったら、その 2 つの三角柱は必ず相似になっているといえますか？』ということでした。

必ず相似になるとは言えません。相似でないこともあります。

(4) 『2 つの正三角柱があったら、その 2 つの正三角柱は必ず相似になっているといえますか？』ということでした。

必ず相似になるとは言えません。相似でないこともあります。

(5) 『2 つの四角すいがあったら、その 2 つの四角すいは必ず相似になっているといえますか？』ということでした。

必ず相似になるとは言えません。相似でないこともあります。

(6) 『2 つの正四角すいがあったら、その 2 つの正四角すいは必ず相似になっているといえますか？』ということでした。

必ず相似になるとは言えません。相似でないこともあります。

(7) 『2 つの三角すいがあったら、その 2 つの三角すいは必ず相似になっているといえますか？』ということでした。

必ず相似になるとは言えません。相似でないこともあります。

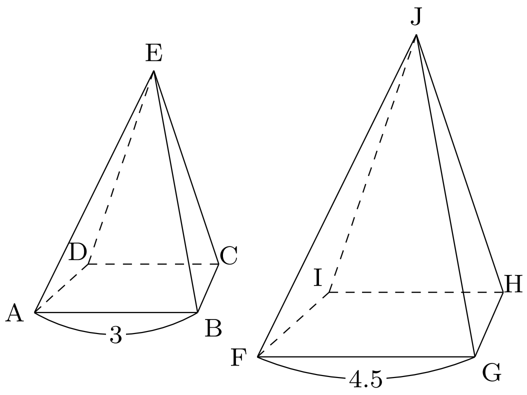
(8) 『2 つの正三角すいがあったら、その 2 つの正三角すいは必ず相似になっているといえますか？』ということでした。

必ず相似になるとは言えません。相似でないこともあります。

本文へ戻る

問 50.

『右の図を見てください。四角すい ABCDE と四角すい FGHIJ があります。そして



四角すい ABCDE ∽ 四角すい FGHIJ

となっているとします。また、辺 AB の長さは 3 で辺 FG の長さは 4.5 であるとします。このとき、以下の問に答えなさい。』ということでした。

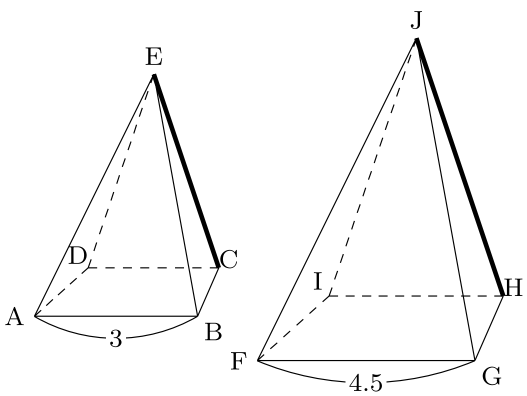
(1) 『四角すい ABCDE と四角すい FGHIJ の相似比を答えなさい。』という問題でした。

相似比とは、対応する部分の長さの比です。辺 AB は辺 FG に対応しています。そして、辺 AB の長さは 3 で辺 FG の長さは 4.5 です。ですから

$$\begin{aligned}\text{四角すい ABCDE と四角すい FGHIJ の相似比} &= 3 : 4.5 \\ &= 2 : 3\end{aligned}$$

ということになります。

(2) 『CE の長さがもし 6 だったら、HJ の長さはどれだけですか。』という問題でした。



CE は HJ に対応しています。また (1) で、四角すい ABCDE と四角すい FGHIJ の相似比は 2 : 3 であることがわかりました。ですから CE と HJ の長さの比も 2 : 3 です。そうすると、CE の長さがもし 6 だったら、

$$6 : \mathrm{HJ} = 2 : 3$$

が成り立っているわけです。この式から

$$2 \times \mathrm{HJ} = 6 \times 3$$

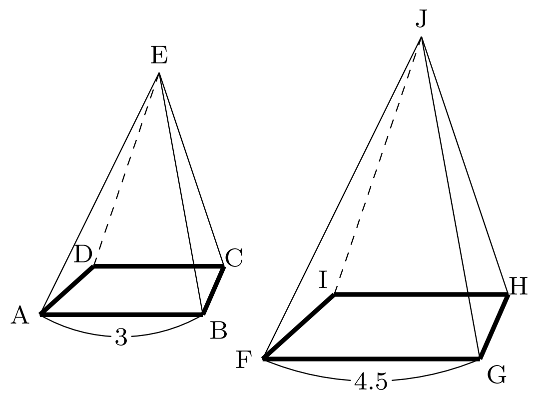
さらに

$$\mathrm{HJ} = 9$$

ということがわかります。

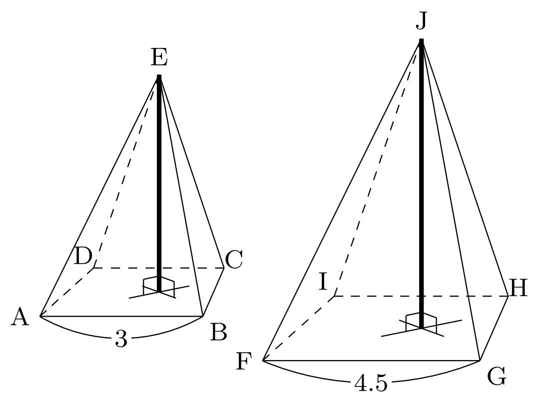
(3) 『四角形 ABCD の周の長さと四角形 FGHI の周の長さの比を答えなさい。』という問題でした。

四角形 ABCD の周は四角形 FGHI の周に対応しています。また (1) で、四角すい ABCDE と四角すい FGHIJ の相似比は 2 : 3 であることがわかりました。相似な図形では対応している部分の長さの比はどこでも同じです。ですから四角形 ABCD の周の長さと四角形 FGHI の周の長さの比も 2 : 3 です。



(4) 『四角すい ABCDE の高さと四角すい FGHIJ の高さの比を答えなさい。』という問題でした。

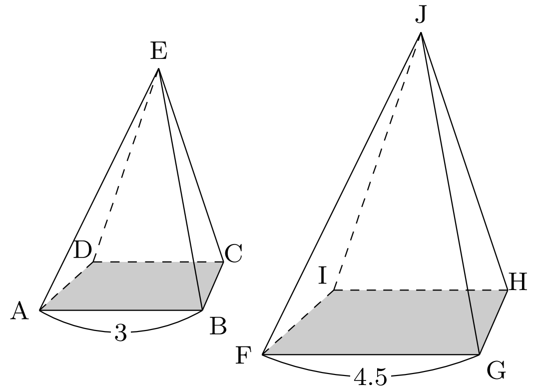
四角すい ABCDE の高さをあらわす線分は四角すい FGHIJ の高さをあらわす線分に対応しています。また (1) で、四角すい ABCDE と四角すい FGHIJ の相似比は 2 : 3 であることがわかりました。相似な図形では対応している部分の長さの比はどこでも同じ



です。ですから四角形 ABCD の高さと四角形 FGHI の高さの比も 2 : 3 です。

(5) 『四角形 ABCD の面積がもし 5.2 だったら四角形 FGHI の面積はどれだけですか。』という問題でした。

四角形 ABCD は四角形 FGHI に対応しています。そして四角形 ABCD と四角形 FGHI は相似です。



ところで、(1) で、四角すい ABCDE と四角すい FGHIJ の相似比は 2 : 3 であることがわかっているわけです。そうすると、四角形 ABCD と四角形 FGHI の相似比も当然 2 : 3 ということになります。

平面図形の面積比について学んだことを思い出すと

$$\begin{aligned}\text{四角形 ABCD と四角形 FGHI の面積比} &= 2^2 : 3^2 \\ &= 4 : 9\end{aligned}$$

となっているはずです。そうすると四角形 ABCD の面積がもし 5.2 だったら、

$$5.2 : \text{四角形 FGHI の面積} = 4 : 9$$

が成り立っているはずです。この式から

$$4 \times \text{四角形 FGHI の面積} = 5.2 \times 9$$

さらに

$$\text{四角形 FGHI の面積} = 11.7$$

ということがわかります。

(6) 『四角すい ABCDE と四角すい FGHIJ の表面積の比を答えなさい。』という問題

でした。

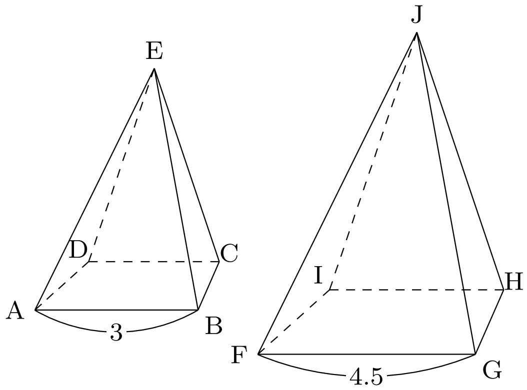
(1) で、四角すい ABCDE と四角すい FGHIJ の相似比は $2:3$ であることがわかっているわけです。そうすると、189 ページで学んだ「重要な事実」を思い出してみると、

$$\text{四角すい ABCDE と四角すい FGHIJ の表面積の比} = 2^2 : 3^2$$
$$= 4 : 9$$

ということがわかります。

(7) 『四角すい ABCDE の表面積がもし 36 だったら四角すい FGHIJ の表面積はどれだけですか。』という問題でした。

(6) で、四角すい ABCDE と四角すい FGHIJ の表面積の比は $4:9$ であることがわかっているわけです。そうすると、四角すい ABCDE の表面積がもし 36 だったら



$$36 : \text{四角すい FGHIJ の表面積} = 4 : 9$$

が成り立っているはずです。この式から

$$4 \times \text{四角すい FGHIJ の表面積} = 36 \times 9$$

さらに

$$\text{四角すい FGHIJ の表面積} = 81$$

ということがわかります。

(8) 『四角すい ABCDE と四角すい FGHIJ の体積比を答えなさい。』という問題でした。

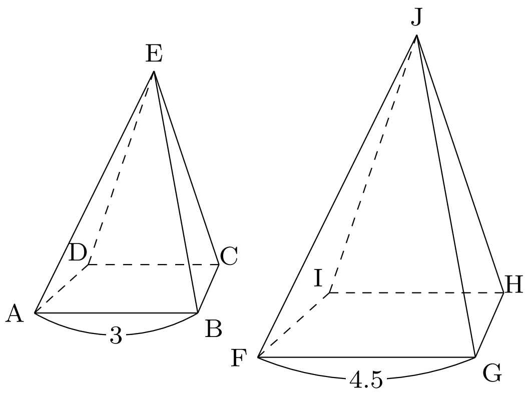
(1) で、四角すい ABCDE と四角すい FGHIJ の相似比は 2 : 3 であることがわかっているわけです。そうすると、189 ページで学んだ「重要な事実」を思い出してみると、

$$\begin{aligned}\text{四角すい ABCDE と四角すい FGHIJ の体積比} &= 2^3 : 3^3 \\ &= 8 : 27\end{aligned}$$

ということがわかります。

(9) 『四角すい FGHIJ の体積がもし 12 だったら四角すい ABCDE の体積はどれだけですか。』という問題でした。

(8) で、四角すい ABCDE と四角すい FGHIJ の体積比は 8 : 27 であることがわかっているわけです。そうすると、四角すい FGHIJ の体積がもし 12 だったら



$$\text{四角すい ABCDE の体積} : 12 = 8 : 27$$

が成り立っているはずです。この式から

$$27 \times \text{四角すい ABCDE の体積} = 12 \times 8$$

さらに

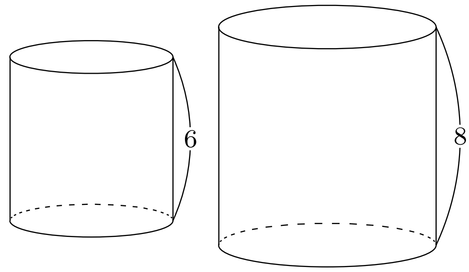
$$\text{四角すい ABCDE の体積} = \frac{32}{9}$$

ということがわかります。

本文へ戻る

問 51.

『右の図を見てください。小さい円柱と大きい円柱があります。そして小さい円柱と大きい円柱は相似になっているとします。また、小さい円柱の母線の長さは 6 で大きい円柱の母線の長さは 8 であるとします。このとき、以下の問に答えなさい。』ということでした。



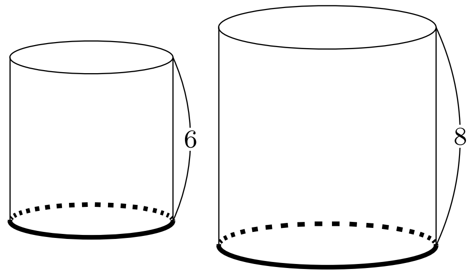
(1) 『「小さい円柱」と「大きい円柱」の相似比を答えなさい。』という問題でした。

相似比とは、対応する部分の長さの比です。小さい円柱の母線は大きい円柱の母線に対応しています。そして、小さい円柱の母線の長さは 6 で大きい円柱の母線の長さは 8 です。ですから

$$\begin{aligned}\text{「小さい円柱」と「大きい円柱」の相似比} &= 6 : 8 \\ &= 3 : 4\end{aligned}$$

ということになります。

(2) 『「小さい円柱の底面の周りの長さ」と「大きい円柱の底面の周りの長さ」の比を答えなさい。』という問題でした。



「小さい円柱の底面の周り」は「大きい円柱の底面の周り」に対応しています。また (1) で、「小さい円柱」と「大きい円柱」の相似比は 3 : 4 であることがわかりました。相似な図形では対応している部分の長さの比はどこでも同じです。ですから「小さい円柱の底面の周りの長さ」と「大きい円柱の底面の周りの長さ」の比も 3 : 4 です。

(3) 『「大きい円柱の底面の周りの長さ」がもし 12 だったら「大きい円柱の底面の周りの長さ」はどれだけですか。』という問題でした。

(2) で、「小さい円柱の底面の周りの長さ」と「大きい円柱の底面の周りの長さ」比は 3 : 4 であることがわかりました。そうすると、「大きい円柱の底面の周りの長さ」がもし 12 だったら

$$\text{小さい円柱の底面の周りの長さ} : 12 = 3 : 4$$

が成り立っているはずです。この式から

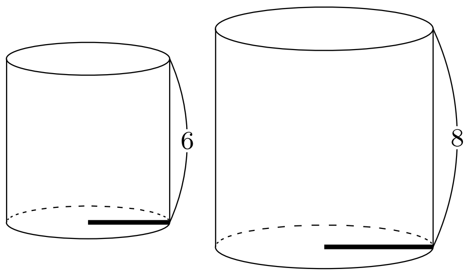
$$4 \times \text{小さい円柱の底面の周りの長さ} = 12 \times 3$$

さらに

$$\text{小さい円柱の底面の周りの長さ} = 9$$

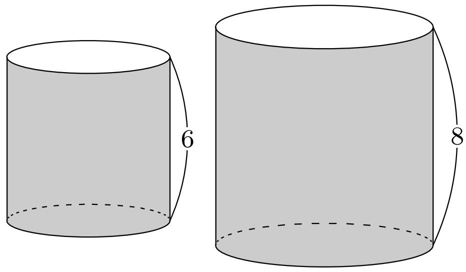
ということがわかります。

(4) 『「小さい円柱の底面の半径」と「大きい円柱の底面の半径」の比を答えなさい。』という問題でした。



「小さい円柱の底面の半径をあらわす線分」は「小さい円柱の底面の半径をあらわす線分」に対応しています。また (1) で、「小さい円柱」と「大きい円柱」の相似比は 3 : 4 であることがわかりました。相似な図形では対応している部分の長さの比はどこでも同じです。ですから「小さい円柱の底面の半径」と「小さい円柱の底面の半径」の比も 3 : 4 です。

(5) 『「小さい円柱の側面の面積」と「大きい円柱の側面の面積」の比を答えなさい。』という問題でした。



「小さい円柱の側面」は「大きい円柱の側面」に対応しています。そして「小さい円柱の側面」と「大きい円柱の側面」は相似です。

ところで、(1) で、「小さい円柱」と「大きい円柱」の相似比は $3:4$ であることがわかっているわけです。そうすると、「小さい円柱の側面」と「大きい円柱の側面」の相似比も当然 $3:4$ ということになります。

平面図形の面積比について学んだことを思い出すと

$$\begin{aligned}\text{「小さい円柱の側面」と「大きい円柱の側面」の面積比} &= 3^2 : 4^2 \\ &= 9 : 16\end{aligned}$$

となっているはずです。

(6) 『「小さい円柱の側面の面積」がもし 27π だったら「大きい円柱の側面の面積」どれだけですか。』という問題でした。

(5) で、小さい円柱の側面」と「大きい円柱の側面」の面積比は $9:16$ であることがわかりました。そうすると「小さい円柱の側面の面積」がもし 27π だったら

$$27\pi : \text{大きい円柱の側面の面積} = 9 : 16$$

が成り立っているはずです。この式から

$$9 \times \text{大きい円柱の側面の面積} = 27\pi \times 16$$

さらに

$$\text{大きい円柱の側面の面積} = 48\pi$$

ということがわかります。

(7) 『「小さい円柱の表面積」と「大きい円柱の表面積」の比を答えなさい。』という問

題でした。

(1) で、「小さい円柱」と「大きい円柱」の相似比は $3:4$ であることがわかっているわけです。そうすると、189 ページで学んだ「重要な事実」を思い出してみると、

$$\begin{aligned}\text{小さい円柱と大きい円柱の表面積の比} &= 3^2 : 4^2 \\ &= 9 : 16\end{aligned}$$

ということがわかります。

(8) 『「小さい円柱の表面積」がもし 99 だったら「大きい円柱の表面積」はどれだけですか。』という問題でした。

(7) で、小さい円柱と大きい円柱の表面積の比は $9:16$ であることがわかりました。そうすると「小さい円柱の表面積」がもし 99 だったら

$$99 : \text{大きい円柱の表面積} = 9 : 16$$

が成り立っているはずです。この式から

$$9 \times \text{大きい円柱の表面積} = 99 \times 16$$

さらに

$$\text{大きい円柱の表面積} = 176$$

ということがわかります。

(9) 『「小さい円柱」と「大きい円柱」の体積比を答えなさい。』という問題でした。

(1) で、「小さい円柱」と「大きい円柱」の相似比は $3:4$ であることがわかっているわけです。そうすると、189 ページで学んだ「重要な事実」を思い出してみると、

$$\begin{aligned}\text{小さい円柱と大きい円柱の体積の比} &= 3^3 : 4^3 \\ &= 27 : 64\end{aligned}$$

ということがわかります。

(10) 『「大きい円柱の体積」がもし 72π だったら 「小さい円柱の体積」はどれだけですか。』という問題でした。

(9) で、小さい円柱と大きい円柱の体積の比は $27 : 64$ であることがわかりました。そうすると「大きい円柱の体積」がもし 72π だったら

$$\text{小さい円柱の体積} : 72\pi = 27 : 64$$

が成り立っているはずです。この式から

$$64 \times \text{小さい円柱の体積} = 72\pi \times 27$$

さらに

$$\text{小さい円柱の体積} = \frac{243}{8}\pi$$

ということがわかります。

本文へ戻る

問 52. 『ある立体図形があるとします。この図形の表面積は $94\,\mathrm{cm}^2$ で、体積は $60\,\mathrm{cm}^3$ です。立体図形拡大機を発明したので、立体図形拡大機を使ってこの立体図形を（横方向にも奥行き方向にも高さ方向にも）倍率 1.6 倍で拡大しました。拡大後の図形の表面積と体積を求めなさい。』という問題でした。

立体図形拡大機を使ってこの立体図形を（横方向にも奥行き方向にも高さ方向にも）倍率 1.6 倍で拡大したのですから、拡大前の図形と拡大後の立体図形は相似です。そして相似比は $1 : 1.6$ です。

ということは、表面積比は $1^2 : 1.6^2$、つまり $1 : 2.56$ ということになります。

また、体積比は $1^3 : 1.6^3$、つまり $1 : 4.096$ ということになります。（長さは 1.6 倍、面積は 2.56 倍、体積は 4.096 倍になるわけですね。）よって、

$$\text{拡大後の立体図形の表面積} = 94 \times 2.56 = 240.64\,\mathrm{cm}^2$$

$$拡大後の立体図形の体積 = 60 \times 4.096 = 245.76\,\mathrm{cm}^3$$

ということになります。

本文へ戻る

問 53. 『ある立体図形があるとします。この図形の表面積は $990\,\mathrm{cm}^2$ で、体積は $1125\,\mathrm{cm}^3$ です。立体図形縮小機を発明したので、立体図形縮小機を使ってこの立体図形を（横方向にも奥行き方向にも高さ方向にも）倍率 $\dfrac{2}{5}$ 倍で縮小しました。縮小後の図形の表面積と体積を求めなさい。』という問題でした。

立体図形縮小機を使ってこの立体図形を（横方向にも奥行き方向にも高さ方向にも）$\dfrac{2}{5}$ 倍で縮小したのですから、縮小前の図形と縮小後の立体図形は相似です。そして相似比は $1 : \dfrac{2}{5}$ です。

ということは、表面積比は $1^2 : \left(\dfrac{2}{5}\right)^2$、つまり $1 : \dfrac{4}{25}$ ということになります。

また、体積比は $1^3 : \left(\dfrac{2}{5}\right)^3$、つまり $1 : \dfrac{8}{125}$ ということになります。

（長さは $\dfrac{2}{5}$ 倍、面積は $\dfrac{4}{25}$ 倍、体積は $\dfrac{8}{125}$ 倍になるわけですね。）

よって、

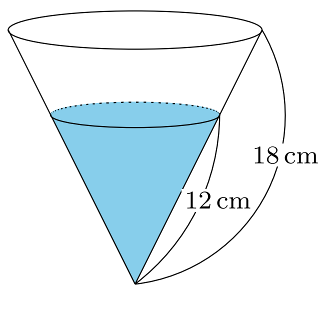
$$縮小後の立体図形の表面積 = 990 \times \frac{4}{25} = 158.4\,\mathrm{cm}^2$$

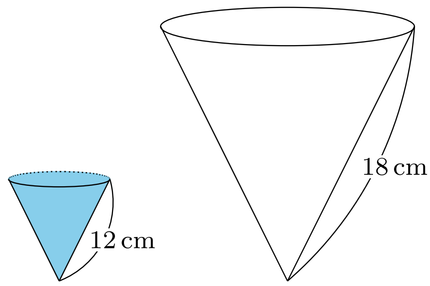
$$縮小後の立体図形の体積 = 1125 \times \frac{8}{125} = 72\,\mathrm{cm}^3$$

ということになります。

本文へ戻る

問 54. 『右の図は、円すい形の容器にある深さまで水を入れたところを表しています。この容器の容積は $1080\,\mathrm{cm}^3$ です。容器の母線に沿って長さを測った所、容器の頂点から水面までは 12 cm、容器の頂点から容器のふちまでは 18 cm でした。それではこのとき、水の体積はどれだけですか。』という問題でした。





右の図を見てください。円すい形の容器から水の部分を取り出して並べてみました。

「水の部分の円すい」と「容器の円すい」では、頂点のところはもともとぴったり重なっていて、「円形の水面」と「容器の一番上の円形の面」はもともと平行です。ですから、この 2 つの円すいは相似であるといえます。そして、

$$2\text{ つの円すいの相似比} = 12 : 18 = 2 : 3$$

となっているわけです。

そうすると、189 ページで学んだ「重要な事実」を思い出してみると、

$$2\text{ つの円すいの体積比} = 2^3 : 3^3 = 8 : 27$$

ということがわかります。つまり

$$\text{水の体積} : \text{容器の容積} = 8 : 27$$

となっているわけです。

いまこの問題では、容器の容積は $1080\,\mathrm{cm}^3$ ですから

$$\text{水の体積} : 1080 = 8 : 27$$

が成り立っているはずです。この式から

$$27 \times \text{水の体積} = 1080 \times 8$$

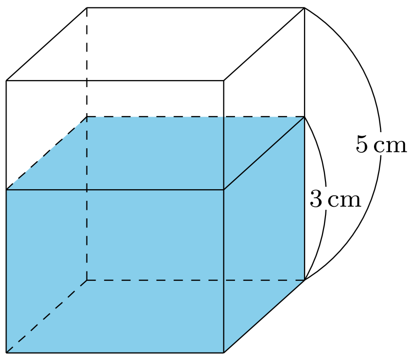
さらに、

$$\text{水の体積} = 320\,\mathrm{cm}^3$$

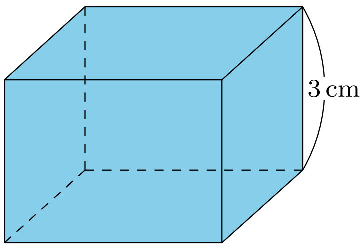
ということがわかります。

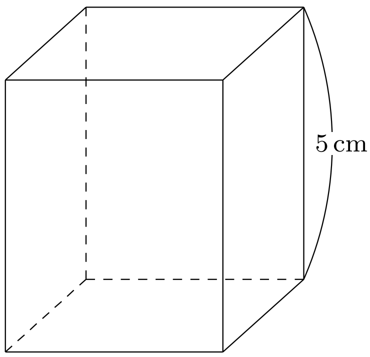
本文へ戻る

問 55. 『右の図は、直方体の形をした深さが 5 cm の容器に深さが 3 cm になるまで水を入れたところを表しています。このとき入れた水の体積は 36 cm^3 でした。この直方体の形をした容器の容積を求めなさい。』という問題でした。



次の図を見てください。直方体の形をした容器から水の部分を取り出して並べてみました。





「水の部分の直方体」と「容器の直方体」の形は違いますよね。つまりこの 2 つの立体は相似ではありませんね。そうすると、189 ページで学んだ「重要な事実」を頼ってこの問題を解くことはできません。そこで初心に帰って地道に考えてみましょう。

直方体は四角柱ですから、体積は「底面積かける高さ」で計算することができます。ところで、「水の部分の直方体の底面」はもともと「容器の直方体の底面」とぴったり重なっていたのですよね。ですからこの 2 つの直方体の底面積は同じです。底面積が同じということは、高さの比がそのまま体積の比になるということですね。つまり、

$$\text{「水の部分の直方体」と「容器の直方体」の体積比} = 3 : 5$$

ということになりますそうすると、この問題では水の体積は 36 cm^3 でしたから

$$36 : \text{「容器の直方体」の体積} = 3 : 5$$

が成り立っているわけです。この式から

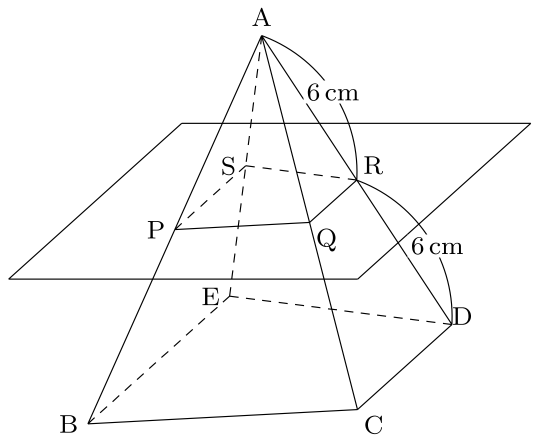
$$3\times「容器の直方体」の体積 = 36\times 5$$

さらに

$$「容器の直方体」の体積 = 60\,\mathrm{cm}^3$$

ということがわかります。 本文へ戻る

問 56. 『右の図は、四角すい ABCDE を底面に平行な平面で切っているところをあらわしています。切り口としてできた四角形を四角形 PQRS と呼ぶことにします。また、AR の長さは 6 cm、RD の長さは 6 cm です。このとき以下の問に答えなさい。』ということでした。



例題 21 の解答がきちんと理解出来た人のため、簡単に説明します。

(1) 『四角すい APQRS と四角すい ABCDE は相似ですか。もし相似なら、相似である理由を簡単に言いなさい。』という問題でした。

2 つの四角すいはもともと頂点 A のところでぴったり重なっていて、2 つ四角すいの底面は平行になっているのですから、2 つの四角すいは相似です。（どういうことかわからない人は、181 ページの例 12 や 182 ページの例 13 をじっくり読みなおしてください。）

(2) 『(1) で、四角すい APQRS と四角すい ABCDE は相似であると考えた人に質問です。四角すい APQRS と四角すい ABCDE の相似比を答えなさい。』という問題でした。

AR に対応しているのは AD です。そして、AR=6 cm、AD=12 cm なのですから

$$\text{四角すい APQRS と四角すい ABCDE の相似比} = 6 : 12 = 1 : 2$$

ということになります。

(3) 『四角すい ABCDE の表面積がもし 268 cm^2 だったら、四角すい APQRS の表面積はどれだけですか。』という問題でした。

四角すい APQRS と四角すい ABCDE の相似比は 1 : 2 ですから、

$$\text{四角すい APQRS と四角すい ABCDE の表面積比} = 1^2 : 2^2 = 1 : 4$$

ということになります。そうすると、四角すい ABCDE の表面積がもし 268 cm^2 だったら

$$\text{四角すい APQRS の表面積} : 268 = 1 : 4$$

が成り立っているはずです。この式から

$$\text{四角すい APQRS の表面積} = 67\,\mathrm{cm}^2$$

ということがわかります。

(4) 『四角すい APQRS の体積がもし 32 cm^3 だったら、四角すい ABCDE の体積はどれだけですか。』という問題でした。

四角すい APQRS と四角すい ABCDE の相似比は 1 : 2 ですから、

$$\text{四角すい APQRS と四角すい ABCDE の体積比} = 1^3 : 2^3 = 1 : 8$$

ということになります。そうすると、四角すい APQRS の体積がもし 32 cm^3 だったら

$$32 : \text{四角すい ABCDE の体積} = 1 : 8$$

が成り立っているはずです。この式から

$$\text{四角すい ABCDE の体積} = 256\,\mathrm{cm}^3$$

ということがわかります。

(5) 『四角すい ABCDE と立体 PQRSBCDE の体積の比を求めなさい。（念のための注意です。立体 PQRSBCDE とは、四角すい ABCDE から四角すい APQRS を取り除いてできる立体のことです。）』という問題でした。

四角すい APQRS と四角すい ABCDE の体積比は $1:8$ です。これは、仮に四角すい APQRS の体積が 1 だったら、四角すい ABCDE の体積は 8 になっているということを意味します。そうすると、立体 PQRSBCDE の体積は $8-1=7$ ということになります。ですから

$$\text{四角すい ABCDE と立体 PQRSBCDE の体積比} = 8:7$$

ということになります。

(6) 『四角すい ABCDE の体積がもし $240\,\mathrm{cm}^3$ だったら、立体 PQRSBCDE の体積はどれだけですか。』という問題でした。

四角すい ABCDE と立体 PQRSBCDE の体積比は $8:7$ ですから、四角すい ABCDE の体積がもし $240\,\mathrm{cm}^3$ だったら、

$$240 : \text{立体 PQRSBCDE の体積} = 8:7$$

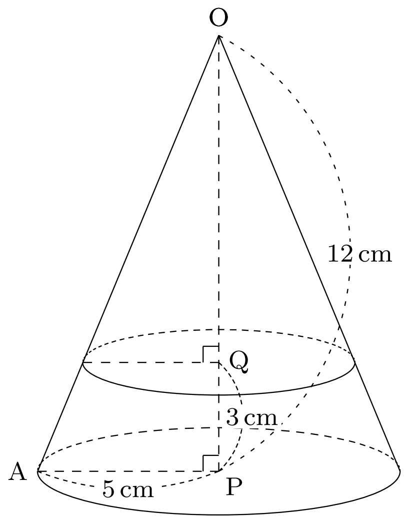
が成り立っているはずです。この式から

$$\text{立体 PQRSBCDE の体積} = 210\,\mathrm{cm}^3$$

ということがわかります。

本文へ戻る

問 57. 『右の図を見てください。この図は、底面の半径 PA が 5 cm、高さ OP が 12 cm の円すいを底面からの高さが 3 cm のところで底面に平行な平面で切 ったところをあらわしています。切り口にできた円の中心をここでは Q と呼ぶことにします。以下の問に答えなさい。』ということでした。例題 22 の解答がしっかり理解出来た人のため、あっさり説明しておきます。



(1) 『切り口の上側にできた円すいの体積を求めなさい。』という問題でした。

「切り口の上側にできた円すい」と「切る前の円すい」は相似で、相似比は 9 : 12、つまり 3 : 4 です。そうすると、

$$\text{「切り口の上側にできた円すい」と「切る前の円すい」の体積比} = 3^3 : 4^3 = 27 : 64$$

ということになります。

$$\text{切る前の円すいの底面積} = 5 \times 5 \times \pi = 25\pi\,\mathrm{cm}^2$$

ですから

$$\text{切る前の円すいの体積} = 25\pi \times 12 \times \frac{1}{3} = 100\pi\,\mathrm{cm}^3$$

ということがわかります。これでいよいよ 27 : 64 という体積比を使うことができます。

$$\text{切り口の上側にできた円すいの体積} : 100\pi = 27 : 64$$

ということになるので、この式から

$$\text{切り口の上側にできた円すいの体積} = \frac{675}{16}\pi\,\mathrm{cm}^3$$

ということがわかります。

(2) 『切り口の下側にできた丸い台のような形の立体の体積を求めなさい。』という問題でした。

切る前の円すいの体積は $100\pi\,\mathrm{cm}^3$、切り口の上側にできた円すいの体積は $\dfrac{675}{16}\pi\,\mathrm{cm}^3$ ということがわかりました。ですから、

$$\begin{aligned}\begin{array}{l}\text{切り口の下側にできた丸い}\\\text{台のような形の立体の体積}\end{array} &= 100\pi - \frac{675}{16}\pi \\ &= \frac{925}{16}\pi\,\mathrm{cm}^3\end{aligned}$$

ということがわかります。

本文へ戻る